ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA VARIEDAD k-EXPONENCIAL

Carlos Mario Cartagena Marín

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Junio 2014

Algunas ecuaciones diferenciales en la variedad k-exponencial

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Carlos Mario Cartagena Marín

Director

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Doctor en Ciencias Matemáticas

Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Medellín

Junio 2014

Dedicatoria

Dedico esta trabajo a: Nacho y Nena por su invaluable apoyo en todos los aspectos de mi vida que sin duda alguna me han permitido dar un paso más, pese a las dificultades. También a mis jóvenes amigos Julián, Sebas, Henry, Juan y David, por darme tanta alegrías, confianza, apoyo, haciéndome ver una vez más que las matemáticas, la música y la amisad sincera me han salvado de mi mismo.

Agradecimientos

Agradezco a Gabriel Ignacio Loaiza por su invaluable ayuda en la productiva generación de estas ideas y al grupo de investigación Análisis Funcional y Aplicaciones por su motivación en las futuras aplicaciones de estos temas.

Resumen

En este trabajo se discute la formulación de ecuaciones diferenciales, ordinarias y escásticas, en veriedades de información estadística. Se propone un campo vectorial sobre la variedad de información estadística k-exponencial, siendo k el índice de entropía según Kaniadakis, que defina el modelo correspondiente a la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo. También se divulgan aspectos importantes sobre la consideración de ecuaciones diferenciales en variedades de información estadística.

Índice general

Introducción

Las teorías de la probabilidad, el análisis convexo, el análisis funcional, la geometría diferencial y el álgebra de grupos, han cimentado la rica estructura que se ha desarrollado en la teoría matemática de modelos estadísticos, que a su vez ha servido de soporte para el desarrollo de la mecánica estadística no extensiva tanto en la versión según Tsallis [28, 29] como en la de Kaniadakis [5, 6]. La versión de Tsallis generaliza la mecánica estadística clásica que se fundamenta en el funcional de entropía de Shannon y el principio de máxima entropía de E. Jaynes, reforlmulando el funcional de entropía en términos de un parámetro real q que es llamado índice de entropía de manera que la teoria clásica es recuperada cuando q tiende a 1. Por su parte, la versión según Kaniadakis, en forma análoga, generaliza a la necánica estadística mediante un parámetro k (como indice de entropía) y recupera a la teoría clásica cuando k tiende a 0.

Una forma de vincular algunos problemas que han sido abordados con cadenas de Makcov o se relacionan con procesos estocásticos, es vincularlos con los conceptos de información y entropía considerando variedades de información estadística que induzcan geometrías adecuadas y permitan la formulación de ecuaciones diferenciales definidas por campos vectoriales sobre dichas variedades.

Algunos conceptos introducidos en teoría de inferencia por Ronald Fisher tales como verosimilitud e información, fueron relacionados mediante geometría de variedades Riemannianas por C. R. Rao (1945) [25] y Hefreeys (1946) [21]. En ambos trabajos es fundamental que la matriz de información de Fisher sea una métrica (en el sentido de la geometría diferencial) en el conjunto de las densidades que pertenecen a un modelo estadístico dado. Los Modelos exponenciales fueron introducidos por B.O. Koopman (1936) para analizar la idea de suficiencia en la forma propuesta por Fisher. La relación entre información de Fisher y estructura exponencial fue aclarada por primera vez por N. Cencov (1982). Luego, B. Efron (1975) [20] introduce el concepto de modelo de curva exponencial. En dos artículos de discusión, Dawid (1975) y (1977) [19] da el primer esbozo de una geometría no-paramétrica en la teoría de los modelos estadísticos.

Más tarde, H. Nagaoka y Amari S. (1982) desarrollan diferentes geometrías asociadas a un modelo estadístico paramétrico y Amari denomina esta teoría Geometría de la Información [2, 3]. Un ulterior desarrollo consiste en el uso formal de la noción de variedad de Banach, construida para evitar el uso de cualquier parametrización específica y para cubrir rigurosamente el caso de un número infinito de parámetros, por ejemplo, el trabajo de Pistone y Sempi (1995) [10]. Estos estudios son interesantes tanto desde el punto de vista conceptual como metodológico. La literatura actual presenta muchos trabajos relacionados con distintas áreas, por ejemplo, en algoritmos genéticos.

Un referente importante para ésta propuesta, es el artículo publicado en 1995 por G. Pistone y C. Sempi [10], titulado *An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one*. En dicho trabajo, se construye una variedad de Banach sobre las funciones de densidad de probabilidad no parametrizadas, la cual permite interpretar la entropía clásica relativa a dos funciones de densidad de probabilidad que estén conectadas por un modelo exponencial. Dicha variedad es conocida en la literatura como variedad de información estadística exponencial de Pistone y Sempi y ha permitido también logros en el estudio de los estados físicos de sistemas clásicos y cuánticos, como en los trabajos que aparecen después de 2004 [22], donde espacios de Orlicz son asociados a álgebras de Von Newman de operadores sobre espacios de Hilbert. El trabajo de Pistone y Sempi desarrolló una teoría de los mejores estimadores (de mínima varianza) entre todos los estimadores localmente insesgados en la estimación no paramétrica para la teoría estadística clásica. Recientemente G. Pistone y D. Brigo discuten un problema relativo a la evolución de las densidades relativas a difusiones de Ito en el marco de la variedad de información estadística, desarrollando un aproximación rigurosa al problema y dando algunos ejemplos. Es así como en este trabajo de Pistone, y en otros, aparecen formas de relacionar análisis estocástico con variedades de información.

Por otro lado, Amari y Ohara [1] dieron una estructura geométrica para la familia de modelos q-exponenciales, formalizadas por Naudth [24] que, para el caso paramétrico, plantea una q-deformación de la variedad de información estándar construida por Amari. Para la nueva variedad de Amari, se caracterizan espacios tangentes en términos de un tipo de divergencias que difieren de la de Tsallis por una constante funcional. De otro lado, G. Loaiza y H. R. Quiceno [8], desarrollaron una variedad de Banach estadística q-exponencial, caracterizando espacios tangentes mediante entropías relativas según la mecánica estadística de Tsallis [8] e introducen una métrica que induce una geometría Riemanniana plana [9]. Lo anterior establece elementos para buscar nuevos desarrollos en la variedad de Banach q-exponencial y en la variedad estadística q-deformada de Amari, de forma análoga a los obtenidos para la construcción estándar hecha por Pistone y Sempi. También Pistone introdujo una variedad de información k-exponencial, en términos del parámetro k de entropía para la mecánica estadística según Kaniadakis, y describe la correspondiente geometría riemanniana.

En los planteamientos anteriores, es necesaria la consideración de campos vectoriales sobre el haz tangente asociado a la variedad estadística que se esté tratando. Dichos campos vectoriales, son importantes en sí, ya que ofrecen la oportunidad de definir ecuaciones diferenciales para analizar la dinámica de variables o parámetros de un sistema que se desea modelar. El estudio de ecuaciones diferenciales en este contexto puede ser determinista o estocástico. Al respecto, Pistone ha presentado estudios respecto a la variedad exponencial en [12] y respecto a la variedad k-exponencial, sólo ha mostrado estudios determinísticos para ecuaciones diferenciales de primer orden [11].

En el presente trabajo se propone un campo vectorial que defina a una ecuación diferencial estocástica cuya solución sea la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo; lo cual corresponde al modelo más natural para la variedad k-exponencial. Además se da una descripción de una ecuación diferencial odinaria de segundo orden en la variedad k-exponencial. Tambíen se aoprovecha para divulgar los resultados existentes, hasta la fecha, sobre ecuaciones diferenciales en las variedades mencionadas.

La memoria de tesis se presenta de la siguiente forma. En el primer capítulo se dan descripciones de los campos vectoriales definidos en variedades de Banach. En el segundo capítulo se presentan resultados obtenidos por G. Pistone, sobre ecuaciones diferenciales en la variedad de información exponencial. En el tercer capítulo se consideran ecuaciones diferenciales en la variedad k-exponencial, exponiendo aspectos matemáticos de la teoría de G. Kaniadakis, describiendo la variedad k-exponencial, mostrando resultados sobre ecuaciones diferencales ordinarias en la variedad k-exponencial y en la última sección se expone el resultado principal del presente trabajo, proponiendo una campo vectorial que defina al modelo correspondienta a la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo.

De acuerdo a lo anterior, se plantean los siguientes objetivos.

Objetivo general

Describir ecuaciones diferenciales ordinarias y estocásticas en la variedad de información estadística k-exponencial y divulgar la formulación de ecuaciones diferenciales en el contexto de las variedades de información estadística introducidas por Pistone.

Objetivos específicos

1. Proponer un campo vectorial que defina a una ecuación diferencial estocástica cuya solución sea la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo.

2. Describir una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, definida por un campo vectorial en la variedad k-exponencial.

3. Divulgar la formulación de ecuaciones diferenciales en el contexto de las variedades de información estadística tanto exponencial como k-exponencial, para los casos no paramétricos.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales en variedades

De acuerdo a [7], en el presente capítulo se ilustrará como el concepto de ecuación diferencial ordinaria se enmarca en el ámbito de la geometría de variedades de Banach mediante los conceptos de campo vectorial y curva integral, que posteriormente serán utilizados para comprender la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en las variedades de información estadística.

1.1. Campos vectoriales y ecuación diferencial de primer orden

Sea M una variedad de clase C^p, con $p \geq 2$, denotando por $\pi : TM \to M$ su correspondiente haz tangente. De tal forma TM es una variedad de clase C^{p-1}, con $p-1 \geq 1$. Un campo vectorial (independiente del tiempo) sobre M es una sección del haz tangente de clase C^{p-1}

$$\chi : M \to TM$$

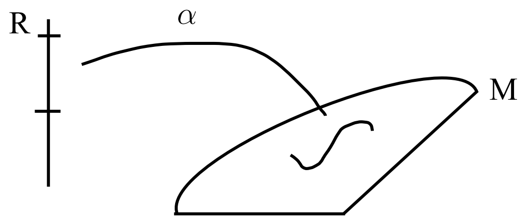
tal que $\chi(x)$ está en el espacio tangente T_xM para cada $x \in M$, en otras palabras, $\pi\chi = id$. Si TM es trivial y si M es una variedad modelada sobre un espacio de Banach B, tenemos un isomorfismo de haces vectoriales $TM = M \times B$. Luego, la sección χ está completamente determinada por su proyección sobre el segundo factor. En tal representación producto, la proyección de χ sobre el segundo factor será llamada la representación local de χ. Esto es, podemos definir un C^{p-1} mapeo $f : M \to B$ tal que:

$$\chi(x) = (x, f(x))$$

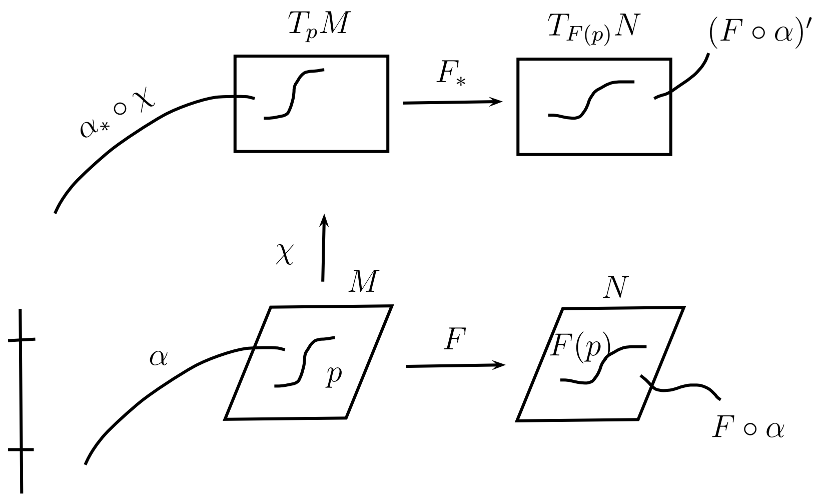
También decimos que χ es representado por f localmente si χ se restringe a un subconjunto abierto U de M sobre el cual el haz tangente admite una trivialización. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Como I es un subconjunto conexo, el haz tangente de I es $TI = I \times \mathbb{R}$. Una curva en M es un mapeo

$$\alpha : I \to M$$

(siempre de clase ≥ 1, a menos que se diga lo contrario), desde un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ en M.



Si $F : M \to N$ es un morfismo entre variedades de Banach, entonces $F \circ \alpha$ es una curva en N. Desde una curva dada α se puede dar un mapeo inducido sobre los haces tangentes. Se denota $\alpha' = \alpha_* \circ \chi$ ó también $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$, donde $t \in I$. Por tanto, $\alpha_* \circ \chi$ es una curva en TM de clase C^{p-1}, si α es de clase C^p para $p \geq 2$.



Si $F : M \to N$ es un morfismo entre variedades y F_* es el morfismo inducido en sus respectivos haces tangentes, es decir, $F_* : TM \to TN$ entonces,

$$(F \circ \alpha)'(t) = F_* \alpha^{'}(t).$$

diagrama (fff) que ilustra la situación anterior..

Supongase que I contiene a 0 y consideremos una clase de curvas α definidas sobre I tal que $\alpha(0) = x_0$, para un x_0 fijo. Decimos que dos de tales curvas α_1 y α_2 son tangentes en 0 si $\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0)$, lo cual constituye una relación de equivalencia en la clase de curvas. Esto permite definir alternativamente el espacio tangente tomando clases de equivalencias de curvas que pasan a través del punto x_0. Sea χ un campo vectorial sobre M y $x_0 \in M$. Una curva integral para el campo vectorial χ con condición inicial x_0 es una curva de clase C^{p-1}, $\alpha : I \to M$, que envia el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ conteniendo a 0 en M tal que $\alpha(0) = x_0$ y se verica la ecuación diferencial de primer orden

$$\alpha'(t) = \chi(\alpha(t)), \qquad \forall t \in I.$$

El siguiente resultado da condiciones de existencia y unicidad.

Sean $\alpha_1 : I_1 \to M$ y $\alpha_2 : I_2 \to M$ dos curvas integrales del campo vectorial χ sobre M con la misma condición inicial x_0. Entonces α_1 y α_2 son iguales en $I_1 \cap I_2$.

La unión de todos los dominios de las curvas integrales de χ en un punto x_0,

$$\{I_i \ : I_i \text{ es curva integral en } x_0, \ i \in J\},$$

es un intervalo abierto

$$I(x_0) := \bigcup_{i \in J} I_i.$$

Sean $t^-_{x_0} < t^+_{x_0}$ y $I(x_0) = (t^-_{x_0}, t^+_{x_0})$. Sea $D(\chi)$ el subconjunto de $\mathbb{R} \times M$ definido por

$$D(\chi) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times M / t^-_x < t < t^+_x\}.$$

Un flujo global de χ es un mapeo $\alpha : D(\chi) \to M$ tal que para cada $x \in M$, la función $\alpha_x : I(x) \to M$ dada por $\alpha_x(t) = \alpha(t,x)$, es una curva integral para χ con condición inicial x.

El siguiente resultado indica unas condiciones para que un flujo definido en una variedad de Banach sea global.

Sean E un espacio vectorial normado y M una variedad locamente modelada sobre E. Sea χ un acampo vectorial sobre M. Asumamos que existen números $a > 0$ y $K > 0$ tal que todo punto $x \in M$ admite una carta (U, ϕ) en M y que la representación local f del campo vectorial sobre esta carta es acotada por K y la derivada de f es también acotada. Si $\phi(U)$ contiene una bola de radio a centrada en $\phi(x)$ entonces, $D(\chi) = \mathbb{R} \times M$.

1.2. Ecuaciones de segundo orden

En esta sección se ilustrarán algunos conceptos generales sobre el fibrado $T(TM)$ de una variedad de Banach para describir ecuaciones diferenciales de segundo orden en la variedad.

Dada una variedad diferenciable M, el fibrado $T(TM)$ es el fibrado tangente de la variedad diferenciable TM. Si M es de clase C^k, con $k \geq 3$, $T(TM)$ es una variedad de clase C^{k-2}, con $k - 2 \geq 1$.

Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva de clase C^p $(p \leq k)$. Un levantamiento de α en TM es una curva $\beta : I \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ \beta = \alpha$

$$\begin{tikzcd}
 & TM \arrow[d, "\pi \circ \beta = \alpha"] \\
I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & M
\end{tikzcd}$$

Un campo vectorial de segundo orden sobre M es un campo vectorial F sobre el haz tangente TM (de clase C^{k-1}) tal que, si $\pi : TM \longrightarrow M$ denota la proyección canónica de TM sobre M, entonces F es una sección del haz tangente de segundo orden, es decir, se verifica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} T(TM) \arrow[d, shift left, "\pi_*"] \\ TM \arrow[u, shift left, "F"] \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{M} \end{tikzcd}$$

donde $\pi_* : T(TM) \longrightarrow TM$ cumple $\pi_* \circ F = id$, esto es, $(\pi_* \circ F)(v) = v$, para todo $v \in TM$.

Un campo vectorial F sobre TM es un campo vectorial de segundo orden sobre M si y solo si la siguiente condición se cumple: cada curva integral β de F es igual al levantamiento de $\pi \circ \beta$; es decir, se verifica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & T(TM) \arrow[d, shift left, "\pi_*"] \\ & TM \arrow[u, shift left, "F"] \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, dashed] & \mathbf{M} \end{tikzcd}$$

Definamos ahora una geodésica α con respecto al campo vectoria de segundo orden F. Dado un vector $v \in TM$, existe una curva integral $\beta = \beta_v$ con $\beta_v(0) = v$ que defne la condición inicial en v. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva en M. Sea $\xi : I \longrightarrow TM$ una curva integral de F. Se define la geodésica α con respecto a F por $\alpha := \pi \circ \xi$, esto es, ξ es el levantamiento de α en TM y se puede expresar la condición de ser geodésica mediante

$$\zeta = F(\xi).$$

Esta relación es llamada la ecuación diferencial de segundo orden para la curva α en M determinada por F. Se puede obervar que por definición, si β es una curva integral de F en TM entonces, $\pi \circ \beta$ es una curva geodésica para el campo vectorial de segundo orden F.

En tanto a la representación local por cartas se tiene lo siguiente. Sea U un abierto en el espacio vectorial E, asi que $T(U) = U \times E$ y $T(T(U)) = (U \times E) \times (E \times E)$. Entonces $\pi : U \ \times E \longrightarrow U$ es la proyección y se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} (U \times E) \times (E \times E) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d] & U \times E \arrow[d] \\ U \times E \arrow[r, "\pi"'] & U \end{tikzcd}$$

La función π_* sobre cada fibra $E \times E$ es constante y es la proyección de $E \times E$ sobre el primer factor E, esto es,

$$\pi_*(x, v; u, w) = (x, u).$$

Cualquier campo vectorial sobre $U \times E$ tiene una representción local dada por

$$f : U \times E \longrightarrow E \times E$$

y por tanto tiene dos componentes, $f = (f_1, f_2)$, cada una de ellas enviando $U \times E$ en E. Así la descripción local de los campos vectoriales de segundo orden es dada por la siguinete afirmación: sea U un abierto en el espacio de Banach E y sea $T(U) = U \times E$ el haz tangente. Un C^{k-2} morfismo: $f : U \times E \longrightarrow E \times E$ es la representación local de un campo vectorial de segundo orden sobre U, si y sólo si, $f(x, v) = (v, f_2(x, v))$.

La anterior afirmación es una forma de representar explicitamente la igualdad $\pi_* F = id$ en la carta elegida. Si escribimos $f = (f_1, f_2)$, entonces vemos que $f_1(x, v) = v$. Las anteriores relaciones se pueden ver en términos de curvas integrales del siguiente modo. Sea $\beta = \beta(t)$ una curva integral para el campo vectorial F sobre TM. En dicha carta, la curva tiene dos componentes $\beta(t) = (x(t), v(t)) \in U \times E$. Por definición, si f es la representación local de F se tiene

$$\frac{d\beta}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}) = f(x, v) = (v, f_2(x, v)).$$

Esto implica que dicha ecuación diferencial puede ser expresada en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{dv}{dt} = f_2(x, \frac{dx}{dt}).$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales en la variedad exponencial

2.1. Variedad de información exponencial

En esta sección se describe la variedad exponencial de informaciión de Pistone y Sempi de acuerdo a [10, 13].

Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $\mathfrak{M}_\mu$ al conjunto de densidades positivas μ-equivalentes, $\Phi(x) = cosh(x) - 1$ para cada real x y

$$B_p = \{u \in L^\Phi(p) : E_p(u) := \int_\Omega upd\mu = 0\},$$

donde $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y $L^\Phi(p)$ denota el espacio de funciones de Orlicz asociado a la función de Youg Φ respecto a la medida con densidad $p \cdot \mu$. La función generadora de momento es $M_p : L^\Phi(p) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, definida por $u \longrightarrow E_p[e^u]$. La función generadora acumulante es $K_p : B_p \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ es definida por $u \longrightarrow logM_p(u)$. El funcional generador de momento es la función partición (normalizada por un factor) del modelo de Gibbs, a saber, $\frac{e^u}{M_p(u)} p \in \mathfrak{M}_\mu$, si $u \in L^\Phi(p)$, con $M_p(u)$.

Como sesultados importantes se tienen:

1. $K_p(0) = 0$; en este caso, para cada $u \neq 0$, $K_p(u) > 0$.

2. . El dominio propio de K_p es un conjunto convexo que contiene la bola unitaria de B_p. En particular, el interior del dominio propio es un conjunto convexo no vacío abierto, denotado por S_p.

3. K_p es infinitamente diferenciable en el sentido de Gateaux en el interior de su dominio propio.

4. K_p es una función acotada e infinitamente diferenciable en el sentido de Fréchet y analítica sobre la bola unitaria B_p.

En [10] se define la llamada topología de convergencia exponencial en $\mathfrak{M}_\mu$. Las vecindades de cada punto $p \in \mathfrak{M}_\mu$ son modeladas por subespacios de variables aleatorias centradas en el espacio de Orlicz $L^\Phi(p)$. Así, resulta crucial discutir el isomorfismo de los espacios modeladores para diferentes p.

El modelo exponencial en p es

$$\mathcal{E}(p) = \{e^{u-K_p(u)}p : u \in S_p\}$$

Las densidades $p, q \in \mathfrak{M}_\mu$ se dicen ser conectadas por un arco exponencial abierto si exite una familia exponencial abierta conteniendolas, es decir, si para un entorno I de [0,1] se tiene

$$\int p^{1-t}q^t d\mu = E_p[(\frac{q}{p})^t] < +\infty.$$

Por ejemplo, sea f la densidad normal estandard en $\mathbb{R}^N$ y g una densidad cualquiera. Entonces $g(x)\alpha(1+|x|^\beta)f(x)$ con $\beta > 0$, cumple

$$\int (1+|x|^\beta)^t f(x)dx < +\infty.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $p, q \in \mathfrak{M}_\mu$ son conectadas por un arco exponencial
2. $q \in \mathcal{E}(p)$
3. $\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(q)$
4. $log(q/p)$ pertenece a la vez a $L^\Phi(p)$ y $L^\Phi(q)$
5. $L^\Phi(p)$ y $L^\Phi(q)$ son iguales como espacios vectoriales y sus normas son equivalentes.

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$ definamos:

$$s_p : \mathcal{E}(p) \to S_p \subset B_p$$

como

$$q \to Ln[\frac{q}{p}] - E_p[Ln\frac{q}{p}],$$

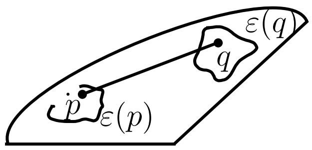
con función inversa

$$s_p^{-1} = e_p : S_p \longrightarrow \mathcal{E}(p) \subset M_p$$

dada por

$$u \longrightarrow e^{u-K_p(u)}p.$$

La familia $\{(e_p(S_p), s_p) : p \in \mathfrak{M}_\mu\}$ es un atlas que define la variedad exponencial estadística en $\mathfrak{M}_\mu$. Los conjuntos $\mathcal{E}(p)$ y $\mathcal{E}(q)$ son disjuntos o iguales cuando las densidades p y q están conectadas por un arco exponencial abierto.



Asumamiendo que $q = e^{u-K_p(u)}p \in \mathfrak{M}_\mu$ y notando $K_p(u) = E_p[Ln\frac{p}{q}] = D(p||q)$, ee cumplen las siguientes afirmaciones.

1. Las primeras derivadas de K_p sobre S_p son:

$$dK_p(u) = E_q[u]$$

$$d^2K_p(u)(v_1, v_2) = cov_q(v_1, v_2)$$

$$d^3K_p(u)(v_1, v_2, v_3) = cov_q(v_1, v_2, v_3)$$

2. La variable aleatoria $\frac{p}{q} - 1$ pertenece a ${}^*B_p$ (el espacio dual de B_p) y

$$dK_p(u)v = E_p[(\frac{q}{p})v]$$

En otras palabras, el gradiente de K_p en v es identificado con un elemento de ${}^*B_p$ denotado por $\nabla K_p(u) = e^{u-K_p(u)} - 1 = \frac{q}{p} - 1$.

3. El mapeo $B_p \rightarrow^* B_p$ es uno a uno con $u \rightarrow \nabla K_p(u)$.

4. La derivada del mapeo $S_p \longrightarrow^* B_p$, definida por $u \rightarrow \nabla K_p(u)$ es designada en $w \in B_p$ como

$$d(\nabla K_p(u))w = \frac{q}{p}(w - E_q(w)).$$

5. El mapeo $F_p^q : v \rightarrow \frac{p}{q}v$ es un isomorfismo entre ${}^*B_p$ y ${}^*B_q$.

6. $\frac{q}{p} \in L^{\Phi_*}(p)$.

7. $D(p||q) = DK_p(u)u - K_p(u)$ con $q = e^{u-K_p(u)}p$.

8. El mapeo $G_p^q : u \rightarrow u - E_q[u]$ es un isomorfismo entre B_p y B_q

El haz tangente de la variedad exponencial está basado sobre el concepto de vector velocidad sobre una curva. Para un modelo estadístico $p(t)$, con $t \in I$ la variable aleatoria $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$ tiene valor esperado cero con respecto a $p(t)$ y su significado en la variedad exponencial es la velocidad. Si $p(t) = e^{tv-\psi(t)}p$, con $v \in L^{\Phi}(p)$ entonces

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = v - E_{p(t)}[v] \in B_{p(t)}.$$

Sea $p : I \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ donde I es un intervalo abierto conteniendo el 0. En una carta para una vecindad centrada en p, la curva dada por $u : I \longrightarrow B_p$, donde $p(t) = e^{u(t)-K_p(u(t))}p$, permite definir la función de transición de la variedad por:

$$s_q o e_p : S_p \longrightarrow S_q$$
$$u \longrightarrow s_q(e^{u-K_p(u)}p) = u - E_q(u) + Ln(p/q) - E_q[ln\frac{p}{q}] \in S_q,$$

con derivada $dv(s_q o s_p^{-1})(u) = v - E_q(v)$, con $v \in B_p$.

Se define ahora el concepto de campo vectorial de una curva. Asumamos que $t \longrightarrow u(t) = s_p(p(t))$ es diferenciable con derivada $\dot{u}(t)$. Definamos

$$\delta_p(t) = \dot{u}(t) - E_{p(t)}[\dot{u}(t)] = \frac{d}{dt}[u(t) - K_p(u(t))] = \frac{d}{dt}Ln\left(\frac{p(t)}{p}\right).$$

Nótece que δ_p no depende de la carta S_p y que la derivada de $t \rightarrow p(t)$ en el último término da la ecuación definida en $L^{\Phi}(p)$. La curva

$$t \rightarrow (p(t), \delta p(t))$$

es el campo de velocidades de la curva.

Sobre el conjunto $\{(p, v) : p \in \mathfrak{M}_\mu, v \in B_p\}$, las cartas

$$\{(q, w) : q \in \mathcal{E}(p), w \in B_q\} \longrightarrow S_p \times B_p \subset B_p \times B_p$$

$$(q, w) \longrightarrow (s_p(q), w - E_q(w))$$

definen el haz tangente $T\mathfrak{M}_\mu$. El isomorfismo $w \rightarrow w - E_p(w) = d(s_q o s_p^{-1})(u)w$ es el transporte paralelo exponencial.

2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias en la variedad exponencial

En esta sección se presentan resultados de [12], donde se dan, en términos básicos en el contexto de la geometría de la información, la descripción de ciertos campos vectoriales que permiten la definición de las ecuaciones diferenciales de primer orden en la variedad de información definida por Pistone.

Considerando un espacio de medida $(\Omega, \Im, \mu)$ y denotando por $\mathfrak{M}_\mu$ el conjunto de todas las densidades que son positivas en casi todas partes con respecto a la medida μ, se denotará por S_p al interior del dominio propio de la función acumulante K_p. Para toda densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$, el modelo exponencial máximal en p es definido por la siguiente familia de densidades

$$\mathcal{E}(p) = \{exp(u - K_p(u))p \setminus u \in S_p\}.$$

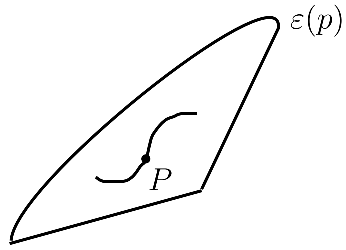
Se definen además dos funciones uno a uno: la parametrización $e_p : S_p \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ con $e_p(u) = exp(u - K_p(u))p$ y el mapeo $s_p : \mathcal{E}(p) \longrightarrow S_p$, con

$$s_p(q) = Log(\frac{q}{p}) - E_p[log(\frac{q}{p})].$$

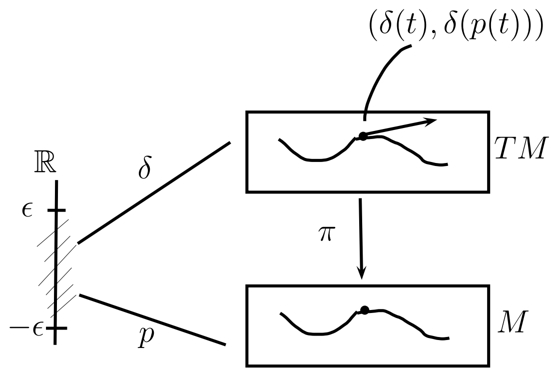
Ahora, si $\Phi(x) = cosh(x) - 1$ entonces, $B_p = L^\Phi(p)$ con $p \in \mathfrak{M}_\mu$ y la función generadora de momentos es $M_p : L^\Phi(p) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ definida como: $u \longrightarrow E_p(e^u)$ La función acumulante generador es $K_p : B_p \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, definida por $u \longrightarrow Log(M_p(u))$

Pasemos ahora a considerar ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea $p(t)$, con $t \in I$, donde I es un intervalo abierto, una curva en una familia exponencial $\mathcal{E}(p)$, con $p(t) = exp[u(t) - K_p(u(t))]p$.



Si la curva $u : I \longrightarrow B_p$ definida por $t \longrightarrow u(t)$ es de clase C^1 con derivada $\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$ entoces, la función $p : I \longrightarrow \mathcal{E}(p)$ definida por $t \longrightarrow e(t)$ es diferenciable y su derivada es el elemento de $T_{p(t)}\mathfrak{M}_\mu$ cuya coordenada en p es $\dot{u}(t)$.



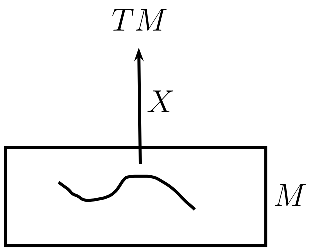
La "velocidad" es definida para ser la curva $I \longrightarrow T\mathfrak{M}_\mu$, tal que las coordenadas centradas en p de $(p(t), \delta p(t)) \in T_{p(t)}\mathfrak{M}_\mu$ son precisamente $(u(t), \dot{u}(t))$; esto es,

$$\dot{u}(t) = \delta p(t) - E_p[\delta p(t)] \text{ y } \delta p(t) = \dot{u}(t) - E_{p(t)}[\dot{u}(t)].$$

Luego, tenemos

$$\delta p(t) = \dot{u}(t) - E_{p(t)}[\dot{u}(t)] = \frac{d[u(t) - K_p(u(t))]}{dt} = \frac{dlog(p(t))}{dt} = \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$$

Un campo vectorial χ de la variedad exponencial $\mathfrak{M}_\mu$ es una sección del haz tangente, con $\chi(p) \in T_{p(t)}\mathfrak{M}_\mu$.



Una curva $p(t)$, con $t \in I$ es llamada una curva integral de χ si $p(t) \in Dom(\chi)$ y $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \chi(p(t))$. Por tanto, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{p}(t) = \chi(p(t))p(t).$$

En la carta centrada en p se puede escribir la anterior ecuación en términos de la función $u(t)$ de la siguiente forma. Considere el siguiente problema valor de frontera:

$$\dot{u}(t) = \chi(p(t)) - E_p[\chi(p(t))]$$

$$p(t) = exp[u(t) - K_p(u(t))]p$$

$$u(0) = 0.$$

Con esto ya planteado, se debe recordar que una de las condiciones para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial es la condición de Lipschitz para una determinada función que define la ecuación diferencial, que en este caso viene entonces convenientemente definido por

$$F(u) = \chi[exp(u(t) - K_p(u(t))p)] - E_p[\chi[exp(u(t) - K_p(u(t))p]].$$

Se debe probar entonces que este funcional satisface la condición tipo Lipschitz, es decir, existe una constante $K > 0$ tal que

$$< F(u) - F(v), u - v > \leq \; K < u - v, u - v >,$$

donde $< \cdot, \cdot >$ denota producto interno.

A manera de ejemplo consideremos la famila exponencial unidimensional. Sea $f \in L^{\Phi}(p)$ y definamos el campo vectorial χ cuyo valor en cada $q \in \mathcal{E}(p)$ es representado en q por $q \longrightarrow f - E_q(f)$. Se puede asumir, sin pérdida de generalidad que $f \in B_p$. La ecuación diferencial por tanto es

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = f - E_{p(t)}(f)$$

y su solución será

$$log(p(t)) = log(p(0)) + t[f - E_{p(t)}(f)].$$

Si tenemos la condición inicial $p(0) = p$, la ecuación es entonces

$$\dot{u}(t) = f - E_p(f)$$

con solución $u(t) = t[f - E_{p(t)}(f)]$ y así se obtiene

$$p(t) = exp[t(f - E_{p(t)}(f)) - K_p(t(f - E_{p(t)}(f))]p.$$

Se puede también hacer una construcción similar en la variedad tipo mezcla. Sea $p(t)$ con $t \in I$, un intervalo abierto, una curva en la variedad mezcla M, definida como $p(t) = (1 + v(t))p$. Si la curva $v : I \longrightarrow {}^*B_p$ es de clase C^1, el vector velocidad de la curva es definido por $(p(t), \delta p(t)) \in TM$, donde explicitamente tenemos

$$\delta p(t) = \frac{p\dot{v}(t)}{p(t)}.$$

Las dos representaciones del vector velocidad son iguales en los espacios tangentes. Pueden existir otras representaciones si aprovechamos el embedimiento

$$M \longrightarrow L^2(\mu),$$

definido por $p \longrightarrow \sqrt{p}$. Entonces la ecuación diferencial ordinaria en dicho embedimiento para la variedad mezcla es definida en esta ocasión como

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \frac{d2\sqrt{p(t)}}{dt}.$$

Ahora, para $f \in {}^*B_p$ tenemos definida la ecuación diferencial ordinaria como:

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{pf}{p(t)}$$

cuya solución es dada por $p(t) = p(1 + tf)$. Esto permite así determinar las geodésicas para este modelo unidimensional.

A manera de ejemplo, la ecuación del calor en la variedad exponencial de Pistone viene definida por

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2},$$

con $x \in \mathbb{R}$. Un campo vectorial puede convenientemente ser definido con valores en $T\mathfrak{M}_\mu$ por

$$\chi(p)(x) = \frac{1}{p(x)}\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2}$$

Entonces para cada $v \in {}^*B_p$ se puede encontrar una relación para el valor esperado del campo vectorial evaluado en p

$$E_p[\chi(p)v] = \int p''(x)v(x)dx = -\int p'(x)v'(x)dx = -E_p[\frac{p'v'}{p}].$$

Para lo cual la ecuación de evolución puede reescribirse como

$$E_{p(t)}[\delta p(t)v] + E_{p(t)}[\frac{\nabla p(t)}{p}v] = 0.$$

Brevemente se discutirá aquí el haz tangente de $T\mathfrak{M}_\mu$.

En primer lugar, el atlas (S_p, s_p) con $p \in \mathfrak{M}_\mu$ es afin y define la variedad exponencial estadística. Por otro lado la función ${}^eU_p^q : u \longrightarrow u - E_q(u)$ es un isomorfismo de B_p a B_q. Sea $\alpha : I \longrightarrow T\mathfrak{M}_\mu$ un camino definido por

$$t \longrightarrow (p(t), V(t)),$$

donde V es un camino en B_p. En una carta centrada en p, se tiene

$$\alpha(t) = (s_{p(t)},\ {}^eU_{p(t)}^p(V(t))) = (u(t), V_p(t)),$$

donde $p(t) = e^{u(t)-K_p(u(t))}p$ y

$$V(t) = V_p(t) - E_{p(t)}[V_p(t)] = V_p(t) - dK_p(u(t))(V_p(t)).$$

Como el mapeo $t \longrightarrow V(t)$ es diferenciable en $L^\Phi(p)$, su derivada es

$$\frac{d}{dt}V(t) = \dot{V}(t) - dK_p(u(t))(\dot{V}_p(t)) - d^2(p(t))(V_p(t), \dot{u}(t)) = {}^eU_p^{p(t)}\dot{V}_{p(t))} - cov_{p(t)}(V_p(t), \dot{u}(t)).$$

Así, se tiene que

$$^{e}U_{p}^{p(t)}\dot{V_p}(t) = \dot{V}(t) + E_{p(t)}[V(t)]\delta p(t),$$

donde: $\delta p(t) = \dot{u}(t) - E_{p(t)}[\dot{u}(t)] = \, ^{e}U_{p}^{p(t)}\dot{u}(t)$.

Ahora, se define la proyección $\Pi^{p(t)} : L^{\Phi}(p) \longrightarrow B_{p(t)}$. Desde la igualdad: $\dot{F}_p(t) = (\dot{u}(t), \dot{V}_p(t))$, el vector velocidad es

$$\delta(p, V)(t) = (\delta p(t), \, ^{e}U_{p}^{p(t)}\dot{V}_p(t)) = (\delta p(t), \Pi^{p(t)}\dot{V}(t)). \tag{2.1}$$

De la relación anterior en el caso particular donde $V(t) = (\delta p)(t)$, se tiene

$$\Pi^{p(t)}(\dot{\delta} p(t)) = (\dot{\delta} p(t) + E_{pt)}[\delta p(t)^2] = (\dot{\delta} p(t) + E_{p(t)}[\frac{d}{dt}Ln(p(t)^2)]).$$

Llamando $I(p(t)) = E_{p(t)}[\frac{d}{dt}Ln(p(t))^2]$, la información de Fisher, entonces la ecuación diferencial de segundo orden resultante es

$$\delta(p, \delta p)(t) = (\delta p(t), (\dot{p})(t) + I(p(t))).$$

2.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas en la variedades exponencial

Es esta sección se presentan resultados sobre ecuaciones diferenciales estocásticas en la variedades de información exponencial, tomados de [14].

Uno de los aspectos relevantes y que muestran una relación entre la geometría y el estudio de procesos estocásticos es entender los procesos concernientes a las evoluciones de densidades en el marco de las variedades de información. Una de las propuestas en el caso de la ecuación de Fokker-Planck fue dado por Giovanni Pistone y Damiano Brigo, cuyo trabajo desarrolla una aproximación rigurosa al problema y lo particulariza en la evolución de la densidad de un proceso de difusión sobre una variedad exponencial. Esto se ilustra del siguiente modo.

Sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) consideremos un proceso estocástico $\{X_t | t \geq 0\}$ de tipo difusión. la ecuación dinámica describiendo X será de la siguiente forma:

$$dX_t = f_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dW_t$$

donde $\{W_t | t \geq 0\}$ describe un movimiento Brwniano estandard independeinte de la condición inicial X_0. Además, se tiene el siguiente conjunto de suposiciones.

1. Como condición inicial, se asume que el estado inicial en $t = 0$, la variable aleatoria X_t tiene una densidad inicial que es positiva.

2. $f(x,t)$ es continuamente diferenciable en x y continua en t. Las funciones coeficientes σ_t que definen la ecuación diferencial estocástica sn dos veces diferenciables continuamente en x y continua en la variable t. Esto último implica que: Para todo $R > 0$, existe un $K_R > 0$ tal que:

$$|f_t(x) - f_t(x')| \leq K_R|x - x'|$$

$$\|a_t(x) - a_t(x')\| \leq K_R|x - x'|$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall x, x' \in \Omega$. Estas últimas condiciones expresan la continuidad local de Lipschitz.

3. No existen singularidades: Existe un $K > 0$ tal que

$$2xf_t(x) + a_t(x) \leq K(1 + |x|^2), \quad \forall t \geq 0 \; y \; \forall x \in R.$$

Con estas suposiciones se puede demostrar que existe una solución unica, un proceso estocástico $\{X_t | t \geq 0\}$, donde la función de distribución es la distribución normal gaussiana asociada la función de Young $\phi(x,t) = x^2$.

4. Si asumimos que la ley de evolución de X_t es absolutamente continua y su densidad $p_t = f(x,t)$ sea de clase $C^{2,1}$ (dos veces continuamente diferenciable en x y una vez continuamente diferenciable en y), ella satiface la ecuación de Fokker-Plank

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = F_t p_t, \tag{2.2}$$

donde el operador difusión es definido por:

$$F_t = -\frac{\partial(f_t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(a_t)}{\partial x^2}. \tag{2.3}$$

Ahora se procede a escribir la ecuación (2.2) en términos de las funciones de transición

$$s_p(q) = ln(\frac{q}{p}) - E_p[ln\frac{q}{p}].$$

Consideremos una densidad de referencia p_t como solución a la ecuación (2.2) en el tiempo t. Ella puede ser corresponde a una curva en $M > \mathfrak{M}_\mu$ que es la solución de la ecuación estocástica expresada en el espacio B_{p_t} dada por

$$s_{p_t} : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow V_{p_t}$$
$$h \longmapsto s_{p_t}(p_{t+h}) = u_h.$$

La función u_h representa la expresión en cooordenadas de la función densidad:

$$p_{t+h} = e^{u_h - K_{p_t}(u_h)} p_t = e_h p_t$$

Luego, la ecuación diferencial alrededor de t se puede escribir como

$$\frac{\partial p_{t+h}}{\partial h} = F_{t+h} p_{t+h},$$

lo que es equivalente a

$$\frac{\partial e_h}{\partial p_t} = F_{t+h}(e_h p_t).$$

o también

$$\frac{\partial e_h}{\partial h} = \frac{F_{t+h}(e_h p_t)}{p_t}.$$

En $h = 0$ miremos el comportamiento de dichas ecuaciones. Notemos que

$$e_0 = e^{[u_0 - K_{p_t}(u_0)]} = e^0 = 1$$

y

$$\frac{\partial e_h}{\partial h}|_{h=0} = e_h \frac{\partial [u_h - K_{p_t}(u_h)]}{\partial h}|_{h=0} = \frac{\partial [u_h - K_{p_t}(u_h)]}{\partial h} = 0.$$

Como $u_h = s_{p_t}(p_{t+h})$, se verifica

$$\frac{\partial K_{p_t}(u_h)}{\partial h}|_{h=0} = 0,$$

así que

$$\frac{\partial u_h}{\partial h} = \frac{F_t p_t}{p_t}$$

da la representación en coordenadas de la variedad exponencial del vector tangente en p_t. Notemos entonces que

$$\alpha_t(p_t) = \frac{F_t p_t}{p_t}.$$

Esto quiere decir lo siguiente:La solución a la ecuación de Fokker-Planck es una curva p_t en el espacio B_{p_t}. Su vector tangente es dado por α_t. Las suposiciones convenientes para que esto se de son que las funciones coeficientes estén en B_{p_t}. Por otro lado, para que la solución permanezcan en una subvariedad de $\mathfrak{M}_\mu$ es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Si el mapeo $t \longrightarrow p_t$ es diferenciable en la variedad $\mathfrak{M}_\mu$, entonces α_t es un vector tangente.

2. Si el mapeo $t \longrightarrow \alpha_t$ es continuo en t_0 en $L^{coshx-1}$,entonces el mapeo $t \longrightarrow p_t$ es diferenciable en t_0 como un mapeo en $\mathfrak{M}_\mu$.

3. Dada una subvariedad $S \subset \mathfrak{M}_\mu$ tal que $p_o \in S$. Si la condición previa se cumple y $\frac{F_t p}{p}$ es un vector tangente a S en p, para todo $p \in S$, entonces p_t se desarolla en S.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales en la k-variedad

En este capítulo se dará una discusión sobre la posibilidad de formular ecuaciones diferenciales tanto ordinarias, de primero y segundo orden, como estocásticas en la variedad construida por Pistone para los modelos k-exponenciales [11], basados en la teoría de la mecánica estadística introducida por G. Kaniadakis [5, 6]. En la primera sección se expondrán aspectos de las matemáticas propias de la teoría de Kaniadakis. En la segunda sección se presenta la variedad k-exponencial. En la tercera sección se presenta la formulación de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como lo propuso Pistone en [11] y, adicionalmente, se presenta la discusión sobre el planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Finalmente, en la cuarta seción se propone un campo vectorial sobre la variedad k-exponencial, que defina a una ecuación diferencial estocástica cuya solución sea un modelo de distribución gaussiano k-deformado; la ecuación se obtiene mediante una modificación de la ecuación de Fokker-Planck.

3.1. Aspectos matemáticos sobre k-deformaciones

En paralelo a la mecánica estadística de Kaniadakis, se han desarrollado nuevas estructuras matemáticas en términos del parámetro k. Sin hacer una exposición detallada, esta sección presenta algunos aspectos de las matemáticas k-deformadas según Kaniadakis, como aparecen en los artículos [5, 6]. También se pueden ampliar detalles consultando la tesis de Dora Deossa [4]. Sea k un real fijo.

La k suma y k resta se definen para reales x, y por

$$x \overset{k}{\oplus} y = x\sqrt{1 + k^2y^2} + y\sqrt{1 + k^2x^2}$$

$$x \overset{k}{\ominus} y = x\sqrt{1 + k^2y^2} - y\sqrt{1 + k^2x^2}$$

La función k-exponencial se define para cada real x por

$$e_k^{(x)} := \exp_k(x) := (kx + \sqrt{1 + k^2x^2})^{\frac{1}{k}}. \tag{3.1}$$

La función anterior define una biyección de los reales en los positivos, cuya función inversa es la función k-logarítmo, definida para cada real x por

$$\ln_k(x) := \frac{x^k - x^{-k}}{2k}. \tag{3.2}$$

Ambas funciones tienen gran similitud con las funciones exponencial y logarítmo naturales, a las que recupera cuando k tiende a cero. A continuación se mencionan algunas de las propiedades.

1. $\exp_k(0) = 1$ y $\exp_{\{-k\}}(x) = \exp_k(x)$.
2. $\exp_k(x)\exp_k(-x) = 1$ y $(\exp_k(x))^r = \exp_{\{k/r\}}(rx)$, $(r \neq 0)$.
3. $\exp_k(x)\exp_k(y) = \exp_k(x \overset{k}{\oplus} y)$.
4. $\exp_k(x)/\exp_k(y) = \exp_k(x \overset{k}{\ominus} y)$.
5. $\ln_k(1) = 0$ y $\ln_{\{-k\}}(x) = \ln_k(x)$.
6. $\ln_k(\frac{1}{x}) = -\ln_k(x)$ y $\ln_k(x^r) = r\ln_{\{rk\}}(x)$, $(r \in \mathbb{R})$.
7. $\ln_k(xy) = \ln_k(x) \overset{k}{\oplus} \ln_k(y)$.
8. $\ln_k(x/y) = \ln_k(x) \overset{k}{\ominus} \ln_k(y)$.
9. $\frac{d}{dx}\exp_k(x) = \frac{\exp_k(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}$.

En la tesis de Dora Deossa [4] se introdujo la k-transformada de Laplace, que será de utilidad más adelante, por lo cual presentamos dicha definición a continuación.

Una función f, definida en el intervalo $a \leq t < \infty$, se dice que es de orden $k-$exponencial $\sigma_0(\sigma_0 \in \mathbb{R})$ si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(t)| \leq M[\exp_k(-t)]^{-\sigma_0}$.

La $k-$transformada de Laplace de una función f se define: para $k \neq 0$ mediante la integral

$$\mathfrak{L}_k\{f(t)\}(s) := F_k(s) := \int_0^\infty f(t)[\exp_k(-t)]^s dt \tag{3.3}$$

y para $k = 0$ mediante la transformada de Laplace usual, esto es, $\mathfrak{L}_0\{f(t)\}(s) = F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$.

Si es f una función continua por partes para $0 \leq t \leq \infty$ y de orden $k-$exponencial σ_0, entonces la integral (3.3) converge para $\mathbb{R}_e(s) > \sigma_0 - k$, donde $\mathbb{R}_e(s)$ denota a la parte real de un número complejo s.

Muchas propiedades de la transformada de Laplace han sido generalizadas a la k-transformada de Laplace en [4], resaltamos la siguiente por su utilidad en el presente trabajo.

Para cualquier real r se cumple

$$\mathfrak{L}_k \left\{t^{r-1}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{(2k)} - \frac{r}{2}\right)\Gamma(r)}{|2k|^r\left[1 + \frac{r|k|}{s}\right]\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)}, \tag{3.4}$$

$$\text{con} \quad \frac{r|k|}{s} < 1 \quad \text{ó mejor aún} \quad r|k| < s. \tag{3.5}$$

3.2. La variedad k-exponencial

Los resultados expuestos en esta sección, son del artículo "*k-exponential models from the geometrical viewpoint*" [11], en el cual se construye una estructura de variedad diferenciable para $\mathfrak{M}_\mu$, basada en modelos k-exponenciales de la forma $q = e_k^{u - D_k(q\|p)}p$, siendo $\exp_k(\cdot)$ la función exponencial k deformada, $D_k(p \parallel q)$ la k-divergencia entre las densidades p y q con parametro de entropía k, según la teoría de G. Kaniadakis [5, 6]. Sólo se expondrán algunas demostraciones teniendo en cuenta su relevancia en el presente trabajo.

Sea $0 < k < 1$ fijo. Con el fin de construir las cartas del atlas, se construyen biyecciones desde el conjunto de densidades estrictamente positivas $\mathfrak{M}_\mu$ a algún espacio vectorial modelador; cada carta será asociada a una densidad $p \in \mathfrak{M}_\mu$. Tal densidad p se utiliza como referencia para cualquier otra densidad q de un subconjunto adecuado de $\mathfrak{M}_\mu$.

Si $p, q \in \mathfrak{M}_\mu$ satisfacen la condición

$$\left(\frac{q}{p}\right)^k, \left(\frac{p}{q}\right)^k \in L^1(p \cdot \mu), \tag{3.6}$$

entonces la k-divergencia de p respecto de q, está definida como

$$D_k(p \parallel q) = E_p\left[\ln_k\left(\frac{p}{q}\right)\right]. \tag{3.7}$$

Por (3.2)

$$D_k(p \parallel q) = \frac{1}{2k}E_p\left[\left(\frac{p}{q}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^k\right]. \tag{3.8}$$

La variedad se define a través de espacios de Lebesgue de la forma $\left(\frac{1}{k} - p\right)$-integrables, donde una variable aleatoria pertenece a $L_0^{1/k}(p)$ si y sólo si

1. $E_p[v] = 0$.

Los espacios $L^{1/k}(p_1 \cdot \mu)$ y $L^{1/k}(p_2 \cdot \mu)$ son isométricos, mediante el mapeo

$$\begin{aligned} L^{1/k}(p_1 \cdot \mu) &\to L^{1/k}(p_2 \cdot \mu) \\ u &\mapsto \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u \ , \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde p_1 y p_2 son dos densidades de probabilidad en $\mathfrak{M}_\mu$.

Veamos una prueba para el enunciado anterior.

Demostración. Veamos que el mapeo está bien definido, consideremos una variable aleatoria u en $L^{1/k}(p_1 \cdot \mu)$, lo cual implica que $E_{p_1}\left[|u|^{1/k}\right] < \infty$. Por la definición del mapeo (3.9) resulta

$$\begin{aligned} E_{p_2}\left[\left|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u\right|^{1/k}\right] &= \int_\Omega \left|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u\right|^{1/k} p_2 d\mu = \int_\Omega \frac{p_1}{p_2}|u|^{1/k} p_2 d\mu \\ &= \int_\Omega |u|^{1/k} p_1 d\mu = E_{p_1}\left[|u|^{1/k}\right] \ . \end{aligned}$$

Se concluye que $E_{p_2}\left[\left|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u\right|^{1/k}\right] < \infty$, y así la variable aleatoria $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k \cdot u$ es un elemento en $L^{1/k}(p_2 \cdot \mu)$; y así el mapeo (3.9) está bien definido. El mapeo inverso de (3.9) está dado por

$$\begin{aligned} L^{1/k}(p_2 \cdot \mu) &\to L^{1/k}(p_1 \cdot \mu) \\ u &\mapsto \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^k u \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por la definición de la norma en los espacios de Lebesgue, resulta la expresión

$$\begin{aligned} \left\|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u\right\|_{L^{1/k}_{p_2}} &= \left(\int_\Omega \left|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^k u\right|^{1/k} p_2 d\mu\right)^k \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{1/k} p_1 d\mu\right)^k = \|u\|_{L^{1/k}_{p_1}} \ . \end{aligned}$$

De la igualdad anterior entre las normas, se sigue que la identificación definida en (3.9) es isométrica. □

Para cada $p \in \mathfrak{M}_\mu$, se define el subconjunto $\mathcal{E}_p$ de $\mathfrak{M}_\mu$ por

$$\mathcal{E}_p = \left\{ q \in \mathfrak{M}_\mu : \left(\frac{q}{p}\right)^k, \left(\frac{p}{q}\right)^k \in L^{1/k}(p \cdot \mu) \right\} \ . \tag{3.11}$$

Dado que se puede verificar la equivalencia $\left(\frac{q}{p}\right)^k, \left(\frac{p}{q}\right)^k \in L^{1/k}(p \cdot \mu)$ si y sólo si $\frac{q}{p}, \frac{p}{q} \in L^1(p \cdot \mu)$ y que la expresión $\frac{q}{p} \in L^1(p \cdot \mu)$ es cierta, ya que $E_p\left[\frac{q}{p}\right] = E_q[1] = 1 < \infty$, se consiguen las siguientes expresiones equivalentes a (3.11).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \left\{ q \in \mathfrak{M}_\mu : \frac{q}{p}, \frac{p}{q} \in L^1(p \cdot \mu) \right\} \\ &= \left\{ q \in \mathfrak{M}_\mu : \frac{p}{q} \in L^1(p \cdot \mu) \right\} \\ &= \left\{ q \in \mathfrak{M}_\mu : \frac{p}{q} \in L^1(p \cdot \mu) \right\} . \end{aligned}$$

De otro lado, cada uno de los subconjuntos $\mathcal{E}_p$, para $p \in \mathfrak{M}_\mu$, va a ser el dominio de una carta y el atlas se define debido al cubrimiento $\mathfrak{M}_\mu = \bigcup_{p \in \mathfrak{M}_\mu} \mathcal{E}_p$.

Sea $q \in \mathcal{E}_p$, entonces q es positiva casi en todas partes de Ω y puede ser escrita como

$$q = e_k^v \, p \, . \tag{3.12}$$

Despejando v resulta

$$v = \ln_k\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{2k}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k\right] . \tag{3.13}$$

Como $q \in \mathcal{E}_p$ entonces, $\left(\frac{q}{p}\right)^k$ y $\left(\frac{p}{q}\right)^k$ son elementos en $L^{1/k}(p \cdot \mu)$. Por (3.11), se sigue que $\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)$ es también un elemento de $L^{1/k}(p \cdot \mu)$ y, por la igualdad (3.13), $v \in L^{1/k}(p \cdot \mu)$. El valor esperado de v en p es

$$E_p[v] = E_p\left[\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)\right] = -E_p\left[\ln_k\left(\frac{p}{q}\right)\right] .$$

En términos de la k-divergencia $E_p[v] = -D_k(p \parallel q)$; de modo que la variable aleatoria $u = v + D_k(p \parallel q)$ es un elemento en $L^{1/k}(p \cdot \mu)$ y es centrada debido a que

$$\begin{aligned} E_p[u] =& E_p[v + D_k(p \parallel q)] = E_p[v] + D_k(p \parallel q) \\ =& - D_k(p \parallel q) + D_k(p \parallel q) = 0 . \end{aligned}$$

Luego, $v = u - D_k(p \parallel q)$, y por tanto en (3.12) se tiene la igualdad

$$q = e_k^{u - D_k(p\parallel q)} p \, , \tag{3.14}$$

donde u es un elemento definido de forma única en el conjunto de variables aleatorias centradas $L_0^{1/k}(p \cdot \mu)$. Además, como $v = \ln_k\left(\frac{q}{p}\right)$ entonces,

$$u = \ln_k\left(\frac{q}{p}\right) + D_k(p \parallel q) \ . \tag{3.15}$$

Como el valor esperado de v es igual a $-D_k(p \parallel q)$ entonces, $D_k(p \parallel q) = -E_p[v] = -E_p\left[\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)\right]$, luego la expresión (3.15) se escribe como

$$u = \ln_k\left(\frac{q}{p}\right) - E_p\left[\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)\right] \ , \tag{3.16}$$

que permite definir los mapeos inversos entre $\mathfrak{M}_\mu$ y el espacio modelador que tiene la estructura $L^{1/k}$. En esta situación se ha logrado hacer una identificación de una densidad $q \in \mathcal{E}_p$ con una variable aleatoria centrada $u \in L_0^{1/k}(p \cdot \mu)$, por medio de la expresión $q = e_k^{u - D_k(p \| q)} p$. Se considera ahora el caso contrario. Sea u una variable aleatoria centrada; la función real valuada

$$\psi \longmapsto E_p\left[e_k^{u-\psi}\right] \ , \tag{3.17}$$

es continua por ser la composición de funciones continuas, además es decreciente, ya que si $\psi_1 < \psi_2$ entonces, $-\psi_2 < -\psi_1$ por lo que $u - \psi_2 < u - \psi_1$ y al ser la función k-exponencial creciente y la integral de Lebesgue monótona resulta $E_p\left[e_k^{u-\psi_2}\right] < E_p\left[e_k^{u-\psi_1}\right]$. Luego, el mapeo (3.17) es decreciente y es continuo, por lo que es uno a uno. Así, existe un único valor de ψ, llámese $\psi_{k,p}(u)$, tal que

$$E_p\left[e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}\right] = 1 \ . \tag{3.18}$$

Si se elige

$$q = e_k^{u-\psi_{k,p}(u)} p \ , \tag{3.19}$$

entonces $\int q d\mu = 1$; de allí que q es una densidad de probabilidad, $q \in \mathcal{E}_p \subseteq \mathfrak{M}_\mu$. El mapeo uno a uno

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_p & \to & L_0^{1/k}(p \cdot \mu) \\ q & \mapsto & u \end{array} \tag{3.20}$$

es una carta para $\mathfrak{M}_u$. Por comparación entre las expresiones 3.14 y 3.19 se obtiene que $\psi_{k,p}(u) = D_k(p \parallel q)$, el dominio de la función $\psi_{k,p}$ es todo el espacio de las variables aleatorias centradas, $dom(\psi_{k,p}) = L_0^{1/k}(p \cdot \mu)$. Donde u es la imagen de q en la carta definida para p. La divergencia $D_k(q \parallel p)$ de q con respecto a p resulta

$$D_k(q \parallel p) = E_q\left[\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)\right] = E_q[u - \psi_{k,p}(u)] = E_q[u] - \psi_{k,p}(u) \ .$$

Al ser $\psi_{k,p}(u) = D_k(p \parallel q)$, se obtiene la expresión

$$D_k(p \parallel q) + D_k(q \parallel p) = E_q[u] \ . \tag{3.21}$$

El funcional $\psi_{k,p}$ es de mucha importancia cuando $k = 0$ donde es el funcional acumulante $K_p(u)$ de la variable aleatoria u y está dado por

$$\psi_p(u) = K_p(u) = \ln(E_p[e^u]) \ .$$

En el caso en que $k = 0$ se logra que $\psi_{0,p} = \psi_p$, en efecto, cuando $k = 0$ la exponencial k-deformada es una exponencial usual, en (3.19) resulta $q = e^{u-\psi_{0,p}(u)}p$; como q es una densidad de probabilidad entonces $E_p[e^{u-\psi_{0,p}(u)}] = 1$, que es equivalente a

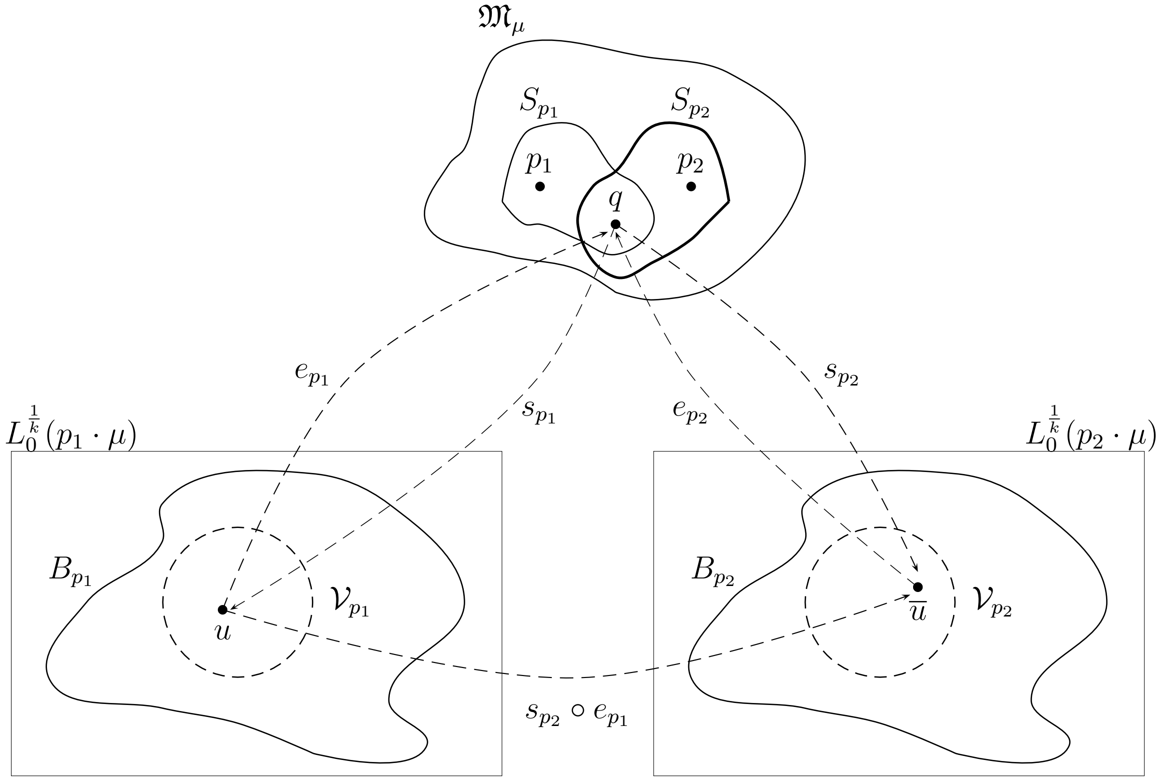
$$E_p\left[\frac{e^u}{e^{\psi_{0,p}(u)}}\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E_p[e^u]}{e^{\psi_{0,p}(u)}} = 1 \ .$$

Por lo que $e^{\psi_{0,p}(u)} = E_p[e^u]$ y al aplicar logaritmo usual se concluye $\psi_{0,p}(u) = \ln(E_p[e^u])$, que es el acumulante usual $\psi_{0,p}(u) = \psi_p(u) = K_p(u)$.

Consideremos que $e_{p,k}(u) = e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}p$ es el mapeo de $L_0^{1/k}(p \cdot \mu)$ en $\mathcal{E}_p$, mientras que su mapeo inveso está representado como $s_{p,k}(q) = \ln_k\left(\frac{q}{p}\right) - E_p\left[\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)\right]$. Para el cambio de cartas se asume que $u \in L_0^{1/k}(p_1 \cdot \mu)$ y $\overline{u} \in L_0^{1/k}(p_2 \cdot \mu)$ donde, p_1 y p_2 son dos densidades en $\mathfrak{M}_\mu$, además $\mathcal{E}_{p_1} \cap \mathcal{E}_{p_2} \neq \phi$. Sea $q \in \mathcal{E}_{p_1} \cap \mathcal{E}_{p_2}$, el mapeo transición se expresa como

$$\begin{array}{rcccl} L_0^{1/k}(p_1 \cdot \mu) & \to & \mathcal{E}_{p_1} \cap \mathcal{E}_{p_2} & \to & L_0^{1/k}(p_2 \cdot \mu) \\ u & \mapsto & q & \mapsto & \overline{u} \ , \end{array}$$

donde $\overline{u} = (s_{p_2,k} \circ e_{p_1,k})(u)$. La siguiente gráfica ilustra la situación.



Por las propiedades del logaritmo k-deformado se logra

$$\begin{aligned}
\overline{u} =& \ln_k\left(\frac{e_{p_1,k}(u)}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[\ln_k\left(\frac{e_{p_1,k}(u)}{p_2}\right)\right] \\
=& \ln_k\left(\frac{e_k^{u-\psi_{k,p_1}(u)} p_1}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[\ln_k\left(\frac{e_k^{u-\psi_{k,p_1}(u)} p_1}{p_2}\right)\right] \\
=& \ln_k\left(e_k^{u-\psi_{k,p_1}(u)}\right) \overset{k}{\oplus} \ln_k\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[\ln_k\left(e_k^{u-\psi_{k,p_1}(u)}\right) \overset{k}{\oplus} \ln_k\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right] \ ;
\end{aligned}$$

con esto se concluye que el mapeo transición es

$$\overline{u} = (u - \psi_{k,p_1}(u)) \overset{k}{\oplus} \ln_k\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[(u - \psi_{k,p_1}(u)) \overset{k}{\oplus} \ln_k\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right] \ . \tag{3.22}$$

En el caso que $k = 0$ se obtienen los mapeos de trancisión de la variedad de Pistone y Sempi, a saber,

$$\begin{aligned}
\overline{u} =& u - K_p(u) + \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[u - K_p(u) + \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right] \\
=& u + \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - E_{p_2}\left[u + \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right] \ ,
\end{aligned}$$

que son los mapeos transición en la variedad de Pistone usual, los cuales son de clase $\mathcal{C}^\infty$ por ser mapeos afines.

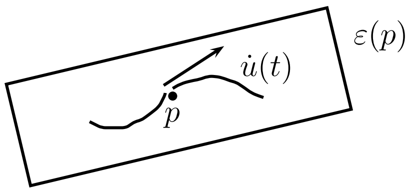
En [11] se prueba que dichos mapeos de transición $s_{p_2,k} \circ e_{p_1,k}$ definen una estructura diferenciable en $\mathfrak{M}_u$.

3.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias en la variedad k-exponencial

Sea $t \in [-1.1]$.Una curva en $\mathcal{E}(p)$ puede ser definida como: $p(t) = e_k^{u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t))} p_o$, donde $p(0) = p_0$ y $u(0) = 0$ En una carta centrada en p se puede definir el vector velocidad dado por

$$\frac{du(t)}{dt} \in L_0^{1/k}(p).$$

Pistone identifica el espacio tangente en p_0 con el espacio de variables aleatorias centradas en u. es decir, en forma más general, el espacio tangente en $p \in \mathfrak{M}_\mu$ está dado por $T_p(\mathfrak{M}_\mu) = L_0^{1/k}$.



Para la obtención del espacio tangente, notése que la derivada de la función $u - \psi_{k,p}(u)$ en la dirección de una variable aleatoria centrada en v está dada por la derivada de Frechet

$$\begin{aligned} D(u - \psi_{k,p}(u))v &= (u + v - \psi_{k,p}(u+v)) - (u - \psi_{k,p}(u)) + R(u-v) \\ &= v - (\psi_{k,p}(u+v) - \psi_{k,p}(u) - R(u-v)) \\ &= v - D\psi_{k,p}(u)v. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que $q \in \mathfrak{M}_\mu$, entonces

$$E_p[e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}] = 1 \tag{3.23}$$

Recordemos en este punto que la derivada de la exponencial k-deformada es

$$\frac{d}{dx}\, e_k^x = \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}\, e_k^x\ . \tag{3.24}$$

Sea q una densidad expresada como $q = e_k^{u-\psi_{k,p}(u)} p$, de donde $E_p\left[e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}\right] = 1$; al diferenciar esta expresión en la dirección de $v \in L_0^{1/k}(p \cdot \mu)$ y hacer uso de la regla de

Leibnitz resulta

$$E_p\left[\frac{e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}}{\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}}(v-D\psi_{k,p}(u)v)\right]=0\ .$$

En términos de la integral, resulta la expresión equivalente

$$\int_\Omega \frac{e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}}{\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}}(v-D\psi_{k,p}(u)v)\ p\ d\mu=0\ .$$

Debido a que $q=e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}p$, entonces la integral anterior se escribe en términos de q como

$$E_q\left[\frac{v-D\psi_{k,p}(u)v}{\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}}\right]=0\ . \tag{3.25}$$

Para $u=0$ se tiene que $\psi_{k,p}(0)=0$, por lo que en la igualdad (3.25) resulta que $E_q[D\psi_{k,p}(0)v]=0$; como $D\psi_{k,p}(0)v$ es constante respecto de la medida $q\cdot\mu$ entonces $D\psi_{k,p}(0)v=0$.

Con base en la ecuación (3.24) se escribe

$$e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}=\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}\ \left(\frac{d}{du}\ e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}\right)\ .$$

El lado izquierdo equivale a $\frac{q}{p}$, además $\ln_k\left(\frac{q}{p}\right)=u-\psi_{k,p}(u)$. La igualdad anterior se escribe

$$\frac{q}{p}=\sqrt{1+k^2\ln_k^2\left(\frac{q}{p}\right)}\ \left(\frac{d}{du}\ e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}\right)\ ,$$

de donde

$$\left(\frac{d}{du}\ e_k^{u-\psi_{k,p}(u)}\right)\ p=\frac{q}{\sqrt{1+k^2\ln_k^2\left(\frac{q}{p}\right)}}\ . \tag{3.26}$$

Al diferenciar en la expresión (3.23) en la dirección $v\in L_0^{1/k}$, tenemos

$$E_p[\frac{e_k^{u-\psi_{k,p}}(u)}{\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}}(v-D\psi_{k,p}(u)v)]$$

$$=E_q[\frac{v-D\psi_{k,p}(u)v}{\sqrt{1+k^2(u-\psi_{k,p}(u))^2}}]=0.$$

En $u = 0$ es claro que $\psi_{k,p}(0) = 0$, así que obtenemos de la anterior expresión que si $E_q[D\psi_{k,p}(0)v] = 0$ entonces $D\psi_{k,p}(0)v = 0$. Ahora, sea nuevamente el camino en $\mathcal{E}(p)$ definido como

$$p(t) = e_k^{u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t))} p_0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e_k^{u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t))}}{\sqrt{1+k^2(u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t))^2)}}[\frac{du(t)}{dt} - D\psi_{k,p_0(u(t))\frac{du(t)}{dt}}]$$

$$= \frac{p(t)}{\sqrt{1+k^2(u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t))^2)}}[\frac{du(t)}{dt} - D\psi_{k,p_0}(u(t))\frac{du(t)}{dt}]$$

y así

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2(u(t)-\psi_{k,p_0}(u(t)))^2}}[\frac{du(t)}{dt} - D\psi_{k,p_0}(u(t))\frac{du(t)}{dt}].$$

La condición inicial para la anterior ecuación diferencial viene dada por:

$$u(0) = 0 \Longrightarrow D\psi_{k,p}(0) = 0.$$

Por tanto

$$\frac{p(\dot{0})}{p(0)} = \frac{du(t)}{dt}|t = 0.$$

De forma más general, podemos simplificar la ecuación (3.23) del siguiente modo: Si $u - \psi_{k,p}(u) = Ln_k(\frac{p(t)}{p(0)})$, entonces

$$\frac{p(\dot{t})}{p(t)} = \frac{u(\dot{t}) - D\psi_{k,p_0}(u(t))u(\dot{t})}{\sqrt{1+k^2 Ln_k^2(\frac{p(t)}{p(0)})}},$$

con $E_{p(t)}(\frac{p(t)}{p(0)}) = 0$.

Ahora, se define el isomorfismo

$${}^kU_p^q : L_0^{1/k} \longrightarrow L_0^{1/k}$$

$${}^kU_p^q : T_p(\mathfrak{M}_\mu) \longrightarrow T_q(\mathfrak{M}_\mu)$$

del siguiente modo:

$$u \longrightarrow w = \frac{\dot{u} - D\psi_{k,p}(u)\dot{u}}{\sqrt{1+k^2 Ln_k^2(\frac{q}{p})}}$$

Como p y q están conectadas por la isometría dada por

$$L^{1/k}(p) \longrightarrow L^{1/k}(q)$$

definida por

$$u \longrightarrow (\frac{p}{q})^k u.$$

Además como $E_q(w) = 0$, podemos definir una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \ {}^{k}U_{p(0)}^{p(t)}(\dot{u}(t))$$

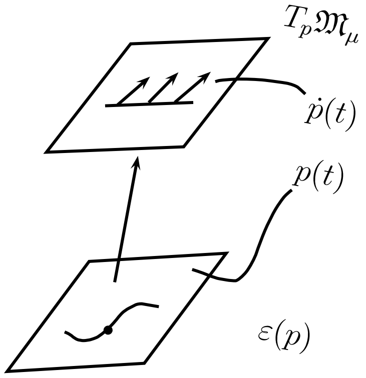
que es una ecuación diferencial con las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0) = 0 \ \text{ y } \ \psi_{k,p}(0) = 0(\text{ es decir, })D\psi_{k,p}(0) = 0$$

La solución solución está dada por:

$$p(t) = e_k^{u(t)-\psi_{k,p}(u(t))} p_0.$$

En el lenguaje de la geometría diferencial, esta ecuación diferencial define un campo vectorial sobre variedad la k-exponencial del siguiente modo: dado $u \in L_0^{1/k}(p(0))$ para cada $q \in \mathcal{E}(p) \subset \mathfrak{M}_\mu$, se puede considerar el siguiente diagrama.



Consideremos ahora ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sea la función

$$s_{p_0,k} : \mathfrak{M}_\mu \longrightarrow B_{p,k} = \{u \in L_0^{1/k}(p), E_p(u) = 0\}, \quad \text{con} \quad p_0 = 0,$$

dada por

$$q \longrightarrow s_{p_0,k}(q) = Ln_k(\frac{q}{p_0}) - E_p[Ln_k(\frac{q}{p_0})].$$

Sobre el conjunto $T_p(\mathfrak{M}_\mu) = \{(p, v) : p \in \mathcal{E}(p) \ \text{ y } \ v \in B_p\}$, podemos definir la curva

$$\alpha : I \longrightarrow T_p(\mathfrak{M}_\mu)$$

dada por

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (p(t), V(t)).$$

En una carta centrada en p, tenemos una descripción local que viene dada por

$$\alpha_p(t) = (s_{p_0,k}(p(t)),\ {}^kU_{p(0)}^{p(t)}(V(t))) = (u(t), V_p(t)).$$

Consideremos el operador proyección

$$\prod^{p(t)} : L^{1/k}(p) \longrightarrow B_{p(t),k}$$

definido por por l(2.1). Se sigue entonces que el vector velocidad en $T_p(T_p\mathfrak{M}_\mu)$ es definido como

$$\dot{\alpha}(t)_{p_0} = (\dot{u}(t), \dot{V}_{p_0(t)}) = (\frac{d(s_{p_0,k}(p(t))}{dt}, \frac{d\ {}^kU_{p(0)}^{p(t)}(V(t)))}{dt})$$

que define una ecuación diferencial de segundo orden en la k-variedad.

En primer lugar, vemos que

$${}^kU_{p(0)}^{p(t)}(V(t)) = \frac{\dot{V}(t) - D\psi_{k,p}(V(t))\dot{V}(t)}{\sqrt{1 + k^2 Ln_k^2(\frac{p(t)}{p(0)})}},$$

por tanto

$$\frac{d(\ {}^kU_{p(0)}^{p(t)}(V(t)))}{dt} = \frac{d(\frac{\dot{V}(t) - D\psi_{k,p}(V(t))\dot{V}(t)}{\sqrt{1+k^2 Ln_k^2(\frac{p(t)}{p(0)})}})}{dt}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{d(s_{p_0,k})}{dt} = kLn_k(\frac{p(t)}{p(0)})\dot{p}(t),$$

se sigue que la ecuación diferencial de segundo orden es

$$\dot{\alpha}(t)_{p_0} = \left(kLn_k(\frac{p(t)}{p(0)})\dot{p}(t), \frac{d(\frac{\dot{V}(t) - D\psi_{k,p}(V(t))\dot{V}(t)}{\sqrt{1+k^2 Ln_k^2(\frac{p(t)}{p(0)})}})}{dt} \right).$$

3.4. Modelo estocástico gaussiano k-deformado y variedad k-exponencial

En esta sección se presenta un marco teórico para el modelo estocástico gaussiano k-deformado en el contexto de la variedad de información k-exponencial. Precisamente, se propone un campo vectorial sobre la variedad k-exponencial, que defina a una ecuación diferencial estocástica, cuya solución sea el modelo más natural acorde con el modelo exponencial uniparamétrico definido en de dicha variedad, es decir, el modelo gaussiano k-deformado.

Para el efecto, definimos un campo vectorial F_t^k sobre la variedad k-exponencial por

$$F_t^k f(x,t) = \frac{1}{2}\sigma(t)\dot{\sigma(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\frac{k(t)^k}{1+k}(f(x,t))^k + \frac{k(t)^{-k}}{1-k}(f(x,t))^{-k}], \tag{3.27}$$

donde $\sigma(t)$ es la variancia asociada a $f(x,t)$ que es variable en el tiempo y $k(t)$ es una función asociada a una normalización de $f(x,t)$; que se obtendrá aplicando la transformada de Laplace k-deformada.

La propuesta del operador definido en (3.27) ha sido basada en una modificación de los planteamientos dados en [18].

Ahora, si asumimos que la función $p_t(x) = f(x,t)$ tiene una regularidad de clase $C^{2,1}$, podemos escribir la ecuación diferencial estocástica como

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = F_t^k f(x,t). \tag{3.28}$$

Nótese que F_t^k asigna a una familia de densidades dependientes del tiempo, un vector tangente, lo que da a F_t^k carácter de campo vectorial dependite del diempo. De otro lado, la ecuación (3.28) coincide con la de Fokker-Planck si k tiende a cero y la varianza es constante.

Ahora, para un x fijo, denotemos por $p_t(x) = f_k(x,t)$ a la solución de la anterior ecuación, con $-1 < k < 1$. Esta expresión define una curva en la variedad k-deformada $\mathcal{E}(p)$. Si tomamos $x = x_0$ entonces $p_t(x_0) = f_k(x_0,t) = p$. Esto correspondería a elegir una variación (simplificación) de la segunda opción propuesta por Pistone

$$f(x,t) = e_k^{(tU(x)-\psi_k(t))},$$

donde $U(x) = 0$ y $\psi_k(t) = -\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}$.

Ahora consideremos el mapeo

$$e_p : V_p \longrightarrow \mathfrak{M}_\mu,$$

definido por

$$u \longrightarrow e_p(u) = e_k^{(u-\psi_k(u))} p_0.$$

Si $p_t(x)$ es la curva correspondiente a la solución de (3.27) entonces, $p_{t+h} = e_h p_t$. Ahora, consideremos la ecuación (3.28) en una vecindad de $t \in I$, esto es,

$$\frac{\partial p_{t+h}}{\partial h} = F_{t+h}^k p_{t+h}.$$

Por tanto se tiene que

$$\frac{\partial e_h p_t}{\partial h} = F_{t+h}^k (e_h p_t),$$

la cual podemos escribir como

$$\frac{\partial e_h}{\partial h} = \frac{F_{t+h}^k (e_h p_t)}{p_t}.$$

Por otro lado, la densidad de probabilidad k-gaussiana de parámetro $k \in (0,1]$ y $\sigma > 0$ es definida por

$$f_k(x) = (Z_k)^{-1} e_k^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}, \tag{3.29}$$

con $x \in \mathbb{R}$ y donde Z_k es un factor de normalización que se puede obtener como sigue. Para que f_k sea función de densidad de probabilidad, al integrar la expresión anterior en los reales, se obtoene que

$$\int_0^\infty f_k(x)dx = \int_0^\infty (Z_k)^{-1} e_k^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})} dx = 1$$

Ahora, teniendo en cuenta la propiedad de la transfomada de Laplace k-deformada,

$$\mathfrak{L}_k(x^{r-1}) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e_k(-x) dx = \frac{1}{(2r)^r(1+rk)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2k} - \frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2k} + \frac{r}{2})},$$

donde $rk \leq 1$ y $\Gamma(z)$ es la función gamma, entonces el factor de normalización puede ser expresado entonces como

$$(Z_k)^{-1} = \frac{\sqrt{k}}{\sigma\sqrt{\pi}}(1 + \frac{k}{2}) \frac{\Gamma(\frac{1}{2k} + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4})}.$$

Es util obervar que cuando $k \longrightarrow 0$, la distribución k-gaussiana se aproxima a la distribución gaussiana centrada con variancia σ^2.

Ahora, para considerar un proceso estocástico, admitamos que la varanza $\sigma(t)$ es dependiente del tiempo y es función diferenciable de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^+$. En este caso, la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo es dada por

$$f_k(x,t) = (Z_k(t))^{-1} e_k^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)})}. \tag{3.30}$$

A continuación veremos que la familia gaussiana k-deformada dependiente del tiempo, definida por (3.30), es solución a la ecuación (3.28).

Demostración. Para ver lo anterior, consideremos la (3.28), que se puede escribir como

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma(t)\dot{\sigma(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\frac{(Z_k(t))^k}{1+k} f(x,t)^{1+k} + \frac{(Z_k(t))^{-k}}{1-k} f(x,t)^{1-k}]$$

o también

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma(t)\dot{\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x}[((Z_k(t) f(x,t))^k + (Z_k(t) f(x,t))^{-k})\frac{\partial f}{\partial x}]. \tag{3.31}$$

Dado que

$$Z_k(t) = \frac{\sigma(t)\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}(1+\frac{k}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2k}+\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2k}-\frac{1}{4})}$$

se obtiene

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z_k(t)} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}. \tag{3.32}$$

Apelando a la identidad $(exp_k(y))^r = exp_{k/r}(ry)$, se puede demostar la igualdad $(e_k(y))^k + (e_k(y))^{-k} = 2\sqrt{1+k^2y^2}$ y sustituyendo y por $y = \frac{-x^2}{2\sigma^2(t)}$ se obtiene

$$[Z_k(t) f_k(x,t)]^k + [Z_k(t) f_k(x,t)]^{-k} = [exp_k(\frac{-x^2}{2\sigma^2(t)})]^k + [exp_k(\frac{-x^2}{2\sigma^2(t)})]^{-k}$$

$$= 2\psi_k(x,t), \quad \text{donde} \quad \psi_k(x,t) = \sqrt{1+k^2(\frac{x^2}{2\sigma^2(t)})^2}. \tag{3.33}$$

Por otro lado, la primera derivada parcial de $f_k(x,t)$, respecto a x es

$$\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x} = \frac{-x f_k(x,t)}{\psi_k(x,t)\sigma^2(t)}. \tag{3.34}$$

También, la primera derivada parcial de $f_k(x,t)$, respecto a t es

$$\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial t} = [\frac{x^2\dot{\sigma}(t)}{\sigma^2(t)\psi_k(x,t)\sigma(t)} - \frac{\dot{Z}_k(t)}{Z_k(t)}]f_k(x,t).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la relación (3.32) se sigue que

$$\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial t} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}[\frac{x^2\dot{\sigma}(t)}{\sigma^2(t)\psi_k(x,t)} - 1]f_k(x,t). \tag{3.35}$$

Partiendo de la expresión (3.31), remplazando (3.33) y (3.34), se tiene

$$\frac{1}{2}\sigma(t)\dot{\sigma}(t)\frac{\partial}{\partial x}[((Z_k(t)f_k(x,t))^k + (Z_k(t)f_k(x,t))^{-k})\frac{\partial f_k(x,t)}{\partial x}$$

$$= \frac{-\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x}[xf_k(x,t)].$$

Y finalmente, recurriendo de nuevo a la ecuación (3.34), se tiene

$$\frac{-\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}[\frac{-x^2}{\sigma^2(t)\psi_k(x,t)} + 1] = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}[\frac{x^2}{\sigma^2(t)\psi_k(x,t)} - 1]f_k(x,t)$$

que es precisamente la ecuación (3.35) como se deseaba demostrar.

□

Conclusiones

1. Una aplicación de aspectos relevantes del análsis funcional y la geometría diferencial permiten describir un marco adecuado para la geometría de la información no paramétrica. Por ejemplo, la variedad de información k-exponencial y algunos haces vectoriales relevantes como son el haz tangente y el doble haz tangente, permiten definir campos vectoriales de interés para el estudio de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. El modelo estocástico que consiste de la familia de densidades k-Gausianas dependientes del tiempo, se puede obtener de la consideración del campo vectorial dado por (3.27) sobre la variedad de información k-exponencial, mediante la ecuación diferencial estocástica dada por (3.28), la cual es una modificación de la ecuación de Fokker Planck.

3. La evolución en casos concretos de las funciones de densidad de probabilidad definidas en la variedad de información k-exponencial es representada como curvas integrales de los campor vectoriales produciendo modelos uniparamétricos.

4. Las ecuaciones diferenciales definidas en las variedades de información son un caso no trivial de los sitemas dinámicos en espacios infinitodimensionales.

Problemas abiertos

1. Analizar las condiciones de frontera de las ecuaciones diferenciales definidas en las variedades que introdujo G. Pistone como también las soluciones de los problemas de contorno cuya interpretación estadísitca sea relevante.

2. Examinar las propiedades de estabilidad de las soluciones y cómo estas propiedades son relevantes en el estudio del comportamiento de las distribuciones de probabilidad.

3. En el contexto de la mecánica estadística de Tsallis y la geometría diferencial, formular los campos vectoriales en la variedad de información q-exponencial introducida por Loaiza y Quiceno, de forma que se obtenga un modelo estocástico consistente en la familia de densidades de probabilidad gaussianas q-deformadas dependiente del tiempo.

4. En un ámbito más amplio, discutir los problemas concernientes al estudio de la evolución de densidades relacionadas en el marco de las variedades exponenciales de información y cómo dichas soluciones pueden ser caracterizadas por una subvariedad.

Bibliografía

[1] S. Amari and A. Ohara: *Geometry of $q-$exponential family of probability distributions*. Entropy. (13) 1170-1185, 2011.

[2] Amari, S.: *Differential-geometrical methods in statistics*. New York, Springer, 1985.

[3] Amari, S., Nagaoka, H.: *Methods of information Geometry*. Providence, (2000) RI: American Mathematical Society. Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada.

[4] Deossa, Dora: *Sobre funciones exponenciales y logarítmicas deformadas según Kaniadakis*. Tesis de maestría, Universidad EAFIT. Medellín, 2011. Available online: http://hdl.handle.net/10784/156

[5] G. Kaniadakis: *Statistical mechanics in the context of special relativity*. The American Physical Society, Physical Review E 66, 056125 1, 2002.

[6] G. Kaniadakis: *Statistical mechanics in the context of special relativity II*. Phys. Rev. E 72, 036108 – Published 9 September 2005.

[7] Lang, Serge.: *Differential Manifolds*. Springer Verlang. New York, 1985.

[8] G. Loaiza and H. R. Quiceno: *A q-exponential statistical Banach manifold*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 398 446-476, 2013.

[9] G. Loaiza and H. R. Quiceno: *A Riemmanian geometry in the $q-$exponential Banach manifold*. Loaiza, Gabriel y Quiceno, Héctor: A Riemannian geometry in the q-exponential Banach manifold induced by q-divergences. Lecture Notes in Computer Science Volume 8085, pp 737-742, 2013.

[10] Pistone, Giovanni and Sempi, Carlo: *An infinite-dimensional geometric structure on the space of all the probability measures equivalent to a given one*. The Annals of Statistics., Vol. 23., No. 5., . pp.2, 1543–1561, 1995.

[11] Pistone, Giovanni: *K-exponential models from the geometrical viewpoint*. The European Physical Journal B. Springer Berlin. ISSN 1434-6028 (Print) 1434-6036 (Online) 70, Pag 29-37, 2009.

[12] G. Pistone: *Nonparametric Information Geometry*. LNCS 8085, pp. 5–36. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[13] G. Pistone and M-P. Rogantin: *The exponential statistical manifold: parameters, orthogonality and space transformations.*Bernoulli. (4) 721-760, 1999.

[14] G. Pistone and D. Brigo: *Projecting the Fokker-Planck equation onto a finite dimensional exponential family.*arXiv:0901.1308, 2009.

[15] Borges, E.P.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos.* Tese de Dutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro, 2004.

[16] A. Cena: *Geometric Structures on the non-parametric statistical manifold.* Tesi di Dottorato.Dottorato in Matematica, Università di Milano. Eguchi, S., 2005.

[17] A. Cena and G. Pistone: *Exponential statistical manifold.* Annals of the Institute of Statistical Mathematics. ISSN 0020-3157 (Print) 1572-9052 (Online) 59, Pag 27-56, 2006.

[18] Wada, T. and Scarfone, A.M: *Asymptotic solutions of a nonlinear equation in the framework of k-generalized statistical mechanics.* Eur. Phys. J. B, 70, 65–71, 2009.

[19] Dawid, A.P.: *On the concepts of sufficiency and ancillarity in the presence of nuisance parameters.* Journal of the Royal Statistical Society B, 37, 248-258, 1975.

[20] Efron, B.: *Defining the curvature of a statistical problem (with applications to second order efficiency).*Annals of Statistics, 3, 1189-1242. With a discussion by C. R. Rao, Don A. Pierce, D. R. Cox, 1975.

[21] H. Jeffys: *An invariant form of the prior probability in estimation problems.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A 186 453-461, 1946.

[22] A. Jencová: *A construction of a nonparametric quantum information manifold.* Journal Of Functional Analysis. (239) 1-20, 2006.

[23] P. Gibiliosco, E. Riccomagno, M. P. Rogantin and H. P. Wynn:*Algebraic and geometry methods in statistics.* Cambridge Univercity press, 2012.

[24] J. Naudts: *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatics.* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. (316) Issues 1-4 323-334, 2002.

[25] C. R. Rao: *Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters.* Bull. Calcutta Math. Soc. 37 81-91, 1945.

[26] Rao, M.M. and Ren, Z.D.: *Theory of Orlicz Spaces.* Marcel Dekker Inc. New York, N.Y, 1991.

[27] Rao, M. M. y Ren, Z.D.:*Aplication of Orlicz spaces.* Marcel Dekker Inc, 2002.

[28] Tsallis, C.: *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics.* J.Stat. Phys.52, 479-487, 1988.

[29] Tsallis, C.: *Nonextensive statistical mechanics: A brief review of rts present status.* Annals of the Brazilian Academy of Sciences Vol 74, 393-414, 2002.