

Aplicación de los conjuntos borrosos a las decisiones de inversión

Juan Carlos Gutiérrez Betancur¹.
jgutie31@eafit.edu.co

Recepción: 13 de septiembre de 2006

Aceptación: 20 de noviembre de 2006

Resumen

A partir de la introducción de la génesis de la teoría de la incertidumbre, el artículo destaca la importancia del uso de la lógica borrosa en economía y finanzas, para luego pasar a expresar la incertidumbre no estocástica de uno de los criterios de decisión clásicos: el valor presente neto. Esto se logra mediante el diseño de aproximaciones triangulares de números borrosos, en orden a obtener el valor presente borroso; con ello se logra incorporar la gradualidad y la matización del pensamiento de quien decide en el proceso de determinación financiera.

Se expone un ejemplo relacionado con la valoración financiera de proyectos de inversión, usando tasas de interés borrosas. Se concluye afirmando que en algunos casos es posible que las distribuciones de probabilidad de los parámetros fundamentales para la valoración de las alternativas de inversión sean desconocidas, debido a cuestiones como el carácter de riesgo “privado” de la firma o proyecto, su falta de bursatilidad, la ausencia de carteras réplicas precisas, etc.; caso en el cual podría ser de mucha utilidad recurrir al uso de números triangulares borrosos o de modelos basados en números híbridos (aleatorios y borrosos).

Palabras clave: Incertidumbre, números triangulares borrosos, tasas de interés borrosas, valor presente neto borroso.

Abstract

Based on the genesis of a generalized theory of uncertainty, this article deals with the importance of using a fuzzy logic approach in economics and finance, with the

¹ Administrador de Empresas. Universidad Pontificia Bolivariana. Magíster en Finanzas, ITESM (México). Profesor asistente en el Departamento de Finanzas de la Universidad EAFIT, Medellín.

purpose of defining the non stochastic character of uncertainty of one of the main financial decision-making criteria: current net value. To achieve this objective we have designed fuzzy triangular numbers, in order to get the fuzzy current net value; incorporating the gradual nature of financial decision making and the granularity of the human thinking process.

We describe an example related to investment project finance valuation using fuzzy interest rates. In this article, we propose that there are some aspects of the state or nature that limits the complete application of well defined probability distributions for the purpose of parameter estimation of investment valuation which are unknown, due to questions like the “private” risk profile of a firm or project, the illiquidity of some of its assets, the absence of precise portfolio replication strategies, and other factors. In these cases, we can use fuzzy triangular numbers or fuzzy random numbers.

Key words

Uncertainty modeling, fuzzy triangular numbers, fuzzy interest rates, fuzzy net present value.

1. De la lógica bivalente a la lógica multivalente

La reciente actividad científica en economía y gestión de empresas, intenta resolver la creciente inestabilidad de los sistemas sociales, económicos y empresariales. Sin embargo, se encuentra en una encrucijada. De una parte, afronta la imposición de estructuras basadas en la certeza newtoniana, siguiendo el criterio de Laplace, según el cual basta con disponer de las leyes de la naturaleza y las condiciones del universo, en un instante dado, para reconstruir el pasado y predecir el futuro. De otro lado, la realidad actual, en constante evolución, demanda la creación de nuevas formas e instrumentos de representación y gestión de lo inestable. En este sentido, los planteamientos originales de Ilya Prigogine (1954) y Edward Lorenz (1963) llamaron la atención sobre el estudio de los sistemas inestables con procesos disipativos generadores de incertidumbre. Por su parte, Bertrand Russell (1923), Jan Lukaciewicz (1920), Max Black (1937), Lotfi Zadeh (1965), Arnold Kaufmann (1973), Jaime Gil Aluja

(1996), George Klir (1988), Ronald Yager (1985) y Bart Kosko (1986), principalmente, hicieron evidentes los vacíos de la lógica aristotélica y establecieron las bases de la teoría de conjuntos borrosos y sus conexiones con las redes neuronales y la teoría del caos.

En 1954, el químico belga Ilya Prigogine publica *La introducción a la termodinámica de los procesos irreversibles*, libro en el cual demuestra que en condiciones alejadas del equilibrio, las fluctuaciones pueden estabilizarse; es decir, el orden viene del caos, debido a que las estructuras disipativas para perdurar captan la energía de su medio ambiente caótico y luego la disipan nuevamente al exterior. Según este autor, en entrevista concedida a Sorman Guy (1992), incluso la economía funciona similar a este modelo: “de la suma de actividades individuales desordenadas surgen el orden social y el progreso económico”.

En 1963, Lorenz anticipó varias de las ideas más importantes de la dinámica no lineal cuando

adelantaba un estudio de los fenómenos de circulación atmosférica con el propósito de mejorar los pronósticos meteorológicos. Con tal fin elaboró un modelo tridimensional que presentó formas de comportamiento caótico e hipersensibilidad a las condiciones iniciales, fenómeno este último que denominó “efecto mariposa”. Al resolver numéricamente el sistema simplificado que representa el proceso de convección de calor en la atmósfera, encontró que “todas las soluciones eran inestables, y casi todas no periódicas” (Lorenz, 1963,).

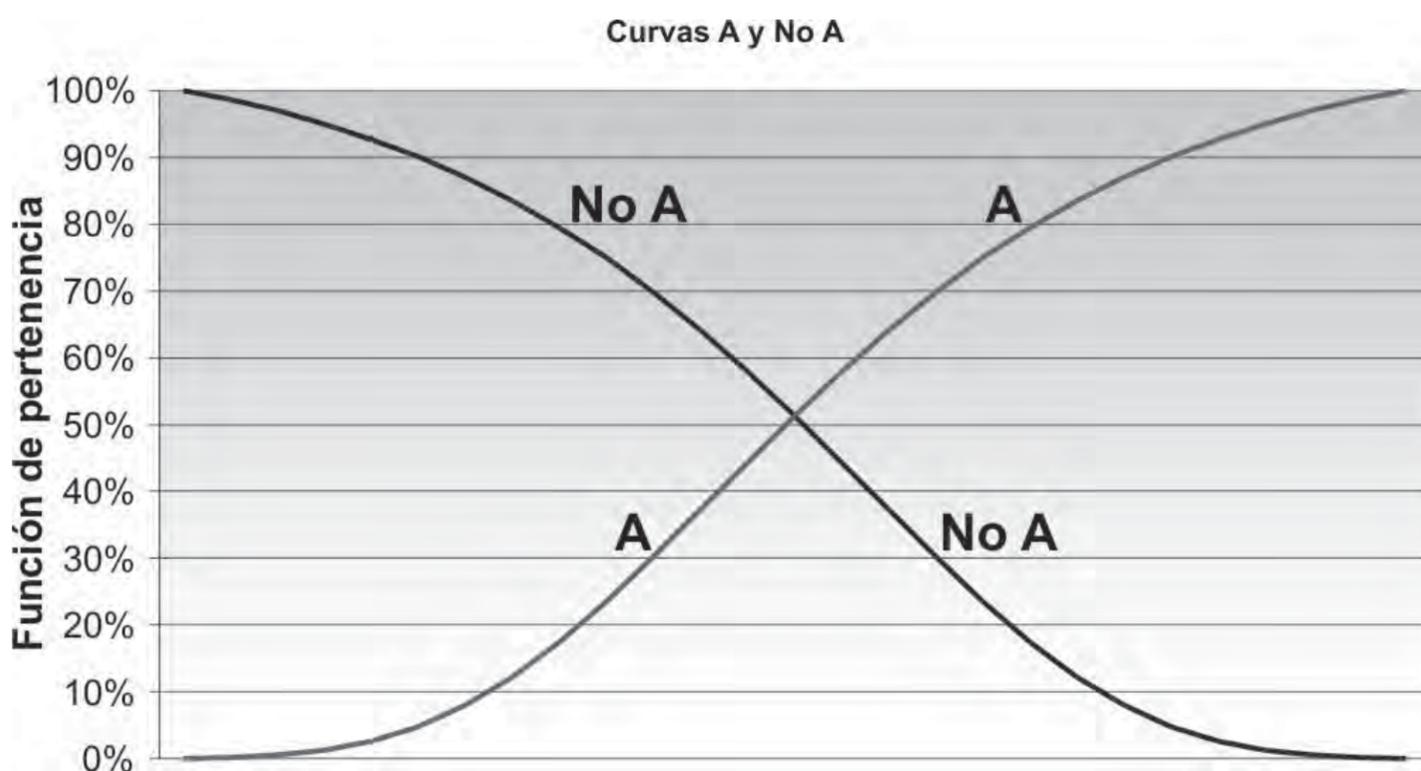
Según Aristóteles (384 – 322 a.C./1997,), “las proposiciones, sean positivas o negativas, son por necesidad verdaderas o falsas. Y de las proposiciones que se oponen contradictoriamente debe ser una verdadera y una falsa”. Es a Crisipo de Soli (208 a. C.) a quien se le atribuye la formulación del “principio del tercio excluso” (una proposición es verdadera o es falsa).

Sin embargo, tuvieron que transcurrir veintidós siglos hasta que Jan Lukaciewicz, en 1910, señalara que existen proposiciones que no son verdaderas ni falsas, sino indeterminadas; lo cual le permitió enunciar su “principio de valencia” (cada proposición tiene un valor de verdad), originando así los fundamentos de las lógicas multivalentes.

Hacia 1923, el teórico de la lógica Bertrand Russell (84-92) escribió que “todo concepto es vago en un grado del que no somos conscientes hasta que intentamos precisar dicho concepto”, con lo cual, el autor pretendía representar el concepto de vaguedad, o la forma como los objetos se transforman continuamente pasando de A a no A, siendo durante la mayor parte del tiempo de existencia una mezcla de ambas cosas.

Luego, en 1937, el filósofo cuántico Max Black definía el primer conjunto borroso mediante una curva de pertenencia, como se observa en el gráfico 1 (Black, 1937, 427 - 455).

Gráfico 1



En este gráfico, Black estableció por primera vez que todo es en cierto grado A y en cierto grado no A, acercándose a los extremos, sin necesariamente tener que llegar a ellos. Las curvas no son un brusco salto de 0 a 1 o de 1 a 0. Con ello, Black logró extender la lógica multivaluada a la teoría de conjuntos, con el fin de representar la vaguedad de la realidad.

Posteriormente, Zadeh (1965), profesor de la Universidad de California en Berkeley, publicó el artículo seminal sobre el cual se ha construido la teoría de los subconjuntos borrosos; una teoría rigurosa para el tratamiento de la incertidumbre. Era una época en la cual los científicos usaban matemáticas clásicas para escrutar los sistemas complejos en ingeniería, economía, predicción del clima y biología. Pero Zadeh decidió aplicar la lógica multivaluada a la teoría de sistemas porque notó que a medida que el sistema se hacía más complejo los enunciados precisos tenían menos significado.

Seguidamente, en 1973, el ingeniero matemático francés Arnold Kaufmann publicó el primer libro sobre matemática borrosa, donde “intuía las grandes posibilidades de los razonamientos contenidos en el artículo de Zadeh para el estudio de las ciencias sociales, los problemas económicos, financieros y de gestión, en los cuales el pensamiento humano, tan cargado de matices, juega un papel fundamental”.

Recientemente, el economista, matemático, filósofo e ingeniero norteamericano Bart Kosko (1986, 165 - 174) formuló el “teorema de entropía borrosa”, el cual sirve “para medir la borrosidad de un subconjunto borroso”.

En la última década del siglo pasado, el economista Jaime Gil Aluja (1996,), enunció el “principio de simultaneidad gradual”, según el cual “toda proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, a condición de asignar un grado a su verdad y un grado a su falsedad”. Este

principio sirve para ilustrar que los humanos son seres perceptivos que emiten impulsos neuronales que escapan al mecanicismo de la razón pura, lo que los convierte en tomadores de decisiones “racionalmente matizadas”. A su vez, la aplicación de este principio ha dado lugar a un abundante material teórico que se denomina “matemática borrosa de la incertidumbre” y a toda una tecnología de aplicación en las más diversas ramas incluyendo la economía y las finanzas.

Con estos desarrollos, la gestión de la incertidumbre cuenta con un nuevo enfoque, el cual debe entenderse como complementario y no como competitivo del enfoque probabilístico, un enfoque que permite valorar la percepción y la imprecisión presente en los sistemas socioeconómicos altamente inestables.

2. Distinción entre datos aleatorios y datos inciertos

Ante los recientes desarrollos de la matemática borrosa de la incertidumbre y particularmente de sus aplicaciones en la economía financiera, conviene realizar una adecuada distinción entre aleatoriedad e incertidumbre.

En muchos problemas de gestión empresarial, económica y financiera, el analista encuentra la presencia simultánea de datos ciertos, aleatorios o inciertos.

Kaufmann y Gil Aluja (1993, 117 – 118) establecen los siguientes grados de conocimiento para los datos de los problemas de gestión:

Se cuenta con “datos ciertos” cuando se conocen todos los estados y para cada estado el (o los) valor (es) que se les afecta. Estos datos pueden ser numéricos o no numéricos, ordenados o no ordenados.

Se cuenta con “datos aleatorios” cuando se conocen los estados y únicamente se pueden afectar los valores asociados a estos estados a través de leyes de probabilidad. El proceso de tratamiento se convierte en un proceso estocástico. También pueden encontrarse sistemas en donde los propios estados son aleatorios.

Se está en presencia de “datos inciertos” cuando no pueden obtenerse leyes de probabilidad debido al conocimiento parcial o al desconocimiento de la forma de dicha distribución. Se pasa de lo medible a lo valuable, ya que las valuaciones son captadas a través de estimaciones numéricas subjetivas, puesto que en estas situaciones, el camino hacia el conocimiento de los problemas de gestión económico -financiera, parte de la percepción de elementos inherentes al proceso bajo estudio. Se ingresa entonces en el ámbito de aplicación de la matemática de la incertidumbre: intervalos de confianza, tripletas de confianza, números borrosos, técnicas de regresión borrosa, métodos de optimización borrosa, números híbridos o variables borroso aleatorias (donde convergen aleatoriedad y borrosidad), grafos neuronales, alfa cortes, etc.

El criterio fundamental de optimización para datos aleatorios es la esperanza matemática y es conveniente reconocer que si bien la teoría de probabilidades posee muchas fortalezas, también ofrece limitaciones. Según Zadeh (2002, 233-235),

[...] existe un concepto inmanente a la cognición humana y es el concepto de parcialidad. La realidad de los acontecimientos económicos nos presenta a diario certezas parciales, verdades parciales, precisión parcial, posibilidad parcial, conocimiento parcial, entendimiento parcial, creencia parcial, solución parcial y capacidad parcial. Desde este punto de vista, la teoría de probabilidades es una teoría de la certeza parcial y del comportamiento aleatorio. Sin embargo, la teoría de probabilidades no aborda ninguna

de estas parcialidades; porque se fundamenta en la lógica aristotélica bivalente. Para la teoría de probabilidades, un proceso es estocástico o no estocástico; una serie temporal es estacionaria o no estacionaria; un evento sucede o no sucede; una acción es irreversible o no lo es; los eventos A y B son independientes o no independientes; y así sucesivamente. Luego, la negación de la verdad o posibilidad parcial restringe seriamente la habilidad de la teoría de probabilidades para afrontar los problemas económicos y de gestión en los cuales la posibilidad es una cuestión de grado”.

En opinión de este autor (2002, 236), “la más importante desventaja de la teoría de probabilidades consiste en que no posee la capacidad para procesar información basada en la percepción, la sensación, la expectativa; esto debido a que la teoría de probabilidades no cuenta con mecanismos para representar el significado de las percepciones, y computar dichas representaciones”.

Por otra parte, los datos inciertos son percepciones granulares, es decir, percepciones borrosas de variables no precisamente definidas, y valores percibidos de variables agrupadas en *gránulos*, entendiendo por *gránulos* un cúmulo de puntos similares y funcionalmente próximos entre sí.

Es importante afirmar, que lo incierto y lo aleatorio se asocian sin inconveniente alguno, puesto que la certeza es un caso particular tanto de la aleatoriedad como de la incertidumbre. Lo aleatorio y lo incierto convergen a manera de variables aleatorias borrosas, procesos estocásticos borrosos o, más integralmente, en lo que se denomina “razonamiento probabilístico basado en la percepción” (Zadeh, 2002, 238).

De todas maneras, en el proceso de decisión es importante observar la naturaleza de los problemas económico – financieros, para evitar hacer borroso aquello que no lo es o determinar como cierto o aleatorio lo que es borroso.

3. Razones para el uso de la teoría de conjuntos borrosos en economía y finanzas

Tarrazo (2001, 43) sugiere las siguientes razones fundamentales:

Razón numérica. Siempre existen errores de medición. La corrección de errores puede ser crítica en algunas áreas, pero en las ciencias inexactas como la economía, las finanzas y la gestión de empresas siempre se tendrá que vivir con aproximaciones.

Razón probabilística. La teoría estadística es frecuentista, y no aborda el cambio y la dependencia estructural futura de las variables que inciden sobre la economía y los negocios. La lógica borrosa evita la pérdida de información que se produce con el uso de métodos estadísticos que realizan manipulación numérica, puesto que trabajan con promedios, ocultando los valores extremos.

Razón teórica. Los modelos económicos y financieros son representaciones aproximadas de la realidad, a diferencia de los modelos usados en la física o la mecánica. Según Sen (2004, 597), “de poco sirve realizar representaciones extremadamente precisas de un concepto identificado como incierto o borroso”.

Razón informacional. Los objetos probabilísticos de la gran mayoría de modelos económicos y financieros prevalecientes no incorporan información cualitativa de gran valor. La lógica borrosa permite abandonar la noción preconcebida respecto a la manera en que los datos deben comportarse, permitiendo entender que las decisiones económicas y financieras no están afectadas por la diferencia entre el valor actual de la variable que se observa y algún valor teórico normativo de equilibrio. La lógica borrosa permite superar el simplista enfoque aristotélico para la noción de equilibrio (estás o no en equilibrio), para concebirlo como una

paradoja que presenta grados de pertenencia hacia las esquinas del equilibrio y desequilibrio absolutos, los extremos ideales que no siempre se alcanzan. Esto permite entender que la realidad económica y financiera transcurre entre estos dos opuestos la mayor parte del tiempo.

Razón conductual. Los seres humanos poseen racionalidad limitada y son proclives al error, lo cual separa las predicciones de los modelos “exactos” y de “equilibrio general”, de las observaciones de los hechos. A diario, los datos económicos y financieros muestran los patrones de conducta de los agentes, los cuales sintetizan el grado de borrosidad y asimetría de los impulsos neuronales de los agentes humanos.

Razón cognitiva. Los seres humanos están naturalmente dotados para gestionar la imprecisión y la incertidumbre no frecuentista pero si, perceptible y valuable mediante sensaciones.

Estas razones significan que en la mayoría de problemas de gestión en la incertidumbre, los agentes de decisión no necesitan medir con precisión infinitesimal. Por ejemplo, cuando se está considerando la compra de una casa mediante financiación hipotecaria, la evolución futura del tipo de interés de financiación a 15 ó 20 años es un asunto más borroso que aleatorio, que debe tratarse mediante intervalos de confianza. Algo similar sucede con el lanzamiento de un producto, la planeación de la jubilación o la valoración de proyectos de inversión de largo plazo. En dichas circunstancias, el experto representa el conocimiento mediante mapas cognitivos (borrosos, aunque no se percate de ello), porque estos son esquemas efectivos y suficientes para capturar de manera aproximada la dinámica del problema en cuestión.

Estos elementos implican que en condiciones de incertidumbre son evidentes las necesarias modificaciones a la manera de concebir los modelos en finanzas corporativas e ingeniería

financiera, pues estos modelos deben partir de los juicios razonados que emite la gerencia, el experto financiero o los agentes del mercado (a través de la evidencia de los precios) acerca de lo que va a suceder. De acuerdo con Haugen (1996, 86-87), “en un contexto de mercados imperfectos el cálculo del costo de capital y de la deuda no debería fundamentarse sólo en modelos teóricos precisos basados en sistemas de ecuaciones simultáneas y muy apropiados para entornos de menor complejidad, sino en sistemas de ecuaciones aproximadas, que reflejen un enfoque más evolutivo y cambiante”.

En este sentido, los modelos financieros borrosos aplicados a la planificación financiera y a la administración de portafolios de inversión, lucen muy promisorios por su utilidad para establecer rangos de incertidumbre, así como intervalos de riesgo – rentabilidad que permitan vincular razonablemente la optimización financiera con la formación de expectativas.

Con lo expuesto hasta aquí se introducen los fundamentos filosóficos y epistemológicos de la nueva teoría de la incertidumbre, haciendo especial énfasis en el porqué de la teoría de subconjuntos borrosos y sus posibilidades de aplicación en economía financiera. A continuación, se expondrán con suficiente detalle los fundamentos matemáticos de esta teoría antes de intentar hacer borroso uno de los modelos financieros en boga.

4. Elementos matemáticos de la incertidumbre

Intervalos de confianza

Puede definirse un intervalo de confianza como un dato incierto que sirve para predecir

el valor de cierta variable entre dos extremos, uno inferior y otro superior. Así, por ejemplo, se podría decir: el tipo de cambio \$ Col. Peso / US \$ para el próximo trimestre se situará entre [2350, 2400]. Un intervalo de confianza correctamente especificado es mejor que pronosticar una variable con un dato concreto en condiciones de incertidumbre.

Tripletas y cuádruplos de confianza

La tripleta de confianza es un dato incierto definido por dos extremos que acotan el valor previsional de la variable bajo estudio y un valor central indicativo del valor con mayor posibilidad de obtenerse.

Así mismo, el cuádruplo de confianza es un dato incierto definido por dos extremos que acotan el valor previsional de la variable bajo estudio y un valor central indicativo de mayor presunción definido dentro de otro que acota el dato provisional entre un valor mínimo y uno máximo.

En el caso del pronóstico del tipo de cambio \$ Col. Peso / US \$ para el próximo trimestre, el analista podría predecir el siguiente cuádruplo (2350, [2368, 2382], 2400); en el cual el intervalo de mayor posibilidad o presunción queda definido dentro de un intervalo que limita el dato previsional entre unos valores mínimo y máximo.

Escalas semánticas fundamentales

Según Kaufmann y Gil Aluja (1993, 89–90), las escalas semánticas más usadas en aplicaciones de la teoría de subconjuntos borrosos con el fin de matizar los niveles de verdad, son las siguientes:

<p><u>Escala binaria</u> 0: falso 1 : verdadero</p> <p><u>Escala pentaria</u> 0: falso 0.25: más falso que verdadero 0.5: ni verdadero ni falso 0.75: más verdadero que falso 1 : verdadero</p> <p><u>Escala endecadaria</u> 0: falso 0.1: prácticamente falso 0.2: casi falso 0.3: bastante falso</p>	<p><u>Escala ternaria</u> 0: falso 0.5: ni verdadero ni falso 1 : verdadero</p> <p><u>Escala hexaria</u> 0: falso 0.2: casi falso 0.4: más falso que verdadero 0.6: más verdadero que falso 0.8: casi verdadero 1 : verdadero</p>
--	--

En estas escalas se observa que un dato valuado como falso o verdadero, es un caso particular de un conjunto borroso.

Subconjuntos borrosos

Si Ω es algún conjunto, un subconjunto borroso \bar{A} de Ω está definido por su función de pertenencia, escrita $\bar{A}(x)$, la cual produce valores en $[0, 1]$ para todo x en Ω . Luego, $\bar{A}(x)$ es una función que mapea Ω en $[0, 1]$. Si $\bar{A}(x_0)=1$, se dice que x_0 pertenece a \bar{A} , si $\bar{A}(x_1) = 0$, se dice que x_1 no pertenece a \bar{A} , y si $\bar{A}(x_2) = 0.6$ se dice que el valor de pertenencia de x_2 en \bar{A} es 0,6. Cuando $\bar{A}(x)$ es igual a uno o a cero se obtiene un subconjunto ordinario (no borroso) de Ω . La función de pertenencia $\bar{A}(x_i)$ también puede representarse por μ_i .

En el lenguaje de la lógica borrosa, se denomina conjunto *crisp* a un conjunto de la teoría de conjuntos clásica. Un conjunto *crisp* es sinónimo de un conjunto nítido. A su vez, un número *crisp* (número nítido) es un número real. Una matriz (vector) contiene números

reales en sus elementos. Una función *crisp* mapea números reales en números reales. Una solución *crisp* a un problema es una solución que involucra conjuntos clásicos, números reales nítidos. En la escala endecadaria, el 0 y el 1, los valores extremos de la escala, que denotan la no pertenencia o la pertenencia total, constituyen números *crisp* o nítidos, puesto que no representan un grado intermedio.

Por su parte, los subconjuntos borrosos se asocian a *distribuciones de posibilidad*, las cuales son diferentes de las *distribuciones de probabilidad*, como lo ilustra Zadeh en el siguiente ejemplo.

“John consume X huevos al desayuno, donde $X = \{1, 2, \dots\}$. La distribución de posibilidad $\pi_x(x)$ puede interpretarse como la *posibilidad* con la cual John puede consumir x huevos al desayuno. La distribución de probabilidad $P_x(x)$ se interpreta como la *probabilidad* con la cual John puede consumir x huevos al desayuno, o alternativamente, la distribución de probabilidad $P_x(x)$ está determinada por la

observación del número de huevos consumidos por John por un período de 100 días". La diferencia evidente consiste en que $\sum_x P_x(x) = 1$ y $\sum_x \pi_x(x)$ no es necesariamente igual a 1. Por ejemplo, los valores de $\pi_x(x)$ y $P_x(x)$ se observan en la tabla 1:

Tabla 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_x(x)$	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2
$P_x(x)$	0,1	0,8	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Se observa que *un alto grado de posibilidad no implica un alto grado de probabilidad*. Es decir, lo que es probable debe ser posible, en cambio lo que es posible no siempre es probable. La teoría de probabilidades y la teoría de posibilidades (subconjuntos borrosos) no son sustitutivas entre sí pero son complementarias.

Para la matemática bivalente, si se toma un conjunto A que obedece las leyes aristotélicas de no contradicción y tercio excluso:

$A \cap A^c = \emptyset$ y $A \cup A^c = X$, la contradicción entre los conjuntos tiene medida cero:

$$P(A \cap A^c) = P(\emptyset) = 0$$

Ahora, desde el punto de vista de la lógica borrosa, el carácter borroso del conjunto A se cumple si y sólo si se incumplen las leyes de Aristóteles:

$$A \cap A^c \neq \emptyset \text{ y } A \cup A^c \neq X$$

Es decir, lo probabilístico excluye lo borroso, pero lo borroso incluye lo probabilístico porque se trata de un caso especial (Buckley, 2002, 5 – 17).

Subconjuntos borrosos discretos

En el campo discontinuo, los valores posibles de la variable objeto de estudio son datos concretos distanciados entre sí. De esta forma, por ejemplo, si asumimos que el plazo de cobro de una venta a crédito oscila entre 60 y 120 días, tomando distancias entre valores de 10 días, el tesorero podría estimar el plazo de cobro a partir del siguiente subconjunto borroso S:

Tabla 2

	60	70	80	90	100	110	120
S=	0,5	0,8	0,4	1	0,7	0,6	0,5

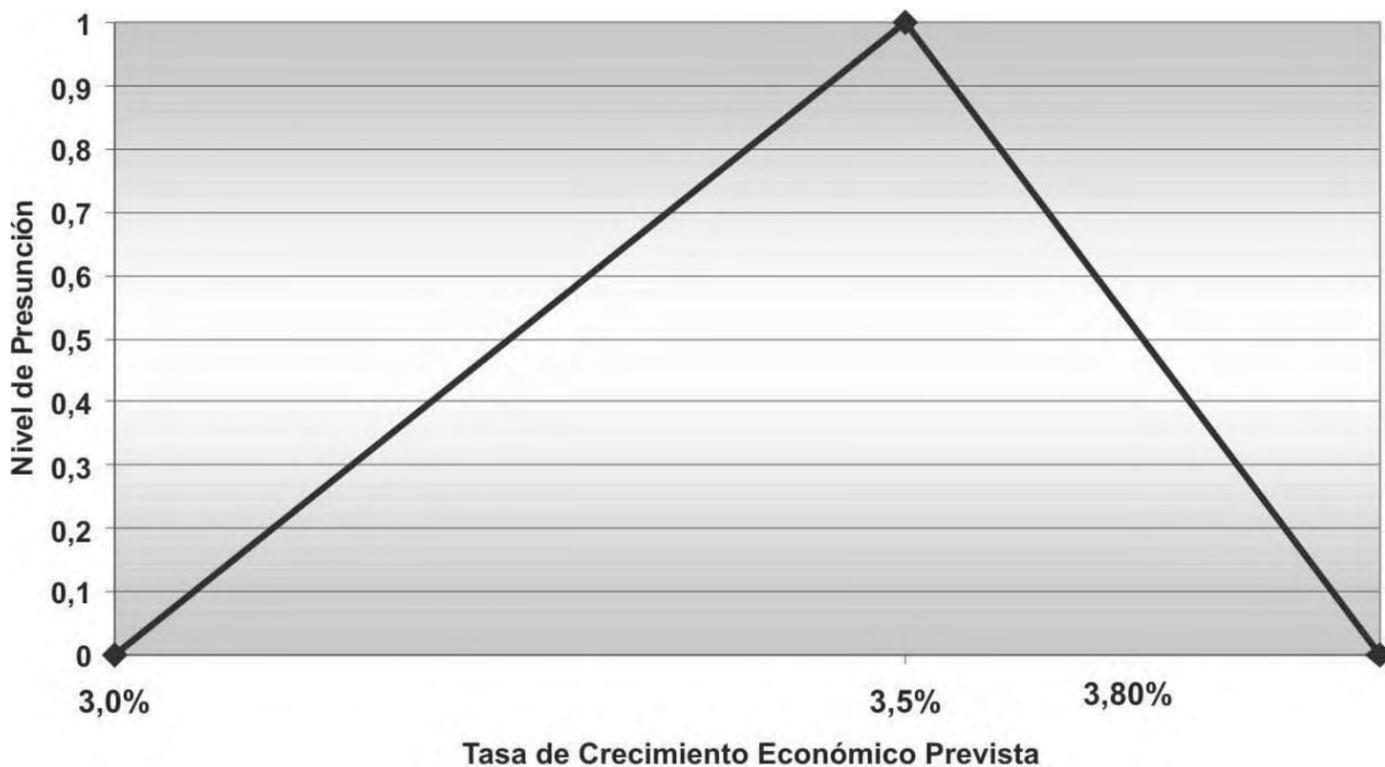
Subconjunto en el cual el tesorero estima que el plazo de cobro previsto con mayor nivel de presunción es de 90 días.

Subconjuntos borrosos continuos

En el ámbito continuo, la variable puede tomar cualquier valor comprendido en el intervalo de referencia y todo valor tiene asociado un nivel de presunción (posibilidad) determinado. Así, por ejemplo, un economista en desarrollo de su predicción de la tasa de crecimiento económico para Colombia en el año 2005, podría emitir los juicios siguientes: “aproximadamente 3%”, “sería entre 3% y 3,5%”, o “podría ser ligeramente inferior a 3,8%”, etc.

Caracterizando los juicios del economista como subconjuntos borrosos triangulares, se asumiría que la tasa de crecimiento económico esperada viene definida por la siguiente tripleta de confianza: (3%, 3,5%, 3,8%). Es decir, la tasa de crecimiento prevista se sitúa entre 3% y 3,8%, siendo el valor de mayor posibilidad de ocurrencia el de 3,5%. A partir de dicha tripleta se puede diseñar un subconjunto borroso triangular suponiendo linealidad de los niveles de presunción entre los valores que la definen, como se aprecia en la gráfica siguiente:

Gráfico 2



Se observa que el nivel de presunción crece linealmente desde el extremo inferior (3%) al valor más posible (3,5%), y decrece linealmente desde este valor hasta el extremo inferior (3,8%).

La función de pertenencia del subconjunto borroso triangular anterior sería la siguiente:

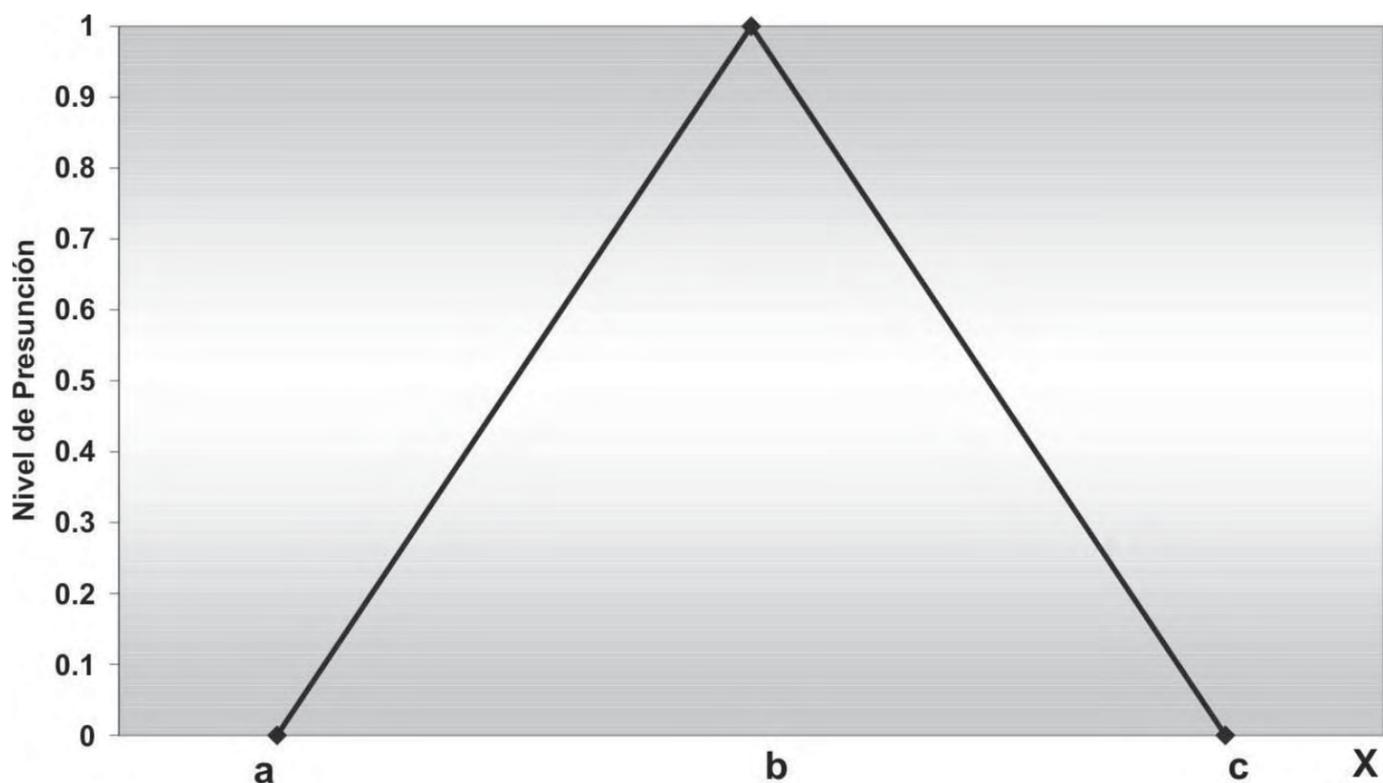
Tabla 3

$\mu =$	0	Si $TCE \leq 3\%$
	$(TCE - 3\%)/(3,5\%-3\%)$	Si $3\% < TCE \leq 3,5\%$
	$(3,8\% - TCE)/(3,8\% - 3,5\%)$	Si $3,5\% < TCE \leq 3,8\%$
	0	Si $TCE > 3,8\%$

Donde TCE es la tasa de crecimiento económico prevista por el economista. De esta forma, la función de pertenencia se definirá por el rango que se elija.

En términos generales, dado un subconjunto borroso triangular genérico definido por una tripleta (a, b, c) para una variable X, tendría la siguiente representación gráfica:

Gráfico 3.



Con función de pertenencia:

Tabla 4

0	Si $X \leq a$
$(X - a)/(b - a)$	Si $a < X \leq b$
$(c - X)/(c - b)$	Si $b < X \leq c$
0	Si $X > c$

Números borrosos

Un *número borroso* se define como el subconjunto borroso que satisface tres propiedades:

- a) La variable objeto de estudio toma valores en el campo de los números reales.
- b) La función de pertenencia es normal. La normalidad significa que por lo menos un valor de la variable estudiada tiene asociada el máximo nivel de presunción.
- c) La función de pertenencia es convexa. Esto significa que desde el extremo inferior al valor de mayor posibilidad los niveles de presunción crecen o se mantienen, pero en ningún mo-

mento disminuyen. Del mismo modo, desde el valor de máxima posibilidad hasta el extremo superior, los niveles de presunción disminuyen o se mantienen, pero nunca aumentan.

De esta forma, un número borroso asocia dos conceptos: El de intervalo de confianza que se halla ligado a la noción de incertidumbre y el de nivel de presunción ligado a la percepción del individuo, es decir, a la noción de valuación. Por analogía, el concepto de variable aleatoria está ligado a la noción de aleatoriedad y por ley de probabilidad a la concepción de medida.

5. Una aplicación a las finanzas: el cálculo del valor presente neto borroso

El método del valor presente neto (VPN) permite hallar el valor presente de todos los rendimientos futuros netos descontados al costo de capital apropiado para la empresa (r_0), menos cualquier desembolso inicial de efectivo. Por consiguiente, el VPN del flujo de efectivo

$$P = P_0, P_1, \dots, P_n \text{ es:}$$

$$VPN(P, n) = \sum_{i=0}^n P_i (1 + r_0)^{-i} \quad (1)$$

Si se dispone de un número de propuestas de inversión con flujos de caja P, E, \dots , el analista puede clasificar las propuestas de mayor a menor VPN y seleccionar inversiones hasta agotar el presupuesto de capital de la empresa.

Si se tiene en cuenta que tanto los futuros flujos de caja como las tasas de interés r_0 deben ser estimados, se pasa a considerar un flujo de

caja borroso $\bar{P} = \bar{P}_0, \dots, \bar{P}_n$ con tasa de interés borrosa \bar{r}_0 para representar el costo de capital de la empresa. Siendo \bar{P}_0 un número borroso negativo, y los otros \bar{P}_i con la posibilidad de ser números borrosos negativos o positivos. Luego, el valor presente neto borroso de \bar{P} es:

$$VPN(\bar{P}, n) = \bar{P}_0 + \sum_{i=0}^n \bar{P}_i (1 + \bar{r}_0)^{-i} \quad (2)$$

Usando el principio de extensión para evaluar esta ecuación, se parte de $VPN_e(P, n)$ cuyos α -cortes son:

$$VPN_{e1}(\alpha) = \min \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (1 + r_0)^{-i} \mid a_i \in \bar{A}_i[\alpha], 0 \leq i \leq n, r_0 \in \bar{r}_0[\alpha] \right\}, \quad (3)$$

$$VPN_{e2}(\alpha) = \max \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (1 + r_0)^{-i} \mid a_i \in \bar{A}_i[\alpha], 0 \leq i \leq n, r_0 \in \bar{r}_0[\alpha] \right\}, \quad (4)$$

O, lo que es lo mismo:

$$V_\alpha = [V^1(\alpha), V^2(\alpha)] = \left[a_0^1(\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^1(\alpha)}{(1 + r_0^2(\alpha))^i}, a_0^2(\alpha) + \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2(\alpha)}{(1 + r_0^1(\alpha))^i} \right] \quad (5)$$

Aquí se observa que la expresión $a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (1 + r_0)^{-i}$, es creciente en $a_i, 0 \leq i \leq n$, pero es decreciente con respecto a r_0 . Sin embargo, si existe un valor de $a_i \in \bar{A}_i[\alpha]$ que no haga posible aplicar las ecuaciones (3) a (5) debido a que no se podría estar seguros de que el VPN es monotónicamente decreciente con respecto a la tasa de descuento, sería necesario diseñar un procedimiento numérico que permita computar los α cortes de $VPN_e(P, n)$, resolviendo dos programas matemáticos (minimización y maximización, respectivamente) para cada nivel $\alpha \in [0, 1]$. Concretamente, $V^1(\alpha)$ se obtiene haciendo:

$$\text{Mín } z = x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1 + y)^i} \quad (6)$$

$$\text{Sujeto a: } x_i \in [a_i^1(\alpha), a_i^2(\alpha)] \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

$$y \in [r_0^1(\alpha), r_0^2(\alpha)] \quad (8)$$

Y $V^2(\alpha)$ se obtiene de:

$$\text{Máx } z = x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1+y)^i} \quad (9)$$

$$\text{Sujeto a: } x_i \in [a_i^1(\alpha), a_i^2(\alpha)] \quad i=0, 1, \dots, n \quad (10)$$

$$y \in [r_0^1(\alpha), r_0^2(\alpha)] \quad (11)$$

Por ejemplo, si se desea estimar el VPN de dos posibles proyectos de inversión cuyos flujos

de caja son los números borrosos triangulares (NBT) de la tabla 5, donde también se representan los costos anuales de capital mediante tripletas de confianza, se debe tener cuidado al calcular el VPN del proyecto B, puesto que los flujos de caja para $i > 0$ no siempre son números borrosos positivos. En este caso se aplica la solución correspondiente a las ecuaciones (6) a (11) para once valores de α . De otro lado, los α -cortes del proyecto de inversión A se calculan fácilmente usando la expresión (5).

Tabla 5
Flujos de caja de los proyectos A y B

	Proyecto A	Proyecto B	Costo de Capital		
			r_i	m_i	s_i
\bar{a}_0	(-2200,-2075,-2000)	(-2100,-2050,-2000)			
\bar{a}_1	(2850,3100,3225)	(-275,-200,0)	5,0%	6,0%	7,0%
\bar{a}_2	(100,250,325)	(2500,2600,2650)	4,0%	5,0%	6,0%
\bar{a}_3	(100,250,325)	(4900,5000,5050)	3,0%	4,0%	5,0%

Previamente, es importante anotar que, partiendo de:

$$(r_1, m_1, s_1) = (5\%, 6\%, 7\%); (r_2, m_2, s_2) = (4\%, 5\%, 6\%); (r_3, m_3, s_3) = (3\%, 4\%, 5\%)$$

se tendrá, en forma de α -cortes para $\alpha \in [0,1]$,

$$1 + r_1(\alpha) = 1 + r_1 + (m_1 - r_1) \alpha = 1 + 0.05 + (0.06 - 0.05) \alpha = 1.05 + 0.01 \alpha \quad (12)$$

$$1 + r_2(\alpha) = 1 + r_2 + (m_2 - r_2) \alpha = 1 + 0.04 + (0.05 - 0.04) \alpha = 1.04 + 0.01 \alpha \quad (13)$$

$$1 + r_3(\alpha) = 1 + r_3 + (m_3 - r_3) \alpha = 1 + 0.03 + (0.04 - 0.03) \alpha = 1.03 + 0.01 \alpha \quad (14)$$

Y a partir de aquí se obtiene:

$$(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha)) = (1.05 + 0.01 \alpha) (1.04 + 0.01 \alpha) \quad (15)$$

$$(1 + r_1(\alpha))(1 + r_2(\alpha))(1 + r_3(\alpha)) = (1.05 + 0.01 \alpha) (1.04 + 0.01 \alpha) (1.03 + 0.01 \alpha) \quad (16)$$

Por otra parte:

$$1 + s_1(\alpha) = 1 + s_1 - (s_1 - m_1) \alpha = 1 + 0.07 - (0.07 - 0.06) \alpha = 1.07 - 0.01 \alpha \quad (17)$$

$$1 + s_2(\alpha) = 1 + s_2 - (s_2 - m_2) \alpha = 1 + 0.06 - (0.06 - 0.05) \alpha = 1.06 - 0.01 \alpha \quad (18)$$

$$1 + s_3(\alpha) = 1 + s_3 - (s_3 - m_3) \alpha = 1 + 0.05 - (0.05 - 0.04) \alpha = 1.05 - 0.01 \alpha \quad (19)$$

Y a partir de aquí, se obtiene:

$$(1 + s_1(\alpha))(1 + s_2(\alpha)) = (1.07 - 0.01\alpha)(1.06 - 0.01\alpha) \quad (20)$$

$$1 + s_1(\alpha)(1 + s_2(\alpha))(1 + s_3(\alpha)) = (1.07 - 0.01\alpha)(1.06 - 0.01\alpha)(1.05 - 0.01\alpha)$$

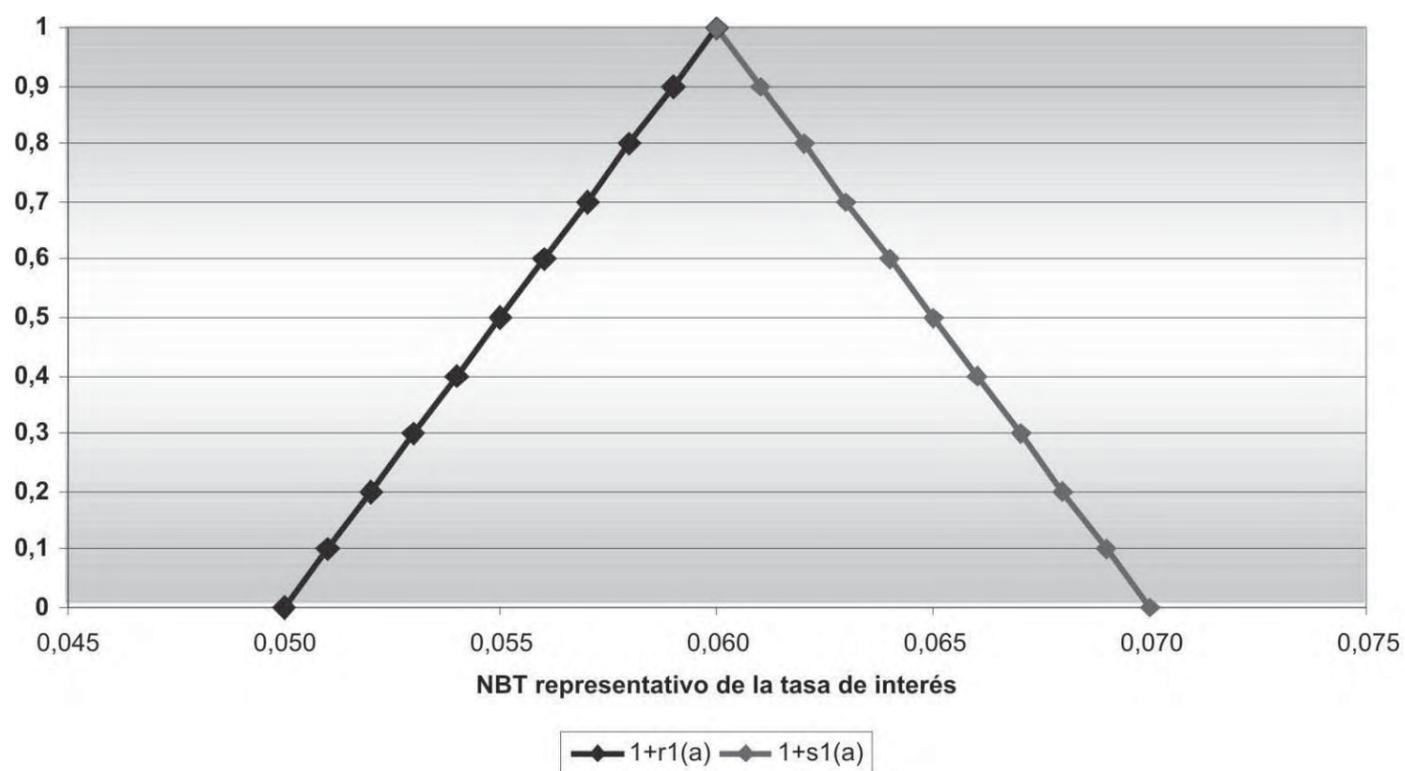
Luego, para obtener el factor de actualización borroso aplicable a cada período, se asignan valores a α de acuerdo con el sistema endecadario en $[0,1]$. Así, para el primer año:

Tabla 6

α	NBT		Factor de Descuento Borroso	
	$1+r_1(\alpha)$	$1+s_1(\alpha)$	$1/(1+s_1(\alpha))$	$1/(1+r_1(\alpha))$
	$1.05 + 0.01 \alpha$	$1.07 - 0.01 \alpha$	$1/(1.07 - 0.01 \alpha)$	$1/(1.05 + 0.01 \alpha)$
0	1,050	1,070	0,9346	0,9524
0,1	1,051	1,069	0,9355	0,9515
0,2	1,052	1,068	0,9363	0,9506
0,3	1,053	1,067	0,9372	0,9497
0,4	1,054	1,066	0,9381	0,9488
0,5	1,055	1,065	0,9390	0,9479
0,6	1,056	1,064	0,9398	0,9470
0,7	1,057	1,063	0,9407	0,9461
0,8	1,058	1,062	0,9416	0,9452
0,9	1,059	1,061	0,9425	0,9443
1	1,060	1,060	0,9434	0,9434

En el gráfico 4 se puede observar que el número borroso que representa la tasa de interés es en efecto un NBT.

Gráfico 4



Para el segundo año se realiza el mismo procedimiento obteniendo el resultado siguiente:

Tabla 7

α	NBT		Factor de Descuento Borroso			
	$1+r_2(\alpha)$ $1.04 + 0.01\alpha$	$1+s_2(\alpha)$ $1.06 - 0.01\alpha$	$1/(1+s_2(\alpha))$ $1/(1.06 - 0.01\alpha)$	$1/(1+r_2(\alpha))$ $1/(1.04 + 0.01\alpha)$	$1/(1.07 - 0.01\alpha) \times$ $1/(1.06 - 0.01\alpha)$	$1/(1.05 + 0.01\alpha) \times$ $1/(1.04 + 0.01\alpha)$
0	1,040	1,060	0,9434	0,9615	0,8817	0,9158
0,1	1,041	1,059	0,9443	0,9606	0,8833	0,9140
0,2	1,042	1,058	0,9452	0,9597	0,8850	0,9123
0,3	1,043	1,057	0,9461	0,9588	0,8867	0,9105
0,4	1,044	1,056	0,9470	0,9579	0,8883	0,9088
0,5	1,045	1,055	0,9479	0,9569	0,8900	0,9071
0,6	1,046	1,054	0,9488	0,9560	0,8917	0,9053
0,7	1,047	1,053	0,9497	0,9551	0,8934	0,9036
0,8	1,048	1,052	0,9506	0,9542	0,8951	0,9019
0,9	1,049	1,051	0,9515	0,9533	0,8968	0,9002
1	1,050	1,050	0,9524	0,9524	0,8985	0,8985

Igualmente, para el tercer año se obtiene:

Tabla 8

α	NBT		Factor de Descuento Borroso			
	$1+r_2(\alpha)$ $1.03 + 0.01\alpha$	$1+s_2(\alpha)$ $1.05 - 0.01\alpha$	$1/(1+s_2(\alpha))$ $1/(1.05 - 0.01\alpha)$	$1/(1+r_2(\alpha))$ $1/(1.03 + 0.01\alpha)$	$1/(1.07 - 0.01\alpha) \times$ $1/(1.06 - 0.01\alpha) \times$ $1/(1.05 - 0.01\alpha)$	$1/(1.05 + 0.01\alpha) \times$ $1/(1.04 + 0.01\alpha) \times$ $1/(1.03 + 0.01\alpha)$
0	1,030	1,050	0,9524	0,9709	0,8397	0,8891
0,1	1,031	1,049	0,9533	0,9699	0,8421	0,8865
0,2	1,032	1,048	0,9542	0,9690	0,8445	0,8840
0,3	1,033	1,047	0,9551	0,9681	0,8469	0,8814
0,4	1,034	1,046	0,9560	0,9671	0,8493	0,8789
0,5	1,035	1,045	0,9569	0,9662	0,8517	0,8764
0,6	1,036	1,044	0,9579	0,9653	0,8541	0,8739
0,7	1,037	1,043	0,9588	0,9643	0,8566	0,8714
0,8	1,038	1,042	0,9597	0,9634	0,8590	0,8689
0,9	1,039	1,041	0,9606	0,9625	0,8615	0,8664
1	1,040	1,040	0,9615	0,9615	0,8639	0,8639

Resumiendo, al expresar el factor de actualización a través de un NBT en forma de α -cortes, se tendrá:

$$\frac{1}{1 + [r(\alpha), s(\alpha)]} = \frac{1}{[1 + r(\alpha), 1 + s(\alpha)]} = \left[\frac{1}{1 + s(\alpha)}, \frac{1}{1 + r(\alpha)} \right] \quad (22)$$

Con esto se consigue expresar el factor de actualización a través de un número borroso expresado por un par intervalo de confianza – nivel de presunción.

Ahora bien, para el tratamiento del problema de selección de inversiones con tasas de interés imprecisas y factores de descuento inciertos a través del tiempo, expresados mediante NBT, se tiene que el VPN está dado por:

$$V_{\alpha} = -\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \left[\frac{1}{1+s_1(\alpha)}, \frac{1}{1+r_1(\alpha)} \right] + \bar{a}_2 \left[\frac{1}{(1+s_1(\alpha))(1+s_2(\alpha))}, \frac{1}{(1+r_1(\alpha))(1+r_2(\alpha))} \right] + \dots + \bar{a}_n \left[\frac{1}{(1+s_1(\alpha))(1+s_2(\alpha)) \dots (1+s_n(\alpha))}, \frac{1}{(1+r_1(\alpha))(1+r_2(\alpha)) \dots (1+r_n(\alpha))} \right] \quad (23)$$

Con esta expresión se obtienen los posibles beneficios actualizados, expresados por intervalos asociados a los niveles de presunción.

Para el problema de selección de inversiones en cuestión, el valor presente neto se representa de la siguiente manera:

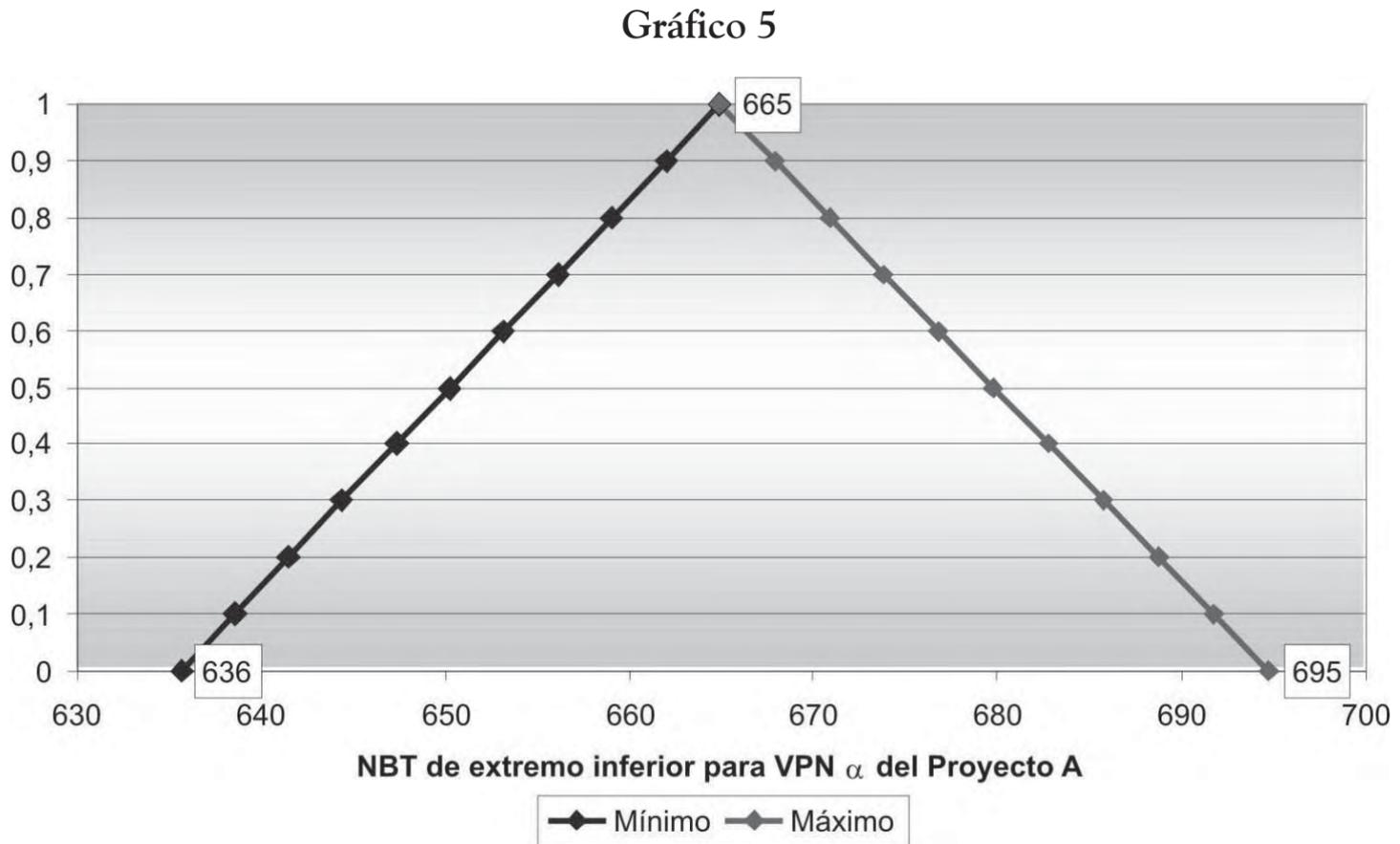
$$V_{\alpha} = -\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \left[\frac{1}{1.07-0.01\alpha}, \frac{1}{1.05+0.01\alpha} \right] + \bar{a}_3 \left[\frac{1}{(1.07-0.01\alpha)(1.06-0.01\alpha)(1.05-0.01\alpha)}, \frac{1}{(1.05+0.01\alpha)(1.04+0.01\alpha)(1.03+0.01\alpha)} \right] \quad (24)$$

Aplicando esta expresión a los proyectos A y B se obtienen los número borrosos $V_{\alpha}A$, y $V_{\alpha}B$, respectivamente. Para los flujos del extremo inferior de $V_{\alpha}A$ se tendrá:

Tabla 9

α	2200 [1, 1]	2850 x [1/(1.07 - 0.01 α), 1/(1.05 + 0.01 α)]	100 x [1/(1.07 - 0.01 α) x 1/(1.06 - 0.01 α), 1/(1.05 + 0.01 α) x 1/(1.04 + 0.01 α)]	100 x [1/(1.07 - 0.01 α) x 1/(1.06 - 0.01 α) x 1/(1.05 - 0.01 α), 1/(1.05 + 0.01 α) x 1/(1.04 + 0.01 α) x 1/(1.03 + 0.01 α)]	Total V_{α}				
0	-2.200	2.664	2.714	88	92	84	89	636	695
0,1	-2.200	2.666	2.712	88	91	84	89	639	692
0,2	-2.200	2.669	2.709	88	91	84	88	641	689
0,3	-2.200	2.671	2.707	89	91	85	88	644	686
0,4	-2.200	2.674	2.704	89	91	85	88	647	683
0,5	-2.200	2.676	2.701	89	91	85	88	650	680
0,6	-2.200	2.679	2.699	89	91	85	87	653	677
0,7	-2.200	2.681	2.696	89	90	86	87	656	674
0,8	-2.200	2.684	2.694	90	90	86	87	659	671
0,9	-2.200	2.686	2.691	90	90	86	87	662	668
1	-2.200	2.689	2.689	90	90	86	86	665	665

Donde al invertir la forma de presentar el número borroso $V_{\alpha}A$, poniendo en la parte inferior el nivel 0 y en la superior el 1, se obtiene el siguiente gráfico del NBT:



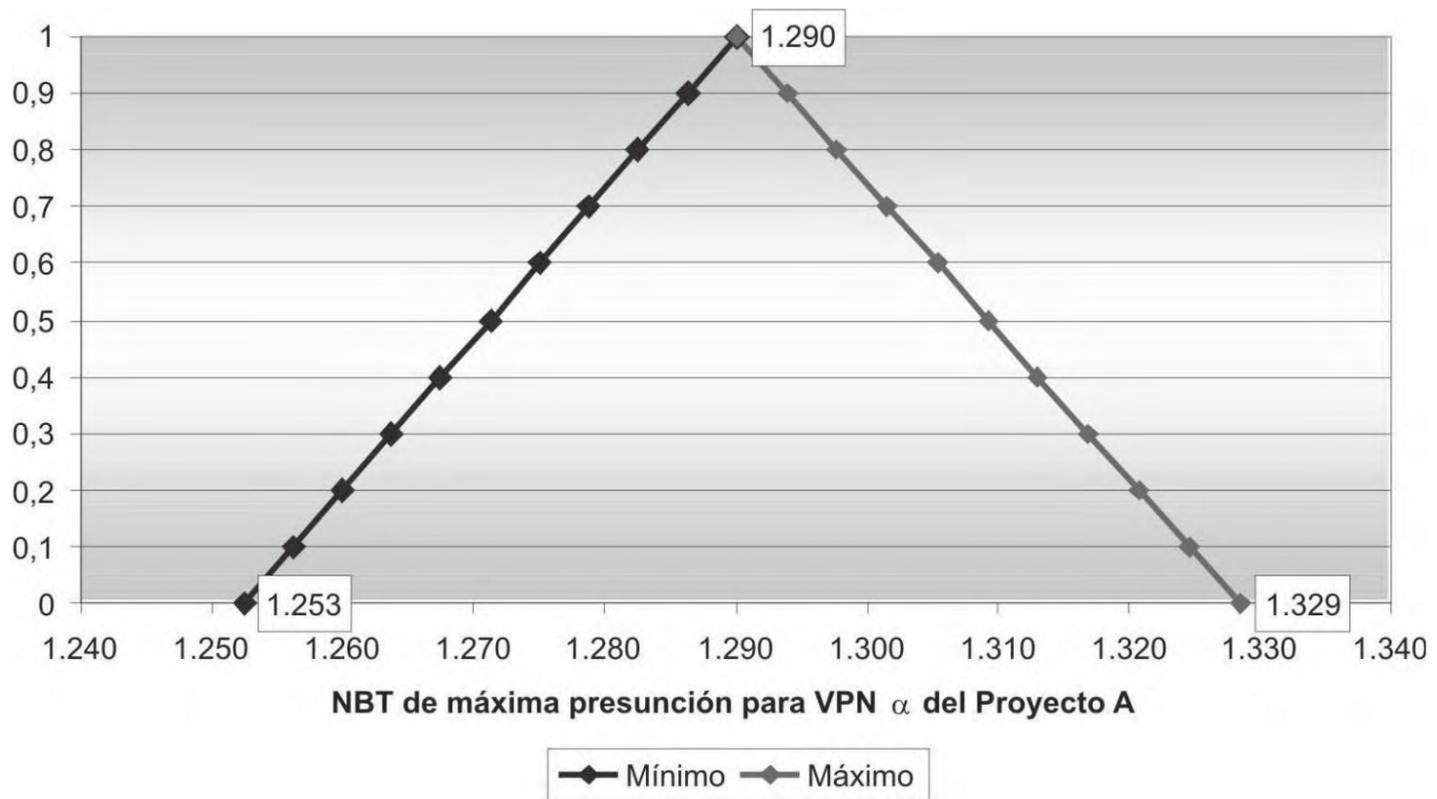
Para los flujos del valor de máxima presunción de $V_{\alpha}A$ se tendrá:

Tabla 10

α	2075 [1, 1]	$3100 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha)]$		$250 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha) \times 1/(1.04 + 0.01\alpha)]$		$250 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.05 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha) \times 1/(1.04 + 0.01\alpha) \times 1/(1.03 + 0.01\alpha)]$		Total V_{α}	
0	-2.075	2.897	2.952	220	229	210	222	1.253	1.329
0,1	-2.075	2.900	2.950	221	229	211	222	1.256	1.325
0,2	-2.075	2.903	2.947	221	228	211	221	1.260	1.321
0,3	-2.075	2.905	2.944	222	228	212	220	1.264	1.317
0,4	-2.075	2.908	2.941	222	227	212	220	1.267	1.313
0,5	-2.075	2.911	2.938	223	227	213	219	1.271	1.309
0,6	-2.075	2.914	2.936	223	226	214	218	1.275	1.305
0,7	-2.075	2.916	2.933	223	226	214	218	1.279	1.302
0,8	-2.075	2.919	2.930	224	225	215	217	1.283	1.298
0,9	-2.075	2.922	2.927	224	225	215	217	1.286	1.294
1	-2.075	2.925	2.925	225	225	216	216	1.290	1.290

Se obtienen en el siguiente gráfico del NBT:

Gráfico 6



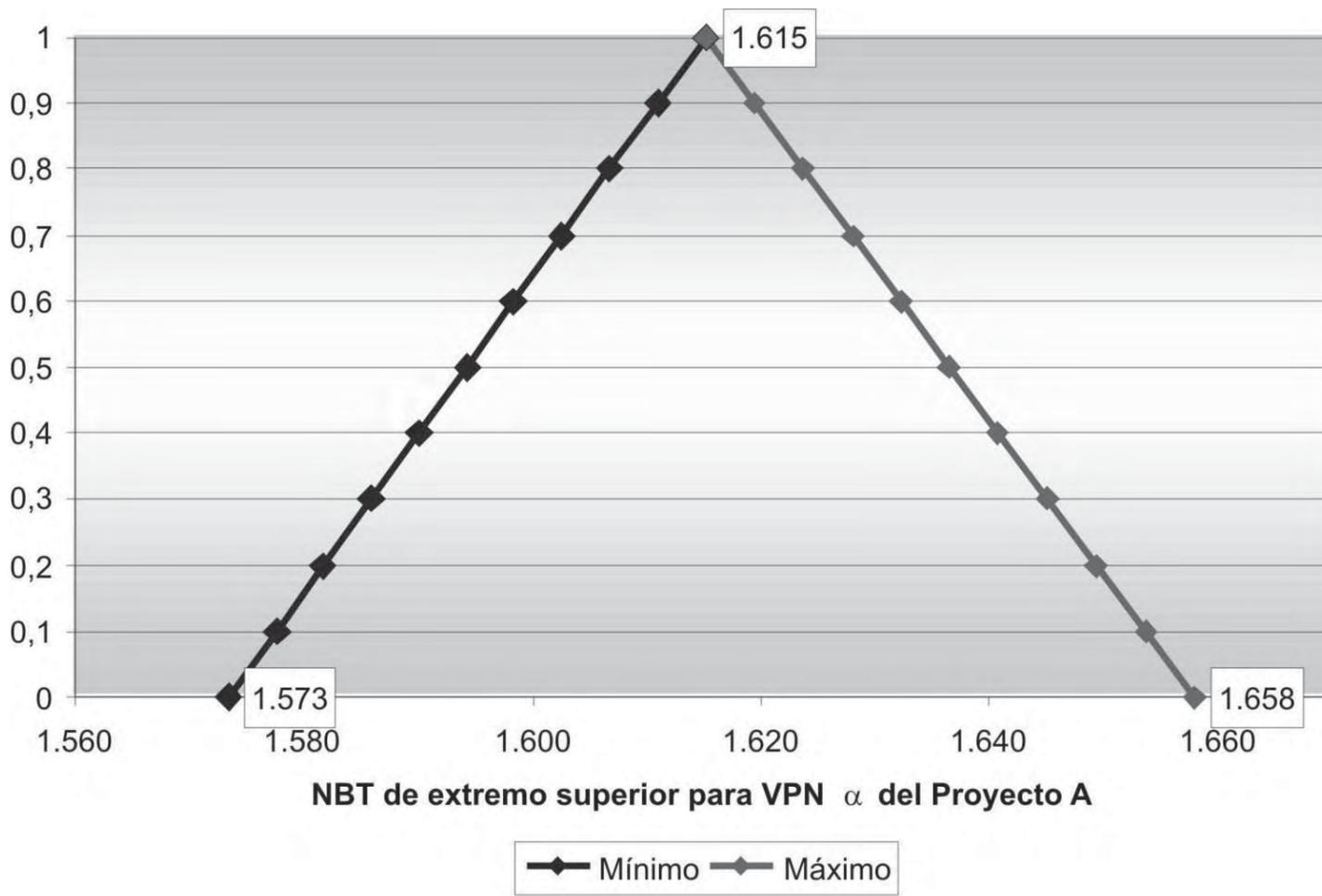
Para los flujos del extremo superior del intervalo, se tendrá el siguiente $V_{\alpha}A$:

Tabla 11

α	2000 [1, 1]	$3225 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha)]$		$325 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha) \times 1/(1.04 + 0.01\alpha)]$		$325 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.05 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha) \times 1/(1.04 + 0.01\alpha) \times 1/(1.03 + 0.01\alpha)]$		Total V_{α}	
0	-2.000	3.014	3.071	287	298	273	289	1.573	1.658
0,1	-2.000	3.017	3.069	287	297	274	288	1.578	1.654
0,2	-2.000	3.020	3.066	288	296	274	287	1.582	1.649
0,3	-2.000	3.022	3.063	288	296	275	286	1.586	1.645
0,4	-2.000	3.025	3.060	289	295	276	286	1.590	1.641
0,5	-2.000	3.028	3.057	289	295	277	285	1.594	1.636
0,6	-2.000	3.031	3.054	290	294	278	284	1.598	1.632
0,7	-2.000	3.034	3.051	290	294	278	283	1.603	1.628
0,8	-2.000	3.037	3.048	291	293	279	282	1.607	1.624
0,9	-2.000	3.040	3.045	291	293	280	282	1.611	1.619
1	-2.000	3.042	3.042	292	292	281	281	1.615	1.615

Se obtiene así el siguiente gráfico del NBT:

Gráfico 7



Al inspeccionar los máximos niveles de presunción de los gráficos 5, 6 y 7 se concluye que pueden obtenerse tres tipos de tripletas de VPN para representar el perfil del proyecto A:

Tripleta de extremos inferiores:
[636, 1253, 1573]

Tripleta de máxima presunción:
[665, 1290, 1615]

Tripleta de extremos superiores:
[695, 1329, 1658]

Según esto, el máximo nivel de presunción del VPN de A es de 1290, pero el proyecto en el peor de los casos generaría valor por tan sólo 636, y en el más optimista de los casos 1658, eventos extremos de gran impacto y mínima posibilidad.

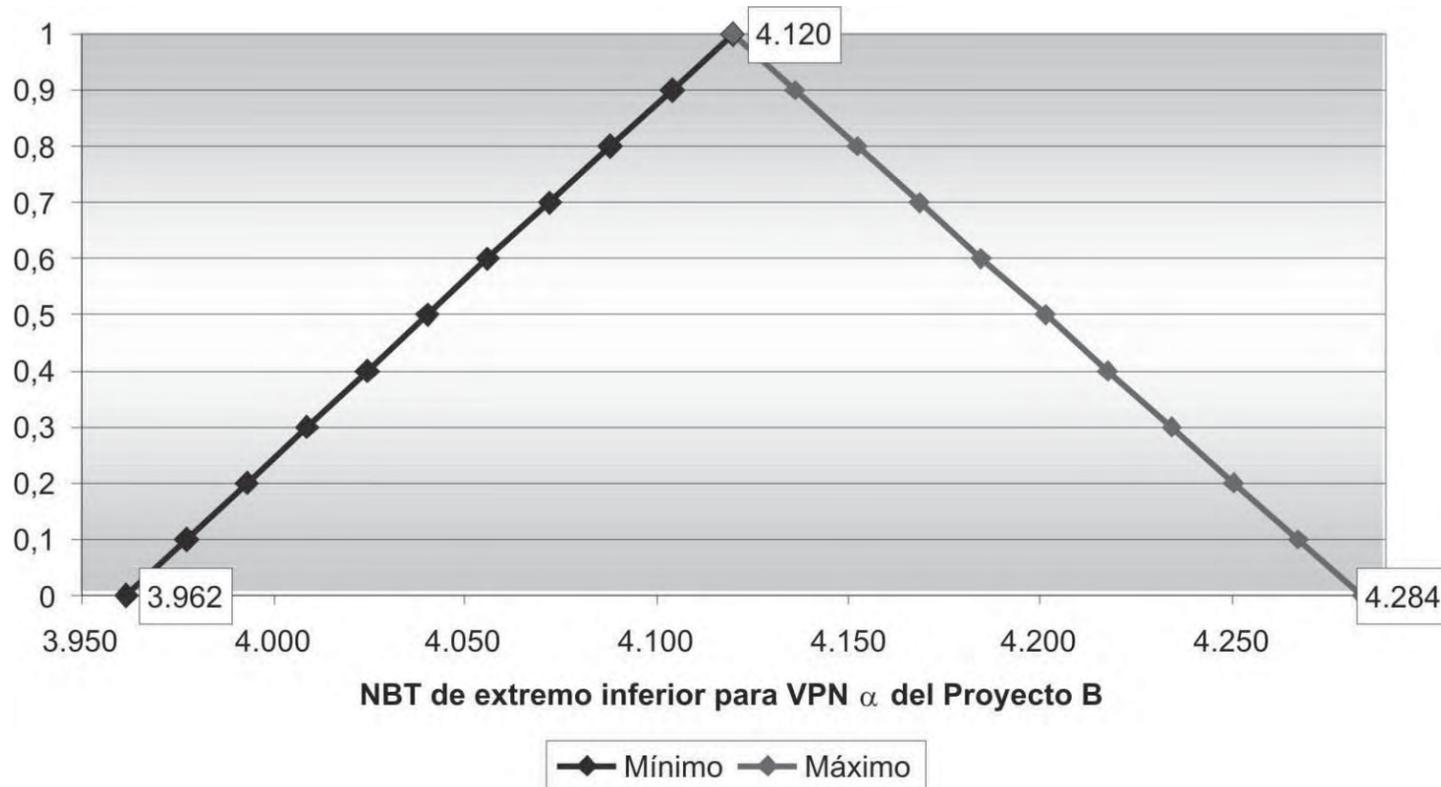
En el caso del proyecto B, para los flujos del extremo inferior de $V_{\alpha}B$ se tendrá:

Tabla 12

α	2100 [1, 1]	$275 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha)]$		$2500 \times [1/(1.07 - 0.01\alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha)]$		$4900 \times [1/(1.07 - 0.01\alpha) \times 1/(1.06 - 0.01\alpha) \times 1/(1.05 - 0.01\alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.03 + 0.01 \alpha)]$		Total V_α	
0	-2.100	-257	-262	2.204	2.289	4.115	4.356	3.962	4.284
0,1	-2.100	-257	-262	2.208	2.285	4.126	4.344	3.977	4.267
0,2	-2.100	-257	-261	2.212	2.281	4.138	4.331	3.993	4.251
0,3	-2.100	-258	-261	2.217	2.276	4.150	4.319	4.009	4.234
0,4	-2.100	-258	-261	2.221	2.272	4.161	4.307	4.024	4.218
0,5	-2.100	-258	-261	2.225	2.268	4.173	4.294	4.040	4.201
0,6	-2.100	-258	-260	2.229	2.263	4.185	4.282	4.056	4.185
0,7	-2.100	-259	-260	2.233	2.259	4.197	4.270	4.072	4.169
0,8	-2.100	-259	-260	2.238	2.255	4.209	4.257	4.088	4.152
0,9	-2.100	-259	-260	2.242	2.250	4.221	4.245	4.104	4.136
1	-2.100	-259	-259	2.246	2.246	4.233	4.233	4.120	4.120

Invirtiendo la forma de presentar el número borroso $V_\alpha B$ poniendo en la parte inferior el nivel 0 y en la superior el 1, se obtiene el siguiente gráfico del NBT:

Gráfico 8

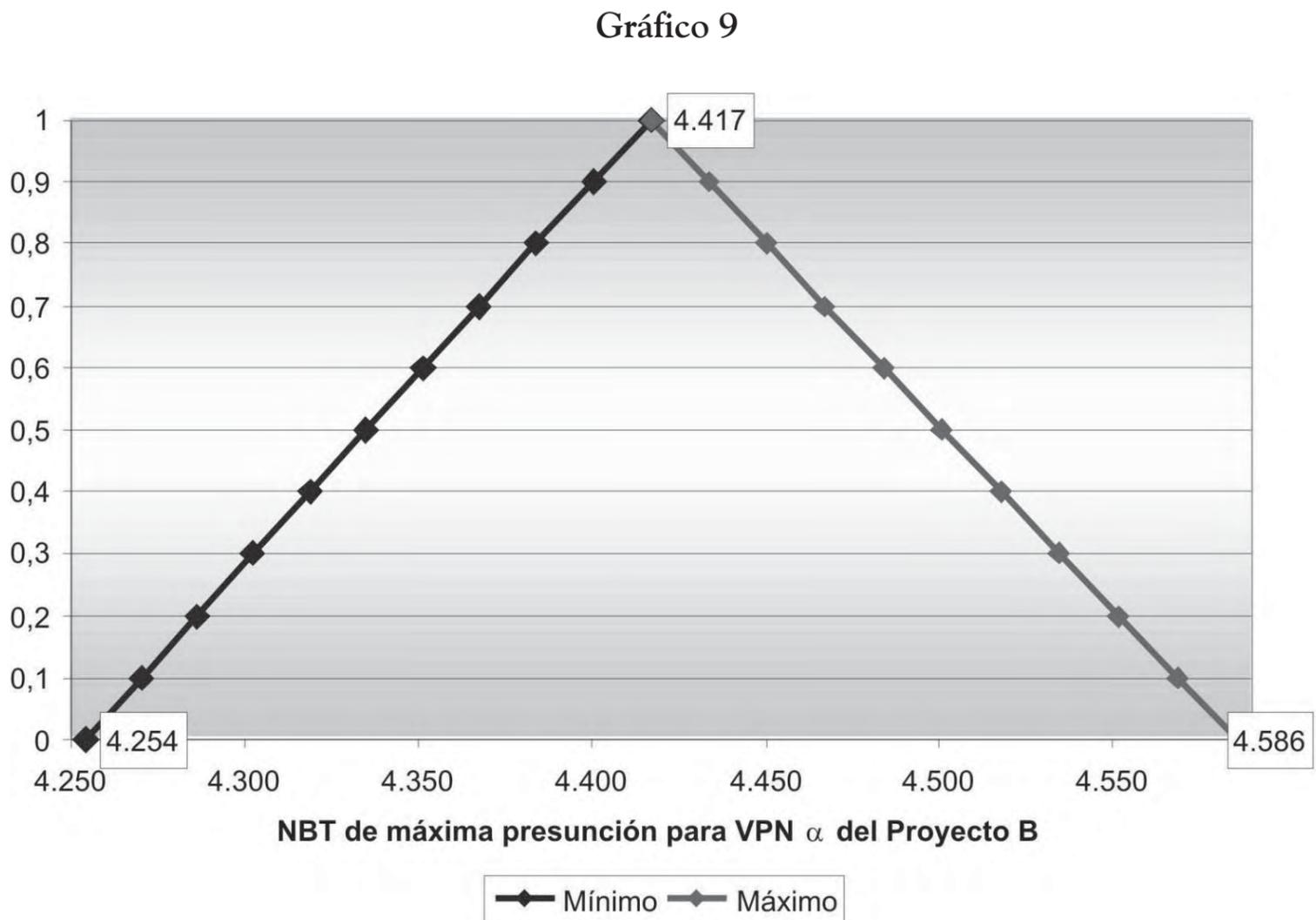


Para los flujos del valor de máxima presunción de $V_\alpha B$ se tendrá:

Tabla 13

α	2050 [1, 1]	$200 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha)]$		$2600 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha)]$		$5000 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.05 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.03 + 0.01 \alpha)]$		Total V_{α}	
0	-2.050	-187	-190	2.292	2.381	4.198	4.445	4.254	4.586
0,1	-2.050	-187	-190	2.297	2.376	4.210	4.433	4.270	4.569
0,2	-2.050	-187	-190	2.301	2.372	4.222	4.420	4.286	4.552
0,3	-2.050	-187	-190	2.305	2.367	4.234	4.407	4.302	4.535
0,4	-2.050	-188	-190	2.310	2.363	4.246	4.394	4.318	4.518
0,5	-2.050	-188	-190	2.314	2.358	4.258	4.382	4.335	4.501
0,6	-2.050	-188	-189	2.318	2.354	4.271	4.369	4.351	4.484
0,7	-2.050	-188	-189	2.323	2.349	4.283	4.357	4.367	4.467
0,8	-2.050	-188	-189	2.327	2.345	4.295	4.344	4.384	4.450
0,9	-2.050	-189	-189	2.332	2.340	4.307	4.332	4.400	4.434
1	-2.050	-189	-189	2.336	2.336	4.320	4.320	4.417	4.417

Así, se obtiene el siguiente gráfico del NBT:



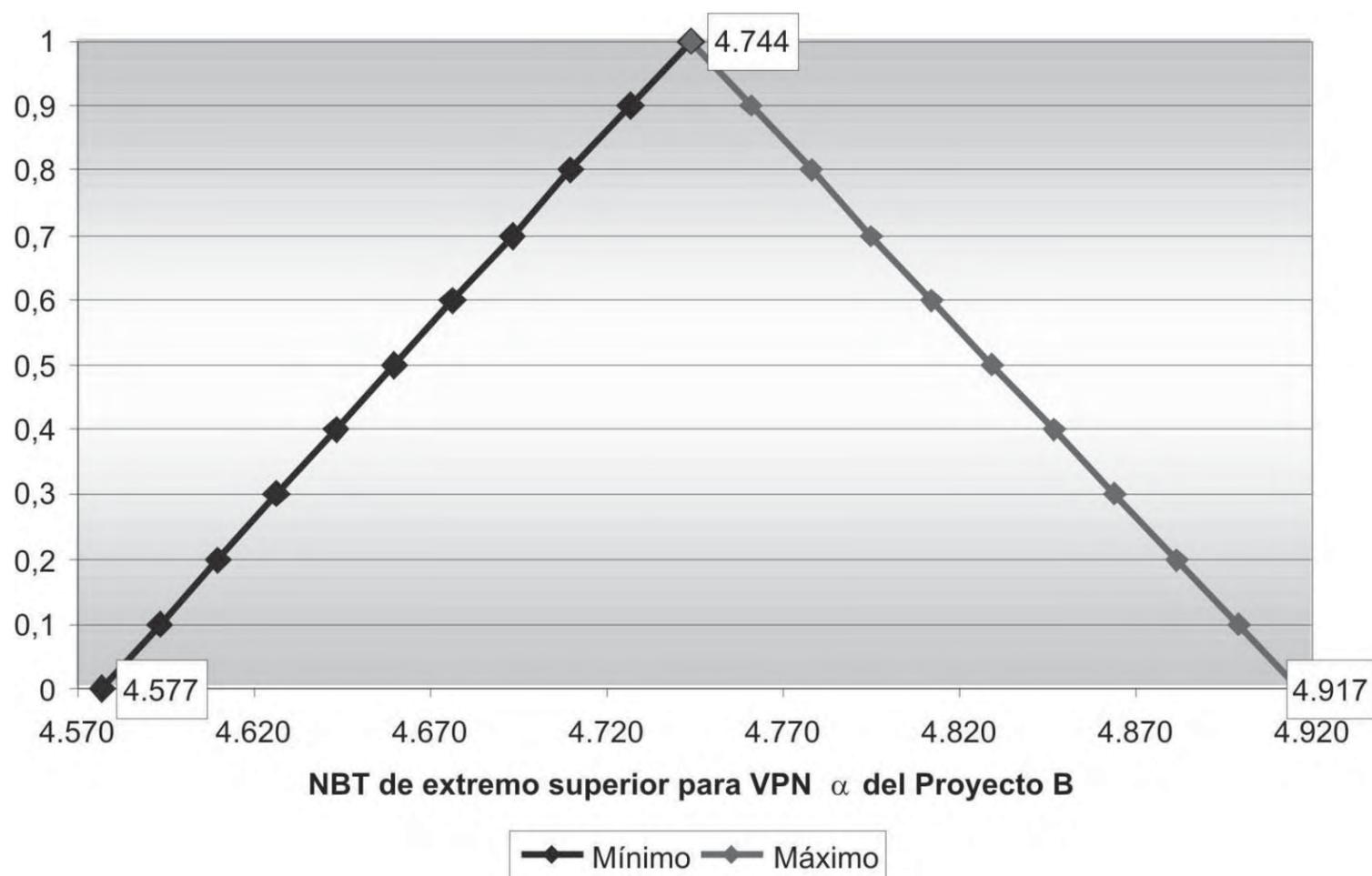
Para los flujos del extremo superior del intervalo, se tendrá el siguiente $V_{\alpha} B$:

Tabla 14

α	2000 [1, 1]	$0 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01\alpha)]$		$2650 \times [1/(1.07 - 0.01\alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha)]$		$5050 \times [1/(1.07 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.06 - 0.01 \alpha) \times 1/(1.05 - 0.01 \alpha), 1/(1.05 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.04 + 0.01 \alpha) \times 1/(1.03 + 0.01 \alpha)]$		Total V_{α}	
0	-2.000	0	0	2.336	2.427	4.240	4.490	4.577	4.917
0,1	-2.000	0	0	2.341	2.422	4.252	4.477	4.593	4.899
0,2	-2.000	0	0	2.345	2.417	4.265	4.464	4.610	4.882
0,3	-2.000	0	0	2.350	2.413	4.277	4.451	4.626	4.864
0,4	-2.000	0	0	2.354	2.408	4.289	4.438	4.643	4.847
0,5	-2.000	0	0	2.359	2.404	4.301	4.426	4.660	4.829
0,6	-2.000	0	0	2.363	2.399	4.313	4.413	4.676	4.812
0,7	-2.000	0	0	2.367	2.395	4.326	4.400	4.693	4.795
0,8	-2.000	0	0	2.372	2.390	4.338	4.388	4.710	4.778
0,9	-2.000	0	0	2.376	2.385	4.350	4.375	4.727	4.761
1	-2.000	0	0	2.381	2.381	4.363	4.363	4.744	4.744

Se obtiene el siguiente gráfico del NBT:

Gráfico 10



Igualmente, al inspeccionar los máximos niveles de presunción de los gráficos 8, 9 y 10 se concluye que pueden obtenerse tres tipos de tripletas de VPN para representar el perfil del proyecto B:

Tripleta de extremos inferiores:
[3962, 4120, 4284]

Tripleta de máxima presunción:
[4254, 4417, 4586]

Tripleta de extremos superiores:
[4577, 4744, 4917]

Según esto, el máximo nivel de presunción del VPN de B es de 4417, pero el proyecto en el peor de los casos generaría valor por tan sólo 3962, y en el más optimista de los casos 4917, eventos extremos de gran impacto y mínima posibilidad. Es decir, es muy posible que el proyecto B genere en la incertidumbre 3,42 (4417/1290) veces más valor que el proyecto A.

Conclusiones

Con el presente artículo se ha pretendido presentar algunos resultados de investigación iniciales, que en ningún caso son definitivos, pero que tienen el potencial de abrir el camino

para posteriores desarrollos, con el fin de hacer borrosos los modelos clásicos, cuando sea necesario y posible. Se espera haber evidenciado los procesos requeridos para la transformación de los esquemas válidos en contextos deterministas, en esquemas útiles para la gestión de la incertidumbre.

Es inevitable que la aplicación de la lógica borrosa a los problemas de gestión económica y financiera crezca en importancia en los próximos años. Esto será posible en alto grado, debido a que los enfoques tradicionales basados en la lógica bivalente no se ajustan bien a la realidad; una realidad impregnada de imprecisión, incertidumbre y verdades parciales.

El argumento fundamental de la lógica binaria es el principio del tercio excluso, según el cual las cosas son o no son, sin permitir la *granularidad* o admitir situaciones con grados de verdad. Por su parte, la lógica borrosa permite entender que todo es cuestión de grado; lo cual facilita ajustarse a la realidad, para trabajar, no sólo con datos en certeza y aleatoriedad, sino también con información basada en la percepción puesto que es ampliamente conocido que en los mercados financieros y en la economía en general predominan las emociones y las percepciones humanas.

Bibliografía

- Aristóteles. 1977. "De la expresión o interpretación", en: *Obras Lógicas*. Barcelona: Aguilar.
- Black, M. 1937. "Vagueness: An Exercise in Logical Analysis", in: *Philosophy of Science*. 4, pp. 427 - 455.
- Borkowski, L. y J. Lukasiewicz. 1970. "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics", in: *Selected Works*. North Holland. Editado por L. Borkowski. 405p.
- Buckley, J.; Eslami, E. & Feuring, T. 2002. *Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Studies in fuzziness and soft computing*. New York: Physica Verlag, 272 p.
- Gil Aluja, J. 1996. *Lances y desventuras del nuevo paradigma de la decisión*. Buenos Aires: Proceedings of the International Society Congress on Management and Fuzzy Economy.
- Gutiérrez, J. C. 2005. *Modelo Multiperíodo Borroso para la Valoración de Opciones Reales en la Incertidumbre*. Tesis para optar título de Maestría en Finanzas, ITESM. . México.
- Haugen, R. 1996. "Finance from a New Perspective", in: *Financial Management*, Vol. 25, No. 1, Spring, pp. 86 – 87.
- Kaufmann, A. 1973. *Introduction a la theorie des sous ensembles flous*, Vol. 1. Paris: Masson.
- Kaufmann, A. y J. Gil Aluja. 1986. *Introducción de la teoría de los subconjuntos a la gestión de empresas*. Santiago de Compostela: Milladoiro.
- _____. 1993. *Nuevas Técnicas para la Dirección Estratégica*, Segunda Edición. Barcelona: Publicaciones Universidad de Barcelona. 319 p.
- _____. 1993. *Técnicas Especiales para la Gestión de Expertos*. Barcelona: Milladoiro. 376 p.
- Klir, G. y T.A. Folger. 1988. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. New York Prentice Hall.
- Kosko, B. 1986. "Fuzzy Entropy and Conditioning", in: *Information Sciences*, vol. 40, pp. 165 – 174.
- Lorenz, E. N. 1963. "Deterministic Nonperiodic Flow", in: *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20. pp.130-141.
- Russell, B. 1923. "Vagueness", in: *Australian Journal of Philosophy*, 1, pp. 84 – 92.
- Sen, A. 2004. "Economic Methodology: Heterogeneity and Relevance", in: *Social Research*. 71, 3. Academia Research Library. pp. 583 – 614.
- Sorman, G. 1992. *Los verdaderos pensadores de nuestro tiempo*. Barcelona. Planeta. 320 p.
- Tarrazo, M. 2001. *Practical Applications of Approximate Equations in Finance and Economics*. Westport, CT.: Quorum Books. 183 p.
- Yager, R. 1985. "Applications of specificity measures in decisions", in: *Journées d'Analyse de Problèmes Décisionnels dans un environnement incertain et imprecise*, july. Reims, Francia: I.U.T..
- Zadeh, L. 1965. "Fuzzy sets", in: *Information and Control*, 8, Junio. p. 338 – 353.
- _____. 1978. "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", in: *Fuzzy Sets and Systems*. 1. p. 3 -28.
- _____. 2002. "Toward a perception based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities", in: *Journal of Statistical Planning and Inference*. 105. pp. 233 – 264.