UNIVERSIDAD EAFIT

MODELOS DE TIEMPO CONTINUO PARA FINANZAS CORPORATIVAS

Presentada por

ANDRÉS FELIPE CANO G.

Director: ULISES CÁRCAMO C.

MAESTRÍA SC. EN FINANZAS

AGOSTO, 2010

RESUMEN

Este proyecto es un acercamiento al estudio de modelos de tiempo continuo (modelos basados en el cálculo estocástico y en las ecuaciones diferenciales estocásticas) aplicados a las finanzas corporativas.

Además de presentar dos modelos básicos y un marco teórico básico para otros modelos, recopila algunos puntos de vista de algunos investigadores de la materia respecto al uso de los modelos estructurales.

La primera parte presenta los requisitos de cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales estocásticas cada uno de los modelos estudiados. Más adelante se presentan los métodos de estimación de parámetros necesarios.

Abstract

This Project is an approach to the study of continuous time models (models based on stochastic calculus and stochastic differential equations)for corporate finance

In addition to the presentation of two basic models and a theoretical framework for other models, it shows the point of view of some researchers regarding the structural models.

In the first part, requisites for those models, related to stochastic calculus and stochastic differential equations, are presented. Later some methods for estimating their necessary parameters

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los modelos para los precios de los títulos valores, *securities,* consideran sólo series de tiempo de los precios e ignoran la economía de la empresa que las emiten. Estos modelos se llaman a éstos modelos de forma reducida. En contraste con estos, están los modelos que se centran en el estudio de las firmas (economía y procesos internos), éstos se llaman modelos estructurales. Si lo que interesa no es solamente pronosticar los precios, sino entender el por qué de sus movimientos, entonces los modelos estructurales representan una ayuda muy valiosa.

En este trabajo se presentan los fundamentos teóricos utilizados en la construcción de modelos estructurales en tiempo continuo para el estudio de las finanzas corporativas o economía de las firmas, y los modelos más conocidos, mostrando sus bondades. Los modelos tradicionales, aunque sofisticados matemáticamente sólo se basan la serie de tiempo de los precios, ignorando los fundamentales que explican su dinámica.

2. ANTECEDENTES

A pesar de que la fórmula de Black-Scholes (1973) tiene más de 35 años, las aplicaciones directas y sistemáticas del cálculo estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas a las finanzas corporativas son realmente recientes.

Los primeros modelos estructurales de riesgo de crédito se conocieron por los artículos de Black y Scholes (1973) y Merton (1974). En ellos se asume que el valor de la empresa sigue un movimiento browniano geométrico. La firma cuenta con un bono cero cupón de duración finita que la empresa pagará si el valor final de la firma es superior a la deuda hipotética al vencimiento. De lo contrario la empresa incumple su deuda. Black y Cox (1976) amplían esta configuración al permitir la bancarrota antes del vencimiento de la deuda cuando el valor de la empresa toca la barrera de bancarrota por primera vez. Estos se consideran modelos de primera generación.

Más de veinte años después, aparecen otro tipo de modelos en los que se introdujeron cambios en la estructura óptima de capital futura. Estos modelos dinámicos de estructura de capital se presentaron por ejemplo, en Fischer, Heinkel y Zechner (1989a) y en Fischer, Heinkel y Zechner (1989b). En ambos modelos, la estructura de capital de la empresa es modelada de forma endógena en una configuración de tiempo continuo asumiendo que los accionistas optimizan el valor de su capital. No se concentran en el riesgo de crédito y bancarrota, pero usan un argumento de las finanzas corporativas a fin de explicar empíricamente índices observados de apalancamiento y las primas de las opciones Call de las emisiones de bonos corporativos rescatables. Leland (1994) y Leland y Toft (1996) desarrollan la idea de que los accionistas maximicen el valor de su derecho cuando la empresa se apalanca o cuando se emita deuda redimible. Se centran en la valoración de la deuda corporativa y la sensibilidad del valor de la deuda a ciertos parámetros del modelo, extendiendo el esquema de Fischer et al. (1989a) y obtener el nivel de valor de la empresa en el que los accionistas de forma endógena inducen la quiebra, vinculando así la estructura de capital dinámico con los modelos de riesgo de crédito.

Ericsson y Reneby (2004) realizaron la primera prueba empírica directa de los modelos estructurales de riesgo crediticio.

Una de las razones de la falta de investigación empírica se deriva del hecho de que los modelos propuestos ofrecen ajustes económicos que parecen demasiado restrictivos para los datos disponibles.

En Colombia el tema es muy poco conocido. Parte de este desconocimiento se debe a que estos modelos necesitan de conocimientos de Cálculo Estocástico (en el enfoque de Ito), y este se estudia sólo en estudios de postgrado. Pero el conocimiento de esta rama de las probabilidades no es suficiente, también son necesarios conocimientos en finanzas y en especial, en su rama corporativa.

Esperamos que con este trabajo se ayude un poco a acercar estos modelos a los estudiantes de finanzas corporativas.

En nuestro país, aunque el mercado es bastante primitivo y muchos modelos de las finanzas no se pueden aplicar, la anunciada fusión de las bolsas de Colombia, Perú y Chile aumentará la eficiencia y hará que en un futuro próximo, no solamente éstos, sino muchos otros modelos, sean aplicables acá.

En este trabajo se presentan las bases teóricas para el estudio de estos modelos y para posibles aplicaciones en un futuro cercano. También se presentan las ventajas y las desventajas que varios autores les encuentran.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El estudio de los modelos de tiempo continuo se basa principalmente en los procesos de difusión y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Por esto es necesario repasar algunos conceptos fundamentales de estas disciplinas.

3.1. Difusión

Decimos que un proceso estocástico X es una difusión si su dinámica local se puede aproximar a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\,\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t) \qquad (1)$$

Aquí Z(t) es un término de perturbación distribuido normalmente, independiente de lo ocurrido hasta t, mientras que μ y σson funciones determinísticas dadas. La intuición en la expresión (1) es que, sobre el intervalo de tiempo [t, t + Dt], el proceso X depende de dos términos independientes:

- Una Velocidad $\mu(t, X(t))$
- Un término de perturbación gaussiano, multiplicado por el factor $\sigma(t, X(t))$

La función μ es llamada término de drift (local) del proceso, mientras que σ se llama término de difusión. Para modelar el término de perturbación gaussiano necesitamos el concepto de Proceso de Wiener.

3.2. Procesos de Wiener

Un proceso W es considerado un Proceso de Wiener si se cumplen las siguientes condiciones:

1. W(0) = 0
2. El proceso W tiene incrementos independientes, por ejemplo si r < s ≤ t <u entonces W(u) – W(t) y W(s) – W(r) son variables estocásticas independientes.
3. Para s < t la variable estocástica W(t) – W(s) tiene la distribución $N\left[0, \sqrt{t-s}\right]$.
4. W tiene trayectorias continuas.

Ahora podemos utilizar un proceso de Wiener para escribir la expresión (1) como

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta(+ \sigma(t, X(t))\Delta W(t) \qquad (2)$$

Y $\Delta W(t)$ está definida por:

$$\Delta W(t) = W((t + \Delta t) \quad W(t)$$

3.3. El Modelo de Black-Scholes

Los modelos de tiempo continuo más sencillos se basan en el modelo de Black-Scholes. En este, el activo financiero se comporta como una difusión que es una difusión sencilla del tipo

$$dV(t) = \mu(V,t)dt + \sigma(V,t)dZ(t)$$

Donde Z es un proceso de Wiener.
Otros modelos más avanzados utilizan procesos de difusión con saltos, del tipo

$$\frac{dV}{Vt} = (r \quad \delta + \lambda k)dt + \sigma\, dW, con\ prob\,(1-\lambda)\,dt$$

$$\frac{dV}{Vt} = \quad k\ con\ probabilidad\ \lambda\, dt, \quad 0 \le k \le 1$$

Otros utilizan más de un proceso de Wiener, y más de una volatilidad. Por ejemplo el modelo para flujo de caja operativo:

$$dXt = \mu dt + \sigma . dW_t + \sigma_R . dW_t^R$$

Otros temas necesarios para comprender la teoría necesaria en el desarrollo de estos modelos son: Información generada por el proceso estocástico, procesos adaptados, martingalas, ecuaciones diferenciales estocásticas, el Lema de Itô, y la fórmula de Feynman – Kac. Para los primeros se presenta una definición semi-intuitiva, siguiendo a Bjork.

3.4. Información y procesos adaptados.

F_t^X denota “la información generada por el proceso estocástico X en el intervalo [0, t]”, también se puede interpretar como “lo que ha ocurrido a X en el intervalo [0, t]”.

1. Si con base en observaciones de la trayectoria $\{X(s) : 0 \le s \le t\}$, es posible decidir si el evento dado A ha ocurrido o no ha ocurrido, escribimos $A \in F_t^X$, o decimos que “X es F_t^X-medible”. Ver Figura No.1.

2. Si el valor de una variable aleatoria dada Z se puede determinar completamente dadas las observaciones de la trayectoria $\{ X(s) : 0 \leq s \leq t\}$, entonces escribimos $Z \in F_t^X$.
3. Si Y es un proceso estocástico, y se cumple que $Y(t) \in F_t^X$., para todo t ≥0, entonces se dice que el proceso Y es adaptado a la filtración $\{F_t\}t \geq 0$

Figura N° 1.

3.5. Martingalas

Un proceso estocástico X es una $\{Ft\}$-martingala si se cumple:
1. X es adaptado a la filtración $\{F_t\}_t \geq 0$
2. Para todo t, se tiene que $E[|X(t)|] < \infty$
3. Para todo s y todo t, con s ≤ t, se cumple que $E[X(t) \: / \: Fs] = X(s)$
4. Un proceso que satisface para todo s y todo t, con $s \leq t$, la desigualdad $E[X(t)/\mathcal{F}_s] \leq X(s)$ se llama Supermartingala, y un proceso que satisface $E[X(t)/\mathcal{F}_s] \geq X(s)$ se llama Sub-martingala.

Intuitivamente, una martingala es un proceso estocástico en el que, dado el valor de hoy, el mejor pronóstico para mañana es ese valor de hoy.

3.6. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad (espacio muestral, sigma-álgebra y medida de probabilidad) completo con filtración[1] $\{Ft\}_{t \geq 0}$.
Sea $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \ldots, W_m(t))^T, t \geq 0$, un proceso m-dimensional de Wiener.
Sea $0 \leq t_0 < T < \infty$. Sea $x_0$una variable aleatoria con sus valores en R^d y tal que $E[[x_0]^2] < \infty$. Sean $f: R^d \times [t_0, T] \rightarrow R^d y g: R^d \times [t_0, T] \rightarrow R^{d \times m}$ ambas Borel-medibles[2]. Consideremos la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô

$$dx(t) = f(x(t), t)\, dt + g(x(t), t)\, dW(t) \quad (1.a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{dx_1(t)} \\ \ldots \\ \mathrm{dx_d(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f_1(x_1(t), t)} \\ \ldots \\ \mathrm{f_d(x_d(t), t)} \end{bmatrix} \mathrm{dt} + \begin{bmatrix} \mathrm{g_{11}(x(t), t)} & \ldots & \mathrm{g_{1m}(x(t), t)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{g_{d1}(x(t), t)} & \ldots & \mathrm{g_{dm}(x(t), t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{dW_1(t)} \\ \ldots \\ \mathrm{dW_d(t)} \end{bmatrix} \quad (1.b)$$

, con $t \in [t_0, T]$ y valor inicial $x(t_0) = x_0$.

Por definición, la E.D.E anterior es equivalente a la ecuación integral estocástica

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s) dW(s), \text{ con } t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

Soluciones.

Un proceso estocástico $\{x(t)\}_{t0 \leq t \leq T}$, con valores en R^d, se dice que es una solución de la ecuación (1.a ó 1.b) si satisface:

(i) $\{X(t)\}$ es F_t-adaptado y tiene trayectorias continuas.
(ii) Cada variable aleatoria $|f(x(t), t)|$ tiene primer momento finito, cada variable aleatoria $|g(x(t), t)|$ tiene segundo momento finito.
(iii) Las ecuaciones (1.a), (1.b) se cumplen, para todo $t \in [t_0, T]$, con probabilidad 1.

Una solución $\{X(t)\}$ se dice que es única, si cualquier otra solución $\{X_1(t)\}$ es indistinguible de {X(t)} en el siguiente sentido:

$$P\{x(t) = X_1(t), para\ todo\ t \in [t_0, T]\} = 1.$$

Existencia y unicidad de soluciones

Suponga que existen constantes K y K_1 tales que:

[1] Formalmente, una filtración es una sucesión creciente de sigma-àlgebras.
[2] Significa que todos los conjuntos de Borel son elementos de la sigma-álgebra F.

(i) (condición de Lipschitz) Para todo $x, y \in R^d$y $t \in [t_0, T]$,
$Max\{|f(x,t) - f(y,t)|^2,\ |g(x,t) - g(y,t)|^2\} \leq K|x - y|^2$ (3)

(ii) (Condición de crecimiento lineal) para todo $(x,t) \in R^d \times [t_0, T]$,
$Max\{|f(x,t)|^2,\ |g(x,t)|^2\} \leq K1(1 + |x|^2)$ (4)

Entonces existe una solución única, $x(t)$, a la ecuación (1.a) que es un proceso adaptado y tal que $|x(t)|$ tiene segundo momento finito.

De particular interés son las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales.

3.7. Soluciones de ecuaciones diferenciales lineales

En general, las ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales no tienen soluciones explícitas y se deben usar soluciones aproximadas. Para las ecuaciones lineales si es posible encontrar soluciones explícitas.

3.8. Solución de ecuación lineal escalar

Lema 1

Si $a(t)$ y $b_k(t)$ son funciones reales Borel-medibles y acotadas en $[t_0, T]$, entonces la única solución a la ecuación lineal escalar $\mathrm{dy(t) = a(t)y(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)y(t)dW_k\,(t)}$ (5) en $[t_0, T]$, e con $Y(t_0) = y_0$, está dada por
$\mathrm{y(t) = y_0 Exp}\left[\int_{t_0}^{t}\left(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s)\right)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,dW_k(s)\right]$ (6)

Lema 2

Consideremos la ecuación

$\mathrm{dx(t) = (a(t)x(t) + d(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(b_k(t)x(t) + c_k(t))dW_k\,(t)}$ (2.7), en $[t_0, T]$, con $x(t_0) = x_0$, (7)

sea$\Phi(t) = Exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s)\right)ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,dW_k(s)\right]$ (8), la solución de (3.8) está dada por:
$\mathrm{x(t) =}\ \Phi(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(d(s) - \sum_{k=1}^{m} b_k(s)\,c_k(s))ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)c_k(s)\,dW_k(s)\right]$ (9)

Lema 3

Para la solución única de (7) se tiene que:

(A) $M(t) = E[x(t)]$ es la única solución de la ecuación $m'(t) = a(t)\,m(t) + d(t)$ en $[t_0, T]$, con la condición inicial $m(t_0) = E(x_0)$(10)

(B) $P(t) = E(\,x(t).x^T(t))$ es la única solución de la ecuación

$P´(t) =$
$a(t)P(t) + P(t)a^T(t) + d(t).m^T(t) \; + \; m(t)\, d^T(t) \; + \sum_{k=1}^{m}[b_k(t)P(t)b_k^T(t) +$
$b_k(t)m(t)c_k^T(t) + c_k(t)m_k^T(t)b_k^T(t) + c_k(t)c_k^T(t)]$ (11)

3.9. Dos procesos especiales:

De especial importancia en la valoración de derivados son el movimiento browniano geométrico y el Proceso de reversión a la media de Ornstein-Uhlenbeck.

El proceso definido mediante dX(t) = μ X(t) dt + σ X(t) dt, donde μ y σ son constantes y $X(0) = X_0$. Se llama movimiento browniano geométrico y se utiliza para modelar el precio de varios activos financieros.

Valor promedio y varianza

La solución de éste está dada por $X(t) \; = \; X_0 \; Exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \; \sigma * W(t)]$, su valor esperado es $E[X(t)] \; = \; X(0)\; e^{\mu\, t}$ y varianza $V(X(t)) \; = \; e^{2\mu t} \; e^{\sigma 2\; t\; -1}$.

Bastante útil en las aplicaciones financieras, donde el proceso tiende a un promedio, es el siguiente proceso, llamado de reversión a la media de Ornstein-Uhlenbeck:

Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$dx(t) \; = \; -\alpha(x(t) \; - \; \mu)\, dt \; + \; \sigma dW(t)$, con $t \; \geq 0$ y condición inicial $x(0) \; = \; x_0$.

Identificando $a(t)$ con $-\;\alpha$, $b_1(t), c_1(t)\; con\; \sigma$, y $t_0\; con\; 0$, se tiene que $\Phi(t) \; = \; e^{-\alpha t}$, y

$x(t) = \; e^{-\,\alpha\, t}\left[x_0 + \int_0^t \alpha\, \mu.\, e^{\,\alpha\, s} ds + \int_0^t \sigma.\, e^{\,\alpha\, s} dW(s)\right]$o

$x(t) = \; e^{-\,\alpha\, t} x_0 + \mu(1 - e^{\,-\alpha\, t}) + \sigma \int_0^t .\, e^{\,-\alpha\,(t-s)} dW(s)$ (3.12)

Valor medio y comportamiento límite

Fácilmente se puede ver que $E(X(t)) \; = \; e^{-\alpha t}\; E(x_0) \; + \mu(\, 1 - \; e^{-\alpha t}\;)$, cuando t es grande, $x(t)$ tiende a μ, el promedio de largo plazo.

3.10. El Lema de Ito

Una de las principales herramientas para la aplicación del cálculo estocástico al modelado de situaciones financieras es el lema de Ito:

Suponga que el proceso X tiene un diferencial estocástico dado por $dX(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW(t)$ (1) , donde $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ son procesos adaptados. Sea F una función $C^{1,2}$, y definamos Z(X(t)) mediante , Z(t) = f(t, X(t)) , entonces Z tiene un integral estocástico dado por

$$df\big(t, X(t)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW(t)$$

3.11. El lema de Ito Multidimensional

Ahora consideremos un vector de procesos $X = (x_1, X_2, \ldots, X_n)^T$, donde cada componente X_i tienen una diferencial estocástica de la forma

$$dX_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(t)dW_j(t)$$

Donde: $W_1, \ldots, W_d$ son procesos de Wiener independientes.

Definiendo el vector drift μ por

$$\mu = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{bmatrix}$$

El vector d-dimensional de procesos de Wiener por

$$W = \begin{bmatrix}W_1\\ \vdots\\ W_d\end{bmatrix}$$

y la matriz de difusión nxd-dimensional σ por

$$\sigma = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nd}\end{bmatrix}$$

Suponga que el proceso n-dimensional X tiene una dinámica dada por

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

Definimos nuevamente a $Z(t) = f(t, X(t))$ que tiene una diferencial estocástica dada por:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i dW$$

Aquí el vector fila σ_i es la i-ésima fila de la matriz σ, es decir

$$\sigma_i = [\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{id}]$$

Y la matriz C se define como $C = \sigma\sigma^T$

Alternativamente, la diferencial está dada por la fórmula

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} dX_i dX_j$$

Teniendo en cuenta la tabla de multiplicar siguiente:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0, \\ dt \cdot dW = 0, \\ (dW_i)^2 = dt, i = 1, \ldots, d, \\ dW_i \cdot dW_j = 0, i \neq j. \end{cases}$$

La fórmula de Itô puede ser escrita como

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} tr[\sigma^T H \sigma] \right\} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i dW$$

Donde H denota la matriz hesiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Y tr denota la traza de la matriz, es decir la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz.

$$tr\ A = \sum_i A_{ii}$$

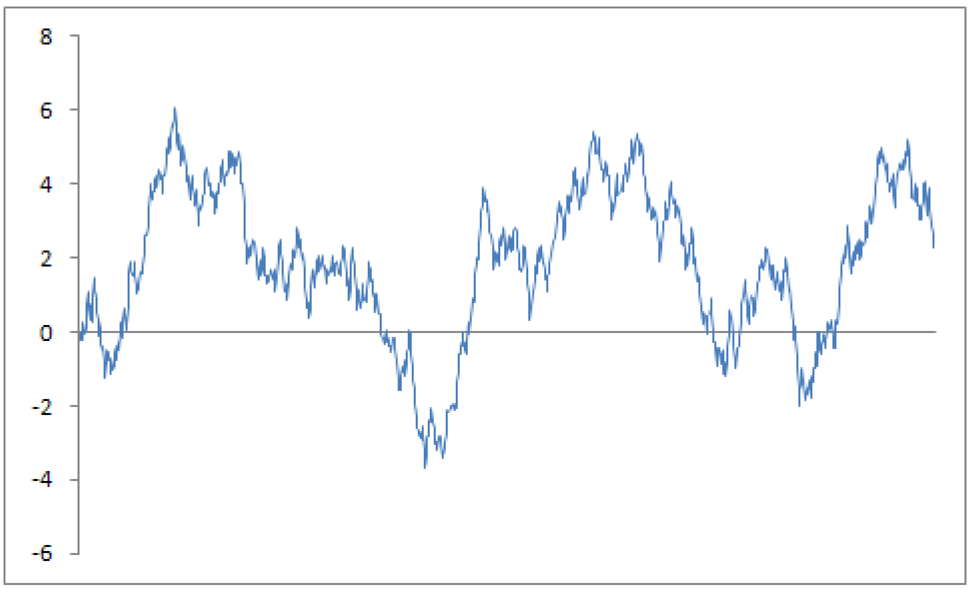
3.12. Ecuaciones diferenciales estocásticas y martingalas

Lema.

Un proceso estocástico, representado por una ecuación del tipo

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

es una martingala si y sólo si, su diferencial tiene la forma: $dX(t) = g(t)\, dW(t)$, es decir, no tiene término drift. En el gráfico se ilustra un proceso de este tipo.



3.13. Fórmula de Feynman – Kac

En la fórmula de Feynman – Kac se asume que F es una solución al problema del valor en la frontera

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

$$F(T,x) = \Phi(x)$$

Asume además que el proceso $\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$ está en £^{2},

$$F(t,x) = E_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

donde X satisface la ecuación diferencial estocástica.

$$dXs = \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dWs, \quad X_t = x$$

Es necesario que se cumpla que $\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \in$ d £^{2} para garantizar que el valor esperado de la integral estocástica sea igual a cero.

Extensión de la fórmula

Si el valor inicial es

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + rF(t,x) = 0$$

F(T,x) = Φ(x), bajo las mismas condiciones, entonces, la solución está dada por

$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E_{t,x}[\Phi(X_T)]$.

Un ejemplo

Resolver la siguiente Ecuación Diferencial Parcial

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

$$F(T,x) = x^2$$

Donde σ es constante.

Solución:

$$F(t,x) = E_{t,x}[X_T^2]$$

Donde

$$dX_s = 0 \cdot ds + \sigma dW_s$$

$$X_t = x$$

Esta ecuación puede ser resuelta fácilmente, y obtenemos

$$X_T = x + \sigma[W_T - W_t] \ ,$$

De manera que X_T tiene la distribución $N\left[x, \sigma\sqrt{T-t}\right]$. Así tenemos la solución

$$F(t,x) = E[X_T^2] = Var[X_T] + \{E[X_T]\}^2$$

$$= \sigma^2(T-t) + x^2$$

Extensión al caso n-dimensional

Dados:

- Una función vector-columna valorado $\mu: R_+ \times \ R^n \to R^n$
- Una función $C: R_+ \times R^n \to M(n,n)$, el cual se puede escribir de la forma
- $C(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^T(t,x)$, para alguna función $\sigma: R_+ \times \ R^n \to M(n,d)$
- Una función de valor real $\Phi: R^n \to R$
- Un número real r.

Supongamos que $F: R_+ \ \times \ R^n \to R$ es una solución al problema del valor en la frontera

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) - rF(t,x) = 0$$

$$F(T,x) = \Phi(x)$$

Supongamos además que el proceso

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s)$$

Pertenece a la clase £^{2}, donde X está definido como sigue. Entonces F tiene la representación

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}E_{t,x}[\Phi(X_T)]$$

Donde X satisface la Ecuación Diferencial Estocástica

$$dX_s = \mu(s, X_s)dt + \sigma(s, X_s)dW_s \quad ,$$

$$X_t = x$$

4. ALGUNOS MODELOS BÁSICOS

4.1. El Modelo de Black-Scholes

-

Suponemos que el mercado consta de dos activos, cuyas dinámicas están dadas por:

$$dB(t) = r\, B(t)\, dt \qquad (1.1.1)$$

$$dS(t) = S(t)\, (t, S(t))\, dt + S(t)\, \sigma(t, S(t))\, d\bar{W}(t) \qquad (1.1.2)$$

Donde $\bar{W}$ es un proceso de Wiener y la tasa de interés de corto plazo r, la tasa promedio de retorno local α, y la volatilidad σ son constantes determinísticas.

Consideramos un reclamo contingente de la forma

$$X = \Phi(S(T)), \qquad (1.1.3)$$

y suponemos que este se transa en el mercado y que tiene un precio dado por

$$\Pi(t) = F(t, S(t)), \qquad (1.1.4)$$

Para una cierta función. Nuestro problema es encontrar la F para que el mercado $[S(t), B(t), \Pi(t)]$ esté libre de posibilidades de arbitraje.

Empecemos por calcular la dinámica de precios de los activos derivados y la fórmula de Itô aplicada a (d) y (b) y obtenemos

$$d\Pi(t) = \alpha_\pi(t)\Pi(t)dt + \sigma_\pi(t)\Pi(t)d\bar{W}(t), \qquad (1.1.5)$$

donde los procesos $\alpha_\pi(t)$ y $\sigma_\pi(t)$ están definidos por

$$\alpha_\pi(t) = \frac{F_t + \alpha S F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F}$$

$$\sigma_\pi(t) = \frac{\sigma S F_s}{F}$$

Aquí los subíndices denotan las derivadas parciales, y se puede usar la siguiente notación corta

$$\frac{\sigma S F_s}{F} = \frac{\sigma\big(t, S(t)\big) S(t) F_s 8(t, S(t))}{F(t, S(t))}$$

Y de manera similar para los demás términos

4.1.1. Teorema. (Ecuación de Black-Scholes)

Supongamos que el mercado está especificado por (a) y (b) y queremos valorar un reclamo contingente de la forma (c) , entonces, la única función de la forma (d) que es consistente con ausencia de arbitraje es la solución del problema con valor en la frontera:

$\frac{1}{2} s^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + rs\ \frac{\partial F}{\partial V} - rF + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ *(1)*

$F(T, s)\ = \Phi(s)\ (f)$ (2)

en el dominio $[0, T] \times R_+$

4.1.2. Valoración neutral con respecto al riesgo

Dado el problema:

$dB(t)\ =\ r\ B(t)\ dt$ (3)

$dS(t)\ =\ S(t)\ \alpha(t, S)\ dt\ +\ S(t)\ \sigma(t, S)\ d\overline{W}(t)$ (4)

y un reclamo contingente de la forma $X\ =\ \Phi(S(T))$ y $\Pi(t)\ =\ F(t, S(t))$, donde F es una solución de las ecuaciones (1) y (2), entonces F está dada por la fórmula

$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}^{Q} [\Phi(S(T)](g)$, donde la Q-dinámica de Q está dada por

$$dS(t)\ =\ rS(t)\ dt\ +\ S(t)\ \sigma(t, S)\ dW(t) (5\ )$$

Q es otra medida de probabilidad, bajo la que $Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)}$ es una martingala.

Es importante destacar esta otra medida de probabilidad. Varios de los modelos de tiempo continuo suponen que la ecuación diferencial, o el diferencial estocástico que define el comportamiento de una de las variables centrales está definida con esta medida.

4.1.3. La fórmula de Black-Scholes para una call europea

Este es el conocido resultado que se deriva a partir de la fórmula de Feymann-kac:

Si K es el precio strike y T es tiempo de madurez, la función de contrato será

$$F(T,s) = \Phi(s) = Max(0, s-K) \qquad (6)$$

$$F(t,s) = s.N[d1(t,s)] - e^{-r(T-t)}K.N[d2(t,s)] \; (7)$$

donde N es la función de distribución de la normal estándar y

$$d1(s,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{ln\left(\frac{s}{K}\right) + (r + 0.5\,\sigma^2)(T-t)\right\} \; (8) \text{ y}$$

$$d2(s,t) = d1(s,t) - \sigma\sqrt{T-t} \qquad (9)$$

4.2. Modelo de Merton (1974). Un modelo del tipo Black-Scholes para la valoración de pasivos

Presenta la “Teoría de riesgos de las tasas de interés” con la que se presenta una teoría de valoración de bonos cuando hay probabilidad de default que es significativa.

Supuestos básicos.

1.1 No hay costos de transacción, impuestos y los activos son divisibles.
1.2 Cada inversionista puede comprar o vender tanto como desee de cada activo, al precio del mercado.
1.3. En el mercado se presta y se pide prestado a la misma tasa de interés.
1.4. Se permiten las ventas en corto, pudiendo usar a voluntad los ingresos de la venta.
1.5. Las transacciones tienen lugar en tiempo continuo.
1.6. Se satisface el teorema de Modigliani-Miller: El valor de la firma es invariante con respecto a su estructura de capital.
1.7. La estructura de plazos de las tasas de interés es “plana”. En términos de un bono cero cupón: El precio de un bono libre de riesgo, que pagará un dólar en el tiempo τ, en el futuro es $P(\tau) = e^{-\tau r}$, donde r es la tasa libre de riesgo instantánea, que es la misma en todo momento.
1.8. La dinámica del valor de la firma, V, se puede describir mediante una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dz, (9.10)$$

α es la tasa de retorno instantánea esperada de la firma por unidad de tiempo
C es el total de pagos de la firma por unidad de tiempo tanto a accionistas como a acreedores (dividendos o pagos de interés), si es positiva, o es la cantidad neta recibida por la firma por unidad de tiempo de un nuevo financiamiento, si es negativa.
σ^2 es la varianza instantánea del rendimiento de la firma por unidad de tiempo.
dz es un proceso de Wiener estándar.

4.2.1. Una security cuyo valor del mercado depende de V

Supongamos que existe una security cuyo valor del mercado Y es Y = F(V,t), entonces, por el Lema de Ito,

$dY = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + (\alpha V - C)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2}V^2\sigma^2\ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)dt + \sigma V\frac{\partial F}{\partial V}dz(t)$ (9.11)

Haciendo

$\alpha_y\, Y - C_y = \frac{\partial F}{\partial t} + (\alpha V - C)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2}V^2\sigma^2\ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$ (9.12)

$\sigma_y\, Y = \sigma V\frac{\partial F}{\partial V}$ (9.13)

$dzy = dz$ (9.14), podemos escribir (9.11) como:

$dY = (\alpha_y Y - C_y)dt + \alpha_y Y dz_y$ (9.15)

Como los procesos de Wiener (ecuación (9.14)) son el mismo, los retornos están perfectamente correlacionados.

4.2.2. Modelo para la firma

Consideremos un portafolio compuesto por tres “activos”, la firma, la security mencionada y el activo libre de riesgo, de tal manera que la inversión neta en el portafolio sea cero. Sean w1, w2 y w3 las cantidades instantáneas invertidas en cada uno de los activos del portafolio, así w3 = -(w1+w2). Si dx es el retorno instantáneo del portafolio, se puede probar que

$$dx = w_1\frac{(dV + C.dt)}{V} + w_2\frac{\left(dy + C_y.dt\right)}{Y} + w_3 r.dt$$

$= \left(w_1(\alpha - r) + w_2\left(\alpha_y - r\right)\right)dt + (w_1\sigma + w_2\sigma_y)dz$ (9.16)

Suponga que la estrategia del portafolio es libre de arbitraje y además es libre de riesgo, entonces $w_1(\alpha - r) + w_2\left(\alpha_y - r\right) = 0$ y $w_1\sigma + w_2\sigma_y = 0$ (9.17)

En el caso no trivial w1≠w2 ≠0 se obtiene $\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_{y-r}}{\sigma_y}$ (9.18)

Pero $\alpha_y - r = \frac{0.5\ \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (\alpha V - C)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} + C_y}{F} - \ r$ (9.19) y $\sigma_y = \sigma\ V \frac{\partial F}{\partial V} / F$ (9.20)

Por lo tanto $\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{0.5\ \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (\alpha V - C)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} + C_y - F.r}{\sigma\ V \frac{\partial F}{\partial V}}$ (9.21) y de acá obtenemos:

$1/2\ \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (rV - C)\frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} + C_y - F.r = 0$ (9.22)

Esta ecuación (9.22) debe ser satisfecha por cualquier security que es función del valor de la firma. Sin embargo, para caracterizar la ecuación específica de cada security, hay que dar una condición inicial y unas condiciones de frontera.

En esta ecuación se ve que el valor de la security depende de los siguientes factores:

-La tasa libre de riesgo r

-La volatilidad del valor de la firma, σ (riesgo de la firma)

-Los pagos de la firma, C

-la política de pagos de la security, Cy

No depende de la tasa de retorno esperada de la firma α, ni de la tasa de retorno esperada de la security. Tampoco depende de la actitud hacia el riesgo por parte de los inversionistas.

Aplicación de la fórmula (9.22)

4.2.3. Valoración de bonos de descuento[3]

Consideremos una empresa que tiene solo dos clases de reclamos: 1. Una clase simple de deuda y 2. Una acción común (equity), de reclamo residual.

Suponemos que en la indenture del bono aparece lo siguiente:

- La empresa promete hacer un pago total de B dólares a los bondholders en la fecha calendario T.
- En caso de que no se haga este pago, los bondholders pueden apoderarse (takeover) de la empresa y los accionistas no reciben nada.

[3] Un bono de descuento (discount bond) es uno que se emite a un precio inferior a su par value (facevalue), también puede ser un bono que se negocia por menos de su par value en el mercado secundario. Según el tiempo hasta su madurez, los bonos cero cupón se pueden vender con grandes descuentos con respecto al par value, a veces 50% o más.Ya que estos bonos pagan su facevalue completo en su madurez, los bonos de descuento, emitidos a un precio por debajo de su par, subirán de precio de una manera estable a medida que se aproxima la madurez. Darán un solo pago en la madurez.(Investopedia).

- La empresa no puede emitir reclamos con prioridad superior, ni pagar dividendos, ni hacer re-compra de acciones antes de la madurez de la deuda.

Sea F el valor de la deuda emitida, dadas las circunstancias anteriores, C = C_y = 0 y si τ= T-t es el tiempo restante hasta la madurez, $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \tau}$, por lo que la ecuación la ecuación (9.22) queda:

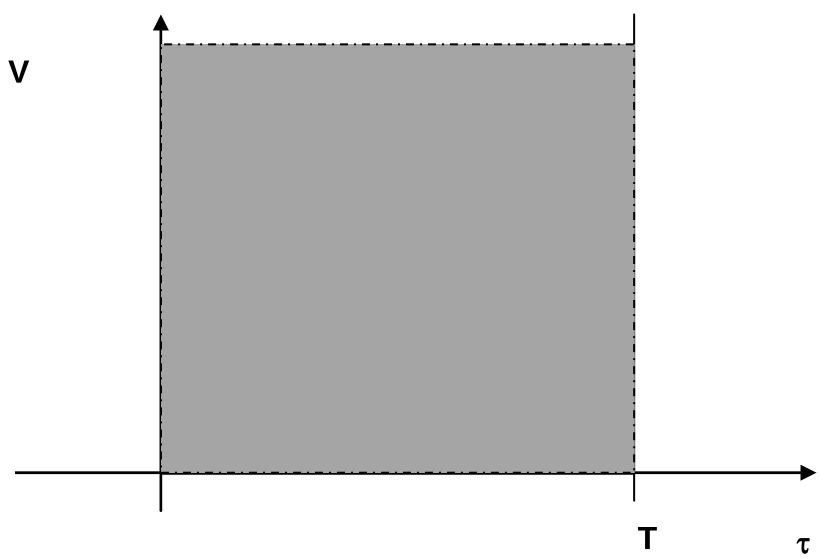
$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + rV\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{\partial F}{\partial \tau} - F.r = 0 \qquad (9.23)$$

Las condiciones de frontera y la condición inicial para resolver (9.23) se derivan de las restricciones impuestas anteriormente: Si f(V, τ) es el valor de las acciones,

$$V = F(V,\tau) + f(V,\tau) \qquad (9.24)$$

Como F y f no pueden tomar valores negativos, $F(0,\tau) = f(0,\tau) = 0$ (9.25)

Además $F(V,\tau) \leq V$ y por lo tanto, $F(V,\tau)/V \leq 1$ (9.26)



Región de solución

En la fecha de madurez, $\tau = 0$, la empresa pagará la cantidad B o las acciones quedarán valiendo nada. Si $V(T) > B$, la empresa pagará a los bondholders, si $V(T) \leq B$, no se hará el pago y los bondholders tomarán la empresa.

Así se tiene que la condición inicial para $\tau = 0$ será $F(V,0) = Min(V,B)$.

Con estas condiciones se puede resolver (9.23) por algún método convencional. Sin embargo, se puede utilizar un método más sencillo:

De (13) observamos que f(V, τ) = V - F(V, τ) (14) y de acá obtenemos $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \tau}$ (9.27)

$\frac{\partial f}{\partial V} = 1 - \frac{\partial F}{\partial V}$(16) y $\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$ (9.28), sustituyendo en (9.23) encontramos,

$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + rV\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \tau} - r.f = 0$ (9.29), la condición inicial equivalente será

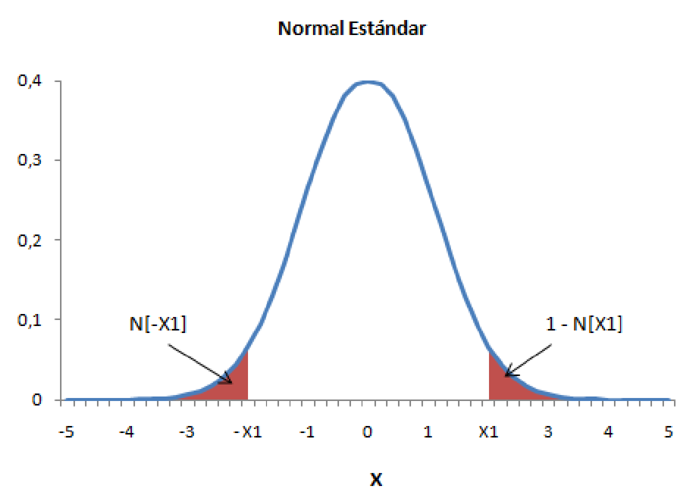
F(V, 0) = Max(0, V-B) (9.30)

Comparando con la fórmula de Black-Scholes para la opción call europea, se observa que (18) y (19) son semejantes a las ecuaciones de una call cuyo precio de ejercicio es B. Por lo tanto la solución *está* dada por

$f(V,\tau) = V.N[d1(V,\tau)] - e^{-r\tau}B.N[d2(V,\tau)]$ (9.31), donde N es la función de distribución de la normal estándar y $d1(V,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{ln\left(\frac{V}{B}\right) + (r + 0.5\,\sigma^2)\tau\right\}$ (9.32) y

$d2(V,\tau) = d1(V,\tau) - \sigma\sqrt{\tau}$ (9.33)

Ahora, F(V, τ)= V-f(V,τ), luego $F(V,\tau) = V(1 - N[d1(V,\tau)]) + e^{-r\tau}B.N[d2(V,\tau)]$ que se puede escribir como: $F(V,\tau) = V(N[-d1(V,\tau)]) + e^{-r\tau}B.N[d2(V,\tau)]$ (9.34)



4.3. Modelo de Ju-Ou-Yang (2006)

Es un modelo, de tiempo continuo, para la estructura de capital y el vencimiento de la deuda que involucra tasas de interés estocásticas. Está inspirado en la búsqueda de la estructura de capital óptima, un problema cuyos inicios pueden ubicarse con el trabajo de Brennan y Schwartz (1978) quienes usaron los enfoques de Black-Scholes (1973), Merton(1974) y Black-Cox(1976). Los trabajos de Leland (1974) y Leland y Toft (1996), presentan aportes significativos para este problema. En el primero se introduce un modelo de estructura de capital óptima que se basa en una perpetuidad; en el segundo, se extiende el modelo anterior para examinar el efecto del vencimiento de la deuda en los precios de los bonos, los spreads de crédito y el apalancamiento óptimo. En este segundo trabajo, la deuda, en vez de determinarse de manera óptima, se asume dada.

En este modelo de Ju-Ou-Yang, que supone una tasa de interés estocástica, la estructura óptima de capital y el vencimiento de la deuda se determinan de manera conjunta.

.

Supuestos:

S1. El Mercado financiero es dinámicamente completo y las transacciones se llevan a cabo en tiempo continuo. Por lo anterior, existe una medida martingala (o medida neutral con respecto al riesgo), equivalente, denotada Q, con respecto a la cual los procesos de precio, descontados, son martingalas.

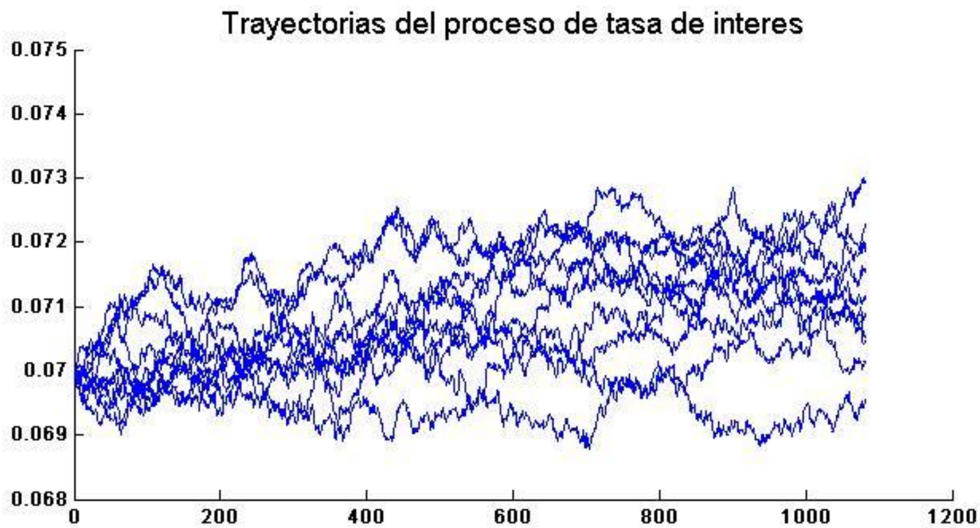
S2: El valor total de los activos no apalancados de la firma, antes de impuestos, bajo la medida Q, se modela mediante un proceso geométrico browniano

$\mathrm{dV(t)} = (\mathrm{r(t)} - \mathrm{y})\mathrm{V(t)dt} + \sigma_\upsilon \mathrm{V(t)dW}_\upsilon^{\mathrm{Q}}(\mathrm{t})$, donde r(t) es la tasa de interés en el tiempo t, y es una tasa de pago constante, σ_v es la volatilidad de los retornos de los activos y $W_\upsilon^Q(t)$ es un proceso de Wiener estándar, definido en un espacio de probabilidad completo (Ω, F, P).

Si θ es la tasa de impuestos para la corporación, entonces el valor de los activos no apalancados de la firma será $V^*(t) = V(t)(1-\theta)$.. Si la firma tiene deudas en su estructura de capital, el valor apalancado, después de impuestos, será diferente de V*(t).

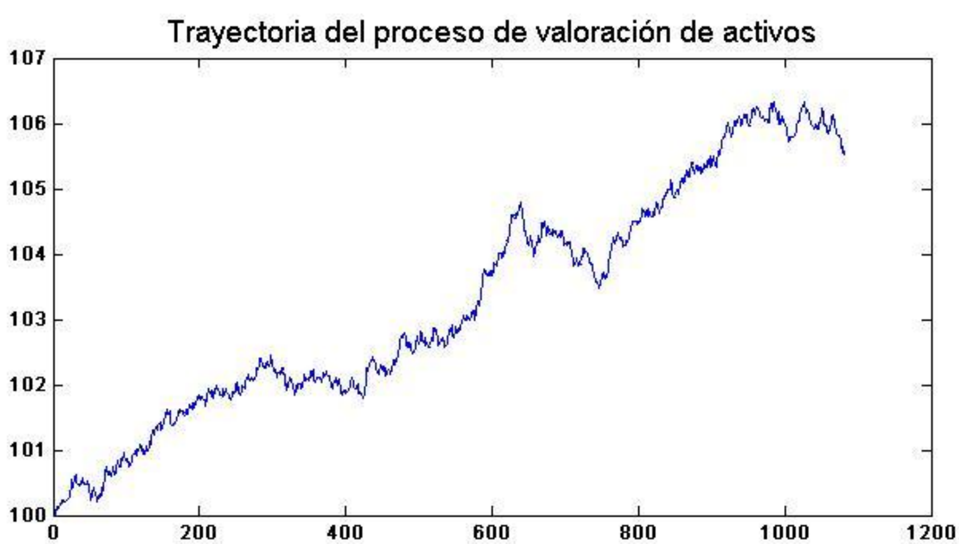
S3. Bajo Q, la tasa de interés sigue un proceso de Vasicek

$dr(t) = \beta\big(\alpha - r(t)\big)dt + \sigma_r\, dW_r^Q(t)$, donde α, β y σ_r son constantes y $W_r^Q(t)$ es otro proceso de Wiener, estándar, definido en el mismo espacio (Ω, F, P), la correlación instantánea entre los procesos $W_v^Q(t)$ y $W_r^Q(t)$, está dada por ρ dt, donde ρ es una constante.

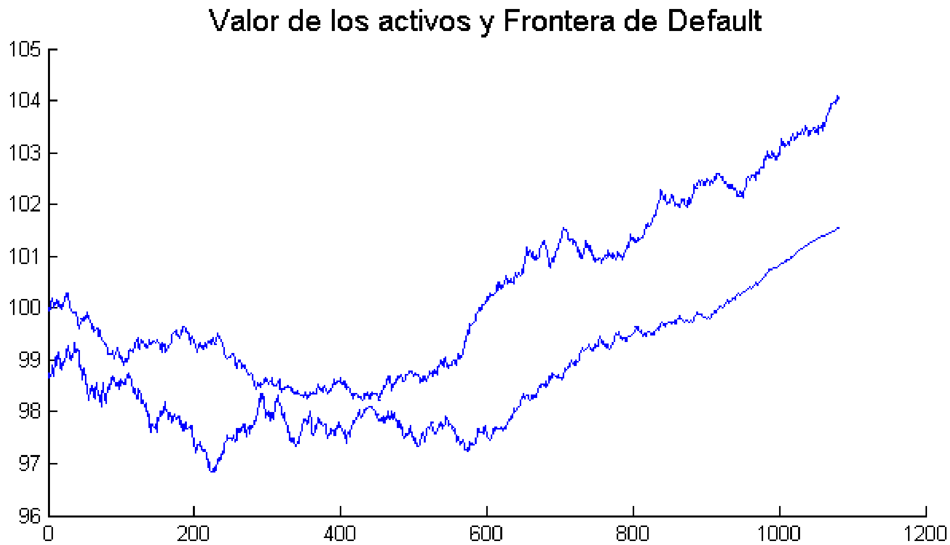


S4: La firma emite deuda con cupones con una madurez finita. Los cupones pagados son deducibles de impuestos a la tasa corporativa θ y se asume la recuperación total de la pérdida. Si (C, P, T) representan, respectivamente el cupón, el principal y la madurez, cuando la firma paga el cupón, deduce de sus impuestos la cantidad θC.

S5: la bancarrota ocurre cuando el valor de los activos no apalancados cae a una frontera exógena de default V_B(r(t), t; P, T), especificada por
V_B(r(t), t; P, T), = PΛ(r, t; T). e $^{y\,(T-t)}$ / (1-θ), donde Λ(r, t; T). es el valor de un bono cero-cupón, en el tiempo t.



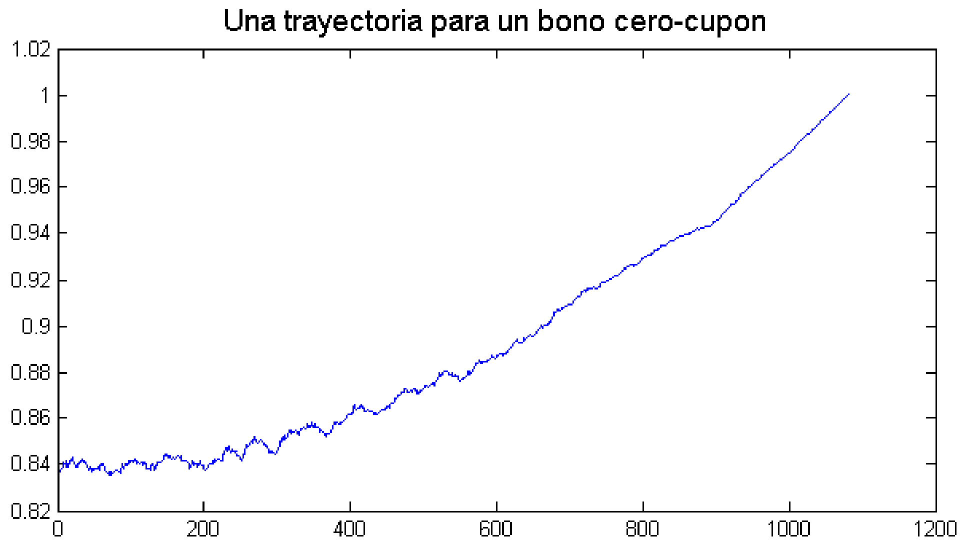
Si $V(t) > V_B(r(t), t; P, T)$, la firma está solvente y hace los pagos pactados a los poseedores de bonos. En el caso de default, una fracción ϕ, $0 < \phi < 1$, de los activos no apalancados se pierde en el proceso de bancarrota, y los bondholders reciben el valor después de impuestos del resto: $(1- \phi)(1 - \theta) V_B(r(t), t; P, T)$,



S6:La firma re balancea su estructura de capital cada T años. En el tiempo cero, la empresa emite un bono con cupones, a T –años. Si a los T años la empresa no se ha quebrado, emite otro bono con cupones, a T años. Este proceso continúa de manera indefinida, en tanto que la empresa sea solvente.

S7:Los costos de transacción de para emitir y ofrecer un bono es una fracción k del valor del mercado del bono emitido. $0 < k < 1$.

Aclarando el supuesto S5. Segùn el modelo de Vacisek,
$\Lambda(r, t; T)=\mathrm{Exp}[A(t; T) – B((t;T) rt]$, $B(t;T) = (1- \exp(-\beta(T-t))/\beta$; $A(t;T) =(\mu/2-\alpha)(T-t)- (\mu-\alpha)B(t;T) +\mu/2 (1- \exp(2\beta(T-t))/(2\beta)$ y $\mu = \frac{\sigma_r^2}{\beta^2}$



Derivación del modelo

Definimos el tiempo del primer pasaje, τ, mediante $\tau = \min\{t: Vt \ \leq VB(r,t;P,T)\}$, es decir el tiempo en que el bono alcanza la frontera exógena de default por primera vez.

Si $X_t = ln\left(\frac{V_t}{V_B\ (r,t:P,T)}\right)$, entonces τ es también el tiempo en el que Xτ alcanza el origen desde valores positivos. Tomando $X_0 = ln\left(\frac{V_0}{V_B\ (r0,0:P,T)}\right)$, >0

Si el valor inicial de la tasa de interés es r_0, una expresión para r(t) será:

$$r(t) = e^{-\beta\, t}\, r_0 + \alpha\left(1 - e^{-\beta\, t}\right) + \sigma_r \int_0^t e^{-\beta\,(t-s)}\ dW_{rt}^Q$$

Aplicando el lema de Ito a X_t se obtiene $dXt = 0.5 * \left[\sigma_p^2(t;T) - \sigma_v^2\right]dt + \sigma_v\, dW_{vt}^Q + \sigma_p\ (t;T)dW_{rt}^Q$, donde $\sigma_p\ (t;T) = \sigma_r\ B(t;T)$

El término del drift de dX_t es no estocástico y esto es clave para obtener expresión cerrada para

Valores esperados relacionados con el tiempo de primera pasada

Se definen $G(t; T, X_0)$ y $H((t; T, X_0)$, mediante:

$$G(t;T,X_0) = E_0^Q\left[\frac{Exp(-\int_0^T r(u)du)}{\Lambda(r_0,0,T)}\ 1(\tau < t)\right]$$ y

$H(t;T,X_0) = E_0^Q\left[Exp(-\sigma_v^2\ \frac{t}{2} + \sigma_v\ W_{v\ t}^Q) \quad 1(\tau < t)\right]$, donde 1(.) es la función indicadora y τ = min{ s: Xs ≤ 0}, es el tiempo del primer pasaje en el que Xs, cruza el origen desde abajo..

Se puede definir una nueva medida de probabilidad RT bajo la cual

$G(t;T,X_0) = E_0^{RT}[\ 1(\tau < t)]$, la función de distribución está dada por

$$G(t;T,X_0) = N\left[\frac{-Xo - \mu_g(t;T)}{\sqrt{\Sigma(t;T)}}\right] + Exp(-\frac{\mu_g(t;T)Xo}{\Sigma(t;T)})N\left[\frac{-Xo + \mu_g(t;T)}{\sqrt{\Sigma(t;T)}}\right]$$

Donde $\Sigma(t;T) = \sigma_v^2\ t + \frac{\sigma_t^2}{\beta^2}\left[t + B_2(t).Exp[-2\beta(T-t)] - 2B_1(t).Exp[-\beta(T-t)]\right]$

$$+\frac{\sigma_r}{\beta}\left[t - B_1(t).Exp[-\beta(T-t)]\right]$$

$\mu_g(t;T) = -1/2\ \Sigma(t;T)$; $B_1(t) = (1- e^{-\beta t})/\beta$; $B_2(t) = (1- e^{-2\beta t})/(2\beta)$

De igual manera, se puede definir la medida S_T, bajo la cual

$H(t;T,X_0) = E_0^{ST}[\ 1(\tau > t)] = 1 - E_0^{ST}[\ 1(\tau < t)]$, para esta resulta que

$$H(t;T,X_0) = N\left[\frac{Xo + \mu_h(t;T)}{\sqrt{\Sigma(t;T)}}\right] - Exp(-\frac{\mu_h(t;T)Xo}{\Sigma(t;T)})N\left[\frac{-Xo + \mu_h(t;T)}{\sqrt{\Sigma(t;T)}}\right]$$

Donde $\mu_h(t;T) = -1/2\ \Sigma(t;T)$.

Se puede deducir que :

a. El escudo fiscal está dado por
   $tb(T, X_0) = \theta\ (1- \theta)\ V_0\ Exp[\ -X_0-Y_T]\ [\lambda-1+\phi.G(T;\ T,\ X_0)-\ (1- \phi)\ G_1(T;\ T,\ X_0)]$ donde
   $G_1(T;T,X_0) = y\ \int_0^T e^{y(T-s)}\ G(T;T,X_0)ds.$
   Cuando ocurre la bancarrota, una fracción φ del valor del activo se pierde en el proceso.
b. El costo de bancarrota está dado por
   $bc(T, X_0) = \varphi V_0\ e^{-X0-YT}[\ G(T;T,X_0)+G_1(T;T,X_0)]$
c. Los costos de transacción por emitir y servir la deuda están dados por
   $Tc(T, X_0)=k\ D(T,X_0;r_0,P) = \kappa\lambda(1- \theta)V_0\ e^{-X0-YT}$
   donde κ es el costo de transacción por cada dólar de deuda emitida

De las expresiones anteriores se ve que dados T y los parámetros exógenos al modelo, el escudo fiscal, el costo de bancarrota y los costos de transacción por emisión, dependen de una sola variable a elegir: X_0; esta determina el valor P, mediante $X_0 = ln\left(\frac{V_0(1-\theta)}{P\ \Lambda(r_{0,},0;T)e^{yT}}\right)$.

El escudo fiscal óptimo, TB(T,X*), se calcula mediante:

$$TB(T,X^*) = \frac{tb(T,X^*)}{1-e^{-y\,T}\ H(T;T,X^*)}$$

El costo total de bancarrota BC(T, X*) se calcula mediante

$$BC(T,X^*) = \frac{bc(T,X^*)}{1-e^{-y\,T}\ H(T;T,X^*)}$$

Los costos totales de transacción TC(T, X*) se calculan mediante

$$TC(T,X^*) = \frac{tc(T,X^*)}{1-e^{-y\,T}\ H(T;T,X^*)}$$

El valor total de los activos: apalancados TV(T, X*) se calcula mediante

TV(T, X*) = $V_0(1-\theta)$ +TB(T,X*)-[BC(T,X*)+ TC(T,X*)]

Todo el problema se reduce a maximizar la expresión anterior, en función de las dos variables T y X*. Se puede hacer con un algoritmo de optimización no restringida en dos variables.

Se toma $\lambda = 1/\Lambda(\alpha, 0;T)$.

Cuando te tienen varios períodos, el valor nominal óptimo del bono emitido en el período n-simo está dado por:

$$P^*_{tn} = \frac{V_{tn}(1-\theta)e^{-X*-y.T}}{\Lambda(r_{tn},0,T)}$$

Y el cupón óptimo está dado por

$C^*_{tn} = \frac{V_{tn}(1-\theta)e^{-X*-y.T}\ I(T,T,X)}{J(T,tn,\tau)}$, donde

$I(T,T,X^*) = [\lambda-1+\phi.G(T;\ T,\ X^*)-\ (1-\ \phi)\ G_1(T;\ T,\ X_*)]$

Y $I(T,T,X^*) = \int_0^T E^Q_{tn}\left[e^{-\int_0^s r(tn+u)du}\ \ 1(s \leq\ \tau)ds\right]$, donde $1(\ s \leq \tau)$ representa la función característica que toma el valor de 1 si $s \leq \tau$, y 0 si $s > \tau$.

5. UN MARCO TEÓRICO PARA LOS MODELOS ESTRUCTURALES PARA EL VALOR DE LA FIRMA Y MODELOS DEL EBIT (GENSER 2006)

Son modelos especiales de valoración que hacen énfasis en la economía de la firma. Los precios de las securities emitidas por estas empresas se deducen a partir de la condición económica de la firma. Las decisiones operacionales de esta se toman como dadas (externas).

Como caso especial están los modelos para el EBIT. En estos se hace énfasis en el EBIT, en vez del valor de la firma, porque el uso del EBIT está a discreción de las directivas de la empresa, (por ejemplo estas decidirán cuánto pagar en dividendos y cuánto en los intereses de la deuda.) y porque es más fácil formular el tema de los impuestos y las exenciones cuando se parte del EBIT.

En estos se supone que el EBIT sigue el proceso estocástico del tipo

$d\eta = \mu(\eta, t)\, dt + \sigma_{\eta}(\eta, t)\, dz^{Q},\ \eta(t_0) = \eta_{t0},$

Donde Z^{Q}, es un proceso de Wiener con respecto a la medida martingala Q.

A pesar de que el proceso está definido sobre la medida martingala, el término de drift, $\mu(\eta, t)$, no necesariamente tiene la forma $r\ \eta\ dt$, donde r es la tasa libre de riesgo, como si pasa con las acciones. Esto se debe a que no es el EBIT el que se transa en el mercado, es solamente una variable de estado.

El valor de la firma está dado por $V = E_{t0}^{Q}\left(\int_{to}^{\infty} \eta_s\, e^{-r\,(s-t0)} ds\right)$. Esta definición implica la existencia de una política de dividendos, lo mismo que una política de inversiones.

El cálculo de los flujos de caja al patrimonio se hace de la siguiente manera:

EBIT
– Pago de cupones
– Impuestos corporativos

= Ganancias corporativas

+ *Depreciaciòn*
– *Inversiones brutas*

– Inversiòn neta

+ *Teòrico denuevas emisones de deuda*
- *Repago de Deuda Madura*

+ *Financiacion neta de la deuda*

= *Flujo de caja para patrimonio*

Supongamos que la compañía tiene un nivel de capital invertido I_{to}. La depreciación del capital invertido ya se ha deducido el EBIT, pero se ha reinvertido en la compañía si el EBIT se considera como un flujo de caja para todos que tienen derecho sobre él (incluyendo el gobierno), así que la inversión neta es igual a cero. Bajo esta consideración, la firma tiene un nivel de capital invertido constante I. Todos los flujos de caja que pudieran quedar en la compañía para aumentar el capital invertido, se distribuyen a los accionistas. Si hay que pagar los bonos emitidos, los accionistas inyectarán dinero a la empresa, para prevenir que venda sus activos, a no ser que la deuda existente sea reemplazada por nuevos bonos corporativos. Como resultado de esto, los dividendos en efectivo para los inversionistas (antes de los impuestos para ellos) se definen como las ganancias de la firma, después de impuestos, ajustadas por pagos de deuda y flujos entrantes de capital por emisión de bonos en el futuro.

Como consecuencia de este marco, ηt, puede tomar valores arbitrarios, y un flujo de caja negativo a los accionistas significa que estos deben inyectar dinero a la firma.

Bancarrota

Es posible que cuando η_t se vuelva negativo, los accionistas se nieguen a inyectar dinero a la firma para que cumpla con sus obligaciones.

El modelo considera una función determinìstica (frontera) $\eta_B(t)$ en la cual los accionistas declaran bancarrota. El tiempo de bancarrota, τ, se define como $\tau = \inf\{ s \geq t_0 : \eta(s) = \eta_B(t) \}$. Nótese que, a diferencia del modelo de Ju-Ou-Yang, esta frontera es determinìstica. En $t = \tau$, todos los reclamos por bancarrota se liquidan.

Al liquidar la firma, queda un valor residual $VB(\tau)$ definido por
$V_B(\tau) = E_\tau^Q\left(\int_\tau^\infty \eta_s\, e^{-r\,(s-\tau)} ds\right)$.

Para valorar securities hay que considerar que cada derecho recibe pago en tres eventos mutuamente excluyentes:

(i) Flujo de caja recibido al vencimiento si la empresa no se ha quebrado
(ii) Flujo de caja de pagos regulares antes de vencimiento, en tanto que la empresa no se haya quebrado.
(iii) Flujo de caja residual en caso de bancarrota

Al considerar esto, se puede llegar a tres tipos de fórmulas para valoración.

Se define el precio de Arrow-Debreu[4] de la bancarrota como

---

[4] En economía financiera, una security de precio de estado, o security de Arrow-Debreu, es un contrato que paga una unidad de una moneda o una commodity (numeraire) si un estado particular ocurre en un estado particular del futuro y paga cero unidades si cualquiera de los otros estados ocurre. El precio de esta security es el precio de estado de este particular estado

$P_B(t_0, T, \eta_{t0}, \eta_B(t)) = \int_{t0}^{T} e^{-r(s-t0)} \psi(t_0, s, \eta_{t0}, \eta_B(s))\, ds$, donde $\psi(.)$ es la densidad de primer paso.
El valor de la empresa se puede escribir como $V = V^+ + P_B(.)\ V_B = V^+ + V^-$, donde a V^+ se le llama parte solvente y a V^-, parte insolvente.

Se puede probar que V^- es calculable siempre y cuando se conozca el precio de bancarrota. Esta división del valor de V es muy útil en el análisis de la estructura de capital.

Si V_E es el valor del patrimonio antes de impuestos, se puede escribir como $V_E = V^+_E + V^-_E$. De igual manera, si $V_{Cj,\, Tj}$ es el valor de las emisiones de deuda, entonces se puede expresar como: $V_{Cj,\, Tj} = V^+_{Cj,\, Tj} + V^-_{Cj,\, Tj}$. El segundo término de la derecha es el valor de recuperación en caso de bancarrota.

Impuestos
Se consideran tres tipos:
1. Los pagos de cupones a los poseedores de deuda generan un impuesto T^d.
2. El EBIT menos los pagos de cupones generan un impuesto T^c.
3. Las ganancias corporativas pagadas como dividendos, generan un impuesto T^e a los poseedores de acciones.

El valor desapalancado de la empresa VU, se considera un proceso estocástico de Ito, bajo la medida martingala, $dV_u = \mu_U(V_u, t)\, dt + \sigma_u(V_u, t)\, dz^Q$., donde $\mu_U(V_u, t) = r\ V_u - \delta_u(V_u, t)$ y $\delta_u(V_u, t)$, es la función de pago a todos los que tienen derechos sobre la empresa, incluido el gobierno. La emisión de deuda se hace para aprovechar una ventaja en impuestos, TAD (Tax Advantage to Debt). También se consideran las pérdidas por bancarrota, BL y, por lo tanto, el valor apalancado de la firma está dado por VL = VU +TAD – BL.

Una aplicación del Lema de Ito lleva a una expresión de la dinámica del valor apalancado : dVL = dVU +dTAD – dBL.

---

del mundo. El vector de precio de estados es el que contiene todos los precios de estado. El modelo de Arrow-Debreu es el modelo centrar de la Teoría del Equilibrio General.

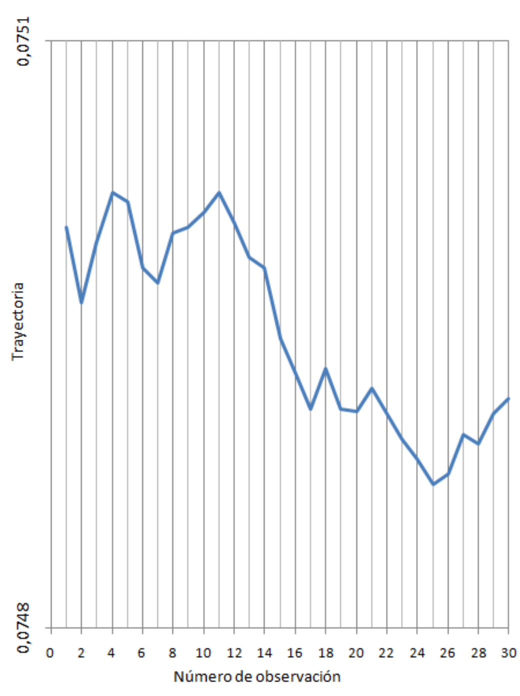
Reestructuración de capital

Existe una estructura de capital inicial, que refleja las decisiones pasadas sobre las emisiones. Esta se mantendrá a no ser que un cambio produzca beneficios lo suficientemente altos. Por ejemplo, poseedores de deuda, en general, no aceptarán un aumento en la misma y los accionistas no van a comprar emisiones de deuda mediante la venta de más acciones.

Si los accionistas emiten nueva deuda con un vencimiento finito, deben enfrentar la decisión de refinanciar cada cuando se acerca el vencimiento. Algunos modelos evitan este problema suponiendo que la estructura de capital es suficientemente simple. Por ejemplo el modelo de Merton (1974), supone que la firma se financia con un bono cero cupón de madurez finita y que después de que madura el bono, la empresa se liquida. Otros como Leland (1994), Goldstein et al. (2001), y Mella-Barral (1999), suponen que además de la emisión de acciones, la empresa se financia con deuda a perpetuidad, pero redimible. Aunque esto simplifica el análisis de manera considerable, en el mundo real, pocas empresas tienen un solo tipo de deuda.

6. ¿CÓMO IMPLEMENTAR ESTOS MODELOS?

Una estimación en tiempo continuo es bastante difícil, principalmente porque el precio del activo no es observado de forma continua, sino en puntos discretos en el tiempo. Suponemos que las observaciones sobre los precios de los activos son regularmente espaciadas, t = 1,2,...., T, como las observaciones en una muestra de precios de las acciones diarias, sin tener en cuenta el efecto fin de semana. Tal esquema de observación se muestra en la siguiente figura.



Toda la información sobre los parámetros desconocidos contenidos en la función de probabilidad se calcula a partir de la muestra de observaciones $l(y1, \dots \dots, yt; \theta)$. En general, sin embargo, no es posible inferir de una trayectoria continua de $y_t, t \in [1, T]$.

En la primera parte, se describen algunos modelos de difusión restrictivos, como el movimiento browniano geométrico, el proceso de Ornstein-Unlenbeck, y otros, como el modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para el cual la función de probabilidad admite una expresión analítica. Estos modelos pueden ser estimados por el método de máxima verosimilitud (MV) y las fórmulas explícitas de los correspondientes estimadores MV son conocidos con frecuencia.

Cuando la función de probabilidad no admite una expresión analítica, algo consistente, aunque ineficiente, los métodos de estimación pueden ser aplicados. En particular, se discute el método generador de base infinitesimal de momentos para modelos de difusión (véase, por ejemplo, Hansen y Scheink-man 1995), el método de simulación de momentos (véase, por ejemplo, Duffie y Sin-gleton 1993; GourierouxMonfort y 1996), y la inferencia indirecta (véase, por ejemplo, Gourieroux, Monfort, y Renault 1993; TauchenGallant y 1996).

Enfoque de Riesgo máximo

Las expresiones analíticas de las funciones de probabilidad existen sólo para un número limitado de procesos de difusión. Debido a su fácil manejo, estos modelos han sido ampliamente estudiados en la literatura, a pesar de que ofrecen un pobre ajuste de los precios observados de los activos. De hecho, estas difusiones no tienen en cuenta características tales como la volatilidad estocástica o efecto apalancamiento.

Movimiento Browniano Geométrico

Discretización exacta

El proceso precio satisface la ecuación de difusión

$$dp_t, = \mu p_t dt + \sigma p_t dW_t, \qquad (13.1)$$

donde (W_t) es un movimiento browniano estándar. Su dinámica depende de un parámetro de deriva μ y un parámetro de volatilidad σ. La estimación de la volatilidad es fundamental ya que permite la determinación de la probabilidad neutral al riesgo y, por consiguiente los precios de los derivados en (P_t).

Mediante la aplicación de la fórmula de Itô, se deduce la ecuación de difusión satisfecha por el logaritmo del precio. Obtenemos

$$dlogp_t \ = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \ \sigma dW_t. \qquad (13.2)$$

Encontramos por integración directa

$$logp_t - \ logP_{t-1} \ = \ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \ \sigma(W_t \ - \ W_{t-1}),$$

o, equivalentemente,

$$\Delta \log p_t = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma\varepsilon_t \qquad (13.3)$$

Donde (ε_t) es ruido blanco normal estándar. Por lo tanto, la versión discretizada del movimiento browniano geométrico corresponde a una caminata aleatoria gaussiana con término drift para el logaritmo de los precios.

Estimador de máxima verosimilitud

El método de Máxima Verosimilitud (condicionado a la primera observación P_0) proporciona los estimadores de la media y la varianza de $\Delta logp_t$:

$$\widehat{m}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \Delta logp_t$$

$$\hat{s}_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\Delta logp_t - \widehat{m}_T)^2 \qquad (13.4)$$

Los estimadores de Máxima Verosimilitud del término drift y los parámetros de volatilidad se derivan de sus relaciones con la media y la varianza de los parámetros. Ellos están dados por

$$\hat{\mu}_T = \widehat{m}_T + \frac{\hat{\sigma}_T^2}{2}$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = \hat{s}_T^2 \qquad (12.5)$$

Se sabe que las varianzas asintóticas de $\widehat{m}_T$y $\hat{s}_T$ son tales que

$$V_{asy}(\widehat{m}_T) = \frac{\sigma^2}{T}$$

$$V_{asy}(\hat{s}_T^2) = \frac{2\sigma^4}{T}$$

$$Cov_{asy}(\widehat{m}_T, \hat{s}_T^2) = 0$$

Inferimos la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de $\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T^2$:

$$V_{asy}(\hat{\mu}_T) = \frac{\sigma^2}{T} + \frac{\sigma^4}{2T}$$

$$V_{asy}(\hat{\sigma}_T^2) = \frac{2\sigma^4}{T}$$

$$Cov_{asy}(\hat{\mu}_T, \hat{\sigma}_T^2) = \frac{\sigma^4}{T}$$

Observamos que los estimadores de μ y σ^2 están correlacionados.

Efecto de la frecuencia de muestreo

Las propiedades dadas previamente se obtuvieron asumiendo un intervalo de una unidad de tiempo entre observaciones consecutivas. Veamos lo que ocurre cuando los datos se toman en un intervalo h más corto. Obtenemos

$$\log p_t - \log p_{t-h} = \Delta_h \log p_t = h\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_t^{(h)} \qquad (13.6)$$

donde$\left(\varepsilon_t^{(h)}\right)$ es ruido blanco normal estándar. Al igual que antes, calculamos los estimadores $\widehat{m}_{h,T}$ y $\hat{s}_{h,T}^2$ de la media y la varianza de $\Delta_h logP_t$ basados en T observaciones en el intervalo de muestreo h. Los estimadores de μ y σ ahora están dados por

$$\hat{\sigma}_{h,T}^2 = \frac{1}{h}\hat{s}_{h,T}^2,\ \hat{\mu}_{h,T} = \frac{\widehat{m}_{h,T}}{h} + \frac{\hat{\sigma}_{h,T}^2}{2} = \frac{\widehat{m}_{h,T}}{h} + \frac{\hat{s}_{h,T}^2}{2h}$$

Sus varianzas asintóticas se modificaron en consecuencia:

$$Vasy\left(\hat{\sigma}_{h,T}^2\right) = \frac{1}{h^2}Var\left(\hat{s}_{h,T}^2\right) = \frac{1}{h^2}\frac{2h^2\sigma^4}{T} = \frac{2\sigma^4}{T}$$

$$Vasy\left(\hat{\mu}_{h,T}\right) = \frac{1}{h^2}\frac{h\sigma^2}{T} + \frac{1}{4}\frac{2\sigma^4}{T} = \frac{\sigma^2}{hT} + \frac{\sigma^4}{2T}$$

La variación del parámetro de volatilidad depende sólo del número Tde observaciones y no de la frecuencia de muestreo h. Por el contrario, la varianza del parámetro drift depende tanto de h como de T. En el caso límite, cuando T crece y h disminuye de modo que $hT \ \rightarrow 1$, Obtenemos

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ h\to 0}} V_{asy}\left(\hat{\mu}_{h,T}\right) = \sigma^2$$

Por lo tanto, el parámetro drift no puede ser estimado consistentemente incluso de un número infinito de observaciones. Este resultado es fácil de explicar. El parámetro drift representa el efecto tendencia y se podrá recuperar sólo si las observaciones abarcan un largo período. Sin embargo, la condición $hT = 1$ se puede satisfacer incluso cuando las observaciones están separadas por h en el intervalo [0, 1]. En ese caso, se observa el efecto tendencia sólo dentro de un intervalo acotado, que no conlleva una información suficiente.

Proceso de Ornstein- Uhlenbeck

Discretización Exacta

La dinámica del proceso es descrito por la ecuación diferencial estocástica

$$dy_t = (\Phi - \lambda y_t)dt + \sigma dW_t \qquad (13.7)$$

$$= \lambda(\mu - y_t)dt + \sigma dW_t \qquad (13.8)$$

donde(W_t) es un movimiento browniano estándar. Esta ecuación tiene una homóloga simple en tiempo discreto:

$$y_t = \mu[1 - \exp(-\lambda)] + \exp(-\lambda)\, y_{t-1} + \sigma\left(\frac{1-\exp(-2\lambda)}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t \qquad (13.9)$$

Donde (ε_t) es ruido blanco normal estándar. Esta ecuación corresponde a una representación gaussiana AR (1) (proceso autorregresivo de orden 1) para el proceso $(y_t, t \in Z)$.

Podemos aplicar fácilmente el método de máxima verosimilitud al modelo autorregresivo en 13.9

Reparametricemos la representación autorregresiva como

$$y_t = \mu(1 - \rho) + \rho y_{t-1} + \eta\varepsilon_t \qquad (13.10)$$

Donde $\rho = exp - \lambda$

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\mu, \rho,$ son asintóticamente independientes y equivalentes a

$$\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = \bar{y}_t$$

$$\hat{\rho}_T = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}_T)(y_{t-1} - \bar{y}_T)}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y}_T)^2}$$

$$\hat{\eta}_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2$$

(13.11)

Donde los residuales están definidos por $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \bar{y}_T - \hat{\rho}_T(y_{t-1} - \bar{y}_T)$. Sus varianzas asintóticas están dadas por

$$V_{asy}\hat{\mu}_T = \frac{\eta^2}{T(1-\rho^2)}$$

$$V_{asy}\hat{\rho}_T = \frac{1}{T}(1-\rho^2)$$

$$V_{asy}\hat{\eta}_T = \frac{2\eta^4}{T}$$

Por medio de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\mu, \rho,$ y η fácilmente inferimos los estimadores de Máxima Verosimilitud de los parámetros de interés.

$$\hat{\lambda}_T = -log\hat{\rho}_T$$

$$\hat{\sigma}_T^2 = -\frac{2\log\hat{\rho}_T}{1-\hat{\rho}_T^2}\hat{\eta}_T^2$$

Sus varianzas asintóticas se derivan por el método δ. Obtenemos por ejemplo

$$V_{asy}\left(\hat{\lambda}_T\right) = \left[\frac{\partial(-log\rho)}{\partial\rho}\right]^2 V_{asy}\hat{\rho}_T$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1-\rho^2}{\rho^2}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{1 - exp - 2\lambda}{exp - 2\lambda}$$

Los estimadores $\hat{\lambda}_T$ y $\hat{\sigma}_T^2$ están correlacionados asintóticamente desde que ambos dependan de $\hat{\rho}_T$

Esto es una consecuencia de la acumulación de tiempo.

7. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LOS MODELOS

Respecto a la utilización de los modelos de tiempo continuo en finanzas existen diversas posiciones de los investigadores, a continuación se presentan tres puntos de vista, el primero, Welch (2010), hace una moderada crítica a los modelos estructurales, los dos siguientes Leland (1994) y Genser (2006), validan su uso:

7.1. Welch (2010)

En su artículo "ChallengingStructuralModels in CorporateFinance" hace una moderada crítica a los modelos estructurales y supedita su uso sólo a si éstos ofrecen mejores predicciones. Welch afirma que las teorías estructurales cuantitativas más destacadas en estructura de capital han operado bien sólo sobre pruebas superficiales y que las fuerzas económicas sobre las cuales ellos han sido construidos tienen poco poder predictivo. Adicionalmente asegura que por lo general los administradores de las compañías son muy activos cambiando las estructuras de capital por razones que aún no se entienden.

Sostiene el autor que errores de especificación de variables sugieren que en el futuro próximo los modelos estructurales en finanzas corporativas tendrán poca posibilidad de éxito, donde el éxito quiere decir mejores predicciones.

La economía moderna se basa en dos principios. El primero, la navaja de Occam dice que las teorías deberían ser sólo tan complejas como sea necesario. Un suplemento razonable añadiría que las teorías también deberían tener un buen sentido económico. Segundo, la economía positiva dictamina que una teoría podrá ser juzgada por su poder predictivo para la clase de fenómenos que intenta explicar (Friedman (1966, p.8))

Dependiendo del contexto, los modelos económicos pueden ser de formas más reducidas o más estructurales (basados en micro - fundamentales más profundos), y más enfocado a entregar predicciones cualitativas (estática comparativa) o predicciones cuantitativas. Aunque las características de los modelo pueden variar, aunque cualquier combinación puede ser factible, y aunque se apliquen rótulos a las teorías económicas, siempre serán parcialmente subjetivas, en el documento el autor se centra desproporcionalmente en las teorías que son relativamente más complejas, más estructurales, y que son construidas más para predicciones cuantitativas. Los modelos estructurales cuantitativos, originalmente fueron promovidos en macroeconomía: después de que Lucas (1976) criticó que los modelos de forma reducida podían ser inestables para evaluar la política, los macroeconomistas se enfocan más en modelos con micro-fundamentales relativamente más profundos, y después de que Mehra y Prescott (1985) mostraron que los modelos simples podrían ajustar la prima de capital sólo cualitativamente y no cuantitativamente, los macroeconomistas se enfocaron más en los aspectos cuantitativos de sus modelos.

Aunque todavía es nuevo en finanzas corporativas, el enfoque estructural cuantitativo ya ha cosechado múltiples premios Brattle en la Journal of Finance. Los ejemplos de los modelos estructurales cuantitativos en finanzas corporativas son Hennessy y Whited (2005), Ju, Parrino, Poteshman y Weisbach (2005), Hennessy y Whited (2007), Strebulaev (2007), Titman y Tsyplakov (2007), y DeAngelo, DeAngelo y Whited (2010). En el contexto teórico de la estructura óptima de capital, donde la tendencia ha sido especialmente fuerte, esta aproximación es a veces llamada la nueva "teoría de equilibrio dinámico". Sus componentes más comunes hoy son la presencia de impuestos, costos excesivos y fricciones, por ejemplo, como en Strebulaev (2007), y relacionados con financiación de proyectos, por ejemplo, como en Hennessy and Whited (2005).

A pesar del crecimiento destacado que ha tenido el uso de estos modelos, el autor presenta pruebas empíricas de que, en el mejor de los casos, estos modelos cuentan con poco soporte empírico. Esto los hace inadecuados para su uso en lo que son esencialmente los *“encompassing” models* (p. ej., los modelos que no solamente procuran destacar la fuerza marginal a lo largo de muchas otras, sino que atribuye toda las variaciones del índice de endeudamiento a sus propios mecanismos). El autor entonces destaca los desafíos que los modelos estructurales afrontan. En el proceso, también menciona algunas comunes malas percepciones, como la relación de causalidad y el rol de posibles fuerzas ortogonales omitidas en las teorías que abarcan. Aunque la mayor parte de estos desafíos se aplican a todas las teorías, muchos se aplican más convincentemente a sus más ambiciosas formas estructurales cuantitativas. Naturalmente, si hay algún futuro para los modelos estructurales cuantitativos estos deben predecir mejor que modelos alternativos (incluyendo la hipótesis nula, su hermano más simple de forma reducida, y otros modelos cualitativos y cuantitativos), entonces estos modelos estructurales serían más útiles que estas otras alternativas. Sin embargo, el autor esboza los motivos por los cuales es improbable que tales modelos puedan ser desarrollados en el corto plazo.

Más importante aún, el artículo argumenta que cualquier modelo económico debería pasar cuatro obstáculos:

1. Es la teoría simple y tiene sentido?

Los modelos estructurales más recientes pasan este obstáculo. Ellos son construidos sobre un pequeño número de fuerzas simples y plausibles, a pesar de tener especificidad discutible y complejidad en sus detalles. En el artículo el autor ilustra como son construidas las teorías estructurales, y discute temas de realismo relativo relación de causalidad. Desde luego, incluso cuando es calibrado empíricamente, el modelo estructural cuantitativo que pasa este obstáculo es todavía sólo una hipótesis. Desde Galileo, los científicos han estado de acuerdo en que éste es el rol de las pruebas empíricas para distinguirse entre las teorías, y hay muchas alternativas posibles que puede explicar opciones de gestión de la estructura de capital.

2. Encaja la teoría con los datos *dentro-de-muestra*?

La prueba de datos *dentro-de-muestra* es una primera barrera empírica. Pero las pruebas pueden ser más o menos rigurosas. En la práctica, teorías estructurales en finanzas corporativas han pasado sólo pruebas empíricas que serían análogas a juzgar por las teorías de forma reducida cualitativas por el estadístico-t de una variable en una regresión *dentro-de-muestra*, sin controles para explicaciones competitivas y variables confusas, y sin diagnósticos y correcciones para una gama entera de errores posibles por falta de especificaciones. Además, algunas de estas teorías fueron diseñadas para explicar una correlación particular observada en artículos anteriores. En tales casos, vistos desde una perspectiva global, el acercamiento estructural ha sido análogo a la búsqueda de un estadístico-t bueno en primera instancia, para luego encontrar soporte a un modelo específico construido para entregar esta estadística. En resumidas cuentas, las pruebas existentes *dentro-de-muestra* de teorías estructurales cuantitativas hasta el momento parecen superficiales.

Ningún modelo estructural cuantitativo reciente en finanzas corporativas ha demostrado empíricamente que es construido sobre un efecto de primer orden que describe la actividad gerencial. Ninguno puede explicar bien el comportamiento, mucho menos con mejor decisión que los modelos alternativos.

Presenta también las cuestiones que a priori cualquier teoría de estructura de capital debe tener. Esto incluye, sobre todo, la presencia de muchas otras fuerzas importantes. Incluso si las fuerzas omitidas son ortogonales a fuerzas modeladas pero inobservables fuerzas estructurales (y esto es raras veces probable en un contexto de finanzas corporativas), las fuerzas omitidas todavía pueden afectar la inferencia. Así, la inferencia sin el poder directo de una variable estructural baja es intrínsecamente no fiable. Pero hay también cuestiones cotidianas más importantes en un contexto de finanzas corporativas, como cuestiones de medida por poderes, correlaciones residuales, y tendencias de selección. Cuando no se especifica o se controla, estas cuestiones conllevan a más problemas inespecíficos que requieren ajuste y control. La presencia de todos estos aspectos inespecíficos en el contexto de la estructura de capital sugiere que no debería ser una sorpresa que los actuales modelos estructurales (que la mayoría los ignoró) no se ajusten bien. Este artículo argumenta que el control de estos aspectos es más sencillo en un contexto no estructural, por lo tanto, un modelamiento estructural parece ser prematuro. Puede ser mejor frenar nuestras ambiciones en este punto, dice, y centrarse primero en descubrir cuáles son las más importantes correlaciones económicas con las actividades del gerenciamiento de estructura de capital, y luego en establecer empíricamente que las fuerzas parezcan exógenas. Es sólo cuando los modelos estructurales se basan en las conocidas fuerzas dominantes exógenas que llevan probablemente al éxito estos modelos.

3. La teoría predice fuera-de-muestra?

Los modelos deberían tener una mejor predicción por fuera-de-muestra que las alternativas más simples, por supuesto, contando con variación de la muestra y errores de estimación. Las pruebas fuera-de-muestra, también proporcionan atractivas conjeturas incondicionales que cualquier teoría debe vencer.

4. Es la teoría ajustada y predice bien durante cuasi–experimentos?

Los cuasi-experimentos a menudo son las pruebas más poderosas de cualquier teoría. Se pueden ejecutar dentro-de-muestra, o, mejor aún, fuera-de-muestra. Sólo requieren la presencia de un choque exógeno conocido aplicado a los parámetros de entrada del modelo. Se han producido fuertes cambios en el código tributario, en los costos de distribución de títulos valores, en la ley de bancarrota, en las características de los títulos valores, en la tecnología y rentabilidad, y en muchos otros parámetros de entrada en la que los actuales modelos de equilibrio dinámico o de sus modelos alternativos se han construido.

Las pruebas de los cuasi-experimentos son particularmente apropiadas para las teorías estructurales, porque ambas son construidas para resaltar la más profunda causalidad.Las teorías se basan en los micro-fundamentales sobre todo para dar la estabilidad del modelo en presencia de hechos contrafactuales[5].Las pruebas cuasi-experimentales son también muy adecuadas para los modelos cuantitativos. Estos modelos no existen simplemente para ilustrar un efecto conceptual o de predecir cualitativamente, también para predecir valores específicos. Por lo tanto, pueden predecir los resultados exactos cuando se produce un experimento.

Los cuatro obstáculos son importantes. Ellos deben ser vistos como algo relativo a las teorías competitivas. Estas teorías competitivas, puede ser condicionales (es decir, contra otra variable hipotética por otra teoría) o incondicionales (es decir, contra una

[5]Se denomina contrafactual o contrafáctico a todo evento o a toda situación que no ha acontecido en el universo actualmente observable por la investigación humana pero que pudiera haber ocurrido.

hipótesis nula de comportamiento aleatorio). A primera vista, los obstáculos pueden parecer difíciles, pero son adecuados, argumenta el auto.

Finalmente Welch concluye en que la elección de un tipo de modelamiento se reduce a los costos y beneficios relativos de una aplicación económica en particular. Un modelo estructural cuantitativo parece más atractivo que modelos cualitativos de forma reducida cuando el fenómeno económico es relativamente simple o cuando las consecuencias de la desviación son rígidas (como el arbitraje), cuando las fuerzas de primer orden, son conocidas, a priori, y cuando el riesgo de aspectos inespecíficos en el modelo (por ejemplo como las variables omitidas, la identificación de variaciones exógenas , errores en las variables, problemas de agregación, errores funcionales de forma, etc.) son menores. Los modelos estructurales rara vez son la herramienta adecuada para ilustrar que algunos derivados comparativos estáticos son posibles, o para determinar, entre muchos posibles efectos económicos cuáles son importantes. Los modelos cualitativos de forma reducida pueden hacer esto de una manera más sencilla. Los modelos estructurales cuantitativos, rara vez son la herramienta adecuada para saber qué variables son causales. La causalidad en modelos estructurales es una suposición. Pruebas cuasi-experimentales de modelos sencillos de forma reducida, soportando múltiples efectos constantes, pueden hacer esto basados en la evidencia.

El autor argumenta que el comportamiento de las empresas es un fenómeno muy complejo, donde nosotros aun no entendemos las motivaciones gerenciales más importantes. Los errores no son inherentemente sujetos a la fácil corrección por el arbitraje de terceros. No hay mucha evidencia empírica que apunte a los mecanismos dominantes. Por lo tanto, sostiene que las finanzas corporativas no parecen ser un terreno fértil para el enfoque estructural.

7.2. Leland (1994)

En su trabajo “CorporateDebtValue, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure”, utiliza modelos estructurales y defiende su utilización.

Este artículo examina los valores de la deuda corporativa y la estructura del capital en un marco analítico unificado. Deriva resultados de forma cerrada para el valor de la deuda riesgosa de largo plazo y los márgenes de rendimiento, y para la estructura óptima de capital, cuando el valor de los activos de la empresa siguen un proceso de difusión con volatilidad constante. Los valores de la deuda y el apalancamiento óptimo están directamente relacionados al riesgo de la empresa, impuestos, costos de bancarrota, las tasas de interés libres de riesgo, las tasas de pago, y los contratos de los bonos. Los resultados esclarecen el diferente comportamiento de los bonos basura versus los bonos de grado de inversión, y aspectos de la sustitución de activos, con compromiso de recompra de deuda y renegociación de la misma.

El valor de la deuda corporativa y la estructura de capital son variables interrelacionadas. Los valores de la deuda (y por lo tanto los márgenes de rentabilidad) no se pueden determinar sin conocer la estructura de capital de la empresa, que afecta el potencial de incumplimiento y bancarrota. Pero la estructura de capital no se puede optimizar sin el efecto de apalancamiento sobre el valor de la deuda.

La teoría tradicional de estructura de capital, cuyos pioneros fueron Modigliani y Miller, sostiene que los impuestos son determinantes fundamentales de una estructura óptima de capital. A medida que aumenta el apalancamiento, la ventaja fiscal de la deuda al final se verá compensada por un aumento del costo de la deuda, lo que refleja la mayor probabilidad de dificultades financieras. Mientras se identifican algunos determinantes principales para una estructura óptima de capital, esta teoría no ha sido tan útil en la práctica, ya que sólo proporciona una guía cualitativa.

Brennan y Schwartz (1978) ofrecen el primer examen cuantitativo de apalancamiento óptimo. Utilizan técnicas numéricas para determinar el apalancamiento óptimo cuando el valor sin deuda de la empresa sigue un proceso de difusión con volatilidad constante. A pesar de un comienzo importante, el análisis de Brennan y Schwartz tiene tres limitaciones.

La primera y más importante, su aproximación numérica se opone a las soluciones generales de forma cerrada para el valor de la deuda de alto riesgo y el apalancamiento óptimo. Ejemplos numéricos sugieren algunos posibles resultados estáticos comparativos, pero no puede generalizarse.

En segundo lugar, su análisis se centra en el caso especial en el que la bancarrota se desencadena cuando el valor de los activos de la empresa caehasta igualarel valor del saldo de capital de la deuda. Esta disposición se aproxima a la deuda con *covenant* de patrimonio neto positivo. Pero no es el único nisiquiera la situación típica. Debemos demostrar quecondiciones desencadenantes de bancarrota, incluidas las determinadas de manera endógena, conducen a valores muy diferentes de la deuda y de estructura óptima de capital.

Finalmente, Brennan y Schwartz (1978) consideran los cambios en la estructura financiera que duran sólo hasta que venzan los bonos. Una fecha de vencimiento es necesaria para su algoritmo numérico; constantes cambios en la estructura de capital no se analizande forma explícita.

Este artículo considera dos posibles determinantes de bancarrota. El primero es cuando la bancarrota se desencadena (endógenamente) por la incapacidad de la empresa para aumentar el capital social lo suficiente para cumplir con sus obligaciones de deuda actual. El segundo es el caso de Brennan y Schwartz con un *covenant* de patrimonio neto positivo. La deuda con este tipo de covenant se denominará deuda protegida.

Podemos deducir resultados de forma cerrada examinando títulos corporativos que dependen del valor de la empresa pero que son de otra manera independientes del tiempo. Sin embargo, los títulos de deuda en general, tienen una fecha de vencimiento específica y por tanto tiene flujos de efectivo y valores dependientes del tiempo. La independencia del tiempo, no obstante, puede estar justificada, tal vez como una aproximación, al menos en dos formas. Primero, si la deuda tiene suficientemente plazo de vencimiento, la devolución del capital efectivamente no tiene ningún valor y puede ser ignorado. No son nuevoslos horizontes muy largos de tiempo para las obligaciones fijas, ya sea en la teoría o en la práctica. El argumento original de Modigliani y Miller (1958) asume la deuda con plazo infinito. Merton (1974) y Black y Cox (1976) consideran infinito el plazo de la deuda en un modelo dinámico explícito. Desde 1752 el Banco de Inglaterra tiene, en ocasiones, emisiones consolidadas de bonos que prometen un cupón fijo y sin fecha final de vencimiento. Y las acciones preferentes normalmente pagan un dividendo fijo sin límite de tiempo.

Una alternativa de entorno independiente del tiempo, es cuando, en cada momento, el vencimiento es reprogramado a una tasa de interés fija (o de prima fija sobre una tasa de referencia libre de riesgo) salvo que se termine por incumplimiento de un valor mínimo, como un *covenant* de patrimonio neto positivo. Esta situación se parece a algunos contratos de crédito rotativo.

La independencia del tiempo permite la derivación de soluciones de forma cerrada para deuda de riesgo, dada la estructura de capital. Estos resultados amplían los de Merton (1974) y Black y Cox (1976) para incluir los impuestos, costos de bancarrota, y cláusulas de protección (si existen). Luego se utiliza para obtener formas de solución cerradas para la estructura óptima de capital. El análisis aborda las siguientes preguntas:

- ¿Cómo los márgenes de rendimiento sobre la deuda corporativa dependen del apalancamiento, del riesgo de la firma, de los impuestos, pagos, cláusulas de protección, y los costos de bancarrota?

- ¿El valor de los bonos de alto riesgo se comportan cualitativamente de maneras diferentes a los valores de los bonos en grado de inversión?

- ¿Cuál es la cantidad óptima de deuda, y cómo esto dependerá de las tasas de interés libres de riesgo, el riesgo de la firma, los impuestos, cláusulas de protección, y los costos de bancarrota?

- ¿Cómo un *pacto* de patrimonio neto positivo afecta el problema potencial de agencia entre los tenedores de bonos y accionistas?

- ¿Cuándo se puede esperar renegociación de la deuda antes de la bancarrota, y puede lograr resultados que la renegociación de recompra de deuda no puede?

El modelo sigue a Modigliani y Miller (1958), Merton (1974), y Brennan y Schwartz (1978) en el supuesto de:

i) que las actividades de la empresa se hubiera modificado por la estructura financiera, y

ii) que las decisiones de la estructura de capital, una vez tomadas, no son modificadas con posterioridad.

Mucha de la literatura reciente en finanzas corporativas examina posible variación del supuesto.

Véase, por ejemplo, el estudio realizado por Harris y Raviv (1991). Una variante especialmente importante es el problema de la sustitución de activos, cuando los accionistas de las empresas con alto grado de endeudamiento pueden transferir valor a sí mismos desde los tenedores de bonos eligiendo actividades más riesgosas. Si se conociera la forma funcional adecuada, la retroalimentación de la estructura de capital para la volatilidad podría ser recogida en una extensión de nuestro modelo, con el probable costo de perder resultados de forma cerrada. Sin embargo, un modelo más simple que ignora tal retroalimentación potencial aún sirve para algunos propósitos importantes:

1. Los impuestos y los costos de bancarrota condicionarán la estructura de capital óptima, aun si la sustitución de activos es factible, conocer estas relaciones en un modelo básico proveerán conocimientos útiles para situaciones más complejas.

2. La magnitud potencial del problema de la sustitución de activos puede ser identificada para conocer qué tan sensibles son los valores de deuda y patrimonio al riesgo de las actividades elegidas.

3. Los contratos de bonos pueden limitar directamente las oportunidades de las empresas de alterar el riesgo de sus actividades. En otros casos, los contratos de bonos indirectamente puede limitar la sustitución de activos mediante la reducción de los posibles conflictos de intereses entre accionistas y tenedores de bonos. En este artículo el autor muestra que un *covenant* patrimonio neto positivo puede eliminar el incentivo de la empresa de aumentar el riesgo.

La segunda hipótesis principal es que el valor nominal de la deuda, una vez emitida, se mantendrá sin cambios a través del tiempo. Esto no es tan irracional como podría parecer. En el trabajo, el autor muestra que la emisión de deuda adicional perjudicará a los actuales titulares de la deuda, y suele ser proscrita por los contratos de bonos.

Muestran, además, las reducciones marginales de la deuda a través de recompras que afectarán a los actuales accionistas. Estas consideraciones pueden impedir los continuos cambios en el saldo de la deuda, incluso si los costos de refinanciación son cero.

Sin embargo, grandes (discontinuas) recompras de deuda a través de oferta pública de adquisición, en algunos casos puede beneficiar tanto a los accionistas como a los tenedores de bonos, si el costo de refinanciación no es excesivo. Un modelo dinámico de estructura de capital que capture estas posibilidades es deseable pero considerablemente más difícil. Los primeros pasos en esta dirección han sido realizados en importantes trabajos de Kane, Marcus y Mac Donald (1984) y Fischer, Jeinkel y Zechner (1989). Sus análisis plantean varias dificultades, que Leland evita con la adopción de la hipótesis estática compartida con los autores anteriores.

7.3. Genser(2006)

En su trabajo "A Structural Framework forthePricing of CorporateSecurities" reitera que uno de los problemas de los modelos de forma reducida es su dificultad de interpretación en un sentido económico. Siendo técnicamente avanzados, los modelos de forma reducida a menudo carecen de un modelo económico y especialmente disfrazan los supuestos económicos. Si fijar los precios de los títulos valores es el único propósito del ejercicio, podría no necesitarse un modelo económico. Sin embargo, si los que se quiere es entender las variaciones de los precios, un vínculo serio con la economía subyacente es importante.

En los últimos años, una refinada fijación de precios de los títulos valores corporativos ha entrado en atención de académicos y profesionales. Como la investigación empírica mostró, los modelos tradicionales de valoración de activos no podían poner precio a lo títulos valores corporativos suficientemente bien. Las propiedades de las series de tiempo de los valores cotizados eran difíciles de replicar.

En la búsqueda de modelos más avanzados que capturaran los resultados empíricos, los investigadores siguieron dos enfoques. La primera corriente de investigación correspondió a las propiedades de las series de tiempo de los títulos valores corporativos directamente. Nos referimos a esta clase de modelos como de forma reducida. Se asume que los precios de los títulos valores siguen modelos estocásticos más avanzados, en especial los modelos con, por ejemplo, volatilidad no constante en el tiempo. Todos los estudios de este tipo no tienen en cuenta los aspectos económicos de las empresas emisoras, sino que simplemente asumen un comportamiento estocástico de los títulos valores o de su variables de estado. Por el contrario, una segunda corriente de literatura económica se desarrolló para el estudio de las empresas. Llamamos a estos tipos de modelos, estructurales, debido a que la responsabilidad limitada de los accionistas es modelada explícitamente como una función del valor de la empresa.

Uno de los problemas del enfoque de forma reducida es su dificultad de interpretación en un sentido económico. Siendo técnicamente avanzados, los modelos de forma reducida a menudo carecen de un modelo económico y especialmente disfrazan los supuestos económicos. Si fijar los precios de los títulos valores es el único propósito del ejercicio, podría no necesitar un modelo económico. Sin embargo, si queremos entender las variaciones de precios, un vínculo serio con la economía subyacente parece importante.

La literatura sobre riesgo de crédito incluso adoptó esta terminología particular para clasificar sus modelos. Mientras que los modelos de forma reducida toman cada título valor de la empresa y modelan el *default* de la empresa como un evento de Poisson, los modelos estructurales de riesgo de crédito se concentran en un modelo del valor de la empresa.

La bancarrota ocurre cuando el valor de la empresa cae por primera vez a un nivel lo suficientemente bajo como para que los accionistas no estén dispuestos a apoyar a la empresa por un período de tiempo más largo, o cuando algunas condiciones contractuales llevan a la empresa a la bancarrota. La configuración de los modelos estructurales permite extensiones en la toma decisiones refinadas y el uso argumentos de la teoría de juegos.

Modelos estructurales de riesgo de crédito fueron iniciados por los artículos de Black y Scholes (1973) y Merton (1974). Ellos asumen que el valor de la empresa sigue un movimiento browniano geométrico. La firma cuenta con un bono cero cupón de duración finita que la empresa pagará si el valor final de la firma es superior a la deuda hipotética al vencimiento. De lo contrario la empresa incumple su deuda. Black y Cox (1976) amplían esta configuración al permitir la bancarrota antes del vencimiento de la deuda cuando el valor de la empresa toca la barrera de bancarrota por primera vez.

La ampliación de la configuración básica introdujo cambios la estructura óptima de capital futura. Estos modelos dinámicos de estructura de capital se analizaron por ejemplo, en Fischer, Heinkel y Zechner (1989a) y en Fischer, Heinkel y Zechner (1989b). En ambos documentos la estructura de capital de la empresa es modelada de forma endógena en una configuración de tiempo continuo asumiendo que los accionistas optimizan el valor de su capital. Ellos no se concentran en el riesgo de crédito y bancarrota, pero usan un argumento de las finanzas corporativas a fin de explicar empíricamente índices observados de apalancamiento y las primas de las opciones Call de las emisiones de bonos corporativos rescatables. La idea de que los accionistas maximicen el valor de su derecho cuando la empresa se apalanca o cuando se emita deuda rescatable es desarrollada por Leland (1994) y Leland y Toft (1996). Se centran en la valoración de la deuda corporativa y la sensibilidad del valor de la deuda a ciertos parámetros del modelo, extendiendo el esquema de Fischer et al. (1989a) y obtener el nivel de valor de la empresa en el que los accionistas de forma endógena inducen la quiebra, vinculando así la estructura de capital dinámico con los modelos de riesgo de crédito.

Sin embargo, los modelos dinámicos de estructura de capital de la primera generación causaron confusión. Los modelos dinámicos están controlados por un proceso estocástico del valor de la empresa desapalancada que se puede interpretar como el valor de la empresa totalmente financiada con capital de los accionistas. Todos los demás valores de interés como el valor de la empresa apalancada, los valores de la deuda, los índices de apalancamiento, etc. se derivan de una decisión óptima de presupuesto con respecto al proceso de este valor de la empresa desapalancada. En tal configuración, sin embargo, los valores de la empresa apalancada y desapalancada existen al mismo tiempo. La fijación de precios de estos valores es sólo libre de arbitraje bajo ciertas condiciones que no suelen ser claramente establecidas porque no son evidentes si se modela el valor de la empresa directamente.

Una de las razones para esta confusión sobre los valores de la empresa apalancada o desapalancada en modelos dinámicos de estructura de capital, se debe a la falta de una definición precisa del valor de la empresa. Uno podría pensar en el valor de mercado de los activos como un candidato natural. Sin embargo, el valor de mercado de los activos es diferente al valor generado por estos activos. La introducción de impuestos personales y corporativos, los costos de bancarrota y deuda, desdibuja además los modelos y complica la interpretación. La otra razón es que el valor de la empresa es modelada directamente mientras los pagos a los tenedores de títulos corporativos están definidos en términos de flujos de efectivo. Existe poca claridad respecto de lo que reciben los acreedores, ya que puede ocurrir que el total de los flujos de efectivo pagados a los acreedores no sumen los fondos disponibles de la empresa. Tomando la política de inversión como dada y sin cambios, la falta de correspondencia conduce a incoherencias en los modelos.

Dice Genser en su trabajo que enfoques más recientes de modelos dinámicos de estructura de capital, por ejemplo, Goldstein et al. (2001), Christensen et al. (2000), y Dangl y Zechner (2004), suponen un proceso estocástico para una medida de ingreso que no se ve afectada por la decisión de estructura de capital. Lautilidad antes de intereses e impuestos (EBIT) o el flujo de caja libre (FCF) son los candidatos naturales.

Ambas medidas de ingreso describen las utilidades o flujos de efectivo de una empresa en la que los intereses de todos los acreedores financieros, como los accionistas, tenedores de bonos, y el gobierno, deben ser respetadas. El valor de la empresa total - es decir, el valor de todas las acreencias - se puede determinar mediante el descuento de la medida del ingreso a una tasa de descuento apropiada. Una de las ventajas más importantes de los modelos de estructura de capital basada en EBIT es por lo tanto pensar en los flujos de caja descontados que generan valor. Esto obliga a una división del EBIT dentro de las diferentes acreencias, lo que facilita la interpretación de los valores de los títulos calculados. La consistencia es permanentemente revisada. Se debe tener en cuenta que en este esquema, los precios de los bonos y cotizaciones bursátiles se puede calcular sin confusión tanto para valores de la firma apalancada como para la firma desapalancada, en el sentido de Leland (1994). La conexión necesaria entre los dos valores artificiales se hace evidente.

Sin embargo, los modelos estructurales de riesgo de crédito han sido en su mayoría ilustrados por estudios de simulación. Los resultados de la simulación se han comparado para observar los coeficientes de apalancamiento, las primas de las call o los indicadores financieros de otras empresas específicas. Prometedor es que la mayoría de las simulaciones indican que estos modelos dinámicos de estructura de capital son capaces de explicar los fenómenos observados y el comportamiento de los precios razonablemente bien.

Ericsson y Reneby (2004) realizaron la primera prueba empírica directa de los modelos estructurales de riesgo crediticio. Una de las razones de la falta de investigación empírica se deriva del hecho de que los modelos propuestos ofrecen ajustes económicos que parecen demasiado restrictivos para los datos disponibles. Goldstein et al. (2001) y Leland (1994), por ejemplo, analizan sólo deuda corporativa con plazo infinito. Una deuda perpetua no es común en la práctica. Además, estos modelos no pueden incorporar una estructura rica en capital en múltiples emisiones de deuda. Como resultado, los datos de las series de tiempo de los precios de bonos corporativos con plazo finito no pueden ser utilizados para probar estos modelos. Esto es cierto para el modelo de Leland y Toft (1996). A pesar de que Leland y Toft (1996) presentan una fórmula para la deuda con plazo finito, su modelo padece el supuesto de refinanciación específica de que en cada instante la empresa emite una porción de un bono de plazo fijo. Así, la empresa mantiene bonos que vencen en cualquier instante hasta el plazo fijo. Exactamente este supuesto hace que el modelo sea difícil de probar.

Este estudio de Genser se ocupa de algunas de las deficiencias de la literatura existente sobre los modelos estructurales de riesgo de crédito. Desarrolla un marco estructural económicamente consistente con el precio de títulos corporativos que está abierto a la aplicación empírica utilizando varias series de tiempo de precios de los títulos valores corporativos. En particular:

Modelos estructurales de riesgo de crédito se encuentran insertos en un modelo económico. Estos muestran cómo el modelo matemático evoluciona de forma natural, sin fuertes supuestos económicos. Genser relaciona su esquema de modelamiento con los modelos estructurales tradicionales y resuelve la confusión causada por la interpretación errónea de la literatura tradicional.

Genser modela diferentes emisiones de deuda simultáneamente para estructuras de capital complejas. Múltiples emisiones de deuda demanda un modelamiento muy cuidadoso de los eventos de bancarrota porque el valor de la bancarrota tiene que ser dividido entre los acreedores. Para esto el Genser propone una solución analítica sencilla.

El esquema de títulos valores corporativos de Genser no se basa en supuestos de proceso específico para EBIT. Por lo tanto, extiende los modelos de riesgo de crédito basados en la EBIT a procesos estocásticos alternativos. Para un manejo analítico solo se requiere resolver pocas ecuaciones. Genser presenta un ejemplo de la demanda por soluciones bajo el supuesto de que la EBIT sigue un movimiento browniano aritmético o geométrico. Esto abre la discusión de si el movimiento browniano geométrico es el mejor supuesto para un proceso de EBIT o si el movimiento browniano aritmético puede ser más adecuado. Genser está a favor del movimiento browniano aritmético, ya que cubre mejor la situación económica de las empresas que el movimiento browniano geométrico.

• El enfoque de Genser es viable para la fijación de precios de toda clase de títulos valores corporativos, tales como opciones sobre el capital y que los métodos numéricos comunes se puede utilizar para ampliar la solución analítica básica a óptima para bancarrota y estructuras tributarias más complicadas.

• Dado que el esquema de títulos valores corporativos permite una compleja estructura de capital, las series de tiempo de todo tipo de títulos corporativos se pueden utilizar para estimación. En un estudio de simulación, Genser muestra que su modelo puede ser implementado directamente usando series de tiempo simuladas de los precios de acciones y bonos. Los parámetros pueden ser identificados por el filtro de Kalman, propuesto por Genser.

• Genser , presenta un caso fuerte para enfoques estructurales del precio de los activos. Muestra que en realidad se pueden replicar los hallazgos empíricos, como las propiedades de los precios de opciones sobre acciones comunes. No es necesario asumir complicados procesos estocásticos para obtener estructuras observables de las volatilidades implícitas de Black y Scholes (1973) y para explicar la distribución de los rendimientos de capital implícitos.

8. CONCLUSIONES

A pesar de las críticas a los modelos estructurales, bien vale la pena continuar con el estudio de este tipo de modelos y tratar de adaptar algunos a las empresas colombianas. Podría comenzarse con estudios de simulación, antes de intentar implementarlos en empresas reales. A pesar de la dificultad, estos se convertirían en una alternativa experimental para la búsqueda de una estructura de capital óptima.

9. BIBLIOGRAFÍA

Brennan, Michael, and Eduardo Schwartz. 1978. Corporate income taxes, valuation, and the problem of optimal capital structure. *Journal of Business* 51:103–14.

Merton, Robert. 1974. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance* 29:449–69.
Black, Fischer, and John Cox. 1976. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance* 31:351–67.

Black, Fischer, and Myron Scholes. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81:637–54.

Genser, Michael (2006). A Structural framework for the pricing corporate securities. Springer.

Leland, H. (1994), "Corporate Debt Value, Bond Covenants and Optimal Capital Structure", Journal of Finance, 51, 987-1019.

Merton, R. (1994), "On the Pricing of Corporate Debt", Journal of Finance, 29, 449-470.

Modigliani, Franco and Miller(1958), Merton. The cost of Capital, Corporate Finance, and the Theory of Investment. The American Economic Review, Volume XLVII, number three.

Rochet, J.C. and S. Villeneuve (2005), "Corporate Portfolio Management", Annals of Finance, 1, 225-243.

Rochet, J.C. and S. Villeneuve (2004), "Liquidity Risk and Corporate Demand for Hedging", IDEI WP 254

Bjork, Tomas. (2004) Arbitrage theory in continuous time (Short Version).