

1. INTRODUCCIÓN

La *mecánica* es una de las ramas de la *física*. Sus orígenes se remontan hasta la antigüedad clásica, donde no se encontraba aún reconocida como una ciencia aparte, sino más bien integrada a la *filosofía*. Puede pensarse que la etapa moderna de la mecánica se inicia con los aportes de Galileo y se consolida con la notable contribución de Newton, padre de una ciencia que perdura hasta hoy con el nombre de *mecánica newtoniana* o *mecánica clásica*. Esta última denominación se utiliza tradicionalmente para resaltar su diferencia con la *mecánica relativista*, un concepto más moderno, toda vez que se afianza apenas en los albores del siglo pasado, cuando Einstein da a conocer a la comunidad científica su *teoría especial de la relatividad*. En la práctica – y en especial en la ingeniería – es común emplear *mecánica*, a secas, y las matizaciones citadas se dejan para el ámbito científico.

El presente trabajo se circunscribirá al campo de la mecánica newtoniana, pues la precisión de los cálculos realizados con ella es excelente, cuando se contemplan velocidades inferiores al 10% de la velocidad de la luz, las cuales están todavía muy lejos de alcanzarse en cualquier aplicación de *ingeniería*.

El *método de la mecánica* es acentuadamente *determinista*: es posible predecir el movimiento resultante (*efecto*) cuando se conocen las *fuerzas* (y *momentos*) actuantes (*causa*) sobre un objeto.

Las distintas divisiones de la mecánica han surgido históricamente de los intentos por usar esta técnica con *cuerpos* de diversa complejidad.

Así apareció la *mecánica del medio continuo*.

El *medio continuo* es una idealización en la que caben objetos de naturaleza *sólida*, *líquida*, *gaseosa* y *coloidal*.

El análisis mecánico aplicado, independientemente, a estos cuerpos produjo a lo largo de la historia un conjunto de resultados de índole teórica y práctica. Un perfil propio de mecánica del medio continuo comenzó a insinuarse en el momento que se identificaron elementos comunes en toda esta producción separada. En este sentido, puede afirmarse que su proceso interno de construcción partió de una labor unificadora, que evolucionó hacia unas elaboraciones propias. Por estas razones no es sencillo ubicar el momento preciso de su aparición.

El estudio de los *objetos* propios de la mecánica del medio continuo se aborda desde la perspectiva *macroscópica*, y con ello se elude, en buena medida, la *microscópica*. Esta decisión la aleja bastante de la *física teórica*, en la que la influencia del mundo microscópico ha sido fundamental (sobre todo a partir de los últimos cien años), y la acerca a la ingeniería.

Ésta constituye campo abonado para desarrollar aplicaciones de la mecánica del medio continuo, sobre todo a partir del fin de la Segunda Guerra Mundial, un periodo de vertiginoso avance tecnológico.

2. HISTÓRICO CONCEPTUAL

2.1 La Hipótesis Corpuscular

Durante el siglo XVII, pasado el Renacimiento, a mediados de la Edad Moderna, se tenía un conocimiento de la estructura de la materia, que era en esencia el mismo de la Grecia antigua, esto es conformada por átomos. Gassendi, un estudioso de Epicuro de Samos (el más importante codificador y divulgador de aquel atomismo primigenio), en su obra *Syntagma philosophiæ Epicuri* (1649) presenta una novedad a este modelo atómico, al introducir el concepto de molécula, sin precisarlo mucho. Boyle en *New Experiments Physico Mechanical Touching the Spring of Air and its Effects* (1660) conjetura que la materia está conformada por corpúsculos (invisibles) de primer orden (interpretando en un sentido moderno serían los átomos), que pueden agruparse para conformar corpúsculos de segundo orden (las moléculas, también en un sentido moderno). Él llamó a esta teoría, filosofía corpuscular. En vida de Newton el término molécula no había sido incorporado a la jerga científica y lo corriente – y coherente – sería pensar que en aquella época los corpúsculos eran considerados como los constituyentes más inmediatos de la materia. Una formalización de la distinción molécula-átomo debió esperar hasta la aparición de la teoría atómica de Dalton [37]. Con posterioridad a esto, los científicos emplearon indistintas denominaciones – muchas de ellas inductoras de confusión – para designar lo que hoy se entiende como molécula. Lo más aconsejable para eludir este equivoco, es utilizar el término corpúsculo hasta un momento histórico en que el término molécula dejó de ser ambivalente. Esto se irá notando paulatinamente. Esto, a pesar de que en algunos trabajos posteriores a 1820 se hace uso del término hipótesis molecular (Newton (1687) [125] utiliza este término).

Hipótesis corpuscular [40], es el nombre que se dio en la física a la aproximación utilizada para la interpretación y análisis dinámico de los estados de la materia (la cual evidentemente emplea el concepto de corpúsculo como sistema físico). Conoció su desarrollo inicial durante el periodo comprendido entre la publicación de la obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Newton (1687) y el año de la muerte de Laplace (1827). La aplicación práctica de esta hipótesis se apoya en muy buena medida en la fuerza entre corpúsculos. Este concepto fue ampliamente debatido por físicos, y en su momento por ingenieros, a lo largo de más de 200 años (el asunto fue resuelto finalmente por Van Der Waals). A este respecto, en el periodo de tiempo comprendido entre la publicación del *Principia* y la muerte de Laplace, surgieron toda clase de hipótesis y conjeturas orientadas a esclarecer su origen y forma de transmisión de estas fuerzas. Los inconvenientes derivados de la ignorancia en estos aspectos forzaron, en buena medida, la aparición del concepto del medio continuo, una alternativa para vadear estas dificultades. El primero en ocuparse en serio de las fuerzas entre corpúsculos fue Newton. En un famoso apartado de *Opticks*, conocido como la Cuestión 31 [126] anuncia que las fuerzas entre corpúsculos son las de cohesión: «Las partes de todos los cuerpos homogéneos y duros que se tocan plenamente se unen con gran fuerza. A fin de explicar cómo pueda ser eso, algunos han inventado átomos con ganchos.... otros nos dicen que los cuerpos se pegan por el reposo, aún otros dicen que se pegan por movimientos coincidentes.... Yo, más bien infero de su cohesión.». En algún texto, no publicado, Newton anuncia formalmente una mecánica de corpúsculos [147]: «For if Nature be simple and pretty conformable to herself, causes will operate in the same kind of way in all phenomena, so that the motions of smaller bodies depend upon certain smaller forces just as the motions of larger bodies are ruled by the greater force of gravity.». Proponía un modelo cinético entre corpúsculos, el cual opera de la misma manera que entre los cuerpos celestes. Por esta razón, el mecanismo de las fuerzas entre corpúsculos quedó con origen desconocido y la propagación de ellas, mediante la acción a distancia y a través del vacío. No queda muy claro en esta declaración, si quiso decir que la ecuación para calcularlas era la misma que se empleaba con la gravitación universal.

Por 1820, casi un siglo después de la desaparición de Newton, había un acuerdo pleno en que las fuerzas entre corpúsculos eran centrales, de rango corto y podían ser atractivas (la atracción: «solo es sensible a distancias insensibles», decía Laplace) como repulsivas. Había identificadas tres tendencias acerca de cómo evaluarlas, a saber: 1. Los que pensaban que la ecuación de gravitación universal servía para describir en forma correcta las fuerzas de cohesión, hasta distancias cortas de los corpúsculos y siempre y cuando estos fueran esféricos. 2. Aquellos que discrepaban con la idea anterior, pero únicamente en las regiones muy cercanas al corpúsculo, donde afirmaban el exponente de la distancia entre corpúsculos debería ser mayor que 2 (el mismo de la ecuación de gravitación universal). Este hecho era achacado a la forma de las partículas. 3. Los que creían que la función para describir las fuerzas de cohesión era diferente de la correspondiente a la gravedad. Éstos pensaban que estas fuerzas eran más de naturaleza magnética o eléctrica.

2.2 La Aproximación del Campo Promedio

Puede adjudicarse a Laplace el haber liderado la continuación del trabajo investigativo que Newton había iniciado en el tema de la mecánica de corpúsculos. En particular, haberse esforzado en buscar una mayor comprensión acerca de la naturaleza de las fuerzas de cohesión. Laplace había acogido el punto de vista newtoniano de fuerzas de atracción de rango corto y con forma funcional semejante a la de la gravedad universal, un periodo de tiempo antes de ir a parar al tema de la capilaridad, de cuya actividad resultó como beneficio marginal, un enriquecimiento del conocimiento de la naturaleza de las fuerzas de cohesión. Laplace estuvo siempre convencido que el avance y progreso de la física reposaban en un conocimiento de la estructura interna de la materia, en el sentido que él y Newton preconizaban. El gran mérito de Laplace en este campo fue el haber llegado por vía analítica a los mismos resultados que consiguieron Clairaut, Monge y Young, mediante métodos experimentales. En particular, deducir la tensión superficial.

Newton y Laplace crearon para la física un método de trabajo, el cual aplicaron a la construcción de una mecánica de corpúsculos. Su estilo se caracterizó por el énfasis dado a la indagación de las causas de los fenómenos internos de la materia y a la comprensión de los mecanismos de interacción entre corpúsculos. En virtud de la magnitud de los objetos considerados, también se conoce a esta forma de trabajar, como enfoque microscópico de la materia. A pesar de todo ese empeño, para principios del siglo XIX había en la mecánica de corpúsculos más interrogantes por resolver que conclusiones. Y algo más preocupante: Su estructuración como ciencia estaba aún incompleta, ya que no había sido capaz de proveer una técnica eficiente para el cálculo del movimiento de un sistema de corpúsculos. Como sí se había dado para los sistemas de astros con asombrosa precisión, mediante técnicas basadas en la teoría de la gravitación universal. En este sentido, el plan que había esbozado Newton -en [125,126] y otras publicaciones- para alcanzar la modelación del microcosmos no había podido ser concluido por Laplace.

Lamé (1866) [103] achaca en buena parte este fracaso al intento de replicar las leyes del macrocosmos en el microcosmos: «Es que todas las cuestiones relativas a la física molecular han sido retardadas, más bien que adelantadas, por la extensión, al menos prematura sino falsa, de los principios y leyes la mecánica celeste...». Esa inconclusa estructuración de la mecánica de corpúsculos podría explicarse en tres razones: 1. El método en sí: Enfocado más en los detalles, como las causas y el funcionamiento, que en aspectos prácticos. 2. La dificultad para conseguir expresiones funcionales que describieran las fuerzas centrales entre pares de corpúsculos. 3. La carencia de una herramienta matemática apta para este tipo de problemas. La tercera desempeña un papel preponderante en la aparición del método del medio continuo.

En 1807 Laplace [104] recurrió a una técnica nueva y bastante eficaz para determinar el movimiento de sistemas de corpúsculos. Lo hizo como parte del trabajo que lo condujo a deducir el concepto de tensión superficial. A esta técnica operativa se le conoce en la actualidad como aproximación del campo promedio [146, 147]. Al aplicarla Laplace supuso que un corpúsculo dado estaba rodeado por un campo atractivo (o repulsivo, según el caso) de fuerzas, originado a su vez en el grupo de corpúsculos de su vecindad (aquí se manifiesta en forma evidente el carácter local de esta hipótesis, la cual se ha mantenido prácticamente en toda la teoría del medio continuo clásico y en buena parte en la del medio continuo generalizado). Asumió, así mismo, una hipótesis corpuscular con fuerzas centrales de rango corto y propuso expresiones analíticas para describirlas. Para la labor operativa se valió del cálculo integral, con el fin de sumar la intensidad de todas las fuerzas actuantes entre pares de corpúsculos (y no sumas “discretas” entre fuerzas de cohesión como debería ser en rigor). De esta manera estaba operando sobre un continuo matemático de puntos y terminaba por olvidarse de los corpúsculos. Esto último se convertiría en la piedra angular de la teoría medio continuo.

En atención a la peculiaridad del procedimiento operativo que empleó, no se puede considerar la metodología seguida por Laplace como puramente microscópica (o corpuscular). Sí cabe afirmar que está a medio camino entre el corpuscular y el del medio continuo, aún por aparecer. Es un método corpuscular puro por la forma como caracteriza las fuerzas entre corpúsculos y del medio continuo en el modo como resolvía el problema operativo. Poisson (1829) [138] hizo su aporte sobre las condiciones que daban validez a este concepto: «Los cuerpos están formados por *molécules* (sic) separadas, es decir, por porciones de materia ponderable, de un tamaño insensible, separados por espacios vacíos, o poros, cuyas dimensiones son también imperceptibles para nuestros sentidos....En todos los casos, supondremos que la esfera de actividad de cada punto de un cuerpo, aunque su radio sea insensible, comprende sin embargo un número extremadamente grande de moléculas. Esta hipótesis, la única que haré en esta memoria, será sin duda admitida por los físicos, como conforme a la naturaleza. Ella nos permitirá expresar los resultados de las acciones moleculares (sic) en el interior de un cuerpo, en funciones de coordenadas de sus diferentes puntos, incluso, si estas moléculas (sic) estarán dispuestas y distribuidas sin ninguna regularidad en la extensión de su esfera de actividad, lo que se debe suponer, en efecto, en relación con los cuerpos que no están cristalizados.». Más tarde, mostraría su reserva en cuanto al uso de la operación de integración para reemplazar la suma entre corpúsculos individuales.

2.3 El Modelo del Medio Continuo

Mientras Laplace daba los primeros pasos para terminar de estructurar la mecánica de corpúsculos, la ingeniería se había consolidado en Francia en lo que iba transcurrido del siglo XIX, como una profesión diferenciada y estructurada. Se estudiaba básicamente en las prestigiosas École des Ponts et Chaussées y École Polytechnique. Los ingenieros egresados de ambas instituciones se contaban entre los más ansiosos y ávidos por remediar la falta de una técnica eficaz para calcular el movimiento de sistemas de corpúsculos. Fueron ellos, entonces, quienes lideraron una pequeña revolución científica tendiente a corregirla. Estos ingenieros fueron, inicialmente, los celebres “politécnicos” Poisson, Navier y Cauchy. La elasticidad y la mecánica de fluidos fueron los –obvios– campos del conocimiento objeto de la investigación en esta temática, cuyo resultado fue el descubrimiento de metodologías para el análisis mecánico de sistemas de corpúsculos. Las memorias –o artículos– referentes al tema eran leídos, los unos, ante la Academia Francesa De Ciencias y otros aparecían en prestigiosas publicaciones de aquella época. Poisson y Navier usaron en sus investigaciones la aproximación del campo promedio. En cambio Cauchy fue y vino entre ésta y otra novedosa, en cuya consolidación jugaría un papel fundamental: la del medio continuo.

Los trabajos preliminares de Navier (1819,1820) [123,122] en teoría de elasticidad se ocuparon de la flexión de barras y de placas. El mismo Navier (1821) [121,124] deduce las ecuaciones de la elasticidad, planteando el problema de la siguiente manera: «Consideramos un cuerpo elástico como un conjunto de moléculas materiales (sic) colocadas a distancias extremadamente pequeñas. Estas moléculas (sic) ejercen dos acciones opuestas las unas sobre las otras, a saber, una fuerza propia de atracción, y una fuerza de repulsión debida al principio del calor. Entre una molécula (sic) M y una cualquiera M’ de las moléculas (sic) vecinas, existe entonces una acción P, que es la diferencia de estas dos fuerzas. En el estado natural

del cuerpo (estado neutro en terminología moderna) todas las acciones P son nulas, o se destruyen recíprocamente, ya que la molécula (sic) **M** está en reposo.». Dichas ecuaciones en notación original son:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(3 \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial c^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial b} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial c} \right) + X &= 0 \\ \varepsilon \left(3 \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial c^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial b \partial a} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial b \partial c} \right) + Y &= 0 \\ \varepsilon \left(3 \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial c^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial c \partial a} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial c \partial b} \right) + Z &= 0 \end{aligned} \quad \varepsilon = \frac{4\pi}{30} \int_0^\infty r^4 f(r) dr$$

Donde ε representa el coeficiente de elasticidad para el cuerpo dado. Se puede calcular mediante la expresión integral anexa (típica de la aproximación del campo promedio), en la cual $f(r)$ representa la función para la fuerza central entre corpúsculos y r la distancia entre dos de ellos. X, Y, Z representan la fuerza aplicada inicialmente al corpúsculo (genérico) que ocupa las coordenadas a, b, c y se desplaza una cantidad x, y, z hasta la nueva posición. Poisson (1829) [138] presenta ante la Academia un resultado similar al de Navier, excepto por ligeras diferencias en las constantes numéricas.

Cauchy (1822) [20] presenta un preámbulo a su concepción de la elasticidad y solución del problema elástico. En 1828 [25] la acomete mediante un novedoso y revolucionario método, cuya idea básica se encuentra sintetizada en la introducción de la mencionada publicación: «En la investigación de las ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio o las leyes del movimiento interior de los cuerpos sólidos o fluidos, se puede considerar estos cuerpos, o como unas masas continuas cuya densidad varía de un punto a otro en grado insensible, o como sistemas de puntos materiales distintos, pero separados entre ellos por distancias muy pequeñas. Es bajo el primer punto de vista que los fluidos han sido examinados en uno de los artículos precedentes y en los diversos tratados de mecánica publicados hasta hoy. Es también bajo el mismo punto de vista que consideraremos aquí los cuerpos sólidos...». Es bueno hacer notar que Cauchy a lo largo de buena parte de su obra utiliza de modo equivalente las denominaciones molécula y punto material (este último en el uso moderno, constituye el componente básico del medio continuo), de suerte que su afirmación introductoria debe interpretarse como la presentación de un método alternativo -al de la aproximación del campo promedio («sistemas de puntos materiales distintos, pero separados entre ellos por distancias muy pequeñas»)- para el análisis mecánico de los estados de la materia y el cual es, justamente, el del medio continuo. Se había propuesto olvidarse de los corpúsculos y su análisis dinámico se centraría en puntos materiales (en el sentido actual).

Más que un aporte al estudio de la elasticidad, el artículo [25] representa el cierre de toda una labor dirigida a fundamentar el medio continuo, la cual Cauchy había venido realizando desde 1822. Se trata pues, del último de una seguidilla de cinco artículos aparecidos entre 1827 y 1828. En ellos se ocupa de la cinética y cinemática del medio continuo, creando así, de paso, el cuerpo teórico de la mecánica del medio continuo, que es el mismo, salvo las naturales –e inevitables- transformaciones de nomenclatura que se han venido dando hasta hoy. Los artículos y su contenido resumido son los siguientes (se utiliza la terminología moderna): [21] se ocupa de la tensión en los fluidos. [22] artículo donde teoriza sobre el concepto de tensión (justamente la aproximación macroscópica a la fuerza entre corpúsculos). Introduce allí, entre otros, los siguientes conceptos: 1. Modo de actuar la tensión y su clasificación, en axial y tangencial. 2. Principio (o teorema) de Cauchy. 3. Transformación de la tensión por rotación. 4. Vector de tracción para cualquier plano. 5. Elipsoide de tensiones. 6. Simetría del tensor de tensiones. De aquí deduce que posee 6 tensiones independientes, en vez de 9. [23] Se ocupa de las deformaciones axiales por acortamiento y alargamiento. Arriba al concepto de deformación principal y al de elipsoide de deformaciones. [24] En este artículo deduce la ecuación de conservación del momentum lineal para un medio continuo. De ahí en adelante sería conocida como ecuación de Cauchy.

Sería temerario afirmar que Cauchy creó el método del medio continuo (que más tarde, por razones que se irán dando en este artículo, habrá que renombrar medio continuo clásico y menos corrientemente medio continuo de Cauchy). Resulta más equitativo, decir que lideró un movimiento que reconoció su necesidad, sus ventajas y lo hizo visible. Fue, en consecuencia, el primero en aplicarlo de forma consciente y coherente, después de mejorar y poner en rigor matemático unas ideas dispersas que habían sido incorporadas aisladamente en la física desde épocas anteriores. En este sentido las más importantes contribuciones e influencias serían: 1. La aproximación del campo promedio de Laplace. 2. La teoría de Bošković (1763) [16], proponía reemplazar corpúsculos por puntos últimos. 3. La hidrodinámica clásica, básicamente con los aportes de Euler [60] y Daniel Bernoulli [12], particularmente por su concepción macroscópica de la presión (la cual se comprobó posteriormente coincide con una tensión axial). Euler,

además, aportó una versión de la segunda ley de Newton para un fluido ideal. Para deducirla ignoró componentes corpusculares, y utilizó variables de campo, un procedimiento que es parte fundamental del método del medio continuo y se emplea en la aproximación del campo promedio (de hecho, Navier, en sus ecuaciones para fluidos, partió de las ecuaciones de Euler para un fluido ideal y les acopló un término –obtenido por la aproximación del campo promedio– para evaluar la disipación viscosa del fluido). 4. La obra de Fourier (1822) [71]. En esta obra se detectan trazas del método medio continuo, en particular cuando menciona una *molécule rectangulaire*, para hacer referencia a localizaciones espaciales de la temperatura en un instante. Plantea pues un campo de temperaturas. 5. Sophie Germaine (1807) que somete a la Academia Francesa de Ciencias un trabajo para participar en un concurso convocado por ésta, en busca de un método para calcular vibraciones en placas circulares. En su desarrollo se omite completamente la hipótesis corpuscular. Cauchy fue entonces el llamado a recoger, evaluar y mejorar toda esta investigación previa, que estaba sólo a la espera del instante adecuado para germinar en una idea renovadora.

2.4 La Polémica sobre el Número de Coeficientes de Elasticidad

En [25] Cauchy arriba, en esencia, al mismo resultado de Navier y Poisson para las ecuaciones de la elasticidad lineal de un sólido homogéneo e isotrópico. No obstante las versiones de Navier y Poisson incluían una sola constante.

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\Delta} \left(3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\Delta} + \frac{\partial v}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{k}{2\Delta} \left(3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\Delta} + \frac{\partial v}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{k}{2\Delta} \left(3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) + \frac{k+2K}{2\Delta} + \frac{\partial v}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

Donde la tríada (de nuevo usando la terminología moderna) ξ, η, ζ representa el desplazamiento del punto material (en el artículo Cauchy comienza llamándolo partícula y después molécula), X, Y, Z las componentes de fuerza de cuerpo, Δ la densidad del cuerpo en el estado deformado (reserva ρ para la densidad en el estado neutro) y v la dilatación cúbica. A grandes rasgos, su deducción se sustenta en las siguientes consideraciones: Parte de asumir que entre los elipsoides de tensiones y de deformaciones relativas existe una relación de semejanza. Se sigue de allí que las tensiones y deformaciones relativas principales son colineales, y por tanto se pueden establecer relaciones de proporcionalidad (entre tensiones y deformaciones relativas). Esto a su vez faculta introducir una primera constante de elasticidad, k . Posteriormente agrega la segunda, K , por mero raciocinio intuitivo. Más tarde el procedimiento fue repetido por Green (1839) [77], Lamé (1866) [103], llega al mismo resultado de Navier suponiendo que sean sus coeficientes iguales ($\mu=\lambda$). Saint-Venant y Stokes (1845) [151] usando el método del medio continuo repitieron el procedimiento para fluidos.

En el mismo año de 1828 Cauchy abandona empleo el método del medio continuo en sus investigaciones sobre elasticidad, para utilizar en su lugar la aproximación del campo promedio (en 1830 retoma el método del medio continuo [29]). Su trabajo aparece en [26, 27, 28]. Los resultados de su intervención en este campo darían lugar a una encendida controversia en la que participaron los más notables físicos de la época. Esto porque –según algunos de sus colegas– se apreciaba en su trabajo un inexplicable tendencia reduccionista en el número de coeficientes de elasticidad. En el caso más general la elasticidad de un cuerpo requiere de un tensor de cuarto orden, C_{ijkl} o 81 componentes. En el supuesto de que los tensores de tensiones y de deformaciones relativas sean simétricos, es posible reducir este número hasta 36 (ya en tal caso se representa el coeficiente con C_{mn} m y n pueden tomar valores entre 1 y 6). Basándose en una hábil tratamiento matemático de sus expresiones para fuerzas entre corpúsculos, consigue hacer varias reducciones en el número de coeficientes. En 1828 [26] arriba a expresiones que incluyen 9, 3, 2 y 1 coeficientes de elasticidad (los dos últimos después de introducir la hipótesis de isotropía). Cauchy (1828) [27] deduce el concepto de tensión (medio continuo) con la aproximación del campo promedio. Arriba básicamente a los mismos coeficientes del artículo precedente. En (1829) [28] presenta expresiones para las seis tensiones, en función de las deformaciones relativas y utilizando, inicialmente, un conjunto de 21 coeficientes de elasticidad y posteriormente de 15. Para conseguir esto iguala los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} C_{12} &= C_{66} & C_{13} &= C_{55} & C_{14} &= C_{56} \\ C_{23} &= C_{44} & C_{25} &= C_{46} & C_{36} &= C_{45} \end{aligned}$$

La publicación de estas relaciones –que se conocen desde entonces como relaciones de Cauchy [83]- desencadenó una larga controversia entre dos bandos de físicos: Aquellos que defendían la idea de una teoría de elasticidad con un número reducido de constantes y los que no participaban de tal idea. Entre los primeros estaban los pioneros en el tema, es decir los ya citados Navier, Poisson y Cauchy y otros como Clausius, Neumann, Saint-Venant. Entre los segundos se contaban Stokes, Thomson (Lord Kelvin) [156], Lamé y Maxwell, por nombrar sólo a los más destacados. Cabía en la controversia un aspecto más, relacionado con la isotropía. Pearson [135] lo resume en dos interrogantes: «The questions are these: Is elastic isotropy to be marked by one or two constants? Is elastic aeolotropy to be marked by fifteen or twenty-one or two constants?» El mismo Pearson denominó a las dos tendencias teóricas enfrentadas, teoría de escasez de constantes (adaptación del inglés *rari-constant*) y teoría de multiplicidad de constantes (del inglés *multi-constant*).

Aquellos que en sus trabajos lograban una amplia gama de constantes elásticas, se servían de un procedimiento que estaba basado en tres puntos esenciales: 1. La aproximación del campo promedio, con fuerzas de tipo central entre corpúsculos. El carácter central de la fuerza era solo una conjetura, por aquel aquel entonces sin verificación experimental y llevaba, indefectiblemente, al interrogante de porqué se descartaba la interacción rotacional entre corpúsculos. El fenómeno de la cristalización, cuyo mecanismo comenzaba a comprenderse por aquel tiempo, pareciera darle soporte físico a la interacción rotacional. El mecanismo mediante el cual actuaban estas fuerzas lo explicaban aún como una acción a distancia que se propaga a través del vacío: Un incómodo asunto que seguía también sin resolverse. Con base en estos argumentos no resulta muy complicado el entender que la base física del método corpuscular pudiera ser fácilmente cuestionada por los sustentadores de la teoría de multiplicidad de constantes, que concluían que la reducción se conseguía gracias al carácter corpuscular de la teoría escasez de constantes. 2. Imposición de condiciones físicas relacionadas con el estado inicial del sistema molecular, homogeneidad e isotropía. Estas dos últimas, responsables de la elasticidad de uno y dos coeficientes. 3. El procedimiento matemático, en particular la substitución del uso de sumatorias por el de integrales. A este respecto, Lamé y Haughton, referidos en [147], atribuían la reducción de coeficientes al uso inadecuado de de integrales, en vez de sumatorias.

Con el tiempo la polémica se suavizó. Por dos razones: 1. Se hizo un estudio más profundo de la obra de Cauchy, a cargo de Saint-Venant y Clausius. Esta revisión permitió identificar las condiciones que validarían un reduccionismo. Es el caso de la homogeneidad. Al respecto declaraba Saint-Venant, citado en [147]: «We know the distinction established by M. Cauchy between and isotropic body and one that is simply homogeneous. It is isotropic if the same molecular displacements lead everywhere and in all directions to the same elastic responses. It is merely homogeneous if its matter shows the same elasticity at all the points in corresponding directions [*directions homologues*] but not in all directions around the same point. Thus regular crystalline materials are homogeneous without being isotropic.». Como se puede apreciar en este aparte esclarecedor (aparecido en un artículo de 1860, *Mémoires sur les divers genres d'homogénéité mécanique des corps solides élastiques*) la definición y distinción entre los términos homogeneidad e isotropía es prácticamente la misma que se utiliza actualmente. Lo que resulta en principio sorprendente, es que no fuera tan evidente para los sabios de aquella época. Esto se explicaría en que los conocimientos en materia de cristalografía no estaban entonces suficientemente desarrollados. Por su parte, Clausius rebatió una crítica de Stokes a la suposición de Cauchy de distribución uniforme de corpúsculos, afirmando que esto era lo coherente cuando se está buscando unos coeficientes promedio de elasticidad (por tanto constantes). 2. Una propuesta de Thomson para realizar pruebas con materiales para validar las relaciones de Cauchy.

Se realizó en consecuencia una amplia investigación. Inicialmente orientada a determinar el coeficiente de Poisson en algunos materiales para compararlo con el valor teórico predicho por la elasticidad de una constante, esto es 0.25. De tenerse una buena aproximación a tal valor quedaría confirmada la validez de las relaciones de Cauchy. Se ocuparon del asunto Amagat, Wertheim, pero especialmente Voigt quien inicialmente siguió la línea propuesta, pero más tarde cambió por la estrategia de establecer experimentalmente los valores de los C_{mn} .

El conjunto de los experimentos llevados a cabo (por investigadores citados aquí y otros) con una gran variedad de materiales sólidos, arrojó unos resultados que llevaron a concluir que las relaciones de Cauchy no se adecuaban a materiales reales. De estas pruebas abrumadoras, no quedaba más que aceptar que la teoría de la escasez de constantes era insostenible. Por otra parte y a la luz del conocimiento moderno, esta conclusión era algo más que previsible, ya que para un material sólido ajustarse a las relaciones de Cauchy es necesario que sea homogéneo e isótropo. Hoy se sabe que la estructura de los sólidos es en buena medida cristalina y los cristales son homogéneos y anisótropos. Fue Thomson (1893)

[154,155] quien probó la naturaleza homogénea de los cristales, al demostrar que cada molécula es un centro de simetría de la red cristalina, especialmente porque es factible concebir una red cristalina como formada por otras, que la penetran, las cuales pueden poseer centros de simetría, aunque no la principal. Max Born (1915) [14] corroboró experimentalmente este hallazgo, aplicando técnicas de rayos X,

Finalmente y gracias al trabajo de Thomson, Born y Voigt quedó claro que las relaciones de Cauchy se verifican si se dan las tres siguientes condiciones: 1. La interacción entre átomos y moléculas es central. Una condición coherente con el concepto de isotropía. 2. Los átomos y moléculas son centros de simetría. Ello garantiza que el material sea homogéneo. 3. Las fuerzas entre átomos y moléculas derivan de potenciales armónicos. Con ello se valida el enfoque energético de Green. Esta última condición la verifican la mayoría de los materiales elásticos.

Resulta interesante observar como la investigación de Cauchy arriba a una descripción del sólido elastolineal, en función de dos constantes de elasticidad (por ello mismo homogéneo e isótropo), basándose en dos métodos diferentes (aunque relacionados): El del medio continuo [25,29] y el del campo promedio [26]. No deja de llamar la atención, al menos, que esta elasticidad de dos constantes no funcione con la mayoría de los materiales sólidos. Este hecho llamativo lleva de inmediato al interrogante: ¿Por qué dos métodos comparten el mismo fracaso? Si bien ambos son diferentes, hay algo los acerca bastante: La forma como tratan la interacción entre componentes internos. Los puntos materiales (enfoque macroscópico), a través de tensiones, siguiendo el principio de Cauchy, con lo que quedan libres de la interacción rotacional (o de par). Los corpúsculos (enfoque microscópico) porque se asume que interactúan entre ellos solo mediante fuerzas centrales (lo que descarta una interacción rotacional). Ocurre que en la mayoría de los materiales la interacción no está libre de pares.

La polémica sobre los coeficientes de elasticidad podría parecer a primera vista algo accesorio y por tanto innecesario para los alcances de este artículo. Lejos se está de esto, por el contrario, reviste capital importancia, ya que la discusión alrededor de este aspecto fomentó la investigación relacionada con las propiedades constitutivas de los materiales y de paso permitió concluir que el estado de desarrollo de la teoría de elasticidad clásica (fuera mediante la aproximación del campo promedio o del medio continuo) era aún incompleto. De esto tiene que seguirse que para la mayoría de los materiales, el método del medio continuo y el del campo promedio resultan incapaces de predecir en forma adecuada el comportamiento mecánico en el interior de la materia. Por esta razón quedaba una tarea por desarrollar y era retomar la teoría de elasticidad para reformular relaciones constitutivas coherentes con los descubrimientos recientes. Este trabajo fue llevado adelante por Voigt (1887) [164], (1910) [165] y Poincaré (1892) [137], aunque siguiendo caminos diferentes.

El concepto de dirección (posteriormente continuo orientado) se constituyó en base de partida para ambos científicos. Voigt dio un gigantesco paso, razonando desde lo microscópico. Sorprendido inicialmente por la alta discrepancia entre dos de los coeficientes de elasticidad de la fluorita, determinados por él experimentalmente, $C_{12}/C_{44} = 1.32$, advirtió que la molécula de este cristal es de carácter marcadamente polar.

Una molécula polar puede llegar a rotar y de esta manera interactuar con sus vecinas, no solamente mediante fuerzas centrales, sino a través de pares, lo que se conoce como interacción rotacional o interacción *polar*. De esta forma dos moléculas interactuarían a distancia a través de una fuerza y un par y en consecuencia las fuerzas dejan ya de ser centrales. Para reformular la teoría parte de la suposición innovadora de que las moléculas se comportan como cuerpos rígidos y no como partículas. Supone que la materia está constituida por especies de ladrillos (*Baustein*) conformados por átomos, que actúan como cuerpos rígidos y forman una estructura repetitiva de celdas. Capecchi y otros (2011) [19] reproducen en un lenguaje moderno el procedimiento desarrollado por Voigt, mediante el cual recupera el concepto de tensión (*Druck*) de sus predecesores, $\vec{f}_k$ y un par (*flachenhaft*), $\vec{m}_k$. Éste sí, todo un hallazgo nuevo, innovador y determinante en la modelación del movimiento de los estados de la materia. Con el tiempo pasó a denominársele tensión de par. Este trabajo de como el de Poincaré pusieron fin una época, lo que ha dado en llamarse teoría molecular de la elasticidad [68].

2.5 El Medio Continuo Generalizado

El medio continuo, llamado hoy en día clásico, se había formado a partir de ideas y aportes de algunos físicos a lo largo de casi un siglo. Cauchy tuvo la iluminación de aglutinarlas para concretarlas en un método innovador, para abordar problemas de mecánica corpuscular. Resultaba ser una excelente herramienta para resolver problemas de ingeniería, tanto en el campo de los sólidos como de los fluidos. Así fue por casi 130 años, es decir entre 1830 y 1960 aproximadamente. La mecánica del medio continuo, gracias a ese temprano éxito aplicativo, consiguió mantenerse al margen de la disputa relacionada por el número de constantes de elasticidad. Esto, no obstante resultar indirectamente implicada en el asunto, por

la manera como suponía se trasmitían las fuerzas. Físicos como Lamé, Green y especialmente Saint-Venant y Stokes se distinguieron por trabajar con el nuevo método del medio continuo, desechando la aproximación del campo promedio. Esto les permitió hacer aportes al desarrollo del método, en forma primordial en aplicaciones prácticas: Lamé y Green en el campo de la elasticidad, Stokes en el de los fluidos y Saint-Venant yendo y viniendo entre uno y otro. Otros físicos como Thomson, Helmholtz, Duhem (Sugería que los puntos materiales tendrían un efecto de dirección o continuo orientado), Maxwell trabajando en otros campos hacían incursiones esporádicas en el medio continuo, para ocuparse principalmente de algo que causaba inquietud en la comunidad científica: La segunda parte del principio de Cauchy. Urgían por una justificación física para la ausencia de una resultante de par sobre el punto material, algo que desde el punto matemático resultaba posible y metodológicamente limpio, pero no tanto desde el físico. Sobre todo cuando se hacían intervenir interacciones de tipo electromagnético, Huntington (1958) [86]. También Thomson (1883) [154] dejó evidencias de ello. En aquellos tiempos, intervenciones de esta clase ponían de manifiesto incoherencias y contradicciones en la construcción de la mecánica del medio continuo como ciencia. En pocos años propiciaron una primera sacudida, a la que, con los avances tecnológicos del siglo XX se unirían nuevos cuestionamientos que en conjunto darían lugar a una nueva ciencia. La mecánica del medio continuo generalizado.

Los cuestionamientos de aquel grupo de físicos con relación a una parte del principio de Cauchy, habían fructificado con el resultado de la investigación teórico-práctica de Voigt. Esto, en vista de que no cabía ya duda acerca de que la tensión de par fuera, en general, nula en los materiales reales y el omitir esta condición implicaría contradicciones entre resultados teóricos y experimentales. La aparición de la tensión de par en el escenario mecánico puede considerarse como el hito que señala el nacimiento de la mecánica del medio continuo generalizado. Faltaba, no obstante, que alguien se encargara de organizar las nuevas ideas en el lenguaje y método propios del medio continuo.

Fueron dos hermanos franceses, Eugène y François Cosserat (1907) [35] los que asumieron esta tarea sentando las bases para una teoría del medio continuo generalizado. Su obra, *Théorie des Corps Deformables*, presenta una teoría de elasticidad que como novedad incorpora el concepto de tensión para el punto material. Es un trabajo pionero, del que parten necesariamente todas las construcciones teórico-prácticas sobre medio continuo generalizado, existentes hasta la presente fecha. La teoría de Cosserat es, en consecuencia, la más antigua— y por tanto la pionera— de las teorías del medio continuo generalizado. Vista así, la teoría de Cosserat es la misma de Voigt pero adaptada para el medio continuo. De esta manera le cabe a Voigt el mérito de ser el precursor de la teoría de Cosserat.

La teoría (original) de Cosserat fue presentada como una teoría de la elasticidad para barras, superficies y cuerpos. Las ecuaciones que la conforman fueron deducidas mediante un procedimiento variacional, la llamada acción euclidiana. A partir de esto, se comenzó a hablar de un continuo de Cosserat, como sistema de puntos materiales que interactúan entre sí, mediante fuerzas y pares y que, consecuentemente, se trasladan y rotan de manera independiente. De esta manera la cinemática del punto material incorpora seis grados de libertad. La teoría de Cosserat acusa un carácter marcadamente cinemático, ya que se centra en la cinemática del punto material y no considera aspectos constitutivos como la microestructura, un concepto que quizás conocido para esa época no se aplicaba en este campo (aparece en escena ya entrada la sexta década del siglo pasado). Se asume fenomenológicamente que los puntos materiales son cuerpos rígidos. Trabajando sobre esta idea adaptaron algunos aspectos del tratamiento clásico de los cuerpos rígidos, al de los puntos materiales. Entre otros vale la pena citar la incorporación de un sistema de coordenadas auxiliar (y así tres vectores adicionales) anexo a cada punto material. Los hermanos Cosserat lo llamaron [*trièdre trirectangle*] triedro trirectángulo o triedro rígido (los tres vectores son rígidos en este planteamiento). Las ideas de un triedro de esta clase se remontan a Duhem (1893) [41], quien tenía una noción de un espacio con orientación.

Pasada la primera década del siglo pasado, la teoría de Cosserat se sumió en el olvido o fue archivada, por dos razones básicas: 1. Había conseguido disipar las inquietudes que despertaba en la comunidad científica, en cuanto a la ausencia de pares —y rotaciones— sobre el punto material, haciendo aparecer de esta manera el principio de Cauchy como un caso particular de la formulación de los Cosserat. 2. No tenía cabida —o no se requería— para las aplicaciones tecnológicas que se sucedían por aquella época. Esto, sin duda, le confirió un cariz de teoría exótica —y hasta inútil— para el desarrollo y demanda de aquellos tiempos. En síntesis, un cuerpo teórico más. Sucedió, como en tantos otros ejemplos históricos, que la física y la matemática (sobre todo esta última) se anticipaban bastante al avance tecnológico.

Así fue durante casi 40 años. En el intermedio de este periodo ocurrió, no obstante, algo digno de resaltar, por su carácter premonitorio. Jaramillo (1929) [88] presentó una generalización relacionada con la teoría de pequeñas deformaciones elásticas, en la cual propone una modificación del lagrangiano en el principio de Hamilton. Consistió ésta en agregarle al funcional original una función cuadrática de las segundas derivadas espaciales del campo de desplazamiento.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, x, y, z, t, \phi \right) \quad \phi = \phi \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 \right]$$

Toupin (1964) [159] llama medio elástico de grado 2 a un medio continuo elástico de estas características. Al parecer, la denominación no prosperó mucho, pues no se le volvió a utilizar, ni por este autor ni por otros. Mindlin (1965) [116] introdujo una teoría del segundo gradiente, la cual, en buena medida desarrolla las ideas de aquel medio elástico de grado 2. Este hecho no pasaría de lo anecdótico, si no fuera porque en su tratamiento Jaramillo se anticipó casi 50 años a descripciones más generales del cuerpo elástico,.

Hacia 1950 se percibe un renovado interés por la teoría de Cosserat. Vale la pena destacar algunos trabajos salientes de aquel tiempo: Tifin y Stevenson (1956) [157] se ocupan del par de cuerpo y sus consecuencias en la teoría de la elasticidad para pequeñas deformaciones. Ericksen y Tiesdell (1958), [45] retoman el triedro rígido de Cosserat y lo rebautizan triedro director. Le Corre (1957) [105] se ocupa de la asimetría del tensor de tensiones. Günther (1958) [81] puso en evidencia un vínculo entre una distribución continua de dislocaciones y la cinemática del continuo de Cosserat, anticipándose a un campo de investigación de las postrimerías del siglo XX.

Un relanzamiento final comenzó a evidenciarse a partir de 1960 con un el aumento del número de publicaciones. Este hecho no debería sorprender, si se piensa que tal prosperidad coincidía con el auge de aplicaciones en el micromundo, lo que hoy se conoce como miniaturización. A partir de entonces comenzaron a marcarse dos tendencias en la investigación relacionada con la teoría de Cosserat. Lo que hoy se conoce como teorías de grado superior (o del gradiente) y teorías de orden superior (o de cinemática enriquecida). No obstante las primeras incursiones pueden enmarcarse en la teoría de la tensión de par.

Se trata de la más simple de todas las teorías del continuo generalizado, sobretudo en su versión linealizada. Siguiendo con la tendencia original, es una teoría aplicable al continuo elástico, de donde deriva uno de los tantos nombres que suele dársele: Teoría de elasticidad asimétrica. Lo de la asimetría se explica en que el tensor de tensiones perdió su simetría, gracias a la presencia del tensor de tensiones de par y de cuerpo. Se le conoce así mismo como pseudocontinuo de Cosserat. Esto último en razón a que se trata de un caso especial de la teoría de Cosserat, que resulta al igualar el tensor gradiente de macrorotación (el de la rotación dependiente del desplazamiento) y el tensor gradiente de microrotación (el de la rotación independiente). Por ello se le denomina también como teoría de la rotación constreñida. Como consecuencia de la restricción, la teoría presenta un problema: la parte esférica del tensor de tensiones de par y la asimétrica del de tensiones no pueden ser determinada a partir de consideraciones físicas. Este hecho llevó a Eringen a designarla teoría de las tensiones de par indeterminadas y a subrayar que por tal condición su campo de aplicación en micro y nanomecánica resultaba especialmente limitado. La indeterminación de la parte esférica, como lo reconoce el mismo Toupin (1964) [159], era ya un hecho inadvertido desde la publicación Tifin y Stevenson [157] y así se mantuvo en un escrito conjunto de Truesdell y Toupin (1960) [160]. Grioli (1960) [79], dedujo ecuaciones constitutivas para grandes deformaciones, la cual incluye una expresión correcta para la tensión de par, al tener en cuenta la indeterminación de la parte esférica del tensor de tensiones de par. Este hecho es destacado por Toupin [159]. Palmov (1964) [133] realizó una síntesis de los avances alcanzados hasta entonces en materia de teoría de la tensión de par.

Toupin (1962) [159], –partiendo de una observación de Mindlin- procede también a corregirlo y allí mismo demuestra que la teoría de tensión de par es un caso especial de la teoría del segundo gradiente. Como lo había hecho antes, [160], su metodología parte de la función de energía potencial de deformación relativa (que incluye las deformaciones relativas y primeros gradientes de las mismas) efectuando una amplia revisión teórica con base en el tensor de tensiones de par, presentado ahora por él, en forma alternativa, como un tensor de tercer orden. Las ecuaciones constitutivas que deducen tienen un carácter general y por tanto validez para grandes deformaciones. Aero y Kuvshinskii (1960) [3] construyen una teoría de la tensión de par con una hipótesis novedosa. En efecto, parten del supuesto de que los constituyentes del material (partículas del material las denominan) no serán ya asimilados a puntos materiales, sino a «configuraciones especiales ubicadas a distancias comparables a sus dimensiones». Notables son también los aportes que sobre el tema efectuaron Rajagopal (1960) [143] y Koiter (1964) [95].

Mindlin y Tiersten (1962) [113] dan una exhaustiva mirada al estado de avance de la teoría de tensión de par. Para ello revisan los resultados presentados en [3,79,158,160]. Su método consiste en volver a deducir varios de los resultados citados: 1. Las ecuaciones de conservación para el medio continuo generalizado realizada por los Cosserat. Encuentran que, salvo pequeñas diferencias, son las mismas que aparecen en [160]. 2. Las ecuaciones constitutivas de un continuo elastolineal, y arriban al mismo

resultado que [158]. Las linealizan, para obtener las de [158] y [3]. Partiendo de este resultado, obtienen un nuevo grupo de ecuaciones constitutivas suponiendo que el material además de elástico es isótropo y posee simetría central. Linealizadas y con las citadas propiedades constitutivas coinciden con el resultado [79], realizado en las mismas condiciones. Es interesante agregar que en el mismo artículo los mencionados autores presentan una aplicación en propagación de ondas, con la novedad de incluir parámetros de escala. Finalmente, es importante resaltar que este tipo de teoría es marcadamente cinética y en sus etapas iniciales ignora el concepto de microestructura.

Las teorías de grado superior se enfocan, también, esencialmente en lo cinético. Podría decirse que la motivación de esta teoría se encuentra en la expansión de la función del desplazamiento en serie de Taylor en la vecindad del punto material $\mathbf{p}$ situado en $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_I^{(p)}$:

$$u_i(\mathbf{X}_I, t) = u_i(\mathbf{X}_I^{(p)}, t) + (\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_I^{(p)})u_{i,I} + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_I^{(p)}) \times (\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_I^{(p)})u_{i,II} + O\left|\mathbf{X}_I - \mathbf{X}_I^{(p)}\right|^3$$

Con base en esto proceden a tomar términos adicionales de la serie de Taylor, más allá del primer gradiente. Es decir $u_{i,I}, u_{i,II}, u_{i,III}$; en esencia es el mismo resultado de Jaramillo [88]. Aparecen así de forma natural las teorías del *segundo*, *tercer gradiente*, etc. En realidad las teorías de tipo gradiente son comunes en la física, pues cualquier ley física podría, en principio, ser expresado como un desarrollo en serie de potencias alrededor de un punto: Maugin (2009) [112]: «Now, to tell the truth, gradient theories abound in physics, starting practically with all continuum theories in the nineteenth century. Thus, Maxwell's electromagnetism is a first-gradient theory (of the electromagnetic potentials); the Korteweg theory of fluids is a theory of the first gradient of density (equivalent to a second gradient theory of displacement in elasticity); Einstein's theory of gravitation (general relativity, 1916) is a second-gradient theory of the metric of curved space-time, and Le Roux seems to be the first public exhibition of a second-gradient theory of (displacement) elasticity in small strains (using a variational formulation)». Las teorías de grado superior se construyen a partir de la función de energía potencial de deformación relativa. La idea es ir incorporando paulatinamente en ella diversos gradientes de deformación relativa (equivalente a su vez a los gradientes de desplazamiento), para de esta manera arribar a teorías del primer, segundo gradiente, etc.

Entre los trabajos más notables y salientes en el campo de las teorías de grado superior se tiene los siguientes: 1. Green y Rivlin (1964) [78], los construyen una teoría general de gradientes, llamada teoría multipolar. Se trata de un trabajo bastante completo donde se abordan aspectos de cinemática, cinética y ecuaciones constitutivas. 2. Mindlin (1965) [116] se enfoca en la cinética, para conseguir mediante métodos variacionales ecuaciones de conservación y constitutivas. Incluye dentro de la función de energía potencial de deformación relativa, aparte de ésta, el primer y segundo gradiente de deformaciones. 3. Mindlin y Eshel (1968) [118]. Teoría del primer gradiente. La metodología es similar a la citada anteriormente. Se discuten tres combinaciones factibles de los tensores de deformaciones y gradiente de deformaciones según diferentes hipótesis. En realidad el punto de partida de esta teoría se remonta a Toupin (1962) [158]. Es importante anotar que [116,118] son artículos que basan en metodologías desarrolladas y presentadas en un artículo de Mindlin publicado en 1964, [115], el cual se suele referenciar como de orden superior. Los artículos mencionados previamente se constituyen en los más salientes y representativos en el tema.

Cuando llegó el momento de enfocar el estudio del sólido plástico mediante la teoría de Cosserat, las teorías del gradiente mostraron ser particularmente adaptables y útiles para este fin, como podrá observarse más adelante en este mismo artículo. Así mismo, para la investigación en efectos de tamaño, un fenómeno muy vinculado al concepto de gradiente [148,162,170].

A diferencia de las teorías de grado superior, en las de orden ídem se establecen ecuaciones constitutivas a partir de una amplia y minuciosa construcción cinemática. Esto las hace particularmente ricas en la parte conceptual, en especial por un novedoso tratamiento para el punto material, cuyo número de grados de libertad resulta apreciablemente incrementado. Se consigue permitiendo que, además de desplazarse y rotar, se deforme. De este modo el número de grados de libertad del punto material se incrementa apreciablemente, hasta llegar a 12 [56]. Eringen (2009) [58] se expresa de la siguiente manera acerca de las motivaciones, beneficios y justificaciones de estas teorías: «The conception of these theories was based on the query, Is it possible to construct continuum theories that can predict physical phenomena on the atomic, molecular, or nano scales? These would require supplying additional degrees of freedom to the material point beyond a director. After all, the molecules that constitute the internal structures of the material points (particles) undergo deformations and rotations arising from the displacement and rotations of their constituent atoms». Se puede decir que la idea de las teorías de grado superior es la misma de la teoría de Cosserat, y en este sentido cabe afirmar que son una ampliación del campo de acción cinemático de ésta. Esto gracias a que todas las variaciones teóricas de orden superior

parten del concepto original del triedro rígido hasta, llegar a Mindlin y Eringen, pioneros de las teorías de orden superior. Cabría decir que les correspondió encargarse de ampliar expresión de los directores.

En las teorías de orden superior el concepto de microestructura, -minimizado o ausente en las anteriores- llega a ser imprescindible, Mindlin (1964) [115]. Su idea acerca de la participación de la microestructura arraiga en conceptos de cristalografía. En sus propias palabras [115]: «In this paper, there is formulated a linear theory of three-dimensional elastic continuum which has some of the properties of a crystal lattice as a result of the inclusion, in the theory, of the idea of the unit cell. The unit cell may also interpreted as a molecule of a polymer, a crystallite of a polycrystal o a grain of granular material». Los tratadistas en teorías de orden superior Mindlin (1964) [115], Kafadar y Eringen (1971) [91], Eringen (1999) [56], (2001) [57] parten de un medio continuo dividido en dos zonas: 1. El microcontinuo, que es toda la parte interna del punto material. Para permitir la deformación se le asimila a la microestructura. Así la microestructura exhibe una microrotación (independiente) y una microdeformación. 2. El macrocontinuo, que es la vecindad infinitesimal, en el exterior del punto material. Más que mirar a estos conceptos como porciones de materia, resulta aconsejable pensar que ellos contienen determinada información cinemática. De esta manera en el microcontinuo quedan definidos los grados de libertad de la microrotación y microdeformación.

Eringen (1964) [47, 49, 50,51], con base en la idea de Mindlin, se dio a la tarea de estructurar y especializar el estudio del punto material, que ya había alcanzado el carácter de deformable e hizo valiosos aportes a la teoría. Introdujo el concepto de microinercia, que a su vez conduce a la formulación del principio de conservación de ésta. Sin este principio, no es posible resolver el problema del movimiento de un cuerpo con microestructura. En [49] sienta las bases del fluido micromórfico. Este concepto se extendería a uno más general, el del continuo micromórfico o aquel que posee directores deformables, que corresponde básicamente a la misma idea de Mindlin (los directores rotan como cuerpo rígido, pero también pueden distorsionarse (curvarse) y cambiar su longitud). De aquí se sigue que un continuo micromórfico posee nueve grados de libertad adicionales a los del continuo clásico. Así completa un total de doce y se arriba a un modelo cinemático más general para el punto material. Eringen lo llama continuo micromórfico de grado 1. Este último concepto encaja en uno más general, el microcontinuo y sus teorías asociadas, las teorías del microcontinuo. El desarrollo teórico de Eringen en este campo puede seguirse en [52] (1966), [53] (1969) y [54] (1971). Kafadar y Eringen (1971) [91], presentan un desarrollo generalizado de la teoría micromórfica. Esto lo amplía Eringen en 1976 [55] y 1999, [56]. De aquí se sigue que la teoría de Eringen tiene un carácter más general que la de Mindlin, entre otras cosas, porque es válida para deformaciones grandes.

Entre 1960 y 1980 la teoría de Cosserat había consolidado un desarrollo teórico a través de las diferentes formulaciones teóricas que se describieron previamente. A partir de entonces se desarrollaron vigorosamente incorporando poco a poco conceptos nuevos y revolucionarios, superando de cierta manera esa concepción primaria que se tenía de ellas, es decir, teorías basadas en novedades cinéticas, como la tensión de par y cinemáticas como el incremento en el número de grados de libertad.

Pasado este tiempo de consolidación de estas herramientas teóricas, se comenzó a observar una tendencia a enfocarse en el material, pero sin olvidar las herramientas desarrolladas. Sobre todo porque la investigación en nuevos materiales se iba incrementando vertiginosamente. Vendrían publicaciones donde las herramientas teóricas desarrolladas anteriormente figurarían vinculadas con novedades conceptuales, como parámetro de escala, microestructura (ambas ya introducidas pero como se vio no usadas tan frecuentes) separación de escala, elemento de volumen representativo, homogenización, etc. Esto trajo una avalancha de publicaciones en el tema, que entre otras cosas, hace imposible referenciarlas completamente en un trabajo como éste.

En esta nueva tendencia, la teoría de la tensión de par, cuyo interés había decaído, fue reapareciendo poco a poco, con trabajos en los cuales la simulación numérica tiene un gran protagonismo. A este respecto vale la pena citar —a guisa de ejemplo únicamente— las siguientes contribuciones: 1. Anthoine (2000) [4], quien resuelve un problema de flexión pura en un cilindro, empleando la teoría de de tensión de par linealizada. La solución se alcanza corrigiendo la clásica. 2. Yang y otros (2002) [171], presentan un trabajo con una modificación de la teoría de la tensión de par, con el objeto de introducir el concepto de elemento de volumen representativo. 3. Park, y otros (2008), [134], utilizando una versión modificada de la teoría de la tensión de par, efectúan una modelación micromecánica de un sólido celular. Más recientemente Hadjesfandiari y Dargush (2011) [82], en una línea de trabajo más teórica, han vuelto sobre los problemas de indeterminación del tensor de tensiones de par, para proponer una teoría consistente que corrija dicho problema, en el caso de deformaciones pequeñas.

En cuanto a los desarrollos más recientes en teoría de orden superior incorporados hacia 1980, se tienen algunos ejemplos representativos: 1. Fuang-Yuan y otros (2000) [72]. Estudian la flexión micropolar de una viga elástica, utilizando un esquema tridimensional de elementos finitos. 2. Forest y Sievert, (2006) [69]. Revisan el estado de avance en teorías de orden superior. 3. Vernerey, F. y otros

(2007) [163]. Elaboran una teoría micromórfica para materiales jerárquicos en dos escalas. 4. Zervos (2008) [172]. Desarrolla un esquema de elementos finitos para la teoría de Mindlin. 5. Petraszkiewicz y Eremeyev (2009) [136]. Hacen una revisión exhaustiva de las medidas de deformación en continuos micropolares no lineales. 6. Jänicke y otros (2009) [89]. Proponen un modelo doble escala para continuos micromórfica. 7. Bauer y otros (2010) [8]. Un esquema tridimensional en elementos finitos para elasticidad micropolar en deformaciones grandes.

Hasta comienzos de la década de los ochenta del siglo pasado la investigación en medio continuo generalizado se había enfocado al desarrollo y consolidación de las teorías de grado y orden superior para sólidos elásticos, las cuales eran aplicadas en investigaciones con diversos tipos de materiales. Estaba preparado el terreno y había llegado el tiempo para explorar un medio continuo generalizado de carácter inelástico. En particular, la consolidación de una teoría de plasticidad generalizada.

El concepto de dislocación se constituye en el de partida para la elaboración de una teoría de plasticidad generalizada. Aifantis (1984) [3A] sostiene este punto de vista. En esta misma publicación se lamenta de la carencia, por aquel entonces, de una teoría fenomenológica de la plasticidad generalizada, reconociendo al mismo tiempo la existencia de un gran conocimiento en cuanto las características microscópicas de la deformación plástica, esto es, que se tenía consolidada una teoría de la dislocación. Menciona que dicha teoría había sido estructurada según dos tendencias, una geométrica y otra dinámica. Señala que por aquel tiempo había acuerdo en cuanto a que una teoría fenomenológica de la plasticidad generalizada estaba aún distante. Por ello se propuso mostrar que tal percepción era injustificada, aportando unos elementos teóricos que permitían mirar al futuro de una forma más optimista.

Fleck y Hutchinson (1993) [61] presentan una primera versión de su teoría fenomenológica de la plasticidad generalizada. Fleck y Hutchinson (1997) [63] publican una versión mejorada. Aparte del trabajo teórico citado por Aifantis (ver más arriba), influyeron en el desarrollo de esta teoría los interrogantes y reflexiones suscitadas a raíz de las evidencias de efectos de tamaño identificados durante una copiosa experimentación (Fleck y otros (1994) [62]).

La idea fenomenológica subyacente en la teoría de Fleck y Hutchinson es que la resistencia al flujo plástico depende de la deformación relativa, como en la teoría plasticidad clásica, y del gradiente de ésta. De esta manera el endurecimiento depende del conjunto formado por la adición de las dislocaciones geoméricamente necesarias y de las dislocaciones almacenadas estadísticamente (Ashby (1970) [6], Nye (1953) [129], Fleck y otros (1994) [62]). Las primeras se vinculan al gradiente de deformación plástica relativa, en tanto que las segundas a la deformación plástica relativa. Cuando se produce la deformación, las dislocaciones se almacenan. Las almacenadas estadísticamente se acumulan, al ser atrapadas al azar por otras, mientras que las dislocaciones geoméricamente necesarias se forman por compatibilidad. Los gradientes de deformaciones se relacionan de manera inversa con la escala longitudinal y los gradientes llegan a ser importantes cuando tal escala disminuye (parámetro de escala). Correlativamente, la resistencia al flujo plástico tiene que ser más alta. De aquí se sigue una evidencia de que estas ideas fenomenológicas encajan adecuadamente dentro de teorías del gradiente (o de grado superior). Así en [61], se establecen dos teorías: Una de deformación basada en la teoría de tensión de par y otra, teoría del flujo. En [63], la teoría de deformación es generalizada mediante una teoría de gradiente, como lo reconocen explícitamente sus autores (Fleck y Hutchinson) «Toupin-Mindlin strain gradient framework, which involves all components of the strain gradient tensor and work-conjugate higher-order stresses in the form of couple stresses and double stresses».

En los años siguientes se continuó trabajando sobre esta idea o variaciones de ella, tratando de mejorar su cobertura, eliminando restricciones o buscando aplicaciones a otros materiales. Han aparecido diversos resultados de investigaciones, entre los cuales vale la pena citar los siguientes: 1. Gao y otros (1999) [73]. Una teoría multiescala para plasticidad. 2. Chambon y otros (2001) [30]. Una teoría de plasticidad de segundo gradiente, de carácter local y aplicada a geomateriales. 3. Fleck y Hutchinson (2001) [64]. Reformulan aquí la versión de 1997, con el objetivo de introducir en las ecuaciones constitutivas parámetros de escala adicionales. 4. Fleck y Hutchinson (2003) [65] Estudian la mejora en rigidez plástica por la presencia de partículas en una matriz de material. 5. Gudmundson (2004) [80]. Un marco teórico generalizado para la plasticidad, dentro del cual caben como casos particulares algunas de las teorías desarrolladas. 6. Voyiadjis (2005) [166]. Supone que la longitud de escala de un material no puede asumirse como constante. 7. Abu y Voyiadjis (2006) [1]. Una teoría de plasticidad tipo gradiente que para interpretar efectos experimentales de tamaño. Chaboche (2008) [32] presenta una compilación de teorías constitutivas para plasticidad y viscoplasticidad. 8. Fleck y Willis (2009) [66,67] formalizan una teoría matemática para la plasticidad.

Aspectos novedosos se perciben en la actualidad. El interés por las relaciones de Cauchy-Bohr (así continuó llamándose a partir de la intervención esclarecedora de Bohr) ha revivido en los últimos tiempos como un elemento teórico fundamental en investigaciones donde la dinámica molecular y la teoría del

medio continuo trabajan colaborativamente [34, 169], en particular en los llamados métodos de multiescala [93]. Así mismo en cristalografía [9,46,168].

3. EL MEDIO CONTINUO CLÁSICO

Como se señaló en la sección precedente, el trabajo de Cauchy en materia de medio continuo se limitó a estructurar la estática, dinámica y cinemática respectivas, sin hacer mayores aportes en cuanto al concepto mismo de medio continuo o al menos presentar una definición formal del mismo. Más de 180 años después de la presentación en sociedad del medio continuo, el conocimiento que se tiene en este aspecto es prácticamente el mismo que aportara Cauchy, y que fue descrito a grandes rasgos en la anterior sección. Este fue complementado por sus inmediatos sucesores y adaptado a la terminología moderna y al uso del cálculo tensorial. Esto constituye el grueso de lo que se podría denominar una teoría clásica del medio continuo. En cuanto al desarrollo teórico dirigido a la construcción y consolidación en sí del concepto de medio continuo, este ha sido, a decir verdad, francamente escaso y fraccionado. Quizás porque fue un trabajo que con el tiempo quedó en manos de ingenieros únicamente, y del que los físicos tomaron distancia, para fundar su propia metodología: la mecánica estadística. Truesdell y Toupin (1960) [160] se lamentaban de esto: «While every textbook on elasticity or plasticity makes somehow of presenting the general theory of stress, no reasonably comprehensive exposition has ever been published before.....Even the treatises of the last century are astonishingly superficial on this subject». Desde entonces y hasta hoy (2011) el panorama ha variado poco y en la bibliografía sólo se encuentran retazos de lo que podría concebirse como un intento por construir rigurosamente el concepto de medio continuo. De suerte que el osado que pretenda hacerlo tiene que tener en mente que se embarca en un proceso de reconstrucción, un terreno deleznable y peligroso. El objetivo de esta apartado, es entonces ensayar una estructura formal para el concepto de medio continuo, con base en los aportes de las épocas posteriores a Cauchy y los propios del autor de este trabajo.

Para este empeño hay que partir de un hecho objetivo. Se trata de lo siguiente: Quienes introdujeron el concepto del medio continuo eran conscientes de que las partículas de sus sistemas eran moléculas (corpúsculos). Truesdell y Toupin (1960) [160] lo declaran así: «Today matter is universally regarded as molecules. Thus in the physics of today corpuscles are supremes». Por tanto, que su método iba era a hacer caso omiso de tales moléculas.

Partiendo de la validez este hecho considérese un sistema conformado por n moléculas en movimiento (asimiladas al sistema físico partícula) y de frontera conocida (figura 1). Es necesario subrayar que interactúan mediante fuerzas centrales, dado que es un sistema de partículas. Con base en este sistema, el procedimiento que lleva al concepto de medio continuo puede reconstruirse como un proceso secuencial en los siguientes pasos: 1. Se reduce el número de componentes del sistema de partículas. Para tal fin se fracciona el sistema en pequeñas subregiones de volumen ΔV . Cada una de ellas agrupa un gran número de partículas (figura 2). 2. Al efectuar un límite para estas regiones ($\Delta V \rightarrow 0$), el elemento volumétrico se reduce a un punto, el cual pasa a llamarse punto material, p (ver figura 3). Este nuevo ente carece de tamaño. En este estado de cosas se pueden echar al olvido las partículas y pensar que el sistema de éstas se ha transformado en un sistema de m puntos materiales, cuyas componentes llenan completamente toda la región original (no obstante, es bueno mantener en mente que hay ahora N partículas subsumidas en cada punto material). 3. Las propiedades físicas vinculadas a cada partícula pasan ahora a asociarse a cada punto material. Podría decirse, en principio, que la propiedad física puntual $\Pi_{(p)}$ se establece como el promedio de la misma propiedad para las N partículas contenidas en el punto material:

$$\Pi_{(p)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_i, \quad N \in p$$

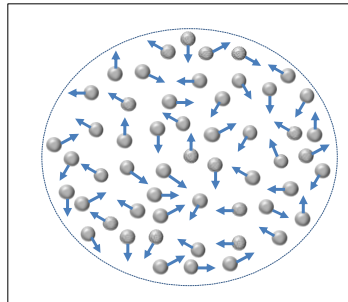


Figura 1

En esta simple propiedad reside la naturaleza estadística de la mecánica del medio continuo. Además, los puntos materiales heredan las propiedades cinéticas de sus antecesoras, entre otras el carácter central de la interacción y la ausencia de pares externos (por tanto no rotan). 4. Cada punto material se asocia de manera biunívoca con el punto del espacio físico que en un instante dado penetra y rodea a cada punto material (figura 3). Se trata sin duda de un homeomorfismo entre dos conjuntos: El formado por el sistema de puntos materiales y el subconjunto de puntos del espacio físico. Durante esta operación, la propiedad física que había quedado transferida al punto material, en el paso 3, se traslada al punto del espacio físico, identificado, por ejemplo, con las coordenadas cartesianas (x, y, z) . 5. Finalmente, se efectúa un segundo homeomorfismo, entre el subconjunto de puntos del espacio físico y el correspondiente de puntos del continuo matemático (figura 3). De este modo, las propiedades físicas asociadas primero a una partícula y luego a un punto del espacio físico pueden ser tratadas como campos. De aquí se sigue la operatividad es la habitual integro-diferencial. Para que esta ésta funcione es preciso que las propiedades físicas sean descritas funciones continuas (o suaves). Presupone esto, eso sí, que el modelo esté formado por puntos materiales sin vacío entre ellos, pues de lo contrario las funciones exhibirían discontinuidades del tipo escalón.

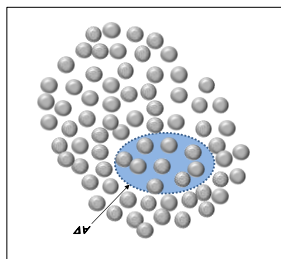


Figura 2

En la opinión del autor existe un hecho confuso en cuanto al real significado del concepto de medio continuo, independientemente de que éste sea simplemente una idealización. Pretenden algunos que el medio continuo sea una ilusión, o que es espurio, porque se fundamenta –dicen ellos- de manera implícita en una (supuesta) continuidad de la materia, esto es, en que ésta se distribuye sin admitir espacios vacíos. Dicen al respecto Truesdell y Noll (1965) [161]: «Widespread is the misconception that those who formulate continuum theories believe matter "really is" continuous, denying the existence of molecules. This is not so. Continuum physics presumes nothing regarding the structure of matter. It confines itself to relations among gross phenomena, neglecting the structure of the material on a smaller scale. Whether the continuum approach is justified, in any particular case, is a matter, not for the philosophy or methodology of science, but for experimental test ». Es entonces conveniente reafirmarse en que el medio continuo lo que hace, más bien, es posibilitar un tratamiento como funciones de las propiedades de la materia, las cuales en el mundo microscópico presentan un carácter discreto. Para afianzar estas ideas y tratar de desterrar tanto equivoco, el autor se atreve a proponer la siguiente definición para el concepto de medio continuo: El medio continuo es una idealización que posibilita el olvidarse de los constituyentes de un sistema de partículas, para enfocarse en manipular sus propiedades físicas como funciones continuas.

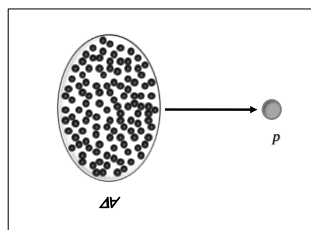


Figura 3

Establecida una claridad en cuanto al verdadero sentido o significado del concepto de medio continuo, es importante ocuparse ahora de tratar de fijar un límite práctico para la aplicabilidad de éste. En los tiempos de Cauchy se le prestaba poca atención a este asunto, se le soslayaba o simplemente se daba por sentada la continuidad de las funciones. Dado que los puntos materiales carecen de tamaño y se amontona sin vacíos entre ellos, es fácil concluir que el modelo o idealización del medio continuo asume una distribución homogénea materia, es decir, es intrínsecamente homogéneo en este aspecto. La validez del modelo pasa justamente por esperar que un cuerpo que se va a modelar como medio continuo se aproxime constitutivamente a esa condición de homogeneidad. En la mayoría de aplicaciones con la mecánica del medio continuo clásico esta condición es el resultado de una inferencia macroscópica o fenomenológica. Está entonces en la naturaleza misma de la materia propiciar las condiciones para que

esto funcione ¿Cómo? En su constitución interna, específicamente en su disposición molecular. Ésta es diferente según cada estado de la materia.

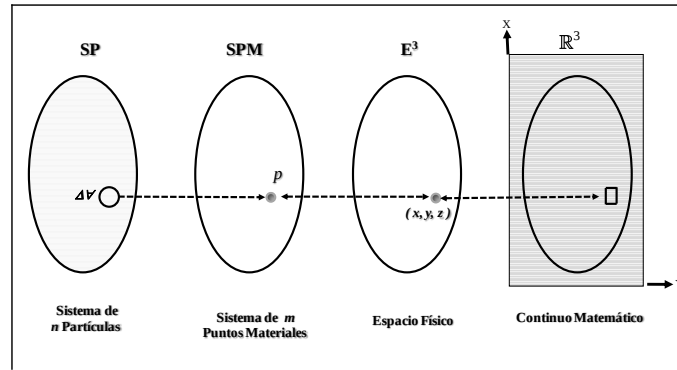


Figura 4

Puede decirse de una manera general que la materia se presenta en estado sólido y fluido. De un modo más particular, se habla de tres estados sólido, líquido y gaseoso. Tales estados se distinguen a partir de los contenidos relativos de energía potencial y cinética que posee un conjunto dado de moléculas. La potencial está asociada a las fuerzas de cohesión, cuyo origen es electromagnético (lo demostró Van Der Waals), actúan en rango corto (un poco más allá de la frontera material de cada molécula). Estas cualidades, ya establecidos por parte de Newton, Laplace, etc., fueron confirmadas por la investigación de finales del siglo XIX y comienzos del XX. De esta manera cuando se pretende comprimir la materia se tornan repulsivas y atractivas en caso contrario. La energía cinética tiene que ver con la actividad molecular o (movimiento térmico), la cual mide el grado de movilidad de las moléculas. Así, es la preponderancia de un tipo de energía sobre el otro, la que determina el estado de la materia. En lo sólidos la actividad molecular es más bien baja, lo que provoca que las moléculas permanezcan juntas y las fuerzas de cohesión –y por ende la energía potencial- dominan ampliamente, de modo que las moléculas se mantienen apretujadas. En los gases, por el contrario, la actividad molecular es alta, por lo tanto las moléculas consiguen eludir el freno cohesivo (la energía cinética supera ampliamente a la potencial) y gozan de libertad de movimiento para realizar recorridos amplios. Gracias a esta propiedad el espacio intermolecular es amplio en los gases. Además, por la misma razón los gases no pueden conformar conglomerados moleculares. En estas excursiones cada molécula colisiona con alguna y en forma repetida. La distancia que recorren antes de cada choque puede ser estimada mediante un importante parámetro, el denominado recorrido libre medio, $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} n d^2 P} \quad (3.1)$$

Donde: k_B constante de Boltzman, T temperatura, P presión y d diámetro de las moléculas del gas. En los líquidos la energía cinética supera a la potencial, pero en una menor magnitud que en el referido caso de los gases. Con base en los argumentos expuestos previamente puede afirmarse que en los líquidos y los sólidos la inferencia macroscópica de homogeneidad resulta adecuada, al menos en primera aproximación, lo que resulta suficiente para los efectos y propósitos de la mecánica del medio continuo clásica. No es así para los gases, pues sus moléculas desarrollan un recorrido libre medio y por tanto su homogeneidad es puesta en duda en muchas situaciones.

4. EL MEDIO CONTINUO GENERALIZADO

4.1 Una Revisión a los Fundamentos del Medio Continuo Clásico

Con base en lo expuesto en el apartado anterior puede establecerse que el medio continuo clásico se fundamenta en tres suposiciones: 1. Un cuerpo que se idealiza como un medio continuo no puede desarrollar pares de superficie (y de allí tensiones de par) entre dos porciones suyas adyacentes, ni tampoco admitir momentos de cuerpo. De esto se sigue que el punto material se desplaza sin rotar. Posee una cinemática de tres grados de libertad. La ausencia de pares de superficie es la segunda parte del principio de Cauchy. Su consecuencia práctica más importante es el carácter simétrico tensor de tensiones. 2. Se asume que los cuerpos idealizados como medios continuos son homogéneos. Esto garantiza la verificación práctica de la suavidad de las funciones de campo que representan a las propiedades físicas de un medio continuo. 3. El comportamiento mecánico de un punto material de un medio continuo está determinado solamente por los puntos materiales de su entorno más inmediato. Esta

es básicamente la aproximación del campo promedio. En un lenguaje más moderno se le denomina enfoque local del medio continuo.

Es normal que con el paso del tiempo se sucintaran debates acerca de la verisimilitud y/o pertenencia de estas suposiciones, obligando a una revisión suya. Al final de todo esto –como suele suceder con la física y las disciplinas afines a ella- no significó esto la desaparición del medio continuo clásico, si no más una definición de las condiciones bajo las cuales tal idealización conservaría su validez.

Postulado de Cauchy

Como se dijo al inicio del apartado 2.5, la segunda parte del principio de Cauchy fue discutido tempranamente por la comunidad científica. El resultado de la investigación teórico-práctica de Voigt, Poincaré y hermanos Cosserat demostró que esta posición estaba sólidamente argumentada y tenía sentido. Es inexacto que la tensión de par sea, en general, nula en los materiales reales y como consecuencia de ello, el tensor de tensiones resulta ser asimétrico. Así mismo, el punto material posee 6 grados de libertad. El omitir esta consecuencia implicará contradicciones entre resultados teóricos y experimentales. Las consecuencias de esto acaban de ser ampliamente presentadas discutidas en el apartado 2.5. Resta por mirar con algún detalle las teorías del medio continuo generalizado descritas allí. Este es el tema del apartado 5.

La Homogeneidad

La homogeneidad de la materia se asume en el medio continuo clásico como condición necesaria para garantizar que las funciones de campo, que representan a las propiedades físicas, sean suaves. Se asume allí que un material es desde la perspectiva macroscópica (o fenomenológica) homogéneo. Es una suposición, ideal, de difícil cumplimiento en la realidad práctica, como lo ha ido corroborando el desarrollo tecnológico. Es conveniente aceptar, pues, pequeños desajustes, asociados, en parte, a la aleatoriedad de la actividad molecular. El paso de la homogeneidad a la heterogeneidad comienza a darse cuando estos desajustes se hacen ostensibles y las regiones presentan distribuciones irregulares de materia. En la medida que se abandona la visión macro (o escala macro) y uno se adentra en el mundo microscópico, los materiales comienzan a percibirse como heterogéneos. En un último nivel de fraccionamiento de la materia todos los materiales son heterogéneos. Aquí se tiene entonces un principio importante que vale la pena tener en cuenta: El grado de heterogeneidad depende del nivel microscópico de observación que se adopte. Irá creciendo, en general, a medida que se avanza hacia los niveles más internos de la materia (vistos desde un nivel macro, todos los materiales son homogéneos, la suposición básica, en este aspecto, del continuo clásico).

Las aplicaciones industriales basadas en los estados de la materia, algunos procesos naturales espontáneos y otros no tanto, como la degradación medioambiental, tienden en la práctica a favorecer la formación de materiales con algún grado de heterogeneidad [18]. De este modo es difícil en la práctica contar con sólidos y fluidos homogéneos (especialmente líquidos). Si se toma como base el modo de producir materiales, es posible enfocar el estudio de la heterogeneidad partiendo de una detallada clasificación de éstos. Para empezar se les separa en materiales mixtos y materiales puros.

La causa más inmediata de heterogeneidad en los materiales mixtos es la participación de más de un material en la formación de otro nuevo. Pueden intervenir componentes pertenecientes a un mismo estado de la materia o a varios (los colides y las aleaciones constituyen unos buenos ejemplos para entender esta idea). Partiendo de esta consideración es factible afirmar que existen dos tipos de materiales mixtos: Los materiales multifásicos y los materiales compuestos.

Los multifásicos se crean con la concurrencia de dos o más materiales, que a su vez pueden manifestarse, o no, en una misma clase de estado de la materia (o fase). Por ello es necesario afinar la clasificación: Las combinaciones de sólido y sólido con las siguientes posibilidades: 1. Aleaciones metálicas. Mezclas de un metal con otro. En estos casos un metal oficia como base (o solvente) y otro como agregado (o soluto). Por ejemplo el bronce, el cual se forma al adicionar estaño en alguna proporción al cobre (solvente). Dado que el proceso metalúrgico se desarrolla con ambos materiales en estado líquido, sería de esperar que la mezcla resultara homogénea, lo cual en la práctica no es así, ya que las moléculas se integran en redes policristalinas diferentes, amén de la aparición de defectos inherentes al procedimiento metalúrgico. 2. Suelos. Mezclas entre sólidos de diversas propiedades. Tienen origen en la meteorización de las rocas. 3. Combinaciones de sólido con líquido. Es el caso de la sangre, la cual está formada por los sólidos, plaquetas, glóbulos rojos y blancos, diluidos en el plasma. La salmuera, de la cual el agua de mar es el ejemplo más común. Los sedimentos fluviales, verdaderas suspensiones del suelo (en toda su gradación granulométrica) en la corriente de agua (degradación medioambiental). El agua potable que, antes de ser tratada puede transportar materia sólida de diversa índole. Cabrían también aquí las mezclas más complejas que involucran líquidos de diferentes densidades con diversos sólidos. Es el caso de la dispersión de los contaminantes (sólidos y líquidos) en un líquido. En fin, dentro del grupo

de los materiales multifásicos caben todo tipo de coloides y algunos tejidos de origen biológico de animales (ahí incluidos por supuesto los humanos).

Los materiales compuestos [90] son necesariamente productos artificiales (o manufacturados), en cuya elaboración participan dos o más sólidos. El fin de este procedimiento es dotar al nuevo material de las propiedades más salientes de cada uno de sus componentes. En estas situaciones, a diferencia de las aleaciones, es factible identificar a simple vista los integrantes del material compuesto. Por eso no se trata propiamente de materiales multifásicos. Se construyen alrededor de un sólido principal, denominado la matriz [31]. Resultan así diversas clases de ellos: Materiales fibrosos, materiales laminares, suspensiones de partículas en una matriz (el caso del hormigón), sólidos celulares (tejidos vegetales como la madera, el corcho, huesos esponjosos, materiales manufacturados como panales metálicos y espumas ídem) y combinaciones de algunos de los anteriores.

Los materiales puros se clasifican en: 1. Sólidos puros. Los sólidos en estado puro tienden también a ser heterogéneos. El estudio de la heterogeneidad de los sólidos puros debe abordarse considerando su estructura. Sabido es que la actividad molecular en los sólidos es baja, lo cual tiende a favorecer la formación de conglomerados o cadenas moleculares, cuya forma y tamaño no se puede asegurar, a priori, que sean uniformes. Cabe decir, en este sentido, que el metal formado espontáneamente en la naturaleza presenta esta característica y que el mismo fenómeno puede ser percibido en aquellos procesados industrialmente. De esto se sigue una clasificación de los sólidos [145]: Sólidos cristalinos, formados por entramados moleculares de una unidad básica llamada cristal. Ésta es una estructura molecular tridimensional (cúbica, hexagonal, etc.). Se caracterizan estas unidades por ser ordenadas y repetitivas. Aparecen en los metales, sus aleaciones y algunos minerales. Sólidos amorfos. En los sólidos amorfos no existe un ordenamiento periódico de la estructura molecular. Es el caso del vidrio –y algunos plásticos– formados por redes tridimensionales no periódicas; los polímeros que son moléculas individuales de cadena larga. Semicristales o cristales líquidos, un caso intermedio entre el vidrio y los polímeros. Exhiben ordenamiento en una dirección del espacio, porque en la otra es amorfa. Fluidos puros. En términos generales puede decirse que los fluidos tienden a ser más homogéneos que los sólidos, debido principalmente a una actividad molecular comparativamente más grande, que evita que formen cadenas moleculares. De esta manera no se crean heterogeneidades como las citadas para los sólidos puros. De todo lo expuesto queda como conclusión que los medios continuos, especialmente los sólidos, son heterogéneos.

Microestructura

En los párrafos anteriores se ilustraron unos procesos que tienden a favorecer la naturaleza heterogénea de los materiales. De allí resulta evidente que las mezclas entre materiales realizadas en la naturaleza o en la industria tendrían mayor influencia en la formación de materiales heterogéneos. Esta heterogeneidad es observable en el interior de estos materiales, ya que los procesos de mezcla y/o aglutinamiento dejan huellas, en forma de unas nuevas estructuras, que de ser el material homogéneo, no se manifestarían. Las más comunes se pueden tipificar como [119,145,161A]: 1. Granos. Un conjunto de cristales con diferentes orientaciones. 2. Dislocaciones. Distorsiones de la malla cristalina. Se producen cuando átomos quedan fuera de la red cristalina. 3. Vacancias. Ausencia de átomos en determinados puntos de la red cristalina. 4. Cavidades. Huecos dentro del cuerpo sólido. Se diferencia del anterior en el tamaño, que en este caso es más apreciable. Los huesos son ejemplos de sólidos con esta característica. Los sólidos celulares y las espumas son desarrollos artificiales conformados por cavidades (figura 6). 5. Inclusiones. Pequeños residuos de otros sólidos, de líquidos como agua y especialmente de gases disueltos que causan porosidades (figura 5). 6. Grietas y fisuras. Rupturas en la continuidad del material, originadas por causas mecánicas o gradientes térmicos. Las diaclasas son ejemplos de este género de defecto en rocas.



Figura 5- detalle de una aleación

de cementita y ferrita, para formar un acero¹.

En el lenguaje moderno las estructuras descritas previamente reciben la denominación genérica de microestructuras. La figura 5 y 6 representan ejemplos de ellas. Se puede afirmar en consecuencia que la materia es heterogénea y está formada por microestructuras con diversas geometrías y tamaños, las cuales pueden o no ser visibles a simple vista. Este último caso ocurre con en el hormigón. En los materiales polifásicos (excepto las aleaciones) la microestructura es aportada por el material agregado (en el lenguaje propio de los coloides el material receptor se denomina fase dispersante y el agregado la fase dispersada). Así, las plaquetas y los glóbulos rojos y blancos son las microestructuras de la sangre. Los cristales de sal lo son en el caso del agua de mar. En los materiales compuestos, el material que se incrusta en la matriz: fibras, láminas. En las aleaciones y los sólidos puros las microestructuras corresponden a inclusiones, granos, cavidades y dislocaciones. No basta con que un sólido o un líquido (bifásico) posea microestructuras para considerarlo heterogéneo, sino que tiene que ser una mezcla de éstas, con diversos tamaños y formas, lo cual, por lo demás no es difícil de conseguir.

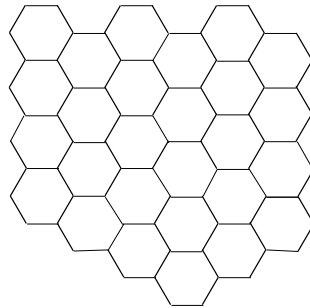


Figura 6-Muestra de la microestructura de un sólido celular con celdas hexagonales periódicas.

Visto todo lo anterior es evidente que las funciones de campo no serían ya suaves (habría saltos entre una microestructura y sus alrededores) en los casos mencionados. Lo expuesto previamente permite afirmar que los líquidos puros no forman microestructuras. Hay sin embargo un fenómeno que podría asimilarse a una microestructura, el cual compromete la continuidad de las funciones de campo en los fluidos y es el de la turbulencia [59].

Escalas

Puede afirmarse, en primera aproximación, que el concepto de escala longitudinal –o simplemente de escala- fue apareciendo en la medida que el desarrollo tecnológico en materiales incursionó en las partes más internas de la materia y con ello se topó con diversos grados de heterogeneidad [142]. De esta manera, una escala es una longitud (generalmente expresada en micrómetros, y a veces en nanómetros) asociada con un cierto grado de heterogeneidad. Por ejemplo, a simple vista, escala de 10 μm aproximadamente, un policristal de cobre puede parecer homogéneo (cero heterogeneidad), pero al observarlo mediante el microscopio, escala de 1 μm , el policristal aparece conformado por muchos granos (cada uno con diferentes propiedades, como tamaño, orientación y límites de grano). Así a la escala de 1 μm el material ya tiene un cierto grado de heterogeneidad. Reduciendo aún más la escala se encuentra que cada grano puede tener su propia microestructura. Todos los materiales a cierta escala son heterogéneos. El concepto de escala está ausente en la mecánica del medio continuo clásico, porque aparte de la percepción sensorial asume que la materia es internamente homogénea.

La heterogeneidad es altamente dependiente de la escala: Puede afirmarse que cada escala tiene su nivel de heterogeneidad o también que hay heterogeneidades para cada escala: Teniendo en cuenta esto se definen las siguientes escalas: 1. Macroescala. Corresponde a una homogeneidad plena y a la negación de la heterogeneidad. En este sentido corresponde a la misma del material que se está analizando. 2. Mesoescala. La escala donde se ponen en evidencia heterogeneidades de los materiales multifásicos. Se detectan en ella microestructuras como inclusiones y cavidades. 3. Microescala. La escala para trabajar

¹ Se autoriza la copia, distribución y modificación de este documento bajo los términos de la [licencia de documentación libre GNU](#), versión 1.2 o cualquier otra que posteriormente publique la [Fundación para el Software Libre](#); sin secciones invariables, textos de portada, ni textos de contraportada. Se incluye una copia de la dicha licencia en la sección titulada [Licencia de Documentación Libre GNU](#).

con sólidos policristalinos, amorfos, etc. Aquí se ponen de manifiesto microestructuras como granos y vacancias. Con un rango de longitudes comprendido entre 0.1 y 100 μm [141]. 4. Nanoescala. En esta escala son importantes microestructuras como las dislocaciones. Por debajo de esta escala se encuentra el mundo atómico.

Efectos de Tamaño

Una de las características más notables de la teoría del medio continuo clásico es que infiere propiedades constitutivas, como módulos de diversa clase, a partir de pruebas de laboratorio, realizadas con especímenes que poseen tamaños normalizados. Es con un procedimiento de este género que se determinan el módulo de Young a tracción y compresión, etc. Se supone en este enfoque clásico que el valor obtenido conserva su validez para cualquier tamaño del material, superior o inferior al del espécimen empleado. Con el desarrollo de la miniaturización, llegó a ser factible llevar a cabo los mismos ensayos tradicionales (en torsión, flexión, etc.) en el dominio del micromundo (esto es a escalas inferiores de la macro), pero usando, por ello, unas probetas muy pequeñas (como nanotubos, nanocables, etc.). A partir de dichas pruebas se encontró que en algunos casos los valores de los módulos de los materiales eran sorprendentemente más elevados que aquellos obtenidos con la muestra estándar. Podría esperarse, en consecuencia, que valores de propiedades físicas obtenidas a nivel de la microestructura (a una escala inferior) sean diferentes de los capturados en la macroescala. A este fenómeno se le denomina efecto de escala o efecto de tamaño.

La experiencia muestra que un efecto de tamaño comienza a manifestarse sólo a partir de una cierta escala. Lo que se observa es un incremento paulatino de los módulos con la disminución de la escala, esto es, en la medida que los ensayos se realizan con probetas más pequeñas. De esto sigue una consecuencia muy importante: el valor real de una propiedad, como un módulo, es el que fija su microestructura, y más precisamente, características de ésta, como el tamaño, distribución, geometría y otras propiedades microestructurales. Cualquier propiedad en la escala macro es el reflejo de la misma a nivel de la microestructura. Por ello un adecuado conocimiento de las propiedades en el nivel macro debe hacerse desde el nivel micro. Algunos ejemplos clásicos de experiencias, generalmente de laboratorio, en que han sido detectados efectos de tamaño son los siguientes:

Efectos de tamaño por presencia de agujeros, grietas e inclusiones. Se comienza con la descripción de un trabajo teórico muy importante, por su carácter de pionero y por la claridad con que pone en evidencia los efectos de tamaño. Se debe a Mindlin (1962) [114]. Se basó en un problema bastante conocido en la teoría de la elasticidad clásica. Consiste éste en disponer una placa rectangular con un agujero circular de radio a , ubicado en su centro (figura 7). En dos extremos opuestos de la placa se aplican fuerzas iguales, que a su vez generan una tensión uniaxial. Las pruebas demuestran que el campo de tensiones se mantiene constante en sitios alejados suficientemente del contorno del agujero (gradiente nulo de tensiones), pero no así en la vecindad del agujero, donde evidentemente se conforma un gradiente de tensiones y, en consecuencia, otro de deformaciones relativas. Cuando el problema se resuelve con base en la teoría de elasticidad clásica, se encuentra que el factor de concentración de tensiones es constante e igual a $3a$. Mindlin resolvió el problema por vía analítica, basándose en la teoría de Cosserat (en la versión de teoría de la tensión de par) en la que incluyó un parámetro de escala, ℓ . Lo obtuvo al relacionar los módulos de elasticidad clásico, E , y el de par, E' , así:

$$\ell = \sqrt{\frac{E'}{E}} \quad E' = \frac{\mu}{\kappa} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Donde μ es la tensión de par y κ es la curvatura. Después de un largo proceso deductivo obtuvo las siguientes ecuaciones en el plano polar:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\psi - \ell^2 \nabla^2 \psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \phi \quad \frac{\partial}{\partial r} (\psi - \ell^2 \nabla^2 \psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \phi$$

En estas expresiones ϕ y ψ son las funciones de tensión. El resultado de su integración en términos de la relación adimensional a/l , se muestra en la figura 8. Un examen de ésta lleva a inferir que el factor de concentración de tensiones depende del módulo de Poisson y de la relación entre el radio del agujero y el parámetro de escala l (figura 7). Se observa claramente que al incrementarse a/l el factor tiende a 3, mientras que cuando a/l tiende a cero el factor se acerca a un valor de 2 o inferior, dependiendo del coeficiente de Poisson. Esto se explica en que en esta última situación l y a tienen valores similares. De una forma más general, permite concluir que para que en verdad tales efectos se manifiesten debe existir una equiparación entre longitudes involucradas (o escalas longitudinales).

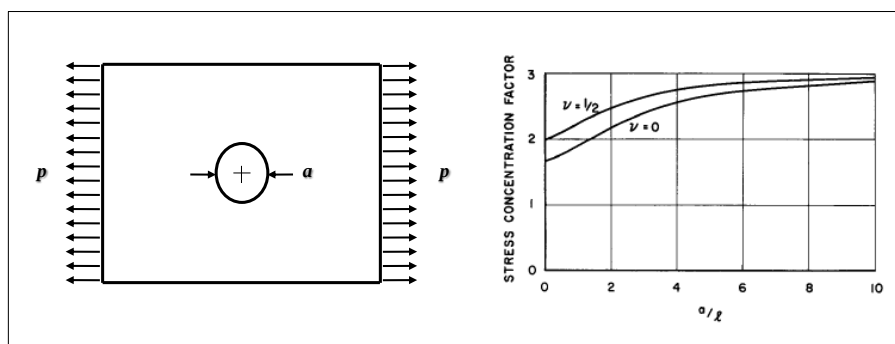


Figura 7²

Expresado de un modo más riguroso: Se requiere que las longitudes de onda (o correlativamente sus frecuencias) causadas por las cargas aplicadas sean semejantes a una longitud característica del sólido. Un aspecto llamativo del método seguido por Mindlin, es que no se basa en pruebas de laboratorio, ya que explora la aparición de efectos de tamaño al aprovechar la discrepancia entre un resultado que incluye parámetros de escala y otro que no. Un modo de proceder diferente al empleado hoy en día, como se podrá apreciar a continuación.

Mindlin seguramente se basó en esta experiencia para entender y entrever que en los modelos de tipo Cosserat que iba a proponer, unos años después de esta experiencia, tendría que incluir gradientes de deformaciones relativas. Así creó un método de trabajo que iba a ser adoptado de ahí en adelante por la mayor parte de quienes iban a investigar en el tema. Más allá de esto, el resultado sirvió para entender lo que sucede en medios continuos con agujeros, grietas, inclusiones y demás rupturas de la continuidad, justamente en aplicaciones prácticas con materiales que puedan desarrollar –potencialmente- gradientes altos de tensiones (y de deformaciones relativas), como los huesos (porosos, vale decir, con una alta presencia de agujeros) y los sólidos celulares (cuyas celdas pueden ser concebidas como agujeros). Trabajos reiterados en esta misma línea, por parte de otros investigadores, –ya mediante pruebas de laboratorio o simulaciones numéricas- confirmaron una reducción del factor de concentración de tensiones en grietas y agujeros elípticos. Vale la pena citar, entre otros, los siguientes: Stenberg y Muki (1967) [150], Ejike (1969) [44], Kim y Eringen (1973) [94], Itou (1973) [87], y Nakamura y otros (1984) [162].

Wang, T. T. (1970) [167] realizó una experiencia con una inclusión rígida dentro de un medio elástico. Estableció que el factor de concentración de tensiones es más alto cuando se incluyen tensiones de par que cuando están ausentes. Lei y Shuisheng (2004) [106] repitieron la experiencia de Mindlin. Emplearon simulaciones basadas en el método de elementos finitos y usaron la teoría de Cosserat (también llamada actualmente teoría micropolar). Confirmaron que el factor de concentración de tensiones decrece cuando el radio del agujero se aproxima a la longitud característica del material. Lakes (1982) [98] llevó a cabo experiencias induciendo vibraciones torsionales en huesos para explorar la influencia de las tensiones de par en huesos. Concluyó que dichas tensiones eran importantes en muestras del orden de pocos milímetros o menos de diámetro (0.15 a 0.25 mm). Encontró además algo bastante práctico: Que la influencia es de tal magnitud que podría afectar la concentración de tensiones durante un procedimiento quirúrgico que contemple perforar huesos. Determinó así mismo, que la longitud característica a la cual se disparan los efectos de tamaño corresponde al tamaño de las osteonas. Dicha longitud es más pequeña a frecuencias altas que a bajas. El mismo Lakes (1983) [99] y (1986) [100] determinó, como una función del diámetro, la rigidez de dos espumas hechas de polímero y otra sintética. Sus experiencias mostraron, por otra parte, que la teoría micropolar elástica es un modelo apropiado para capturar el incremento de las rigideces a flexión y a torsión para el caso de las espumas en polímeros y no así para las sintéticas, que concluyó, se comporta como un sólido clásico. Diebels y Steeb (2002) [38] investigaron el comportamiento de espumas con relación a efectos de tamaño mediante modelos mecánicos, microscópicos y macroscópicos. Tekoğlu, C. (2007) [153] se ocupó de efectos de tamaño en sólidos celulares. También Onck y otros (2000) [130] pero considerando dúctil a este tipo de sólido.

Gauthier y Jahsman (1975) [74] condujeron ensayos de microtorsión, en cilindros. Los cilindros mostraron mayor rigidez en la medida que se volvían más delgados. Fleck y otros (1994) [62] determinaron experimentalmente curvas de tensión-deformación relativa mediante microtorsión. Al igual que la de Mindlin, se trata de otra experiencia ilustrativa. Utilizaron alambres de cobre de alta pureza, con diámetros, $2a$, comprendidos entre 12 y 170 μm . Inicialmente se efectuaron ensayos de microtracción, cuyo resultado se muestra a la izquierda en la figura 8 y después las mencionadas de microtorsión (ver

² Tomada de [114].

figura 8 a la derecha). Para la experiencia de microtracción se observa poca diferencia entre las curvas de tracción-deformación relativa, señal inequívoca de ausencia de efectos de tamaño. Lo contrario se percibe en el caso de curvas similares para microtorsión. En la misma línea de trabajo, Dunstan y otros (2009) [42] determinaron el límite elástico y la deformación relativa por endurecimiento para alambres delgados sometidos a microtorsión. En microflexión de placas fueron detectados efectos de tamaño por Gauthier y Jahsman (1975) [74]. Así mismo, por Krishna y Venkatasubramanian (1978) [97]. En sus pruebas no detectaron efectos de tamaño por tracción. En pruebas de microflexión sobre una lámina delgada de metal, efectuadas por Stölken y Evans (1998) [152], se observó un endurecimiento por flexión cuando se hizo decrecer el espesor de la lámina, desde 100 a 12.5 μm . Como parte de una simulación realizada por Lei y Shuisheng (2004) [106] se encontraron efectos de tamaño por flexión en una viga ultra delgada. Concluyeron que la rigidez de la viga se incrementaba apreciablemente, cuando su espesor estaba próximo al parámetro de longitud característica de la viga. Chong y Lam (2001) [33], condujeron pruebas de microtorsión en microvarillas y de microflexión en microplacas, hechas de polímeros vídriosos y que son semejantes a las que se utilizan para fabricar microcomponentes electrónicas. Establecieron que los efectos de tamaño se manifiestan en tamaños del orden del micrón.

Ensayos de dureza en pruebas de nano indentación (con metales) llevados a cabo en forma independiente por Stelmashenko y otros (1993) [149], Poole y otros (1996) [139], Ma y Clarke (1995) [109]. A la escala de un micrón por Begley y Hutchinson (1998) [10]. Así mismo, Nix (1989) [127]. Lam y Cong (1999) [102] realizaron este tipo de experiencias con materiales hechos de polímeros vídriosos. Todas mostraron claras evidencias de endurecimiento al decrecer el tamaño del indentador. Fleck [62] dice que en los ensayos de indentación en metales y cerámicas la dureza se incrementa con la disminución en el tamaño del indentador.

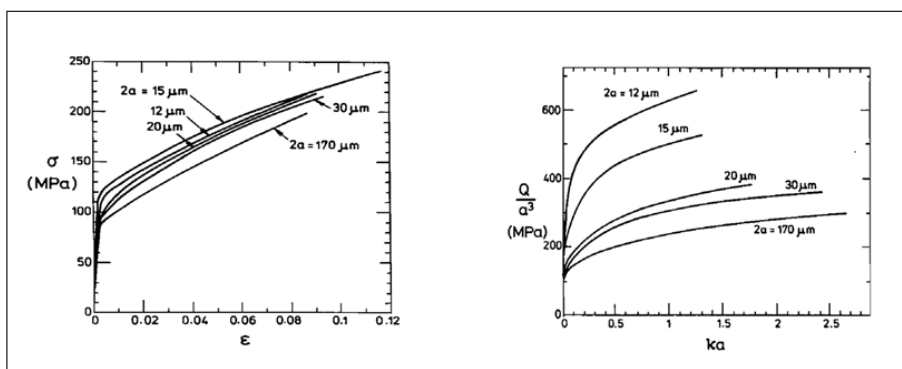


Figura 8

El variado tipo de pruebas enumeradas anteriormente (microflexión, microtorsión y nanoindentación) así como los casos citados (que son sólo una muy pequeña muestra del amplio espectro que se tiene) permite llegar a una importante conclusión: Que los efectos de tamaño se manifiestan cuando las dimensiones laterales de los especímenes son comparables con las escalas intrínsecas naturales del material.

De lo expuesto previamente resulta evidente que la teoría clásica del medio continuo es independiente de los efectos de tamaño (Vale decir: Asume que sus ecuaciones resultan válidas para cualquier escala). Las ecuaciones constitutivas de la teoría del medio continuo clásico son incapaces de predecir fenómenos dependientes del tamaño, pues no contienen parámetros de escala. Algunas de las teorías modernas del medio continuo incorporan de forma natural efectos de tamaño en sus ecuaciones. Esto lo consiguen al vincular funcionalmente la tensión con el gradiente de deformación relativa, además de la deformación relativa (cfr. Teorías de grado superior). La interpretación moderna de la plasticidad se hace con base en el concepto de gradiente de deformación relativo, al explicar el fenómeno del endurecimiento con base en este concepto. Aifantis [3B], hace referencia a esta característica, al comentar el resultado de la experiencia de Fleck y otros [62]: «They attributed the observed size effect to the radial gradient of the fixed surface shear strain that increases as the radius decreases. In fact, they built on this gradient dependent hardening to develop a three-dimensional first-order strain gradient couple stress theory of plasticity with symmetric stress». En presencia de gradientes poco uniformes de este tipo, los efectos de tamaño pueden revelarse para escalas longitudinales más largas que las atómicas. Cuando la escala longitudinal llega a ser grande, la teoría de la plasticidad no clásica colapsa en la clásica, que no incluye escalas longitudinales. Con el mismo concepto resulta posible entender por qué el módulo de elasticidad para tracción-compresión es independiente de la escala longitudinal (no se observa endurecimiento en las pruebas de tracción- compresión) y no así el correspondiente de de corte. La explicación es que en tracción-compresión el gradiente de deformaciones relativas es constante y no así en corte (medido en

ensayos de torsión,). Este último lo es únicamente sólo para agregados preparados con cristales simples e isotropos [62].

Es posible dar alguna idea en cuanto a la longitud característica para una variedad de materiales. Han sido determinadas por vía analítica: 1. En compuestos fibrosos: Del orden del espaciamiento entre fibras [80]. 2. Sólidos celulares: Comparable al tamaño promedio de la celda celular [2]. 3. Materiales laminados. Del orden del espesor del laminado [84]. 4. Materiales compuestos que contienen inclusiones esféricas o elipsoidales. Presentan longitudes características nulas [85], [11]. En forma más general, se tienen las siguientes opiniones: Fleck y Hutchinson [63] afirman que comparativamente los sólidos elásticos desarrollan efectos de tamaño para distancias interatómicas. De la misma opinión participan Koiter [95], Mindlin [115]. Maraganti y Sharma (2007) [110] realizaron una investigación donde consideraron una amplia cantidad de materiales elásticos. En cambio los sólidos plásticos los desarrollan a escalas mayores según Fleck y Hutchinson (1997) [63].

Elemento de Volumen Representativo

Lo expuesto anteriormente deja abierto un interrogante: ¿Los efectos de tamaño aparecen a lo largo de todas las escalas longitudinales? Una respuesta interrogante ya fue parcialmente absuelto al introducir el tema de los efectos de tamaño. Se dijo entonces que en las pruebas con microprobetas había un tamaño a partir del cual comenzaba a manifestarse endurecimiento. También que el endurecimiento tenía un límite: el que se alcanza para el tamaño de la microestructura. Parece razonable pensar, entonces, que la región donde una propiedad -como un módulo- manifieste variabilidad con la escala (efectos de tamaño) pueda ser delimitada y así separada de otra, donde ello no se verifique. A efectos de explicar mejor estas ideas se acude a la figura 9 (es importante observar allí el eje vertical para un cabal entendimiento de la gráfica). Sobresale en ella una primera región, aquella donde no se manifiestan efectos de tamaño. Se trata de la zona más próxima al macromundo (escala macro). Es por tanto una zona de escalas relativamente altas y además homogénea. Otra, en la cual si aparecen efectos de tamaño. Se trata de una más interna que la precedente, con escalas longitudinales relativamente más pequeñas. Se sigue de esto que en esta segunda región es donde se encuentran las microestructuras y por ello es una zona de marcada heterogeneidad. Partiendo de esta distinción, resultaría sencillo aislar en un cuerpo real esta segunda región, de modo tal que en ella queden confinados los efectos microestructurales. Esta segunda región, se denomina elemento de volumen representativo (EVR).

Un EVR está compuesto (o contiene en su interior) un conjunto de microestructuras, de diversas características. Es evidente que su límite inferior corresponde a la escala longitudinal relacionada con el tamaño de esas microestructuras. En cuanto al límite superior (en términos de escala), un modo coherente para determinar su ubicación es ir realizando experiencias a escala variable, hasta observar que aparecen los efectos de tamaño. Son pruebas similares a las descritas en el apartado anterior. Por ejemplo, si para un ensayo de microflexión se detecta incremento de dureza en una escala longitudinal dada, hay que pensar que ahí mismo la prueba se está desarrollando en la escala longitudinal que marca el límite superior del EVR.

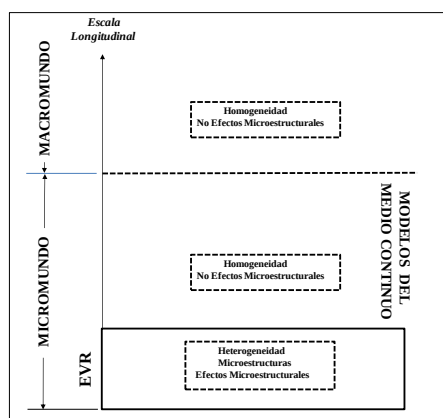


Figura 9

Lo expuesto lleva directamente a ensayar unas cuantas definiciones más formales para el EVR: 1. Un EVR es el volumen más pequeño de un cuerpo, con capacidad de representar las deformaciones relativas heterogéneas promedias (y por extensión, otras propiedades). Por esta razón el gradiente de deformaciones relativas es importante sólo allí. 2. Un EVR es el volumen límite de un cuerpo, hasta donde es factible conservar el valor determinado con ensayos efectuados en la escala macro, para una

propiedad física. Esta última coincide, de una forma bastante aproximada, con la siguiente aportada por Bonda y Noyan [13]: "The representative volume is defined as the smallest volume which represents the average inelastic and inhomogeneous deformation of the entire body". Integrando la definición de EVR y la manifestación de los efectos de tamaño a partir de ciertas longitudes de onda, resulta válido afirmar que un efecto de tamaño se activa cuando la longitud de onda de los gradientes aplicados es equiparable al tamaño del volumen representativo.

La transformación de la heterogeneidad en homogeneidad, condición necesaria para utilizar modelos del continuo, requiere de un proceso de homogenización [96,111,141,142], el cual pretende justamente transformar el sólido heterogéneo en uno homogéneo. Mediante éste, los causantes de la heterogeneidad quedan confinados en el interior del EVR. Es la ubicación del EVR la que posibilita establecer una región homogénea, que no es otra que la primera región citada anteriormente (figura 9). Por esta razón el concepto de EVR tomado aisladamente no es tan importante ni tan definitivo para la mecánica del medio continuo. Su verdadera importancia radica en que delimita inferiormente (en términos de escala) la región en la que se puede asumir que el medio continuo es nuevamente homogéneo y por tanto apto para trabajar la idealización medio continuo. Así, el EVR permite definir la llamada respuesta constitutiva efectiva o global o macroscópica de un medio continuo. Gracias a esto el concepto de EVR se convierte en una herramienta bastante útil para establecer propiedades efectivas en materiales compuestos.

La homogenización está entre los temas relacionados con el medio continuo generalizado que registra un mayor vigor investigativo en los últimos años, sobre todo para aplicaciones con materiales de vanguardia. Un ejemplo representativo de ello es un procedimiento de homogenización llevado a cabo para adaptar la teoría de Cosserat (original) para su aplicación con sólidos celulares, Onck (2002) [131].

Por lo visto hasta aquí, es evidente que el tamaño del EVR no es una constante, sino que varía en general para cada tipo de material. Este es un aspecto al cual no se le ha prestado tradicionalmente mayor importancia como lo manifiestan Ranganathan y Ostoj-Starzewski (2008) [144]: "There are two key issues involved in homogenization of elastic polycrystals: (i) determining their effective response and (ii) the size of a so-called representative volume (RVE) at which one obtains that response. While a significant body of literature has addressed the former issue (e.g. Hill, 195; Kröner et al., 1966), the latter has received relatively little attention". Estos autores publican, allí mismo, los resultados de una investigación realizada para identificar el tamaño del EVR en policristales cúbicos simples y elastolineales, formados de manera aleatoria. Ya Bonda y Noyan (1992) [13] se habían ocupado del asunto, buscando determinar el tamaño del EVR en una probeta de una aleación de plomo-estaño de las que se utiliza en soldadura y en condiciones eutécticas. La investigación estuvo motivada por la discrepancia entre datos experimentales y predichos por la teoría. Esto llevó a sospechar que los especímenes sometidos a análisis podrían tener volúmenes inferiores al del EVR. Los resultados de la experiencia confirmaron esta hipótesis.

Principio de Separación de Escalas

El postulado de separación de escalas es la herramienta utilizada para validar el procedimiento de homogenización [92]. El EVR, al tener la calidad de concepto límite, permite plantear de una forma natural una separación entre escalas. De manera genérica [39, 43, 92, 132] (figura 10):

$$\text{Escala Inferior} < \text{Escala del EVR} < \text{Escala Superior} \quad (4.1)$$

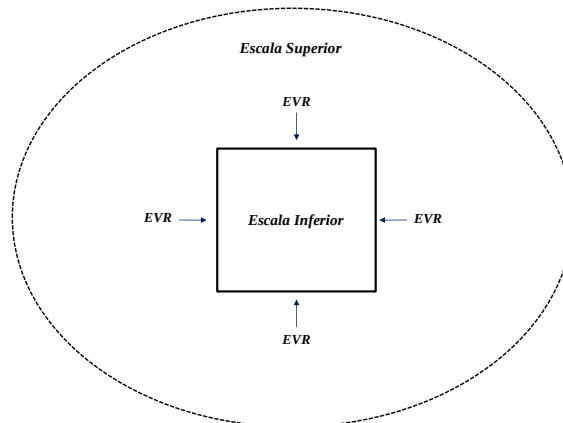


Figura 10

Al quedar confinadas las heterogeneidades dentro del EVR, el contorno de éste actúa como límite superior de la escala que aloja tales heterogeneidades, vale decir, la escala inferior. Por encima de la frontera del EVR no existen ya heterogeneidades. La zona correspondiente se denomina escala superior. Su límite inferior, es, claro está, el contorno del EVR.

Supóngase que se va a hacer una aplicación con policristales (muchas aplicaciones actuales se realizan con ellos), la escala longitudinal inferior correspondiente sería la micro (en otras aplicaciones podrían ser dispersión, vacío, grano simple, dislocaciones). Consecuentemente con esto, el EVR ocuparía la mesoescala. En forma correspondiente, la escala superior se identificaría con la macroescala. En tal eventualidad la separación de escalas (4.1) se transformaría de la siguiente manera:

$$L_{micro} \ll L_{EVR} \ll L_{macro}$$

La L_{micro} se define como el tamaño (promedio) de la heterogeneidad. En este sentido puede considerarse que corresponde al tamaño mínimo de la microestructura cuyas propiedades tienen efecto de primer orden sobre las propiedades de un cuerpo considerado como un todo. En esta forma, cuando se realiza algún cálculo relacionado con un material policristalino no se trabaja a nivel del cristal. ¿Cuánto hay que apartarse del tamaño del cristal? está expresado por la desigualdad izquierda y depende del tamaño del EVR. La L_{macro} es el tamaño del cuerpo para el cual se establece (se arma) el problema de condiciones de frontera. La desigualdad derecha expresa que la L_{macro} debe ser suficientemente grande para que las variaciones de los campos de tensión y de deformaciones relativas, consecuentes con los cambios microestructurales, solo afecten el comportamiento de las propiedades efectivas mediante sus promedios. Define el rango del medio continuo homogéneo (constituido por los EVR). Delimita la primera región citada antes (figura 9).

¿Fluidos Puros con Efectos de Tamaño?

Como se afirmó con anterioridad, los fluidos puros no tienden a formar microestructuras, en virtud a que sus moléculas poseen más energía cinética que potencial y así son resistentes a formar conglomerados. Pueden, en consecuencia, conservar ese carácter de homogéneos que se les adjudica en la teoría del medio continuo clásico. En consecuencia, no es factible esperar efectos de tamaño en los fluidos puros.

El fenómeno que sí se puede dar es una ruptura de la continuidad, especialmente en gases, los cuales, en caso de ocurrir este evento pasan a denominarse gases enrarecidos. Esto ocurre cuando:

$$l < \mathcal{L}$$

En donde l es la dimensión característica del dominio del flujo y $\mathcal{L}$ el recorrido libre medio de las moléculas (3.1). Con relación a esto, el número de Knudsen [7, 132], que mide el grado de rarefacción, es un parámetro que se utiliza para delimitar la frontera que separa problemas de medio continuo y discretos. De este modo es válido trabajar con el modelo del medio continuo siempre que este parámetro sea inferior a la unidad. Vale decir:

$$K_n = \frac{\mathcal{L}}{l} < 1$$

Un ejemplo práctico de rarefacción es el siguiente: En ciertas aplicaciones con gases se utilizan canales de dimensiones del orden de las micras. Si las dimensiones del canal son comparables al recorrido medio molecular, las suposiciones inherentes a las ecuaciones de Navier-Stokes pierden validez y el gas debe considerarse enrarecido y el problema no se puede resolver con el modelo del medio continuo. Barber y Emerson (2002 [7]) discuten acerca de valores por debajo de la unidad y cuando son convenientes para diversas situaciones.

En conclusión, en cuanto a la heterogeneidad no hay mucha diferencia entre el tratamiento clásico y el generalizado para los fluidos puros. Otra cosa sucede para los no puros, como el socorrido ejemplo de la sangre, que al ser un flujo bifásico posee microestructuras (las plaquetas).

Postulado de Localidad

Eringen (2001) en la introducción a [55] declara: “This book is devoted to the development of the nonlocal continuum field theories of material bodies where non local intermolecular attractions are important”. Pretendía, en consecuencia, eliminar la restricción, impuesta desde los tiempos de la introducción de la aproximación del campo promedio, según la cual solo las moléculas en la inmediata cercanía de una particular –en estudio– tendría influencia sobre su comportamiento mecánico. Esta presunción fue heredada y acogida como postulado esencial por la teoría del medio continuo clásico. En términos más prácticos, equivale a suponer que la tensión solo depende de la deformación relativa en el

mismo punto donde se estudia esa tensión (más específicamente en su entorno diferencial). Esto es válido cuando la longitud de onda generada por la deformación relativa es mucho mayor que la longitud de la escala microestructural predominante en el material y no cuando son comparables, pues en tal caso la deformación relativa de otras zonas más alejadas llegaría a ser determinante.

4.2 Definición de Medio Continuo Generalizado

Visto todo lo anterior, se denomina medio continuo generalizado a la nueva idealización, a la cual es necesario acudir cuando no se verifica al menos una de las tres suposiciones necesarias para el medio continuo clásico, discutidas en el apartado anterior. Resulta válido también concebir el medio continuo generalizado, como una evolución del medio continuo clásico, la cual queda caracterizada por las suposiciones que se enumeran a continuación y que podrían denominarse condiciones del medio continuo generalizado: 1. Los materiales reales están constituidos por microestructuras, las cuales poseen diversas características. Por esta razón son heterogéneos (constitutivamente) y exhiben efectos de tamaño. 2. La interacción entre puntos materiales adyacentes se desarrolla a través de fuerzas y pares. 3. El reconocimiento de la existencia de pares no nulos sobre el punto material, determina un punto material dotado de seis grados de libertad. Tres por traslación y tres por rotación. Una generalización posterior en la concepción del punto material, lleva a admitir que un punto material pueda, así mismo, deformarse, incrementando de esta manera aún más el número de grados de libertad. 4. El comportamiento mecánico del punto material está determinado por todos los puntos materiales que forman el medio continuo. Es éste un enfoque no local del medio continuo.

En fin, estas cuatro suposiciones enumeradas permiten completar y ampliar la definición del medio continuo clásico, para crear un modelo de medio continuo más útil y acorde con la estructura real de la materia y necesidades aplicativas que imponen las nuevas tendencias tecnológicas.

5. Nociones acerca de las Teorías del Medio Continuo Generalizado (Teoría de Toupin–Mindlin)

Son las teorías que se han desarrollado como consecuencia del cuestionamiento del principio de Cauchy, del reconocimiento del carácter heterogéneo de la materia –especialmente con del desarrollo de nuevos materiales y la supresión del carácter local de la teoría de Cauchy.

Se denominan de una manera general, teorías polares, reservando el nombre de teoría no polar para la del medio continuo clásico. Por asimilación a esta clasificación, algunos dividen el medio continuo en medio continuo no polar y medio continuo polar.

Los siguientes apartados estarán dedicados a dar una idea básica sobre modelos asociados a las teorías del medio continuo generalizado. Existe una vasta producción en el tema, por lo que se ha tomado la decisión de considerar los trabajos que han señalado el camino. Por tanto, se exponen los modelos incluidos en lo que Fleck y Hutchinson [63] llaman teoría de Toupin-Mindlin [158,159,160,113,115,116, 117,158].

En líneas generales, el proceso deductivo en estos trabajos considera las siguientes etapas deductivas: 1. Ecuaciones de conservación de la mecánica. 2. Ecuaciones constitutivas para materiales polares y elastolineales. 3. Linealización de estas ecuaciones constitutivas. 4. Con base en el anterior resultado se supone que el material es además isótropo y posee simetría central. 5. Para esta versión final, se establece la ecuación del movimiento (en términos del desplazamiento).

En la exposición venidera se emplearán esencialmente siguientes variables: v_i velocidad, ρ densidad, σ_{ji} tensor de tensiones b_i fuerza de cuerpo, μ_{ji} tensor de tensiones de par M_i par de cuerpo, U , energía interna específica F_{iM} , H_{ji} tensores gradiente de deformaciones lagrangiano y euleriano respectivamente, j Jacobiano, E_{ji} tensor lagrangiano de deformaciones, ε_{ji} tensor de deformaciones linealizado, W función de energía de deformaciones relativas, λ y μ constantes de Lamé, δ_{ij} tensor identidad, ϵ_{ijk} tensor de permutaciones. Otras serán presentadas en su momento.

Se asume que en un cuerpo está establecido un estado de tensiones como el que se muestra en la figura 11 (en particular la del extremo izquierdo). Que sobre tal cuerpo actúan en principio fuerzas y pares de cuerpo. Otras fuerzas serán introducidas en la medida que modelo así lo exija.

5.1 Teoría de la Tensión de Par

Existen bastantes desarrollos teóricos relacionados con esta teoría, de los cuales ya se dio cuenta en la apartado 1. Para ilustrar lo esencial de dicho desarrollo se seguirá la versión de Mindlin (1962) [152].

El modelo, final, de Mindlin para la teoría de tensión de par es de carácter lineal, válido para un material polar elastolineal (de hecho Mindlin en su publicación lo denomina teoría de la elasticidad con

tensión de par), isótopo y con simetría central. Para alcanzar esta solución particular parte de deducir las ecuaciones de conservación de la mecánica, que finalmente, lo anota él, resultan ser las mismas que aparecen en la teoría de Cosserat. Después deduce unas ecuaciones constitutivas para un material elastolineal, las cuales procede a linealizar y finalmente realiza la particularización señalada.

El procedimiento es acentuadamente cinético sin mucha referencia a lo cinemático como se verá más adelante.

Las ecuaciones de conservación que dedujo –y por utilizar- son las siguientes:

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{(ij),j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijm} \left(\mu_{ij,im}^D + \rho M_{m,j} \right) + \rho b_i \quad (5.1)$$

$$\rho \dot{U} = \sigma_{(jk)} v_{k,j} + \frac{1}{2} \mu_{ji}^D \epsilon_{ijk} v_{k,jj} \quad (5.2)$$

Ambas ecuaciones contienen la parte desviadora del tensor de tensiones de par y la simétrica del tensor de tensiones. Estos hechos marcan ya desde el inicio una indeterminación física por la ausencia de la parte esférica del tensor de tensiones de par y de la asimétrica del de tensiones.

Mindlin supone que la energía interna de un material elástico polar se puede expresar funcionalmente como:

$$U = U(E_{JI}, K_{JI}) \quad (5.3)$$

En general $U \neq W$ aunque podrían coincidir, como se hará notar más adelante. K_{JI} es una medida adicional de deformaciones relativas, que debe aparecer en (5.3) para explicar las variaciones energéticas que trae la presencia de la tensión de par. Mindlin la atribuye a Toupin [158] y la presenta como:

$$K_{JI} = \epsilon_{JNK} E_{KN,I} = \frac{1}{2} \partial_J \epsilon_{NIM} F_{Nm} F_{Mm} \text{ con } \delta_{JI} K_{JI} = 0 \quad (5.4)$$

De la (5.3):

$$\rho \dot{U} = \rho \frac{\partial U}{\partial E_{JI}} \dot{E}_{JI} + \rho \frac{\partial U}{\partial K_{JI}} \dot{K}_{JI} \quad (5.5)$$

Propone una forma alternativa de calcular la energía específica (5.2):

$$\rho \dot{U} = \Phi_{JI} \dot{E}_{JI} + \Psi_{JI} \dot{K}_{JI} \quad (5.6)$$

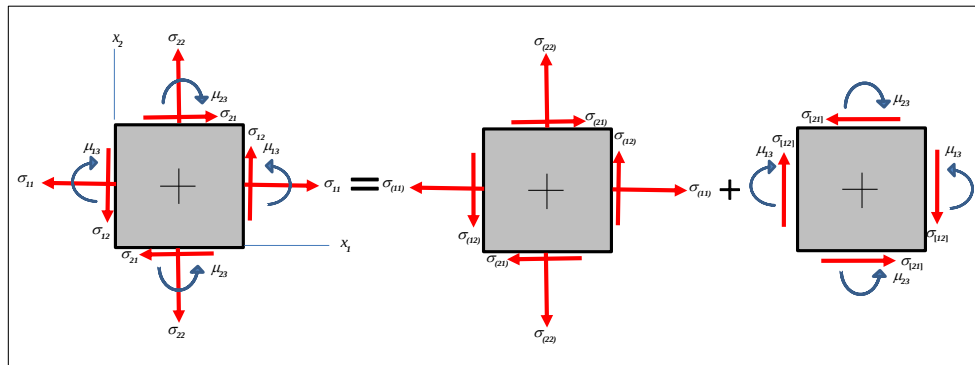


Figura 11

Donde Φ_{JI}, Ψ_{JI} son dos tensores por determinar. El procedimiento que utiliza consiste en manipular adecuadamente la (5.2) y así hacer aparecer en ella los tensores $\dot{E}_{JI}, \dot{K}_{JI}$. Tras eso, cotejando con la (5.6), infiere las expresiones para estos nuevos tensores. La ecuación que obtiene es:

$$\rho \dot{U} = H_{Jj} \sigma_{(jk)} H_{kl} - \|H_{il}\| \left[\epsilon_{MKI} \left(H_{Jj} \mu_{ji}^D F_{IM} \right) \left(F_{li,K} H_{il} \right) \right]^S \dot{E}_{JI} + \|H_{il}\| H_{Jj} \mu_{ji}^D F_{li,Jl} \dot{K}_{JI}$$

Por lo tanto:

$$\Phi_{ji} = H_{ji} \sigma_{(jk)} H_{ki} - \|H_{ii}\| \left[\epsilon_{MKI} \left(H_{ji} \mu_{ji}^D F_{iM} \right) (F_{ii,K} H_{ii}) \right]^S \quad \Psi_{ji} = \|H_{ii}\| H_{ji} \mu_{ji}^D F_{ii} \quad (5.6)$$

Restando la (5.6) de la (5.5):

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial E_{ji}} - \Phi_{ji} \right) \dot{E}_{ji} + \left(\rho \frac{\partial U}{\partial K_{ji}} - \Psi_{ji} \right) \dot{K}_{ji} = 0 \quad (5.7)$$

Una condición para verificar la (5.7) es:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial E_{ji}} - \Phi_{ji} = 0 \quad \rho \frac{\partial U}{\partial K_{ji}} - \Psi_{ji} = 0 \quad (5.8)$$

Ahora substituye la (5.6)₁ en la (5.8)₁ y la (5.6)₂ en la (5.8)₂. Así arriba a las ecuaciones constitutivas de un material elastolineal polar:

$$\mu_{ji}^D = \rho \|j\|^T H_{ji} \frac{\partial U}{\partial K_{ji}} F_{ij} \quad \sigma_{(ji)} = \rho F_{ji} \frac{\partial U}{\partial E_{ji}} \delta_{ij} F_{ji} + \left[\epsilon_{ijk} F_{ji} \left(\frac{\partial U}{\partial K_{ji}} F_{ii,K} \right) \right]^S \quad (5.9)$$

Donde es evidente la indeterminación de la parte esférica del tensor de tensiones de par y de la asimétrica del de tensiones.

Para linealizar las ecuaciones (5.9) proponen expresar la energía interna del material en forma de una expansión no lineal de productos formados con los tensores E_{ji}, K_{ji} y de los tensores de cuarto orden

$a_{JIKM}, b_{JIKM}, c_{JIKM}$, los cuales representan propiedades constitutivas de material:

$$W \approx \frac{1}{2} \kappa_{ji} a_{jikm} \kappa_{km} + \epsilon_{ji} b_{jikm} \kappa_{km} + \frac{1}{2} \epsilon_{ji} c_{jikm} \epsilon_{km} + \dots \quad (5.10)$$

El proceso de linealización del tensor K_{ji} (5.4) es el siguiente:

$$K_{ji} \approx K_{ji} = \epsilon_{kin} \epsilon_{nkj} \equiv \nabla \times \frac{1}{2} (\underline{u} \nabla + \nabla \underline{u}) \quad (5.11)$$

Con base en la expresión en notación vectorial puede probar fácilmente que la aproximación efectuada equivale al gradiente de rotaciones, ω_i :

$$\epsilon_{kin} \epsilon_{nkj} = \omega_{i,j} \quad (5.12)$$

En seguida se prueba que este tensor es tiene que ser el mismo de curvaturas. Para ello considérese una fibra elemental dx_i originada en un punto material. Sobre ella está aplicado un campo de rotaciones ω_i (figura 12). El gradiente de este campo es $\omega_{i,j}$ el cual se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) + \frac{1}{2} (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad \omega_{i,j} = \omega_{(ij)} + \omega_{[ij]} \quad (5.13)$$

Con ayuda de las anteriores expresiones, el gradiente de las rotaciones se puede interpretar físicamente del siguiente modo:

$$\omega_{(i,j)} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} + \omega_{j,i}) \quad \omega_{[i,j]} = \frac{1}{2} (\omega_{i,j} - \omega_{j,i}) \quad (5.14)$$

Examinando la parte simétrica del gradiente, que se acostumbra representar con χ_{ij} , se puede concluir que la variación espacial del vector de rotaciones induce giros rígidos (fenomenológicamente hablando), esto es, no hay desplazamientos relativos de puntos materiales. Al descomponer la matriz asociada al

tensor se puede ver esto mejor: En la diagonal principal se alojan $\omega_{k,k}$ que son variaciones del vector de rotaciones sobre los tres ejes coordenados x_1, x_2, x_3 . Las 6 componentes restantes contienen variaciones de la rotación en los tres planos coordenados, las cuales se calculan como un promedio entre las variaciones de rotación rígida. Por ejemplo:

$$\omega_{(1,2)} = \frac{1}{2}(\omega_{1,2} + \omega_{2,1}) = \chi_{12}$$

Este tensor se denomina de torsiones.

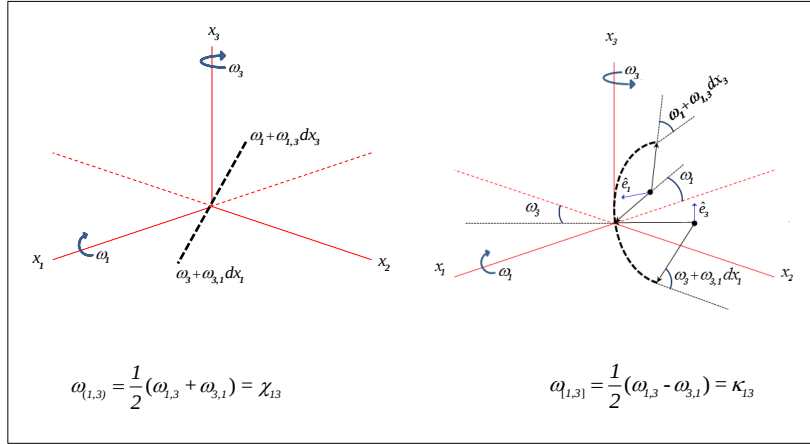


Figura 12

Por lo expuesto anteriormente el tensor χ_{ij} no califica como medida de deformación. Por el contrario sí lo hace el tensor $(5.14)_2$, κ_{ij} . En las 6 componentes asimétricas, los signos opuestos de las componentes del gradiente producen necesariamente desplazamientos relativos entre puntos materiales. Por ejemplo:

$$\omega_{[1,3]} = \frac{1}{2}(\omega_{1,3} - \omega_{3,1}) = \kappa_{13}$$

Por esta razón κ_{ij} es un tensor de curvaturas. Así la $(5.13)_2$ queda:

$$\omega_{i,j} = \omega_{[ij]} = \kappa_{ij}$$

Este resultado en la (5.11) permite probar finalmente, que con la linealización:

$$K_{ji} \approx \kappa_{ji}$$

También, que al ser linealizado K_{ji} , se pone en evidencia que es equivalente al gradiente de una rotación, la cual a su vez deriva del desplazamiento (5.10) y en consecuencia no es otra cosa que la rotación no independiente. La parte cinemática de la teoría de la tensión de par se basa en esta condición. Es en la linealización donde la parte cinemática del procedimiento de Mindlin tiene más visibilidad. Podría pensarse que la formulación original (5.4) , es una definición más general de la curvatura.

Asumiendo $\|j\| \approx 0$ transforma la $(5.9)_1$. Basándose en consideraciones dimensionales hace lo mismo con la $(5.9)_2$. Mediante idéntico procedimiento concluye que la (5.10) se puede conformar sólo con productos de primer orden. De este modo concluye que:

$$\mu_{ji}^D \approx \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ji}} \quad \sigma_{(ji)} \approx \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \quad (5.15)$$

Después de substituir la (5.10) en la $(5.15)_1$ y $(5.15)_2$ llega a las ecuaciones constitutivas linealizadas para un material elástico polar:

$$\mu_{ji}^D \approx a_{jikm} \kappa_{km} + b_{jikm} \varepsilon_{km} \quad \sigma_{(ji)} \approx b_{jikm} \kappa_{km} + c_{jikm} \varepsilon_{km} \quad (5.16)$$

Ya que ε_{km} es un tensor polar y κ_{km} uno axial, los tensores a_{jikm} , c_{jikm} tienen que ser polares y axial el tensor b_{jikm} . El hecho de que el material tenga simetría central y sea isótropo, obliga a que los tres tensores de cuarto orden sean invariantes bajo una inversión central y una rotación rígida arbitraria. El carácter axial de b_{jikm} lo descalifica como invariante bajo la inversión central, por tanto se concluye que este tensor no es apto para describir un material con las cualidades constitutivas anotadas. En consecuencia $b_{jikm} = 0$.

Para garantizar la invariancia, los dos tensores de cuarto orden restantes solo pueden depender de tres tensores esféricos del mismo orden, formados con el concurso del tensor identidad. Así resultan los invariantes:

$$J_{jikm}^{(1)} = \delta_{ji} \delta_{km} \quad J_{jikm}^{(2)} = \delta_{jn} \varepsilon_{nvl} \delta_{lp} \varepsilon_{vis} \varepsilon_{pkq} \delta_{qr} \varepsilon_{rsu} \delta_{um} - J_{jikm}^{(1)} - J_{jikm}^{(3)} \quad J_{jikm}^{(3)} = \frac{1}{2} \delta_{jn} \varepsilon_{nil} \delta_{lp} \varepsilon_{pkq} \delta_{qm}$$

Con éstos propone una nueva expresión para W (5.10):

$$W = a_{(1)} \kappa_{ji} J_{jikm}^{(1)} \kappa_{km} + a_{(2)} \kappa_{ji} J_{jikm}^{(2)} \kappa_{km} + a_{(3)} \kappa_{ji} J_{jikm}^{(3)} \kappa_{km} + c_{(1)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(1)} \varepsilon_{km} + c_{(2)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(2)} \varepsilon_{km} + c_{(3)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(3)} \varepsilon_{km} \quad (5.17)$$

Cada término de esta ecuación está formado por el producto de constantes –constitutivas- escalares $a_{(\alpha)}$ y $c_{(\alpha)}$ y el producto escalar entre un invariante y el tensor de curvatura o entre un invariante y el de deformaciones. Se puede demostrar que los productos indicados en (5.17) dan:

$$\begin{aligned} \kappa_{ji} J_{jikm}^{(1)} \kappa_{km} &= 0 & \kappa_{ji} J_{jikm}^{(2)} \kappa_{km} &= \kappa_{ji} \kappa_{(ji)} & \kappa_{ji} J_{jikm}^{(3)} \kappa_{km} &= \kappa_{ji} \kappa_{[ji]} \\ c_{(1)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(1)} \varepsilon_{km} &= \varepsilon_{(ij)} \varepsilon_{(ij)} & c_{(2)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(2)} \varepsilon_{km} &= \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} & c_{(3)} \varepsilon_{ji} J_{jikm}^{(3)} \varepsilon_{km} &= 0 \end{aligned}$$

Tras reemplazar este conjunto de relaciones en la (5.17) se obtiene:

$$W = a_{(2)} \kappa_{ji} \kappa_{(ji)} + a_{(3)} \kappa_{ji} \kappa_{[ji]} + c_{(1)} \varepsilon_{(ij)} \varepsilon_{(ij)} + c_{(2)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.18)$$

La combinación de tensores simétricos y antisimétricos en la ecuación previa se origina a su vez en:

$$a_{(2)} \kappa_{ji} \kappa_{(ji)} + a_{(3)} \kappa_{ji} \kappa_{[ji]} = \kappa_{ji} \left[\frac{1}{2} a_{(2)} (\kappa_{ji} + \kappa_{ij}) + \frac{1}{2} a_{(3)} (\kappa_{ji} - \kappa_{ij}) \right] = 2\eta \kappa_{ji} \kappa_{ji} + 2\eta' \kappa_{ij} \kappa_{ji}$$

Este resultado en la (5.18) da:

$$W = 2\eta \kappa_{ji} \kappa_{ji} + 2\eta' \kappa_{ij} \kappa_{ji} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{(ij)} \varepsilon_{(ij)} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (5.19)$$

Con las siguientes equivalencias:

$$4\eta = a_{(2)} + a_{(3)} \quad 4\eta' = a_{(2)} - a_{(3)} \quad \lambda = 2c_{(1)} \quad c_{(2)} = \mu \quad (5.20)$$

La (5.19) en las (5.15):

$$\sigma_{(ij)} = \lambda \varepsilon_{(ij)} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \mu_{ij}^D = 4\eta \kappa_{ij} + 4\eta' \kappa_{ji} \quad (5.21)$$

O bien, en función del desplazamiento:

$$\sigma_{(ij)} = \lambda u_{i,i} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \mu_{ij}^D = 2\eta \partial_j \varepsilon_{ink} u_{k,n} + 2\eta' \partial_j \varepsilon_{ink} u_{k,n} \quad (5.22)$$

Ecuaciones constitutivas de un sólido polar elastolineal, isótropo y con simetría central.

El sólido elastolineal polar isótropo y con simetría central requiere 4 constantes. En la (5.21)₁ aparecen las constantes de Lamé. En la (5.21)₂ las dos restantes. Admiten la siguiente interpretación fenomenológica: La tensión de par (en su parte desviadora) depende de la curvatura (5.21)₂, (figura13) de suerte que razonando en forma análoga como se hace con la ley de Hooke, es posible afirmar que se trata es de rigídes a la curvatura. Mindlin denomina a η , módulo de rigidez para flexión-torsión (curvatura principal), en tanto que η' es la curvatura transversal. Según esto sus dimensiones deben ser las de par por unidad de área (tensión de par).

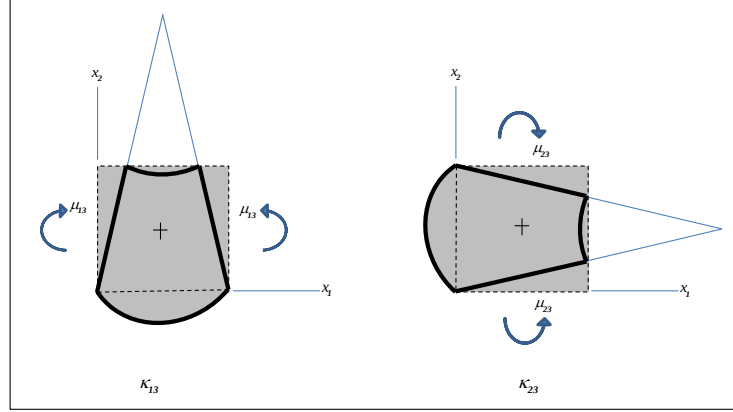


Figura 13

Las constantes deben cumplir acomodarse a ciertos valores limitantes, que garanticen que la función de energía de deformación relativa se preserve positiva. Mindlin entrega estas:

$$\mu > 0 \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad \eta > 0 \quad -1 < \eta' / \eta < 1 \quad (5.23)$$

De estas constantes se puede deducir el parámetro de escala utilizado en las aplicaciones con la teoría de la tensión de par:

$$\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \quad (5.24)$$

Las (5.22) en la ecuación del movimiento (5.1), la transforman en una ecuación del movimiento en función del desplazamiento:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} + \rho b_i + \eta \partial_i \partial_j \epsilon_{ijm} \partial_j \epsilon_{imj} u_{j,i} + \frac{1}{2} \rho \epsilon_{imj} M_{m,j} \\ \rho \ddot{\vec{u}} &= \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \rho \vec{b}_i + \eta \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \rho \vec{M} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Que restituye las ecuaciones de la elasticidad clásica (los tres primeros miembros sumandos en el lado derecho) si: se hacen:

$$\eta \partial_i \partial_j \epsilon_{ijm} \partial_j \epsilon_{imj} u_{j,i} = 0 \quad M_m = 0 \quad (5.26)$$

Independientemente del par de cuerpo (5.26)₂, que es un efecto externo, vale la pena mirar (5.26)₁, que constituye la acción interna inducida por el carácter polar del material. Se le puede reescribir de la siguiente forma:

$$\eta \partial_i \partial_j (\epsilon_{ijm} \partial_j \epsilon_{imj} u_{j,i}) = \eta \partial_i \partial_j (2 \epsilon_{ijm} \omega_{m,j}) \equiv \eta \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) = \eta \nabla^2 (\vec{\nabla} \times 2\vec{\omega}) \quad (5.28)$$

Obsérvese que el Laplaciano $\partial_i \partial_i$ está presente dentro de las componentes de la ecuación clásica, de suerte que se puede considerar su presencia como coherente con este tipo de planteamientos. Ahora bien, el término del paréntesis (5.28) es el rotacional de la rotación independiente, ω_m . Se sigue de esto que el

el mencionado término es la contribución de la polaridad del material al desplazamiento del punto ídem. Por esta razón es claro que no es un efecto clásico de Cosserat.

Tras integrarla se obtiene el campo de desplazamientos. Éste en (5.19) permite determinar parcialmente los tensores de tensiones y de tensión de par.

$$\sigma_{[mn]} = \frac{I}{2} \epsilon_{min} \left(\mu_{ji,j} + \rho M_i \right) \quad (5.22)$$

5.2 Teorías de Orden Superior

Aspectos Generales

A diferencia de las de grado superior, las teorías de orden superior requieren de una amplia fundamentación teórica y conceptual. Por ello, antes de adentrarse en el modelo de Mindlin es conveniente ocuparse un poco de este aspecto.

Puede afirmarse que la característica esencial de las teorías de grado superior es que aceptan que el punto material cambie de forma y de tamaño. Por esta razón, éste resulta poseyendo tres modos de deformación: 1. La deformación clásica, que aquí se designa como macrodeformación. 2. La rotación independiente, que es la misma introducida por la teoría de Cosserat, la cual pasa a llamarse aquí microrotación (término que acuñó Mindlin y adoptó Eringen). 3. Los ya citados cambios de forma y de tamaño, que en si constituyen una deformación clásica. Los modos 2 y 3 se integran en lo que en el lenguaje propio de estas teorías, se denomina microdeformación. En estas condiciones el medio continuo estaría conformado ahora por puntos materiales deformables y no por puntos materiales (en el sentido clásico). La modificación a esta cualidad estructural del medio continuo, llevó a Eringen, [78] a renombrarlo microcontinuo («A microcontinuum is a continuous collection of deformable point particles»).

En la figura 14 se representa esta nueva característica (la tercera figura desde arriba hacia abajo). Adicionalmente, se contrastan, allí mismo, los modos de deformación presentados hasta el momento: En la parte superior está el modo de deformación clásico, con 3 grados de libertad. En el centro el modo que presenta la teoría de Cosserat con 6 grados de libertad. En la parte inferior el número de grados de libertad ya es mayor que 6. Su número depende de la manera como se asuma la deformación del punto material. A lo largo de este apartado se explicará como representar o modelar este aspecto. Con base en lo expuesto, se entiende por qué estas teorías se conocen también como “de cinemática enriquecida”.

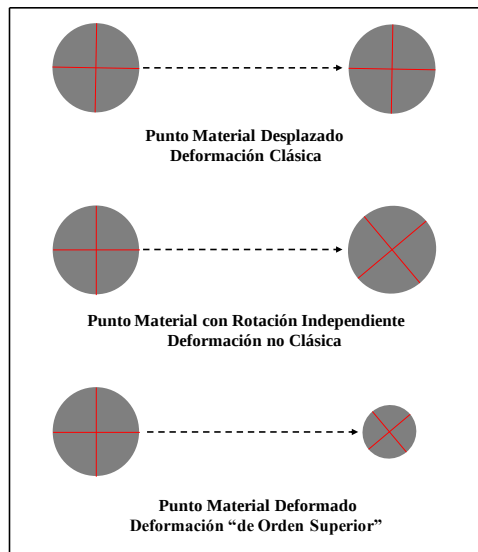


Figura 14

A fin de poder establecer una cinemática del punto material deformable, es necesario definir el espacio para describir tal deformación. Es el micromedio, la zona interior del punto deformable. La

exterior es entonces, el macromedio (figura 15). Corresponde básicamente al entorno diferencial del punto material.

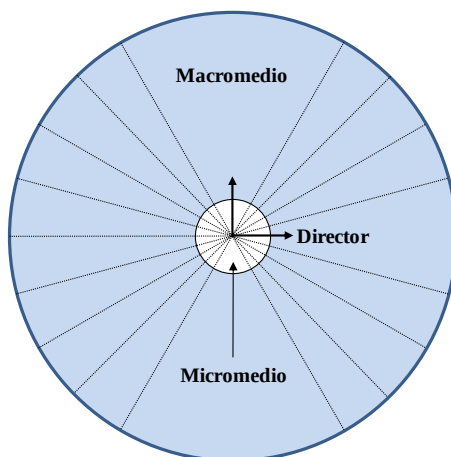


Figura 15

Más que regiones físicas, puede concebirseles como idealizaciones que facilitan el modelar modos de deformación específicos: 1. En el macromedio, el modo de deformación del medio continuo clásico. La traslación, a cargo del desplazamiento (3 grados de libertad). Se le asocia, pues, la macrodeformación. 2. En el micromedio, otros modos de deformación factibles, incluyendo la rotación independiente. Aquí es donde aparecen los restantes 9 grados de libertad de la teoría micromórfica. Con base en esta división del medio continuo, la formulación cinemática se simplifica, ya que basta con acoplar el movimiento del micromedio a del macromedio, mediante un simple movimiento relativo.

¿Qué hay en el micromedio? Para responder a este interrogante es conveniente acudir a los tratadistas: Mindlin [115]: «Embedded in each material particle there is assumed to be a micro-volume V' ...» Pujol [140]: «The elasticity theories that allow couple stresses assume the existence of an elastic continuum medium consisting of deformable points or point particles (Eringen and Suhubi, 1964; Toupin, 1964; Eringen, 1999). Clearly, this concept cannot be accommodated within classical continuum mechanics, and to handle it Eringen and Suhubi (1964) introduced macrovolume elements (corresponding to the deformable points) composed of microvolume elements.». Forest [69]: «In the micromorphic theory of Eringen (Eringen and Shubi, 1964; Mindlin 1964), the underlying microstructure at a material point can rotate and deform and has therefore 9 additional degrees of freedom». Congregándolas: En el interior del punto material hay microvolúmenes, que pueden ser identificados con una microestructura.

El concepto clave para modelar la microdeformación en las teorías de orden superior, es un sistema de ejes auxiliares que se fijan en el centro de gravedad del punto material: es el mismo trièdre de los hermanos Cosserat o triedro director (de Ericksen y Tiesdell) y sus componentes, los tres ejes directores. Su función es representar las orientaciones y deformaciones en el interior del microcontinuo. Visto de una manera práctica, al modificar adecuadamente la geometría y disposición de los directores es posible conseguir diferentes modos de deformación. A saber: 1. Traslación, representada por el desplazamiento clásico U_k, u_k . Es claro que para este nivel de análisis no se precisa de los directores. 2. Rotación independiente. El triedro gira como un cuerpo rígido y en forma coherente los directores también. 3. El tamaño de los directores cambia. Se supone que los tres en el mismo sentido e igual magnitud. 4. La forma de los directores varía, bien sea porque pierden ortogonalidad o los ejes se distorsionan. Las combinaciones de diversos modos de deformación dan lugar a diversas teorías de orden superior. Éstas se resumen en la tabla 6.1 [69]:

	MODOS DE DEFORMACIÓN EN LOS DIRECTORES				
	Clásico	Microdeformación			
NOMBRE TEORÍA	Desplazamiento	Microrotación	Cambio de Tamaño	Cambio de Forma	GRADOS DE LIBERTAD
1. Continuo Clásico	Sí	No	No	No	3
2. Microdilatación	Sí	No	Sí	No	4
3. De Cosserat	Sí	Sí	No	No	6
4. Microestiramiento	Sí	Sí	Sí	No	7
5. Microdeformación Relativa	Sí	No	No	Sí	9
6. Microestiramiento Incompresible	Sí	No	No	No	11
7. Micromórfica	Sí	Sí	Sí	Sí	12

Tabla 6.1

Algunas observaciones y comentarios con relación al contenido de la tabla: 1. Se incluye la teoría del medio continuo clásico con el fin de comparar con las teorías de orden superior. 2. Los nombres de las teorías 2, 5 y 7 son propuestas por Forest en [69]. 3. En la tabla se refleja un incremento progresivo de los grados de libertad. Los grados de libertad que faltan allí podrían conseguirse imponiendo restricciones adecuadas. 4. La teoría de Cosserat se conoce también como teoría micropolar. Este nombre, se debe a Eringen, ha llegado a imponerse en la práctica hoy en día. 5. De la tabla se desprende que la teoría micromórfica (Eringen) es la más general. 6. Partiendo del concepto de microestructura, puede decirse lo siguiente: la única teoría que utiliza una microestructura no deformable (o rígida), es la 3.

El Modelo Cinemático de Mindlin

Mindlin como se dijo ya incorpora más directamente la microestructura, a la que le confiere la capacidad para rotar y deformarse. A diferencia de Eringen, no se enfoca tanto en los directores.

Considera un volumen material, $\mathcal{V}$ (o macromedio), (figura 16). La cinemática de éste continúa siendo la del medio continuo clásico descrita por los vectores X_j, x_j, u_j . Se considera en su interior un microvolumen, $\mathcal{V}'$, cuyas variables cinemáticas son, en primer lugar el microdesplazamiento:

$$u'_i = x'_i - X'_i \quad u'_i = u'_i(x_i, x'_i, t) \quad (5.29)$$

Donde x'_i y X'_i son los vectores de posición –espacial y material respectivamente- del microvolumen, con respecto al centro de masa del macromedio. Mindlin supone una relación lineal entre el microdesplazamiento u'_i y x'_i :

$$u'_j = x'_k \psi_{kj}, \quad \psi_{kj} = \psi_{kj}(x_i, t) \quad (5.30)$$

De aquí se sigue que esta función es homogénea en el micromedio, no así en el macromedio. De ella inmediatamente se deduce el gradiente de microdesplazamiento:

$$u'_{j,i} = \psi_{ij} \quad (5.31)$$

Mindlin llama a ψ_{ij} la microdeformación, la cual incluye, claro está, la componente de microrotación (que originalmente aparece en la teoría de Cosserat, se insiste) y la deformación local del micromedio. Por otra parte, de la (5.31) se infiere que el gradiente de microdesplazamiento es equivalente a la microdeformación.

A esta altura Mindlin asume que el macro y micromedio sufren deformaciones pequeñas y por tanto el comportamiento lineal es admisible. Consecuentemente con esto último, procede a descomponer el tensor de microdeformaciones en su parte simétrica y antisimétrica:

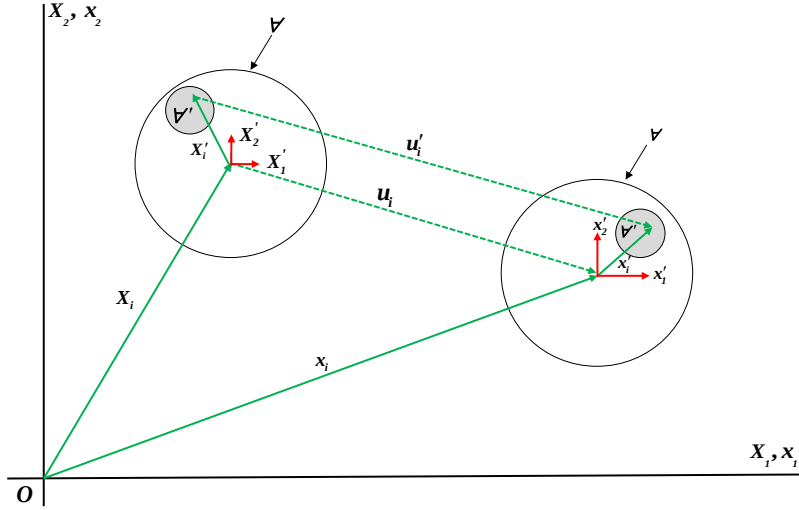


Figura 16

$$\psi_{(ij)} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} + \psi_{ji}) \quad \psi_{[ij]} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} - \psi_{ji}) \quad \psi_{ij} = \psi_{(ij)} + \psi_{[ij]} \quad (5.32)$$

De aquí es evidente que la microdeformación se puede partir en una microdeformación relativa, $\psi_{(ij)}$ y una microrotación, $\psi_{[ij]}$. Esta última equivale a la rotación propuesta en la teoría de Cosserat., porque la primera se ocupa de la deformación (cambio de tamaño y/o forma) de los directores.

Ya efectuada la linealización, conserva para el macromedio la medida de deformación habitual, ϵ_{ij} . Para el micromedio propone las siguientes:

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \psi_{ij} \quad \gamma_{ij} = u_{j,i} - u'_{j,i} \quad \gamma_{ij} = (\epsilon_{ij} - \psi_{(ij)}) + (\omega_{ij} - \psi_{[ij]}) \quad (5.33)$$

Esto es, aproxima la deformación relativa en el conjunto macro-micromedio, como la diferencia entre el gradiente de macrodesplazamiento y la microdeformación (5.33)₁, o bien como la diferencia entre ambos desplazamientos (5.33)₂. También se puede escribir como (5.33)₃, teniendo en cuenta la descomposición del macrodesplazamiento en una parte simétrica y otra antisimétrica y además con base en la (5.32)₃ las deformaciones relativas del conjunto macro-micromedio y entre las rotación no independiente del macromedio y la independiente del micro.

$$\mathcal{X}_{ijk} = \psi_{ij,k} \quad (5.34)$$

Esto es, el gradiente de microdeformación.

Si se impone una microrotación rígida (en el lenguaje de Eringen, se diría “directores rígidos”) la componente simétrica en (5.32) se anula y se alcanzan así nuevas relaciones:

$$\psi_{ij} = \psi_{[ij]} \quad \psi_{[ij]} = \epsilon_{ijm} \psi_m \quad (5.35)$$

Donde ψ_m , resultante de la representación dual, es justamente el ángulo de microrotación, o rotación independiente de la teoría de Cosserat [36]. Este resultado es útil para transformar el resto de medidas de deformación:

Así, con la (5.35) en la (5.33) y la (5.35) en la (5.34):

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{ijm} \psi_m \quad \gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ijm} (\omega_m - \psi_m) \quad (5.36)$$

$$\mathcal{X}_{ijk} = \epsilon_{ijm} \psi_{m,k} \quad (5.37)$$

De acuerdo con (5.37) se le puede atribuir a $\mathcal{X}_{ijk}$ el carácter de tensor de microcurvaturas.

En la figura 17 se ilustra se presentan diferentes condiciones de deformación interpretadas con base en el modelo cinemático de Mindlin. Se construyen partiendo de la figura 16.

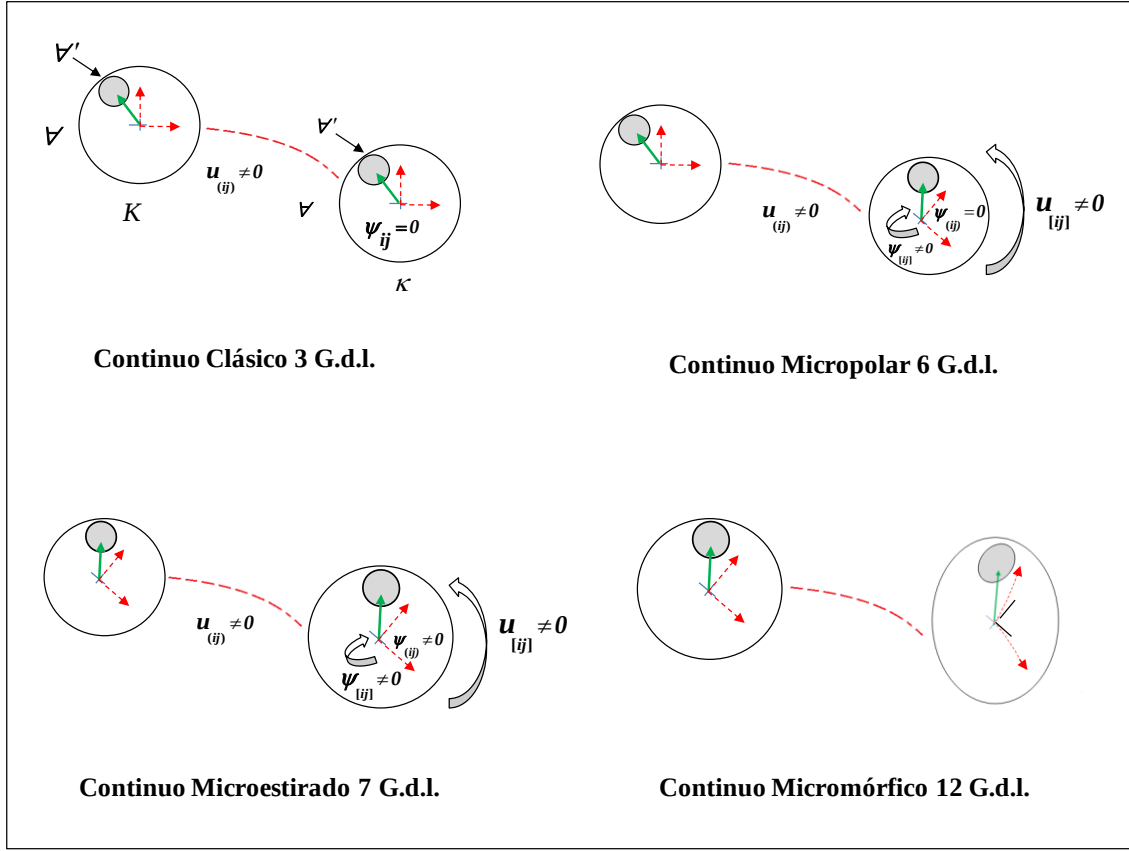


Figura 17

El Modelo Cinético de Mindlin

Mindlin deduce las ecuaciones de conservación para un material polar elastolineal con microestructura, valiéndose del método de variaciones. Una fundamentación del método para su aplicación a la teoría de Cosserat puede verse en [94] y de forma más completa para su aplicación a medio continuo con microestructura, en [75]. Parte del principio de Hamilton:

$$\delta \int_t \mathcal{L} dt + \delta \int_t \mathcal{W} dt = 0 \quad \mathcal{L} = \int_t (\mathcal{T} - W) dt \quad (5.38)$$

$\mathcal{L}$ es el lagrangiano, $\mathcal{T}$ y W la energía cinética y la potencial de deformaciones relativas respectivamente. $\mathcal{W}$ es el trabajo desarrollado por la interacción externa. Define la función de energía de deformación relativa de manera coherente con las medidas de deformación adoptadas: (5.33) y (5.34):

$$W = W(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \mathcal{X}_{ijk}) \quad (5.39)$$

Este último hecho le confiere a su modelo el carácter de lineal. De manera coherente con lo anterior asume las siguientes relaciones:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad \mu_{jk} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{X}_{ijk}} \quad (5.40)$$

Donde τ_{ij} es el tensor de tensiones clásico (simétrico, llamado por algunos de Cauchy). σ_{ij} es un tensor que se requiere para modelar la tensión entre el micromedio y el macromedio (cuya deformación conjunta es la relativa γ_{ij}), por eso se le llama tensor relativo. μ_{jk} es un tensor de tensiones de par, propuesto por Toupin [158]. Resulta ideal para acoplarlo a una medida de deformación que tiene el

mismo orden tensorial. Una buena forma de entender cómo se construye este tensor, es mediante un elemento de volumen (figura 18). Hay que imaginar que cada una de las tres tensiones de par establecidas sobre las tres caras del elemento de volumen es generada por otros dos pares, cuyas fuerzas iguales y opuestas se ubican sobre planos adicionales e imaginarios situados en cada cara, y que en conjunto forman otros cubos más pequeños. Dichos planos son normales a cada tensión de par μ_{ij} (figura 18). Estos nuevos pares se denominan dipolos (fuerzas dobles). El dipolo μ_{ijk} se encuentra sobre la cara i , el brazo de sus fuerzas es j y éstas tienen la dirección del eje k (figura 19).

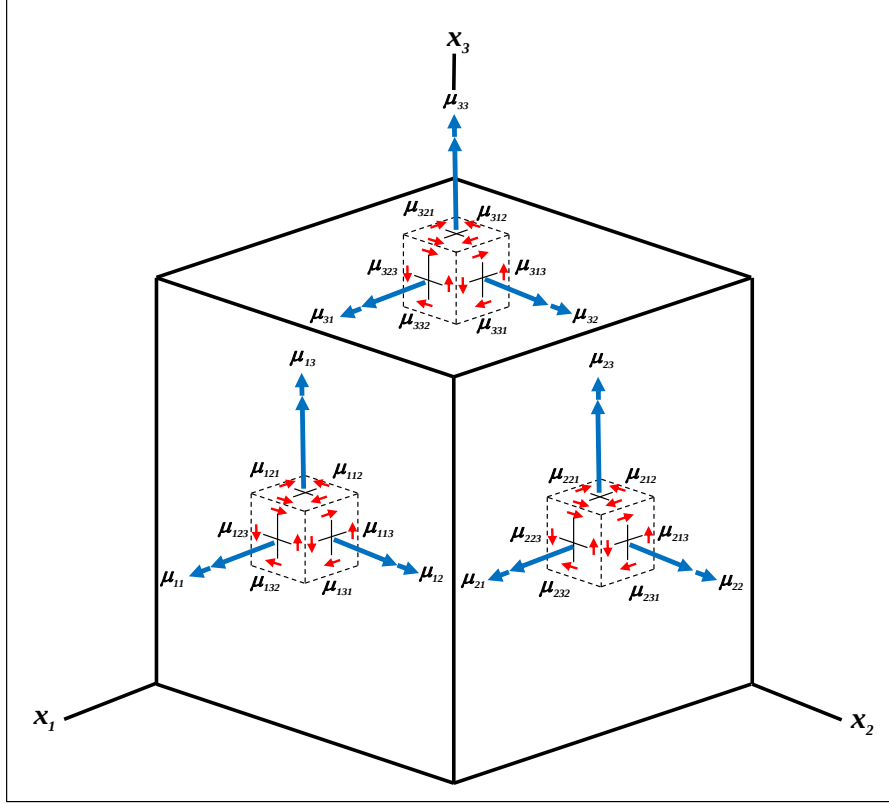


Figura 18

El tensor μ_{ijk} posee un total de 27 componentes, pero un conteo rápido en la figura 18 muestra que el es de 18 el número no nulo de ellas. Están ausentes las componentes tipo μ_{imm} (es decir cuando $j=k=m$). Por esta razón, en parte, se trata de un tensor antisimétrico de orden tres. En consecuencia:

$$\mu_{ijk} = -\mu_{jik} \quad (5.40)$$

Por esta razón el tensor de tensiones de par es el dual del tensor μ_{ijk} . Valen por tanto las siguientes relaciones:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jkn} \mu_{ink} \quad \mu_{ijk} = \epsilon_{ijn} \mu_{nk} \quad (5.41)$$

Con respecto a las ecuaciones (5.36), es interesante resaltar como Mindlin las establece en forma directa en esta ocasión y ya no como resultado de un elaborado proceso, similar al que fue ilustrado recientemente en el apartado 5.1, donde deduce las ecuaciones (5.12). En esta metodología consiste en buscar fuerzas energéticamente conjugadas con cada tipo de deformación.

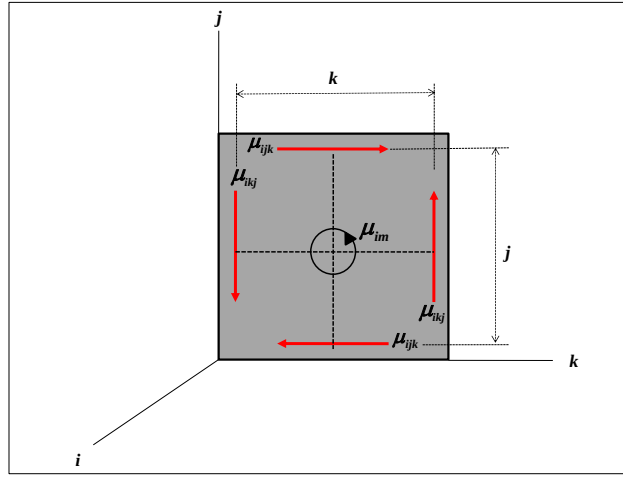


Figura 19

De (5.39) se sigue que es válida:

$$\delta W = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \chi_{ijk}$$

Mediante esta ecuación arriba a la variación de la energía potencial de deformación relativa:

$$\int_V \delta W dV = - \int_V \left[(\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j \right] \partial_i dV - \int_V (\sigma_{jk} + \mu_{ijk} \partial_i) \delta \psi_{jk} dV + \int_A n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dA + \int_A n_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} dA \quad (5.42)$$

Para evaluar el trabajo de las acciones externas, Mindlin hace una interpretación fenomenológica del resultado anterior, la cual le permite inferir unas fuerzas externas restantes para su modelo. Parte de la forma de cada variación en la (5.42):

$$\int_t \delta W dt = - \int_V (b_j \delta u_j + D_{jk} \delta \psi_{jk} + t_i \delta u_j + T_{jk} \delta \psi_{jk}) dV \quad (5.43)$$

En el miembro derecho y de izquierda a derecha se tiene: b_j fuerza de cuerpo por unidad de volumen, D_{jk} fuerza doble por unidad de volumen (un concepto debido a Love [108]), t_i vector de tracción y T_{jk} fuerza doble por unidad de superficie.

La variación para la energía cinética es:

$$\int_V \delta T dV = \int_V \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho_{(m)} d_{kl}^2 \ddot{\psi}_{kj} \delta \psi_{lj} \right) dV \quad (5.44)$$

$$\rho \ddot{u}_j = \tau_{ij,i} + \sigma_{ij,i} + b_j \quad (5.45)$$

$$\hat{J}_{jl} \ddot{\psi}_{lk} = \mu_{ijk,i} + \sigma_{jk} + D_{jk} \quad \hat{J}_{jl} = \frac{1}{3} \rho_{(m)} d_{jl}^2 \quad (5.46)$$

$\hat{J}_{jl}$ es el tensor de microinercia. Este lo construye del siguiente modo: Para ello inicialmente replantea la modelación de la relación entre el macro y microelemento (figura 20). Representa a éste como un paralelepípedo de lado $2d_i$. Adherido al macroelemento está el sistema de coordenadas acostumbrado (x'_1, x'_2, x'_3) , en tanto que el microelemento emplea un sistema de ejes coordenados oblicuos (x''_1, x''_2, x''_3) .

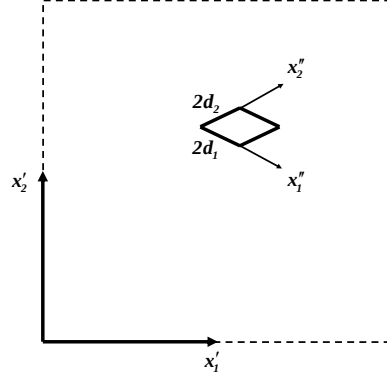


Figura 20

Y las condiciones de contorno:

$$n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) = t_j \quad (5.47)$$

$$n_i \sigma_{ij} = t_j \quad (5.48)$$

$$n_i \mu_{ijk} = T_{jk} \quad (5.49)$$

Mindlin propone un primer tipo de función de energía de deformación relativa, en donde considera productos, de tres factores, formados con combinaciones de las tres medidas de deformación relativa ya establecidas y una constante constitutiva:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \chi_{ijk} \chi_{lmn} + d_{ijklmn} \gamma_{ij} \chi_{lmn} + f_{ijklm} \chi_{ijk} \varepsilon_{lm} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (5.50)$$

Los órdenes de los tensores que representan las medidas de deformación relativa están comprendidos entre 2 y 3, de suerte que al combinarlos hay que incluir tensores con órdenes 4, 5 y 6 para representar las propiedades del material.

La (5.50) en las ecuaciones (5.40) permite obtener las ecuaciones constitutivas del modelo de Mindlin para un material polar elastolineal:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} + f_{ijklm} \chi_{klm} + g_{ijkl} \gamma_{kl} \\ \sigma_{ij} &= b_{ijkl} \gamma_{kl} + d_{ijklmn} \chi_{lmn} + g_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \mu_{ijk} &= a_{ijklmn} \chi_{lmn} + d_{ijlmk} \gamma_{lm} + f_{ijklm} \varepsilon_{lm} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Procede enseguida a simplificar el modelo, suponiendo que el material es isótropo y tiene simetría central. Los tensores de orden impar en la (5.51) no califican para esta transformación, pues el ser impar no les permite formar grupos de isotropía. Se trata de los tensores d_{ijklmn} , f_{ijklm} en la (5.50). Ésta queda por tanto como:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \chi_{ijk} \chi_{lmn} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (5.52)$$

Los cuatro tensores restantes conforman un grupo de isotropía, cuando se les expresa como combinaciones lineales del tensor identidad. Mindlin propone el siguiente conjunto, que además incorpora nuevas constantes constitutivas:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + c_{(2)} \delta_{ik} \delta_{jl} + c_{(3)} \delta_{il} \delta_{jk} \\ b_{ijkl} &= b_{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + b_{(2)} \delta_{ik} \delta_{jl} + b_{(3)} \delta_{il} \delta_{jk} \\ g_{ijkl} &= g_{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} + g_{(2)} \delta_{ik} \delta_{jl} + g_{(3)} \delta_{il} \delta_{jk} \\ a_{ijklmn} &= a_{(1)} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + a_{(2)} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + a_{(3)} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + a_{(4)} \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn} + a_{(5)} \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{nl} + a_{(6)} \delta_{jk} \delta_{in} \delta_{lm} + a_{(7)} \delta_{kl} \delta_{jl} \delta_{mn} + a_{(8)} \delta_{kl} \delta_{jm} \delta_{nl} + \\ &\quad a_{(9)} \delta_{kl} \delta_{jn} \delta_{lm} + a_{(10)} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + a_{(11)} \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{kl} + a_{(12)} \delta_{kl} \delta_{lm} \delta_{in} + a_{(13)} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{(14)} \delta_{jl} \delta_{kn} \delta_{im} + a_{(15)} \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm} \end{aligned}$$

Se reemplazan en la (5.52) y ésta queda:

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_{(1)} \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_{(2)} \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} b_{(3)} \gamma_{ij} \gamma_{ji} + g_{(1)} \gamma_{ii} \varepsilon_{jj} + g_{(2)} (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \varepsilon_{ij} + a_{(1)} \mathcal{X}_{iik} \mathcal{X}_{kjj} + a_{(2)} \mathcal{X}_{iik} \mathcal{X}_{jki} + \frac{1}{2} a_{(3)} \mathcal{X}_{iik} \mathcal{X}_{jjk} + \frac{1}{2} a_{(4)} \mathcal{X}_{ijj} \mathcal{X}_{ikk} + a_{(5)} \mathcal{X}_{ijj} \mathcal{X}_{kik} + \frac{1}{2} a_{(6)} \mathcal{X}_{iji} \mathcal{X}_{kjk} + \frac{1}{2} a_{(10)} \mathcal{X}_{ijk} \mathcal{X}_{ijk} + a_{(11)} \mathcal{X}_{ijk} \mathcal{X}_{jki} + \frac{1}{2} a_{(13)} \mathcal{X}_{ijk} \mathcal{X}_{ikj} + \frac{1}{2} a_{(14)} \mathcal{X}_{ijk} \mathcal{X}_{jik} + \frac{1}{2} a_{(15)} \mathcal{X}_{ijk} \mathcal{X}_{kji}$$

Levando esta última expresión a la (5.40) se tienen las ecuaciones constitutivas del modelo de Mindlin para un material isótropo y con simetría central:

$$\begin{aligned} \tau_{pq} &= \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_{(1)} \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_{(2)} (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}) \\ \sigma_{pq} &= g_{(1)} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_{(2)} \varepsilon_{pq} + b_{(1)} \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_{(2)} \gamma_{pq} + b_{(3)} \gamma_{qp} \\ \mu_{pqr} &= a_{(1)} (\mathcal{X}_{iip} \delta_{qr} + \mathcal{X}_{rii} \delta_{pq}) + a_{(2)} (\mathcal{X}_{iiq} \delta_{pr} + \mathcal{X}_{iri} \delta_{pq}) + a_{(3)} \mathcal{X}_{pii} \delta_{qr} + a_{(4)} \mathcal{X}_{iir} \delta_{qr} + a_{(5)} (\mathcal{X}_{qii} \delta_{pr} + \mathcal{X}_{ipr} \delta_{qr}) + \\ &\quad a_{(8)} \mathcal{X}_{iqi} \delta_{pr} + a_{(10)} \mathcal{X}_{pqr} + a_{(11)} (\mathcal{X}_{rpq} + \mathcal{X}_{qrp}) + a_{(13)} \mathcal{X}_{prq} + a_{(14)} \mathcal{X}_{qpr} + a_{(15)} \mathcal{X}_{rqp} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Si ahora el conjunto (5.53) se substituye en las ecuaciones del movimiento (5.45) y (5.46), se arriba a las ecuaciones para el desplazamiento y la microdeformación:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= (\mu + 2g_{(2)} + b_{(2)}) u_{i,jj} + (\lambda + \mu + 2g_{(1)} + 2g_{(2)} + b_{(1)} + b_{(3)}) u_{i,ij} - \\ &\quad (g_{(1)} + b_{(1)}) \psi_{jj,i} - (g_{(2)} + b_{(2)}) \psi_{ji,j} - (g_{(2)} + b_{(3)}) \psi_{i,jj} + b_{(1)} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{jl} \ddot{\psi}_{lk} &= (a_{(1)} + a_{(5)}) (\psi_{kl,kl} \delta_{ij} + \psi_{kk,jj}) + (a_{(2)} + a_{(11)}) (\psi_{ki,jk} + \psi_{jk,ik}) + (a_{(3)} + a_{(14)}) \psi_{kj,jk} + \\ &\quad a_{(4)} \psi_{ll,kk} \delta_{ij} + b_{(2)} (u_{j,i} - \psi_{ij}) + (a_{(8)} + a_{(15)}) \psi_{ik,jk} + a_{(10)} \psi_{ij,kk} + a_{(13)} \psi_{ji,kk} + \\ &\quad g_{(1)} u_{k,k} \delta_{ij} + g_{(2)} (u_{j,i} + u_{i,j}) + b_{(1)} (u_{k,k} - \psi_{kk}) \delta_{ij} + b_{(3)} (u_{i,j} - \psi_{ji}) + D_{ij} \end{aligned}$$

El modelo (lineal) de Mindlin elastolineal polar isótropo y con simetría central requiere 18 constantes de elasticidad polar. Las dos de Lamé y otras 16, sobre las cuales Mindlin no aporta información. Su naturaleza física puede inferirse, no obstante, con base en otros resultados (cfr. teoría de la tensión de par) y mediante un análisis dimensional de estas constantes como se hace en [172]: El conjunto $b_{(1)}, b_{(2)}, b_{(3)}$ en (5.53)₂ tiene dimensiones de tensión puede entonces interpretarse como la rigidez a la deformación, γ_{pq} , inducida por la tensión relativa σ_{pq} . Lo mismo se puede afirmar para $g_{(1)}, g_{(2)}$. Las restantes 11 aparecen en la ecuación constitutiva para la tensión de par, (5.53)₃. Por analogía fenomenológica (cfr. Teoría de la tensión de par), podría decirse que se trata de rigideces a la microcurvatura.

Mindlin tampoco realiza una evaluación de los límites de los valores que deben tomar esas constantes, de forma tal que W siempre sea positiva. En [172] se presenta un amplio análisis de este aspecto.

Las ecuaciones de la elasticidad clásica se recuperan en las (5.52) al igualar a cero las 16 constantes que aporta la elasticidad polar.

Modelo Micropolar

Partiendo de las medidas de deformación (5.36) y (5.37) se puede llegar al modelo micropolar, es decir el que considera, entre otras, 6 grados de libertad. Las componentes cinéticas del modelo son [91A], en su orden ecuaciones del movimiento, constitutivas y ecuaciones del movimiento en términos del desplazamiento y la microrotación:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_j &= \sigma_{ij,i} + b_j & \hat{J} \ddot{\psi}_j &= \mu_{j,i} + \varepsilon_{jik} \sigma_{ik} + \hat{J} b_j \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \gamma_{kk} + 2\mu \gamma_{(ij)} + 2\alpha \gamma_{[ij]} & \mu_{ij} &= \beta \mathcal{X}_{kk} \delta_{ij} + 2\gamma \mathcal{X}_{(ij)} + 2\varepsilon \mathcal{X}_{[ij]} \end{aligned}$$

El material micropolar posee 6 constantes constitutivas: $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \lambda, \mu$, las cuatro primeras debidas a su carácter polar.

$$\rho \ddot{\vec{u}} = (\lambda + 2\mu) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - (\mu + \alpha) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + 2\alpha \vec{\nabla} \times \vec{u} + \rho \vec{b}$$

$$\rho \ddot{\vec{\psi}} = (\beta + 2\gamma) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} - (\gamma + \varepsilon) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\psi} + 2\alpha \vec{\nabla} \times \vec{u} - 4\alpha \vec{\psi} + \hat{J} \vec{b}$$

5.3 Teorías de Grado Superior

Como se ha venido indicando una teoría de tipo general fue propuesta por Green y Rivlin [78]. Toupin [158] se había ocupado del asunto, pero para un número limitado de gradientes. Esta línea de trabajo fue seguida por Mindlin [116,118]. El mismo autor se basa en el ya discutido [113] y en [115], un trabajo que se suele clasificar ordinariamente dentro de las teorías de orden superior, pero donde consigue algunos resultados que le sirven de base para los mencionados previamente.

En [116] el problema se plantea en estos términos. Se parte de W (previa suposición de linealidad):

$$W = (\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{ij,k}, \mathcal{E}_{ij,kl}) \quad W = (u_{(i,j)}, u_{i,jk}, u_{i,jkl}) \quad (5.55)$$

Con las simetrías:

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ji} \quad \mathcal{E}_{ij,k} = \mathcal{E}_{ji,k} \quad \mathcal{E}_{ij,kl} = \mathcal{E}_{ji,kl} \quad (5.56)$$

De acuerdo con lo planteado en (5.55), se tienen las siguientes componentes independientes: 6 (5.55)₁, 18 (5.55)₂ 30 (5.55)₃, para un gran total allí de 54 componentes.

Resulta evidente que en la formulación (5.55) la ausencia de una rotación independiente, que ya Mindlin había incluido en [155], un artículo que es previo a previo a [156,158]: Esto es una característica de las teorías de grado superior.

Mindlin en [117] deduce un modelo de teoría de grado superior que se suele denominar en la literatura teoría del gradiente. Para iniciar propone tres interpretaciones cinemáticas para el primer gradiente en la W (5.55) (sin tener en cuenta, claro está, el segundo gradiente):

1. El tensor segundo gradiente de desplazamientos, $u_{i,jk}$. La simetría reduce este tensor a 18 componentes.

$$u_{i,jk} \equiv \tilde{\kappa}_{ijk} = \tilde{\kappa}_{jik} \quad W = \tilde{W}(\mathcal{E}_{ij}, \tilde{\kappa}_{ijk}) \quad (5.57)$$

2. El tensor gradiente de deformaciones, $\mathcal{E}_{ij,k}$: Tiene 18 componentes gracias a su simetría.

$$\mathcal{E}_{ij,k} \equiv \hat{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ikj} \quad W = \hat{W}(\mathcal{E}_{ij}, \hat{\kappa}_{ijk}) \quad (5.58)$$

3. Las 8 componentes del tensor gradiente de rotaciones, $\bar{\kappa}_{ij}$, y las 10 componentes de la parte simétrica del tensor segundo gradiente de desplazamientos $\bar{\bar{\kappa}}_{ijk}$ (que es lo mismo que el tensor gradiente de deformaciones relativas).

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{jlk} u_{k,li} \equiv \omega_{j,i} \quad u_{(i,jk)} \equiv \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} \quad \bar{\bar{\kappa}}_{jki} = \bar{\bar{\kappa}}_{kij} = \bar{\bar{\kappa}}_{kji} \quad u_{(i,jk)} = \frac{1}{3} (u_{k,ij} + u_{i,jk} + u_{j,ki}) \quad (5.59)$$

$$W = \bar{W}(\mathcal{E}_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}, \bar{\bar{\kappa}}_{ijk}) \quad (5.60)$$

Mindlin deduce ecuaciones constitutivas empleando las tres versiones de W , afirmando obtener con cualquiera de ellas la misma ecuación desplazamiento. En el artículo, no obstante, entrega, únicamente, la obtenida a partir de la (5.60). Aquí se trabajará de la misma manera.

El procedimiento seguido es un calco metodológico del expuesto en el apartado 5.2 o de su artículo [115]. Así, de la (5.60) llega directamente a:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathcal{E}_{ij}} = \bar{\sigma}_{ji} \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}} \quad \bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\bar{\kappa}}_{ijk}} \quad (5.61)$$

Donde aparecen como conjugados energéticos, aparte del tensor de Cauchy, el tensor de tensiones de par y el de dobles fuerzas, los cuales guardan coherencia con la naturaleza rotacional de los tensores $\bar{\kappa}_{ij}, \bar{\bar{\kappa}}_{ijk}$. A partir de aquí deduce una ecuación del movimiento que incluye la doble fuerza por unidad de volumen:

$$\rho \ddot{u}_k = \bar{\sigma}_{jk,j} - \bar{\bar{\mu}}_{ijk,j} - D_{(jk),j} + \rho b_k + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ijk} \mu_{ji,jj}^D + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ijk} M_k \quad (5.62)$$

Para deducir las ecuaciones constitutivas, propone una expresión que incluye 7 constantes constitutivas del material: Las 2 de Lamé y otras relacionadas con la naturaleza polar del material:

$$\bar{W} = \left(\frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\bar{d}_1 \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{ij} + 2\bar{d}_2 \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{ji} + \frac{3}{2} \bar{a}_{(1)} \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{kkj} + \bar{a}_{(2)} \bar{\kappa}_{ijk} \bar{\kappa}_{ijk} + \bar{f} \varepsilon_{ijk} \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{kl} \right) \quad (5.63)$$

La (5.63) en la (5.60)₂ produce inicialmente

$$\bar{\mu}_{ijk} = 3\bar{a}_{(1)} \bar{\kappa}_{kij} + 2\bar{a}_{(2)} \bar{\kappa}_{ijk} + \bar{f} \varepsilon_{kjl} \bar{\kappa}_{il}$$

Se le transforma mediante un procedimiento usual con los tensores de tercer orden que consiste en descomponerlos en formas irreducibles [157]. Es también el caso del (5.40). Teniendo en cuenta esto y reemplazando la (5.63) en las restantes (5.61), se obtienen las ecuaciones constitutivas de material elastolineal polar:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \mu_{ij}^D &= 4\bar{d}_1 \bar{\kappa}_{ij} + 4\bar{d}_2 \bar{\kappa}_{ji} + \bar{f} \varepsilon_{ijk} \bar{\kappa}_{kl} \\ \bar{\mu}_{ijk} &= \bar{a}_{(1)} (\bar{\kappa}_{mmk} \delta_{ij} + \bar{\kappa}_{nmj} \delta_{ki} + \bar{\kappa}_{nmi} \delta_{jk}) + 2\bar{a}_{(2)} \bar{\kappa}_{ijk} + \frac{1}{3} \bar{\kappa}_{il} \bar{f} (\delta_{ij} \varepsilon_{ilk} + \delta_{ki} \varepsilon_{ilj} + \delta_{jk} \varepsilon_{ili}) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Tras reemplazar las ecuaciones (5.64), (5.59)₁ y (5.59)₂ en la (5.62) se obtiene la ecuación del movimiento en términos del desplazamiento:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= \mu u_{i,jj} + (\lambda + 2\mu)(I - \ell_1^2 \partial_i \partial_i) u_{j,ji} - \mu(I - \ell_2^2 \partial_i \partial_i) \varepsilon_{ijm} \partial_j \varepsilon_{imj} u_{j,i} + \rho b_i + \frac{1}{2} \varepsilon_{imj} \rho M_{m,j} - D_{ji,j} \\ \rho \ddot{u} &= (\lambda + 2\mu)(I - \ell_1^2 \nabla^2) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \mu(I - \ell_2^2 \nabla^2) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + \rho \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \rho \vec{M} - \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Donde aparecen ahora las constantes:

$$\ell_1^2 = \frac{3\bar{a}_{(1)} + 2\bar{a}_{(2)}}{(\lambda + 2\mu)} \quad \ell_2^2 = \frac{3\bar{d}_1 + \bar{a}_{(1)} + 2\bar{a}_{(2)} - \bar{f}}{3\mu}$$

Las constantes incluidas en la (5.65) deben verificar las siguientes relaciones, con el fin de garantizar que la función de energía específica no sea negativa:

$$\begin{aligned} \mu &> 0 & 3\lambda + 2\mu &> 0 & -\bar{d}_1 < \bar{d}_2 < \bar{d}_1 \\ \bar{a}_2 &> 0 & 5\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 &> 0 & \bar{f}^2 < 6(\bar{d}_1 - \bar{d}_2)(5\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2) \end{aligned}$$

6. BIBLIOGRAFÍA

1. Abu Al-Rub, R. y Voyiadjis G. (2006). A physically based gradient plasticity theory International Journal of Plasticity. 22, pp. 654–684.
2. Adomeit, G. (1967). Determination of elastic constants of a structural material. En Mechanics of Generalized Continua, editado por E. Kröner. IUTAM Symposium, Freudenstadt, Stuttgart, Springer, Berlin.
3. Aero, E. L., Kuvshinskii, E. V. (1960). Fundamental equations of theory of elastic media with rotationally interacting particles. Fizika Tverdogo Tela 2 1399-1409 (1909). Translation. Soviet Physics Solid State 2, 1272-1281 (1961).
- 3A. Aifantis, E. (1984) On the microstructural origin of certain inelastic models. Transactions of ASME. Journal of Engineering Materials and Technology. 106. pp. 326-330.
- 3B. Aifantis, E. (1999) Strain gradient interpretation of size effects .Int. Journal Fracture. 95, pp. 299-314.

- 4-. Anthoine, A. (2000). Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*. **37** 1003-1018.
- 5-. Asaro, R. y Lubarda, V. (2006) *Mechanics of Solids and Materials*. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- 6-. Ashby, M.F. (1970). The deformation of plastically non-homogeneous alloys. *Philos. Mag.* **21**, 399–424.
- 7-. Barber, R. W y Emerson, D. R. (2002). The influence of Knudsen number on the hydrodynamic development length within parallel plate micro-channels. En *Advances in Fluid Mechanics IV*. Editores M. Rahman et als.. WIT Press, Southampton, Reino Unido.
- 8-. Bauer et al. (2010) Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **199** 643–2654.
9. Beatty M., Hayes, M. (Editores) (2005). *Mechanics and Mathematics of Crystals: Selected papers of J.L. Ericksen.: The Cauchy and Born hypothesis for Crystals* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapur.
10. Begley , M. R., Hutchinson, J. W. (1998). The mechanics of size dependent indentation, *Journal of Mechanics Physics and Solids*. **46**, 2049-2068.
11. Berglund, K. (1982) Structural models of micropolar media. En *Mechanics of Micropolar Media*. Editado por O. Brulin y R. K. T. Hsieh. World Scientific, Singapore.
12. Bernoulli, D. (1738). *Hydrodynamica, Sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*. Sumptibus J. R. Dulseckeri. Estrasburgo.
13. Bonda, N.R. y Noyan, I.C. (1992). Deformation inhomogeneity and representative volume in Pb/Sn solder alloys. *Metallurgical Transactions*. **N 23A**, pp. 479-481.
14. Born, M. (1915). *Dynamik der Kristallgitter*. Leipzig.
15. Born M., and Huang, K (1954). *Dynamical theory of crystal lattices*. Oxford Clarendon Press, 1954.
16. Bošković, R. (1763). *Theoria philosophiae Naturalis Redacta ad Unicam Legem Virium in Natura Existentium*. Primera edición. Typographia Remondiniana.
17. Bulanov, E. A (1998). On the moment theory of elasticity. Plane deformation. Part I. Strength of Materials **30**,3: 318-327.
18. Buryachenko, V. (2007) *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Springer. New York.
19. Capecchi, D. et al. (2011). Voigt and Poincaré's mechanistic-energetic approaches to linear elasticity and suggestions for multiscaling modelling. *Arch. Appl. Mech.*
20. Cauchy, A.-L. (1823). Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides, ou fluides élastiques ou non élastiques. *Bull. Sci. Soc. Philomathique Paris* 9-13.
21. Cauchy, A.-L. (1827). De la pression dans les fluides. *Exercices de Mathématiques*. (Segundo año), Paris 37-39.
22. Cauchy, A.-L. (1827). De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de Mathématiques* (Segundo año), Paris, 60-78.
23. Cauchy, A.-L. (1827). Sur la condensation et la dilatation des corps solides. *Exercices de Mathématiques* (Segundo año), Paris, 82-93.

24. Cauchy, A.-L. (1827). Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. Exercices de Mathématiques (Tercer año), Paris, 141-145.
25. Cauchy, A.-L. (1828). Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps élastique, ou non élastique. Exercices de Mathématiques. (Tercer año), Paris 195-226.
26. Cauchy, A.-L. (1828). Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Exercices de Mathématiques. (Tercer año), Paris 227-252.
27. Cauchy, A.-L. (1828). De la pression ou tension dans un système de points matériels. Exercices de Mathématiques. (Tercer año), Paris 253-277.
28. Cauchy, A.-L. (1829). Sur les équations différentielles d'équilibre ou de mouvement pour un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Exercices de Mathématiques. (Cuarto año), Paris 162-173.
29. Cauchy, A.-L. (1830). Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. Exercices de Mathématiques. (Cuarto año), Paris 342-369.
30. Chambon René et al. (2001). Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. International Journal of Solids and Structures. Pp. 8503-8527.
31. Chawla, M., Chawla, K.. (2006). Metal Matrix Composites. Springer, New York.
32. Chaboche, J.L. (2008) A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International Journal of Plasticity **24**: 1642–1693.
33. Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. (1999). Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers. J. Mater. Res.. 14, 4103–4110.
- 34-51. Conti, S. et al. (2006). Sufficient conditions for the validity of the Cauchy-Born rule close to SO (n). Journal of The European Mathematical Society, 8, p 515-530.
35. Cosserat, E. y F. (1909). Théorie des Corps Déformables. A. Hermann et Fils, Paris. Con motivo del centenario de su publicación el libro fue reeditado por Gabay, Paris (2009).
36. Cowin, S (1970). Stress functions for Cosserat elasticity .International Journal Solids Structures. 6, pp. 389-398.
37. Dalton, J., Avogadro, A., Ampère, A.-M. (1965). Teoría Atómico-Molecular. EUDEBA, Buenos Aires.
38. Diebels, S. y Steeb H. (2002). The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation. Proc. R. Soc. Lond. A **458**: 2869-2883.
39. Du, X y Ostoj-Starzewski, M. (2006) On the scaling from statistical to representative volume element in thermoelasticity of random materials. Networks and Heterogeneous Media **1**,2, 259–274
40. Dugas, R. (1955). A History of Mechanics. Routledge & Kegan Ltd., Londres.
41. Duhem, P. (1893) Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. Annales scientifiques de l'ÉNS. Tercera serie, tomo 10, pp. 183-230.
42. Dunstan et al. (2009). Elastic limit and strain hardening of thin wires in torsion. Physical Review Letters. 103.

43. Ehlers, W. et al. (2003). From particle ensembles to Cosserat continua: homogenization of contact forces towards stresses and couple stresses. *Int. J. Solids Struct.* 40, 6681–6702 .
44. Ejike, U.B.C.O (1969). The plane circular crack problem in the linearized couple-stress theory. *International Journal of of Engineering Science.* 7, pp. 947-961.
45. Ericksen, J. L. y Tuesdell C. (1958) Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1(1), pp. 295-323.
46. Ericksen, J. L (2008). On the Cauchy-Born rule. *Mathematics and mechanics of solids.* 13:199. Publicado por SAGE.
47. Eringen, A. C., Suhubi, E. (1964). Nonlinear theory of simple microelastic solids I. *Int. J. Eng. Sci.* 2 (2) pp. 189-203.
48. Eringen, A. C., Suhubi, E. (1964). Nonlinear theory of simple microelastic solids II. *Int. J. Eng. Sci.* 2 (4) pp. 389-404.
- 49-68. Eringen, A. C. (1964). Simple micro-fluids. *Int. J. Eng. Sci.* 205-217.
50. Eringen, A. C. (1965). Theory of micropolar elasticity. *Proc. Midwestern Mech. Conf.*, pp. 23-40.
51. Eringen, A. C. (1966). Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 15, pp. 909-923.
52. Eringen, A.C. (1966). Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.* 16, 1–18
53. Eringen, A.C. (1969). Micropolar fluids with stretch. *Int. J. Eng. Sci.* 7 115-127.
54. Eringen, A. C. (1971). Micropolar elastics solids with stretch. Professor Mustafa Inan Anisma, Ari Kipatevi Matbaasi, 1-18. Estambul.
55. Eringen, A. C. (Editor) (1976). *Continuum Physics. Volumen IV: Polar Field Theories* (Kafadar, Ch., coautor) Academic Press Inc ..
56. Eringen, C. (1999). *Microcontinuum Field Theories IV. Polar Field Theories.* Escrito por Eringen y Kafar. Springer, New York.
57. Eringen, A. C (2001). *Non Local Continuum Theories.* Springer.
58. Eringen, A. C. (2009). Foreword. En *Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After The Cosserats.* Springer. Nueva York.
59. Eringen, A. C. (2010). Micromorphic theory of turbulence .*Mathematics and physics ZAMP.* pp. 119–132.
60. Euler, L. *Principes Généraux du Mouvement des Fluides.* Mémoires de l'académie des Sciences de Berlin 11 (1757), pp. 274-31.
61. Fleck, N. A. y Hutchison, J.W : (1993). A phenomenological theory of strain gradient effects in plasticity. *Journal of Mathematics and Physics of Solids.* 41, pp. 1825-57.
62. Fleck, N. el al. (1994) Strain gradient plasticity: Theory and Experiment. *Acta Metall Mater.* Vol. 42, No2, pp 475-487.
63. Fleck, N.A., Hutchinson, J.W. (1997). Strain gradient plasticity. En *Advances in Applied Mechanics,* Vol.33. Editores Hutchinson, J.W., Wu, T.Y. .Academic Press, New York, pp.295 –361.

64. Fleck, N.A., Hutchinson, J.W. (2001). A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 49, 2245–2271.
65. Fleck, N.A. et al. (2003) The role of geometrically necessary dislocations in giving material strengthening. *Script Materialia* 48, 179-183.
66. Fleck, N.A. y Willis, J. (2009) A mathematical basis for strain-gradient plasticity theory—PartI: Scalar plastic multiplier. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57, 161–177.
67. Fleck, N.A y Willis, J. (2009) A mathematical basis for strain-gradient plasticity theory—PartII: Tensorial plastic multiplier. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57, 1045–1057.
68. Foce, F. (1993) *La Teoria Molecolare dell'Elasticità dalla Fondazione Ottocentesca ai Nuovi Sviluppi del XX secolo*. Tesi Dottorato di Ricerca in Storia delle Scienze e delle Tecniche Costruttive. Università di Firenze.
69. Forest, S., Sievert, R. (2006). Nonlinear microstrain theories. *Journal of Solids and Structures*.
70. Forest, S. (?) *Mechanics of Cosserat media. An Introduction*. Ecole des Mines de Paris / CNRS Centre des Materiaux.
71. Fourier, J. *Théorie Analytique de la Chaleur*. Chez Firmin Didot, Père et Fils, Paris (1822).
72. Fuang-Yuan, H. et al. (2000) Bending analysis of micropolar elastic beam using a 3-D finite element metho. *International Journal of Engineering Science*. 38 275-286.
73. Gao H. et al.. (1999) Mechanism-based strain gradient plasticity: I Theory .*Journal of the mechanics and physics of solids*. pp. 1239-1263.
74. Gauthier, R. D. y Jashman, W. E. (1975). A quest for micropolar elastic constants. *Journal of Applied Mechanics*. 42, pp. 360-374.
75. Germain, P. (1973). The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25,3, pp. 556-575.
- 76Gómez, J y Bassaran, C (2009). Computational implementation of Cosserat continuum. *Int. J. Materials and Product Technology*, **34**,1/2, 3-36
77. Green, G. (1839) On the propagation of light in crystallized media. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 7, (1 838- 1842), 12 1- 140.
78. Green, A. E. y Rivlin R. S. (1964) Multipolar Continuum Mechanics. . *Arch. Ration. Mech. Anal.*. 17, 113–147.
79. Grioli, G. (1960) Elasticità assimettrica. *Ann. Mat. Pura Appl.. Ser. IV* 50, 389-417.
80. Gudmundson, P (2004). A unified treatment of strain gradient plasticity .*Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 52, pp. 1379 – 1406 .
81. Günther, W. (1958). Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschweig.Wiss. Ges.* 10, 195.
82. Hadjesfandiari, A. R. y Dargush, G. (2011). Couple stress theory for polar solids. *International Journal of Solids and Structures* 48 2496–2510.
- 83 Hehl, W. e Itin, Y. (2002) The Cauchy relations in linear elasticity theory. En *arXiv:cond-mat/0206175v1*.
84. Herrmann, G. y Achenbach, J. D. (1967) Applications of theories of generalized continua to the dynamics of composite materials. En *Mechanics of Generalized Continua*, editado por E. Kröner. IUTAM Symposium, Freudenstadt, Stuttgart, Springer, Berlin.

85. Hlavacek, M. (1975). A continuum theory for fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*. 11, pp. 199-211.
86. Hungington, H. B. (1958). The elastic constants of crystals. *Solid State Physics*, 7, pp. 213-251.
87. Itou, S. (1973). The effect of couple-stresses on the stress concentration around an elliptic hole. *Acta Mechanica*. 16, pp. 289-296.
88. Jaramillo, T. (1929). A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Disertación doctoral. Universidad de Chicago.
89. Jänicke R. y otros (2009). Two-scale modelling of micromorphic continua. A numerical homogenization scheme. *Continuum Mech. Thermodyn.* 21, 297-315.
- 90-. Jones, R. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis. U.S.A.
91. Kafadar, C. B., Eringen, C (1971). Micropolar media -1. The Classical Theory. *International Journal of Engineering Science*.
- 91A Khan, S. y Dhaliwal, R. (1977). Axisymmetric problema for a half-space in the micropolar theory of elasticity. *Journal of Elasticity*, 7,1: 13-32.
92. Khisaeva, Z. y Ostoj-Starzewski, M. (2006). On the size of RVE in finite elasticity of random composites. *J. Elasticity* 85: 153–173.
93. Khoei, A. R. et al. (2008). An investigation on the validity of the cauchy-Born hypothesis using Sutton-Chen many-potential. *Computational Materials Science*. 44,3, pp 999-1006.
94. Kim, B. S.y Eringen A. C. (1973) Stress distribution around an elliptic hole in an infinite micropolar elastic plate. *Letters in Applied and Engineering Sciences*. 1, pp. 381-900.
95. Koiter, W.T. 1964. Couple stresses in the theory of elasticity. I, II. *Proc.K.Ned.Akad.Wet.(B)* 67, 17–44.
96. Kouznetsova, V (2002). *Computational Homogenization for the Multi-Scale Analysis of Multi-Phase Materials Netherlands*. Tesis doctoral. Cip-Data Library Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
97. Krishna Reddy , G.V. y Venkatasubramanian (1978). On the flexural rigidity of a micropolar elastic circular cylinder. *Journal of Applied Mechanics*. 45, pp. 429-431.
98. Lakes, R. S. (1982). Dynamical study of couple stress effects in human compact bone. *Transactions of the ASME*, 104, 6-11.
99. Lakes, R. S. (1983). Size effects and micromechanics of a porous solid, *J. Mat. Sci.* 18, 2572-2580.
100. Lakes, R. S. (1986). Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Structures* 22, 55-63.
101. Lakes, R. (1995). Experimental models for study of Cosserat Elastic Solids and other generalized elastic continua. En *Continuum Models For Materials with a Micro-Structure*. Editado por H. Mühlhaus. John Wiley Nueva York, pp. 1-22.
102. Lam, D.C.C. y Chong, A.C.M. (1999). Indentation model and strain gradient plasticity law for glassy polymers. *J. Mater. Res.* 14, 3784–3788.
103. Lamé, G (1866). *Leçons sur la théorie Mathématique de l'Élasticité*. Gauthier-Villars. Paris.
104. Laplace, P.-S. (1807). *Supplément à la théorie de l'action capillaire*.

105. Le Corre, I (1956) : La dissymétrie du tenseur des efforts et ses conséquences. Le Journal de Physique et le Radium. 17,11, pp. 934-939.
106. Lei, Li y Shuisheng, X (2004). Finite element method for linear micropolar elasticity and numerical study of some scale effects phenomena in MEMS. International Journal of Mechanical Sciences. 46, 1571-1587.
107. Leşan, D. (2009) Classical and Generalized Models of Elastic Rods. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, Boca Ratón.
108. Love, A.H.E (1927). A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press.
109. Ma, Q. y Clarke, D.R. (1995). Size dependent hardness of silver single crystals. Journal of Materials Research. 10, pp.853-863.
110. Maranganti, P. & Sharma, P. (2007). The Length scales at which classical elasticity breaks down for various materials. Physical Review Letters. 98, 19.
111. Markov, K. (). Elementary Micromechanics of Heterogeneous Materials. Publicado por el autor.
112. Maugin, G. A. (2009). Generalized continuum mechanics: what do we mean by that? En Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After The Cosserats. Springer. Nueva York.
113. Mindlin, R. y Tiersten, H. (1962) Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch.Rational Mech.Anal. Vol 11, No1.
114. Mindlin, R. (1963). Influence of couple-stresses on stress concentration. Experimental Mechanics. Vol. 1, No3.
115. Mindlin, R. (1964). Micro-structure in linear elasticity. Arch.Rational Mech.Anal. 16, 51-78.
116. Mindlin, R. (1965). Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. Int.J. Solids and Structures. 1, pp 417-438.
117. Mindlin, R. (1965). Stress functions for a Cosserat continuum. Int.J. Solids and Structures. 1, pp 265-271.
118. Mindlin, R. y Eshel, N.N. (1968). On first strain gradient theories in elasticity. Int. J. Solids Structures Vol. 4, pp 119-124.
119. Mura, T. (1987). Micromechanics of Defects in Solids. Martinus Nihoff Publishers. Dordrecht.
120. Nakamura et al. (1984). Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. International Journal of Engineering Science. 22, pp. 319-330.
121. Navier, C.-M. (1822). Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. Bull. Sci. Soc. Philomathique Paris 177-181.
122. Navier, C.-M. (1823). Extraits des recherches sur la flexion de plans élastiques. Bull. Sci. Soc. Philomathique Paris 95-102.
123. Navier, C.-M. (1825). Sur la flexion de vergues élastiques courbes. Bull. Sci. Soc. Philomathique Paris 98-100, 114-118.
124. Navier, C.-M. (1827). Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. Mémoires de l'Institut National 7 s 375-393, Paris .

- 125 Newton, I. Principios Matemáticos de la Filosofía Natural (1786). Altaya, Barcelona (1994).
126. Newton, I. . Óptica (). Alfaguara. Madrid (1977).
127. Nix, W.D. (1989). Mechanical properties of thin films. Metall. Trans.. 20, 2217–2245.
128. Nowacki, W. (1986). Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon, Oxford (1986)
- 129-170. Nye, J.F. (1953). Some geometrical relations in dislocated crystals. Acta Metall..1, 153–162.
130. Onck P.R et al. (2000). Size effects in ductile cellular solids. Part I: modelling, Int. J.Mech. Sci. 34, 681–699.
131. Onck, P. (2002). Cosserat modeling of cellular solids. C. R. Mecanique. 330, pp. 717-722.
132. Ostoja-Starzewski, M. (2008). Homogenization and size of representative volume element (RVE). Newsletter for the ASME Committee on Constitutive Equations, Summer 2008. pp 1-4.
133. Palmov, A. (1964): Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity. Prokl. Mat. Mekh.. 28, 401–408.
134. Park, S. K. y Gao, X.-L. (2008). Micromechanical modeling of honeycomb structures based on a modified couple stress theory. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 15, 574-593.
135. Pearson, K (Editor) (1886)³. A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time. Vol. 1 from Galilei to Saint –Venant. University Press, Cambridge,
136. Petraszkiewicz, W, Eremeyev, V. (2009). On natural strain measures of non-linear micropolar continuum. International Journal of Solids and Structures.
137. Poincaré, H. (1892) Leçons sur la Théorie de l'Élasticité. Georges Carré, editor.
138. Poisson, S. D. (1831). Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides, élastiques, et des fluides. Ann. Chim. Phys. **42** 145-171.
139. Poole W. J. et Al. (1996). Micro-hardness of annealed and work-hardened polycrystals. Scripta Materialia. 34, pp. 559-564.
140. Pujol, J. (2009). Tutorial on Rotations in the Theories of Finite Deformation and Micropolar (Cosserat) Elasticity. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 99, No 2B, pp 1011-1027.
141. Qing-Hua, Q., Qing-Sheng, Y. (2008). Macro-Micro Theory on Multifield Coupling Behavior of Heterogeneous Materials. Springer, Berlin.
142. Qu, J., Cherkaoui, M. (2006). Fundamentals of Micromechanics of Solids. Wiley, New Jersey.
143. Rajagopal, E. S. (1960), The existence of interracial couples in infinitesimal elasticity, Ann. der Physik 6, 192-201.
144. Ranagathan, S. y Ostoja-Starzewski, M. (2008). Scaling function, anisotropy and the size of RVE in elastic random polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 56, pp. 2773-2791.
145. Reyes, M., Hinojosa, M. (2000). Estructura de sólidos amorfos. Ingenierías Universidad Autónoma de México. 3,9. Pp. 7-14.

³ Figura como autor del libro Isaac Todhunter. Pearson lo editó y completó por encargo de la Universidad de Cambridge. En la mayoría de las referencias se cita es a Pearson.

146. Rowlinson, J. (2004). *Cohesion. A Scientific History of Internal Molecular Forces*. Cambridge University Press, Cambridge.
147. Rowlinson, J. (2004). *Cohesion. A Scientific History of Internal Molecular Forces*. Cambridge University Press, Cambridge.
148. Sansour, C. y Skatulla, S. (2008). Strain gradient generalized continuum approach for modeling elastic scale effects. *Comput. Methods Appl. Engrg.* 198. Pp. 1401-1412.
149. Stelmashenco, N.A. et Al. (1993). Microindentation on W and Mo oriented single crystals: an STM study. *Acta Metallurgica et Materiala*. 41, pp. 2855-2865.
150. Sternberg, E. y Muki, R. (1967). The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack. *International Journal of Solids and Structures*. 3, pp. 69-95.
151. Stokes, G. (1845). On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 1, Parte 1, página 1.
152. Stölken, J.S y Evans, A. G. (1998). A microbend test method for measuring the plasticity length scales. *Acta Metall. Mater*. 46, pp. 5109-5115.
153. Tekoğlu, C. (2007). *Size Effects in cellular Solids*. University of Groningen. Dissertations.
154. Thomson, W. (Lord Kelvin), Tait, T. (2009). *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. 2., Edición Digital. Cambridge University Press.
155. Thomson, W. (Lord Kelvin) (1893). On the elasticity of a material according a Boscovich. *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 54 (1893), pp. 59-75.
156. Thomson, W. (Lord Kelvin) (1904). *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of the Light*. Cambridge University Press.
157. Tiffen, R y Stevenson A. C. (1956). Elastic isotropy with body force and couple. *Quart. J. Mech. and Applied Math.* 9, 306.
158. Toupin, R. (1962). Elastic materials with Couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.* 11, pp385-414.
159. Toupin, R. (1964). Theories of elasticity with couple stress. *Arch. Rational Mech.*, 17, 85-112.
160. Truesdell, C., Toupin, R. (1960). *Principles of Classic Mechanics and Field Theory*. Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, Flüge, S. (Editor). Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
161. Truesdell, C., Noll, W. (1965). The Non Linear Field Theories of Mechanics.. *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/3, Flüge, S. (Editor). Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- 161A Van Vlack, L. W. (1967) *Elements of Materials Science*. Addison Wesley, Reading Massachusets.
162. Vardoulakis, I et al. (1998). Bending of marble with intrinsic length scales: a gradient theory with surface energy and size effects. *Journal of Physics IV Proc.* 8, 399-406.
163. Vernerey, F. y otros (2007). Multi-scale micromorphic theory for hierarchical materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 2603–2651.
164. Voigt, W. (1887). *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Kristalle*. *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften Zu Göttingen-Mathematische Classe* 3. 1-100.
165. Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. B. G. Teubner, Leipzig.

166. Voyiadjis, G (2005). Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter. *International Journal of Solids Structures*. 3998-4029.
167. Wang, T. T. (1970). The effects of couple-stress on maximum stress and its location around spherical inclusions. *Journal of Applied Mechanics*, 92, pp. 865-868.
168. Weinan, E., Pingbin, M. (2007). Cauchy-Born rule and the stability of crystalline solids: Dynamics problems. *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* No 4. Pp. 529-550.
- 169 Xiao, S. y Belytschko, T. (2004). A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** : 1645–1669.
170. Xue, Z. (2001). The strain gradient effect on material behavior at the micron and submicron scales. *Disertación doctoral*. Universida de Illinois, Urbana.
17121. Yang, F. et al. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int.J.Solids Struct.* 39, 2731–2743.
172. Zervos, A. (2008). Finite elements for elasticity with microstructureand gradient elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73, 564–595.