Un método para construir estrategias de apuesta de precios en equilibrio de Nash en un mercado eléctrico no regulado

G. A. Betancur, C. Cadavid, J. F. García, M. E. Puerta, J. D. Vélez

Mayo 2017

Resumen

En este artículo se presenta una generalización del método para obtener perfiles de estrategias mixtas de apuesta de precios en equilibrio de Nash, formulado en el trabajo seminal de von der Fehr y Harbord de 1992. El método consiste en un algoritmo en el que se solucionan numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales. Debido a su estilo de exposición matemáticamente riguroso, este artículo puede resultar de suma utilidad para matemáticos interesados en una rápida introducción al mundo de las subastas, o para estudiantes de economía que deseen una introducción rigurosa a esta importante área.

1. Introducción

En las últimas décadas, cada vez más países han adoptado una política de mercado eléctrico no regulado. En estos países se implementa diariamente un mecanismo de subasta inversa con el fin de determinar, para el día siguiente, cuáles unidades de generación operarán, cuánta electricidad será suministrada por cada una de ellas, y a qué precio por unidad se comprará. Dada la enorme importancia del sector eléctrico en la economía de cualquier país, muchos aspectos de estos mercados han sido estudiados. Uno de ellos es la determinación de perfiles de estrategias mixtas para la oferta de precios por parte de los generadores, que formen un equilibrio de Nash. En el artículo seminal [1], se obtiene de manera explícita los perfiles de estrategias mixtas en equilibrio de Nash en el caso de dos firmas generadoras g_1, g_2, con igual capacidad diaria de producción $k_1 = k_2 = 1$, costos de producción marginales c_1, c_2, y donde la demanda diaria es una variable aleatoria discreta d que toma valores $1, 2$. En el presente artículo se considera el problema de determinar numéricamente perfiles de estrategias mixtas en equilibrio de Nash en el caso en que hay N generadores $g_1, \dots, g_N$, con capacidades diarias de producción $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$, costos marginales de producción $c_1, \dots, c_N \geq 0$ y en los que la demanda es una variable aleatoria discreta d que toma valores $1, 2, \dots, \sum_i k_i$ con $Pr(d = i) = \pi_i$.

El problema se convierte en resolver de manera sucesiva ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales. El método está diseñado para producir perfiles de estrategias que satisfacen ciertas condiciones, que según [1], son siempre satisfechas en el caso particular en que $k_1 = \ldots = k_N = 1$. Es importante observar que nuestro método no produce soluciones matemáticamente certificadas, ya que las soluciones a los sistemas de ecuaciones diferenciales son obtenidas numéricamente, y algunas decisiones se toman basadas en juicios sobre imágenes en la pantalla del computador.

Una exploración de la literatura realizada por los autores señala que es difícil encontrar un artículo que trate el problema de las subastas en mercados eléctricos no regulados y que no requiera un conocimiento previo de teoría de juegos y de teoría de subastas (ver por ejemplo los artículos señalados en la revisión de literatura [2]). El libro [3] es una excelente introducción al tema, pero leerlo requiere un gran esfuerzo. Consideramos que la principal contribución del presente artículo es que está al alcance de un lector que haya pasado por cursos básicos de análisis y de teoría de probabilidades, y que no toma mucho tiempo leerlo. En particular, el presente artículo puede resultar de suma utilidad para matemáticos interesados en una rápida introducción al mundo de las subastas en el mercado eléctrico, o para estudiantes de economía que deseen una introducción rigurosa a esta importante área.

Cabe anotar que aunque ya existen resultados similares al desarrollado en el presente artículo (ver por ejemplo [4]), estos son presentados en el contexto de teoría general de subastas, y no se adaptan inmediatamente al problema de determinar perfiles de estrategias en equilibrio de Nash en mercados eléctricos no regulados.

El artículo esta organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se describe en detalle el problema. En la sección 3 se presenta el problema con todo rigor, como un problema de teoría de probabilidades. En la sección 4 se muestra cómo el problema planteado en la sección 3 se puede convertir en el problema de determinar funciones que satisfacen ciertas condiciones diferenciales. En la sección 5 se presenta finalmente el método que se basa en los desarrollos de las secciones 3 y 4.

2. Descripción del problema

En esta sección seguiremos de cerca a von der Fehr y Harbord [1]. Supondremos que el sistema generador de electricidad está formado por N firmas generadoras $g_1, \ldots, g_N$, que cada firma g_j tiene una única planta generadora, que es capaz de producir a lo sumo cierto número entero positivo k_j de unidades por día, y que tiene un costo de producción unitario $c_j \geq 0$. Sea $K = \sum_{j=1}^{N} k_j$ la máxima cantidad de electricidad que puede generar el sistema en un día. Suponemos que la cantidad de electricidad demandada por los consumidores en un día es una variable aleatoria d que toma valores enteros $1, 2, \ldots, K$, y que la probabilidad de que d tome el valor i es π_i. Suponemos que ciertas políticas del mercado exigen que las firmas sólo pueden ofrecer precios unitarios $p \in \mathbb{R}$ en cierto intervalo $[0,\overline{p}]$. Se supone que toda la información anterior es de conocimiento común. El mecanismo por el cual la electricidad se compra es el siguiente. Cada día (día t), cada g_j envía secretamente un número $p_j \in [0,\overline{p}]$ a un ente regulador, que expresa el deseo de g_j de producir el siguiente día (día $t+1$) cualquier cantidad de electricidad igual o inferior a su capacidad k_j, siempre y cuando se le pague a p_j o más por unidad. En este punto hacemos énfasis en que los generadores deciden sus p_j con conocimiento de la distribución de probabilidad de d, es decir, de los π_i, pero sin saber el valor particular que d toma el día $t+1$. Una vez la entidad reguladora recibe los precios unitarios ofrecidos $p_1,\ldots,p_N$, ella escoge un *ranqueo* de estos precios, es decir, escoge una tupla $(r_1,\ldots,r_N)$ con $\{r_1,\ldots,r_N\} = \{1,\ldots,N\}$ y tal que $p_{r_1} \le p_{r_2} \le \ldots \le p_{r_N}$. Note que este ranqueo no es necesariamente único. Por ello el regulador considera todos los posibles ranqueos de los precios $p_1,\ldots,p_N$, y escoge uno de ellos de acuerdo a una distribución uniforme de probabilidad. Una vez el regulador ha escogido un ranqueo r para los precios $p_1,\ldots,p_N$, y conoce el valor particular que d toma el día $t+1$, este considera los números $K_0 = 0$ y $K_j = \sum_{i=1}^{j} k_{r_i}$ para $j = 1,\ldots,N$, y determina el valor de j para el cual $K_{j-1} < d \le K_j$. Si llamamos a este valor j_s, entonces el regulador determina que a cada generador g_{r_j} con $j < j_s$ se le compre toda su capacidad k_{r_j}, que al generador $g_{r_{j_s}}$ se le compre $d - K_{j_s-1}$, que al resto de los generadores no se les compre nada, y que a todos se les pague $p_{r_{j_s}}$ por unidad. A este valor $p_{r_{j_s}}$ se lo llama *precio spot*. Esto explica el uso de la letra s en la notación. De acuerdo a esto, la utilidad de cada generador g_{r_j} con $j < j_s$ será $u_{r_j} = k_{r_j}(p_{r_{j_s}} - c_{r_j})$, la utilidad del generador $g_{r_{j_s}}$ será $u_{r_{j_s}} = (d - K_{j_s-1})(p_{r_{j_s}} - c_{r_{j_s}})$, y la utilidad del resto de los generadores será cero. Como es usual, vamos a suponer que las firmas desean maximizar sus utilidades, y que son agentes racionales. Se puede entonces interpretar toda la situación como la repetición de un juego clásico no cooperativo de tres etapas: primero, las firmas escogen sus precios en el intervalo $[0,\overline{p}]$; luego la naturaleza escoge un valor de la demanda de acuerdo a la distribución de probabilidad $Pr(d = i) = \pi_i$, $i = 1,\ldots,K$; y finalmente el regulador hace el despacho de acuerdo a las reglas ya mencionadas. Note que el último paso conlleva una selección aleatoria que tiene el fin de resolver empates. Las utilidades de las firmas dependen de los precios ofrecidos por todas las firmas, el valor que tome la demanda, y el ranqueo particular escogido por el regulador. Las condiciones del juego llevan a los jugadores a ofrecer sus precios de manera aleatoria, de acuerdo a un perfil de estrategias mixtas $F_1,\ldots,F_N$ que sea un equilibrio de Nash. Una estrategia mixta para ofrecer precios es descrita por una función de distribución de probabilidad F definida en el intervalo $[0,\overline{p}]$[1]: si $a,b \in [0,\overline{p}]$ con $a < b$, la probabilidad de escoger un precio $p \in (a,b]$, es $F(b) - F(a)$. Un perfil de estrategias mixtas $F_1,\ldots,F_N$ es un equilibrio de Nash si para cada $j = 1,\ldots,N$,

$$E_{F_1,\ldots,F_j,\ldots,F_N}[u_j] \ge E_{F_1,\ldots,F_j^*,\ldots,F_N}[u_j] \tag{1}$$

para toda estrategia mixta F_j^*. Aquí u_j denota la utilidad del generador g_j.

[1]Esto significa que F es monótona no decreciente, continua por la derecha, y que $F(0) = 0$ y $F(\overline{p}) = 1$.

Nuestro propósito es proponer un método para construir, a partir de $k_1, \ldots, k_N$, $c_1, \ldots, c_N$, $\pi_1, \ldots, \pi_K$, perfiles $F_1, \ldots, F_N$ que sean equilibrios de Nash.

3. Formalización del problema

Este juego se puede ver como un experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es

$$\Omega = \{(p_1, \ldots, p_N, r, d) : r \in S_N \text{ t.q. } 0 \leq p_{r_1} \leq \ldots \leq p_{r_N} \leq \overline{p}; d \in \{1, \ldots, K\}\} \quad (2)$$

donde S_N denota el conjunto $\{(r_1, \ldots, r_N) : \{r_1, \ldots, r_N\} = \{1, \ldots, N\}\}$.

Vamos ahora a describir la sigma álgebra $\mathcal{F}$ de eventos.

Observemos que

$$\Omega = \biguplus_{r \in S_N, d \in \{1, \ldots, K\}} \Omega_{r,d}$$

donde $\Omega_{r,d} = \{(p_1, \ldots, p_N, r, d) : 0 \leq p_{r_1} \leq \ldots \leq p_{r_N} \leq \overline{p}\}$. Para cada $r \in S_N$ y $d \in \{1, \ldots, K\}$, tenemos que $\Omega_{r,d}$ se corresponde biyectivamente con el subconjunto $\{(x_1, \ldots, x_N) : 0 \leq x_{r_1} \leq \ldots \leq x_{r_N} \leq \overline{p}\}$ de $\mathbb{R}^N$, mediante la función $i_{r,d}$ que envía $(p_1, \ldots, p_N, r, d)$ en $(p_1, \ldots, p_N)$. Un $A \subset \Omega$ será miembro de $\mathcal{F}$ si para cada $r \in S_N$ y $d \in \{1, \ldots, K\}$, la imagen bajo $i_{r,d}$ de $A \cap \Omega_{r,d}$ es un subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^N$. Es fácil ver que esta colección es una sigma álgebra de Ω.

Vamos ahora a definir una función de probabilidad $P_{F_1,\ldots,F_N} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ correspondiente a una elección de estrategias mixtas $F_1, \ldots, F_N$ por parte de las firmas $g_1, \ldots, g_N$. Nuestro plan para definir $P_{F_1,\ldots,F_N}$ es como sigue. Sean $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N, \mathbf{d}$ funciones que van de Ω en $\mathbb{R}$, y que envían $(p_1, \ldots, p_N, r, d)$ en $p_1, \ldots, p_N, d$, respectivamente. Cada una de estas funciones devuelve subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ en miembros de $\mathcal{F}$. Estas funciones son por tanto variables aleatorias (v.a.). Asimismo, sea $\mathbf{r}$ la función que va de Ω en S_N, que envía a $(p_1, \ldots, p_N, r, d)$ en r. Si se dota al conjunto S_N de la σ-álgebra formada por todos sus subconjuntos, entonces $\mathbf{r}$ devuelve miembros de ésta σ-álgebra en miembros de $\mathcal{F}$.

Para capturar el juego descrito en la sección anterior, debemos definir una medida de probabilidad $P_{F_1,\ldots,F_N}$ en $\mathcal{F}$, tal que

1. cada $\mathbf{p}_j$ tenga función acumulada F_j,
2. $\mathbf{d}$ tenga función de densidad $\pi_1, \ldots, \pi_K$,
3. $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N, \mathbf{d}$ sean v.a. independientes, y
4. $P_{F_1,\ldots,F_N}(\mathbf{r} = r \mid \mathbf{p}_1 = p_1, \ldots, \mathbf{p}_N = p_N, \mathbf{d} = d)$ sea $\frac{1}{|R(p_1,\ldots,p_N)|}$, donde $R(p_1, \ldots, p_N) = \{s \in S_N : p_{s_1} \leq \ldots \leq p_{s_N}\}$, si $p_{r_1} \leq \ldots \leq p_{r_N}$; y sea cero si no se cumple que $p_{r_1} \leq \ldots \leq p_{r_N}$.

Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces definimos $P_{F_1,\ldots,F_N}(A)$ como

$$\sum_{r,d} \int_{i_{r,d}(A \cap \Omega_{r,d})} \frac{1}{|R(x_1, \ldots, x_N)|} \cdot \pi_d \cdot dF_1(x_1) \cdots dF_N(x_N) \tag{3}$$

donde la integral es en el sentido de Riemann-Stieljes.

Se puede verificar que la función $P_{F_1,\ldots,F_N}$ así definida, tiene las propiedades 1, 2, 3 y 4.

El siguiente resultado es una bien conocida caracterización de los equilibrios de Nash, que será fundamental en este artículo. Para enunciarlo, debemos antes definir la noción de *soporte* de una estrategia mixta F. Sea μ_F la medida en $[0, \overline{p}]$ inducida por F. El soporte de una estrategia mixta F, es el menor subconjunto cerrado S de $[0, \overline{p}]$ con la propiedad de que $\mu_F([0, \overline{p}] - S)) = 0$. También denotaremos como $\mathbf{u}_j$ a la función que va de Ω en $\mathbb{R}$, que envía a $(p_1, \ldots, p_N, r, d)$ en la utilidad obtenida por g_j bajo las circunstancias $(p_1, \ldots, p_N, r, d)$. Estas funciones devuelven conjuntos de Borel en miembros de $\mathcal{F}$, y por lo tanto son variables aleatorias.

Teorema 1. *Un perfil de estrategias mixtas $F_1, \ldots, F_N$ es un equilibrio de Nash si y sólo si para cada $j = 1, \ldots, N$, la restricción al soporte de F_j de la función $\Phi_j : [0, \overline{p}] \to \mathbb{R}$ definida como $\Phi_j(p) = E_{F_1,\ldots,F_N}[\mathbf{u}_j | \mathbf{p}_j = p]$, es una función constante.*

4. El criterio

Para poder formular nuestro criterio, debemos imponer ciertas restricciones a los perfiles de estrategias mixtas $F_1, \ldots, F_N$ que consideraremos. Estas restricciones, que a primera vista parecen demasiado fuertes, son en principio justificadas por los resultados obtenidos en von der Fehr y Harbord (1993) en el caso en que todos los generadores tienen la misma capacidad.

En la siguiente definición seguiremos la siguiente terminología. Cuando digamos que una función F es continua *(respectivamente,* derivable*) en un intervalo I de $\mathbb{R}$, se entenderá que es continua (respectivamente, derivable) en el sentido usual en los puntos interiores de I, y que es continua lateralmente (resp. derivable lateralmente) en aquellos puntos de I que no son interiores. Si F es derivable en I, entonces F' denotará a la función que en los puntos interiores de I es la derivada usual de F, y en los puntos de I no interiores, es la derivada lateral correspondiente.*

Definición 1. *Diremos que un perfil de estrategias mixtas $F_1, \ldots, F_N$ es* admisible*, si existen números $0 < p_N^m \leq p_{N-1}^m \leq \ldots \leq p_1^m < \overline{p}$, tales que:*

i) para cada j, $F_j(p) = 0$ para todo $p \in [0, p_j^m]$

ii) existe a lo sumo un j tal que $F_j(\overline{p}-) := \lim_{p \to \overline{p}^-} F_j(p) < 1$

iii) si para cada j se define

$$\tilde{F}_j(p) = \begin{cases} F_j(p) & si\ p \in [0, \overline{p}) \\ F_j(\overline{p}-) & si\ p = \overline{p} \end{cases}$$

entonces $\tilde{F}_j$ es continua en $[0, \overline{p}]$; derivable en el intervalo $[p_1^m, \overline{p}]$, y en cada uno de los intervalos, $[p_i^m, p_{i-1}^m]$, $i = 2, \ldots, j$; y en el intervalo $[p_1^m, \overline{p}]$, y en cada uno de los intervalos, $[p_i^m, p_{i-1}^m]$, $i = 2, \ldots, j$, la función $\tilde{F}_j'$ es positiva y continua.

Por brevedad, a un perfil de estrategias mixtas admisible lo llamaremos *perfil admisible*. Si $F_1, \ldots, F_N$ es un perfil admisible, entonces *de aquí en adelante*, F_j' denotará a la función cuyo dominio es $[0, \overline{p}]$, que es la derivada usual (bilateral) en aquellos p en que tal derivada existe, y que vale cero en aquellos p en que tal derivada no existe. Se cumple que para todo $a, b \in [0, \overline{p})$ con $a < b$, $\int_a^b F_j'(\rho) d\rho = F_j(b) - F_j(a)$. Además, el soporte de F_j es $[p_j^m, \overline{p}]$. Observemos que si los g_j juegan de acuerdo a un perfil admisible, entonces $Pr(\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

Teorema 2. *Sea $F_1, \ldots, F_N$ un perfil admisible. Entonces*

1. *cada una de las funciones Φ_j es continua el intervalo $[0, \overline{p}]$.*
2. *para todo $p \in [0, \overline{p}) - \{p_i^m : i = 1, \ldots, N\}$, $\Phi_j'(p)$ existe y es dada por*

$$\sum_{\substack{A \cup \{c\} \cup B = \{1, \ldots, N\} \\ j \in A}} - \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A + i} \right) k_j (p - c_j) \right.$$
$$\left. \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq j}} F_a(p) \prod_{b \in B} \left(F_b(\overline{p}-) - F_b(p) \right) F_c'(p) \left[1 + \sum_{b \in B} \frac{1 - F_b(\overline{p}-)}{F_b(\overline{p}-) - F_b(p)} \right] \right\}$$
$$+$$
$$\sum_{A \cup \{j\} \cup B = \{1, \ldots, N\}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k_j} i \pi_{K_A + i} \right) \right.$$
$$\left. \frac{d}{dp} \left((p - c_j) \prod_{a \in A} F_a(p) \prod_{b \in B} \left(F_b(\overline{p}-) - F_b(p) \right) \left[1 + \sum_{b \in B} \frac{1 - F_b(\overline{p}-)}{F_b(\overline{p}-) - F_b(p)} \right] \right) \right\} \tag{4}$$

donde K_A denota $\sum_{a \in A} k_a$, para cada $A \subset \{1, \ldots, N\}$.

Demostración. Sea $p \in [0, \overline{p}]$.

$$\Phi_j(p) = E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_j = p] =$$

$$\underset{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}\\ i\neq j}}{\int\cdots\int} E[\mathbf{u}_j|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p] \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \ +$$

$$\sum_{n\neq j} \underset{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}\\ i\neq n,j}}{\int\cdots\int} E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p](1-F_n(\overline{p}-)) \prod_{i\neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq n,j} d\rho_i$$

De aquí en adelante llamaremos *primera parte* a

$$\underset{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}\\ i\neq j}}{\int\cdots\int} E[\mathbf{u}_j|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p] \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \tag{5}$$

y *segunda parte* a

$$\sum_{n\neq j} \underset{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}\\ i\neq n,j}}{\int\cdots\int} E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p](1-F_n(\overline{p}-)) \prod_{i\neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq n,j} d\rho_i. \tag{6}$$

Consideremos ahora todas las particiones de $\{1, \ldots, N\}$ de la forma $A \uplus \{c\} \uplus B$. Con cada una de estas definimos el evento

$$\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B) := (\mathbf{p}_a < \mathbf{p}_c < \mathbf{p}_b, a \in A, b \in B) \wedge (K_A < \mathbf{d} \leq K_A + k_c). \tag{7}$$

Que este evento ocurra significa que a cada g_a con $a \in A$ se le compra toda su capacidad k_a, a g_c se le compra $d - K_A$, que a todos estos se les paga un precio unitario p_c, que a los g_b con $b \in B$ no se les compra nada, y que excepto por g_c nadie ofrece exactamente p_c. Estos eventos son mutuamente excluyentes, y debido a nuestras suposiciones acerca de las F_i, su unión tiene probabilidad 1.

Vamos ahora a calcular una fórmula explícita para la *primera parte*, (5), y su derivada. Si condicionamos respecto a los eventos $\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B)$, tenemos que

$$E[\mathbf{u}_j|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p] =$$

$$\sum_{A\uplus\{c\}\uplus B} E[\mathbf{u}_j|\mathcal{E}(A\uplus\{c\}\uplus B), (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p] Pr\left(\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B)|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p\right) \tag{8}$$

Para abreviar la escritura denotemos, cuando sea necesario, a

$$E[\mathbf{u}_j|\mathcal{E}(A \cup \{c\} \cup B), (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p]$$

como $E_{A\cup\{c\}\cup B}$, y a

$$Pr\left(\mathcal{E}(A \cup \{c\} \cup B)|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p\right)$$

como $Pr_{A\cup\{c\}\cup B}$.

Usando (8), la primera parte (o sea (5)) toma la forma

$$\int \cdots \int_{0\leq\rho_i<\overline{p}, i\neq j} \left(\sum_{A\cup\{c\}\cup B} E_{A\cup\{c\}\cup B} Pr_{A\cup\{c\}\cup B} \right) \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \tag{9}$$

que es

$$\sum_{A\cup\{c\}\cup B} \int \cdots \int_{0\leq\rho_i<\overline{p}, i\neq j} E_{A\cup\{c\}\cup B} Pr_{A\cup\{c\}\cup B} \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \tag{10}$$

Nos detenemos aquí para estudiar el término $Pr_{A\cup\{c\}\cup B}$. Este es

$$Pr\left((\mathbf{p}_a < \mathbf{p}_c < \mathbf{p}_b, a \in A, b \in B) \wedge (K_A < \mathbf{d} \leq K_A + k_c)|(\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p\right).$$

Si los ρ_i con $i \neq j$ y p cumplen las desigualdades, es decir, si $\rho_a < \rho_c < \rho_b, \forall a \in A, \forall b \in B$ donde ρ_j significa p, entonces el evento

$$(\mathbf{p}_a < \mathbf{p}_c < \mathbf{p}_b, a \in A, b \in B) \wedge (K_A < \mathbf{d} \leq K_A + k_c) \tag{11}$$

ocurre con probabilidad $Pr(K_A < \mathbf{d} \leq K_A + k_c) = \sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A+i}$; y si los ρ_i con $i \neq j$ y p no cumplen alguna de las desigualdades, entonces el evento (11) no puede ocurrir, con lo que su probabilidad es cero.

Esto nos permiten reescribir a

$$\int_{0\leq\rho_i<\overline{p}, i\neq j} \cdots \int E_{A\cup\{c\}\cup B} Pr_{A\cup\{c\}\cup B} \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \tag{12}$$

como

$$\int_{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}, i\neq j \\ \rho_a<\rho_c<\rho_b, \forall a\in A, \forall b\in B (\rho_j=p)}} \cdots \int E_{A\cup\{c\}\cup B} \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A+i} \right) \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{i\neq j} d\rho_i \tag{13}$$

Vamos ahora a expresar $E_{A\cup\{c\}\cup B}$ explícitamente. Dividimos en tres casos: $j \in A$, $j = c$ y $j \in B$.

Caso $j \in A$: En este caso el jugador g_j propuso un precio por debajo del precio spot, que es ρ_c, y entonces su utilidad esperada $E_{A\cup\{c\}\cup B}$ es

$$k_j(\rho_c - c_j). \tag{14}$$

Con esto tenemos que (13) es

$$\int\limits_{p<\rho_c<\overline{p}} \left(\int\limits_{\substack{0\leq\rho_a<\rho_c\\ a\in A, a\neq j}} \cdots \int \int\limits_{\rho_c<\rho_b<\overline{p}} \cdots \int k_j(\rho_c - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A+i} \right) \prod_{i\neq j} F_i'(\rho_i) \prod_{b\in B} d\rho_b \prod_{a\in A, a\neq j} d\rho_a \right) d\rho_c \tag{15}$$

que a su vez es

$$\int_{p<\rho_c<\overline{p}} \left(k_j(\rho_c - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A+i} \right) \prod_{a\in A, a\neq j} F_a(\rho_c) \prod_{b\in B} (F_b(\overline{p}-) - F_b(\rho_c)) \right) F_c'(\rho_c) d\rho_c \tag{16}$$

Esta es una función de p que es claramente continua en todo su dominio $[0,\overline{p}]$. Además esta función es derivable por lo menos en cada $p \in [0,\overline{p}) - \{p_i^m : i = 1,\ldots,N\}$, y su derivada es

$$-k_j(p - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A+i} \right) \prod_{a\in A, a\neq j} F_a(p) \prod_{b\in B} (F_b(\overline{p}-) - F_b(p)) F_c'(p).$$

Caso $c = j$: En este caso el jugador g_j determina el precio spot, con lo que su utilidad esperada $E_{A\cup\{c\}\cup B}$ es

$$E[(\mathbf{d} - K_A).(p - c_j) | \mathcal{E}(A \cup \{j\} \cup B), (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq j), \mathbf{p}_j = p]. \tag{17}$$

Pero

$$E[(\mathbf{d}-K_A).(p-c_j)|\mathcal{E}(A\cup\{j\}\cup B),(\mathbf{p}_i=\rho_i,i\neq j),\mathbf{p}_j=p]=$$

$$(p-c_j).\left(E[\mathbf{d}|K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j]-K_A\right)=$$

$$(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{K}E[\mathbf{d}|\mathbf{d}=i,K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j]Pr(\mathbf{d}=i|K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j)-K_A\right)=$$

$$(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{k_j}(K_A+i).Pr(\mathbf{d}=K_A+i|K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j)-K_A\right)=$$

$$(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{k_j}(K_A+i).\frac{\pi_{K_A+i}}{\sum_{l=1}^{k_j}\pi_{K_A+l}}-K_A\right)=$$

$$\frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}.\left(\sum_{i=1}^{k_j}(K_A+i).\pi_{K_A+i}-K_A.\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}\right)=$$

$$\frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}.\left(\sum_{i=1}^{k_j}i\pi_{K_A+i}\right).\tag{18}$$

Con esto tenemos que podemos escribir (13) como

$$\int_{\substack{0\leq\rho_a<p\\ a\in A,a\neq j}}\cdots\int\int_{\substack{p\leq\rho_b<\overline{p}\\ b\in B}}\cdots\int\frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}\left(\sum_{i=1}^{k_j}i\pi_{K_A+i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}\right)\prod_{i\neq j}F_i'(\rho_i)\prod_{i\neq j}d\rho_i.\tag{19}$$

Ahora,

$$\int\limits_{\substack{0\le\rho_a<p\\ a\in A,a\neq j}}\cdots\int\int\limits_{\substack{p\le\rho_b<\overline{p}\\ b\in B}}\cdots\int \frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}\right)\prod_{i\neq j}F_i'(\rho_i)\prod_{i\neq j}d\rho_i =$$

$$\int\limits_{\substack{0\le\rho_a<p\\ a\in A,a\neq j}}\cdots\int\int\limits_{\substack{p\le\rho_b<\overline{p}\\ b\in B}}\cdots\int (p-c_j)\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\prod_{i\neq j}F_i'(\rho_i)\prod_{i\neq j}d\rho_i =$$

$$(p-c_j)\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p)). \tag{20}$$

Esta es una función de p que es claramente continua en todo su dominio $[0,\overline{p}]$. Además, esta función es derivable por lo menos en cada $p\in[0,\overline{p})-\{p_i^m : i=1,\ldots,N\}$, y su derivada la indicaremos como

$$\frac{d}{dp}\left\{(p-c_j)\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))\right\}. \tag{21}$$

Caso $j\in B$: En este caso la utilidad del jugador g_j es cero.

De todo lo anterior se concluye que la primera parte es una función de p que, al ser una suma de funciones continuas en $[0,\overline{p}]$, es continua en dicho intervalo. Además, ella es una suma de funciones que son derivables por lo menos en todo $p\in[0,\overline{p})-\{p_i^m : i=1,\ldots,N\}$, con lo que ella misma es derivable en dicho conjunto, y su derivada allí es

$$\sum_{A\cup\{c\}\cup B,j\in A} -k_j(p-c_j)\left(\sum_{i=1}^{k_c}\pi_{K_A+i}\right)\prod_{a\in A,a\neq j}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))$$
$$+$$
$$\sum_{A\cup\{j\}\cup B}\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\frac{d}{dp}\left\{(p-c_j)\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))\right\} \tag{22}$$

Pasamos ahora a calcular una fórmula explícita para la *segunda parte*,(6), y su derivada. Si condicionamos respecto a los eventos $\mathcal{E}(A\cup\{c\}\cup B)$, tenemos que

$$E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p] =$$

$$\sum_{A \uplus \{c\} \uplus B} \{E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_n = \overline{p}, \mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B), (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p] \cdot$$
$$Pr\left(\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B)|\mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p\right)\}. \quad (23)$$

Para abreviar la escritura denotaremos, cuando sea necesario, a

$$E[\mathbf{u}_j|\mathbf{p}_n = \overline{p}, \mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B), (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p]$$

como $E_{A \uplus \{c\} \uplus B}$, y a

$$Pr\left(\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B)|\mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p\right)$$

como $Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B}$.

De acuerdo a lo anterior, la segunda parte es

$$\sum_{n \neq j} \int \cdots \int_{\substack{0 \leq \rho_i < \overline{p} \\ i \neq n,j}} \left(\sum_{A \uplus \{c\} \uplus B = \{1,\ldots,N\}} E_{A \uplus \{c\} \uplus B} Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B} \right) (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n,j} d\rho_i =$$

$$\sum_{A \uplus \{c\} \uplus B = \{1,\ldots,N\}} \sum_{n \neq j} \int \cdots \int_{\substack{0 \leq \rho_i < \overline{p} \\ i \neq n,j}} E_{A \uplus \{c\} \uplus B} Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B} (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n,j} d\rho_i \quad (24)$$

Ahora, como $\mathcal{E}(A \uplus \{c\} \uplus B)$ y $\mathbf{p}_n = \overline{p}$ pueden ocurrir simultáneamente sólo si $n \in B$, tenemos que la anterior expresión se reduce a

$$\sum_{A \uplus \{c\} \uplus B = \{1,\ldots,N\}} \sum_{\substack{n \in B \\ n \neq j}} \int \cdots \int_{\substack{0 \leq \rho_i < \overline{p} \\ i \neq n,j}} E_{A \uplus \{c\} \uplus B} Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B} (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n,j} d\rho_i \quad (25)$$

Además, cuando $j \in B$ sabemos que la ganancia de g_j es cero, con lo que la anterior expresión es

$$\sum_{\substack{A \uplus \{c\} \uplus B = \{1,\ldots,N\} \\ j \notin B}} \sum_{n \in B} \int \cdots \int_{\substack{0 \leq \rho_i < \overline{p} \\ i \neq n,j}} E_{A \uplus \{c\} \uplus B} Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B} (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n,j} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n,j} d\rho_i \quad (26)$$

Consideramos ahora dos casos, $j \in A$ y $j = c$, y en cada uno de ellos determinamos explícitamente a $E_{A \uplus \{c\} \uplus B}$ y a $Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B}$.

Caso $j \in A$: En este caso $E_{A \uplus \{c\} \uplus B}$ es

$$k_j(\rho_c - c_j).$$

Consideremos ahora el término $Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B}$. Este es

$$Pr\left((\mathbf{p}_a < \mathbf{p}_c < \mathbf{p}_b, a \in A, b \in B) \wedge (K_A < \mathbf{d} \le K_A + k_c) | \mathbf{p}_n = \overline{p}, (\mathbf{p}_i = \rho_i, i \neq n, j), \mathbf{p}_j = p\right).$$

Si los ρ_i con $i \neq n, j$, p y $\overline{p}$ cumplen las desigualdades, es decir, si $\rho_a < \rho_c < \rho_b, \forall a \in A, \forall b \in B$ donde ρ_j significa p, y ρ_n significa $\overline{p}$, entonces el evento

$$(\mathbf{p}_a < \mathbf{p}_c < \mathbf{p}_b, a \in A, b \in B) \wedge (K_A < \mathbf{d} \le K_A + k_c) \tag{27}$$

ocurre con probabilidad $Pr(K_A < \mathbf{d} \le K_A + k_c) = \sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A + i}$; en caso contrario, el evento (27) no puede ocurrir, con lo que su probabilidad es cero.

Esto nos dice que si $j \in A$ y $n \in B$,

$$\underset{\substack{0 \le \rho_i < \overline{p} \\ i \neq n, j}}{\int \cdots \int} E_{A \uplus \{c\} \uplus B} Pr_{A \uplus \{c\} \uplus B} (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n, j} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n, j} d\rho_i =$$

$$\int_{p < \rho_c < \overline{p}} \left(\underset{\substack{0 \le \rho_a < \rho_c \\ a \in A, a \neq j}}{\int \cdots \int} \underset{\substack{\rho_c < \rho_b \\ b \in B, b \neq n}}{\int \cdots \int} k_j(\rho_c - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A + i} \right) (1 - F_n(\overline{p}-)) \prod_{i \neq n, j, c} F_i'(\rho_i) \prod_{i \neq n, j, c} d\rho_i \right) F_c'(\rho_c) d\rho_c =$$

$$\int_{p < \rho_c < \overline{p}} \left(k_j(\rho_c - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A + i} \right) \frac{(1 - F_n(\overline{p}-))}{F_n(\overline{p}-) - F_n(\rho_c)} \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq j}} F_a(\rho_c) \prod_{b \in B} (F_b(\overline{p}-) - F_b(\rho_c)) \right) F_c'(\rho_c) d\rho_c \tag{28}$$

La anterior expresión es una función de p que es continua en el intervalo $[0, \overline{p}]$. Esta función es derivable por lo menos en cada $p \in [0, \overline{p}) - \{p_i^m : i = 1, \ldots, N\}$, y su derivada es

$$-k_j(p - c_j) \left(\sum_{i=1}^{k_c} \pi_{K_A + i} \right) \frac{1 - F_n(\overline{p}-)}{F_n(\overline{p}-) - F_n(p)} \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq j}} F_a(p) \prod_{b \in B} (F_b(\overline{p}-) - F_b(p))) F_c'(p) \tag{29}$$

Caso $j = c$: En este caso $E_{A \uplus \{c\} \uplus B}$ es

$$E[(\mathbf{d}-K_A)(p-c_j)|\mathcal{E}(A\cup\{j\}\cup B),\mathbf{p}_n=\overline{p},(\mathbf{p}_i=\rho_i,i\neq n,j),\mathbf{p}_j=p]=$$

$$(p-c_j)\left(E[\mathbf{d}|\mathcal{E}(A\cup\{j\}\cup B),\mathbf{p}_n=\overline{p},(\mathbf{p}_i=\rho_i,i\neq n,j),\mathbf{p}_j=p]-K_A\right)=$$

$$(p-c_j)\left(E[\mathbf{d}|K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j]-K_A\right)=$$

$$\frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}.\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right). \quad (30)$$

Consideremos ahora a $Pr_{A\cup\{c\}\cup B}$. Recordemos que esta es

$$Pr\left(\mathbf{p}_a<\mathbf{p}_j<\mathbf{p}_b,a\in A,b\in B;K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_j|\mathbf{p}_n=\overline{p},(\mathbf{p}_i=\rho_i,i\neq n,j),\mathbf{p}_j=p\right) \quad (31)$$

Si los ρ_i con $i\neq n,j$, p y $\overline{p}$ cumplen las desigualdades, es decir, si $\rho_a<p<\rho_b,\forall a\in A,\forall b\in B$ donde ρ_n significa $\overline{p}$, entonces el evento

$$(\mathbf{p}_a<\mathbf{p}_c<\mathbf{p}_b,a\in A,b\in B)\wedge(K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_c) \quad (32)$$

ocurre con probabilidad $Pr(K_A<\mathbf{d}\leq K_A+k_c)=\sum_{i=1}^{k_c}\pi_{K_A+i}$; en caso contrario, el evento (32) no puede ocurrir, con lo que su probabilidad es cero.

Esto nos dice que si $j=c$ y $n\in B$,

$$\underset{\substack{0\leq\rho_i<\overline{p}\\ i\neq n,j}}{\int\cdots\int} E_{A\cup\{c\}\cup B}Pr_{A\cup\{c\}\cup B}(1-F_n(\overline{p}-))\prod_{i\neq n,j}F_i'(\rho_i)\prod_{i\neq n,j}d\rho_i=$$

$$\underset{\substack{0\leq\rho_a<p\\ a\in A}}{\int\cdots\int}\ \underset{\substack{p<\rho_b<\overline{p}\\ b\in B,b\neq n}}{\int\cdots\int}\frac{(p-c_j)}{\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}}.\left(\sum_{i=1}^{k_j}i\pi_{K_A+i}\right).\left(\sum_{i=1}^{k_j}\pi_{K_A+i}\right)(1-F_n(\overline{p}-))\prod_{i\neq n,j}F_i'(\rho_i)\prod_{i\neq n,j}d\rho_i=$$

$$(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{k_j}i\pi_{K_A+i}\right).(1-F_n(\overline{p}-))\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B,b\neq n}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))=$$

$$(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{k_j}i\pi_{K_A+i}\right).\frac{1-F_n(\overline{p}-)}{F_n(\overline{p}-)-F_n(p)}.\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p)). \quad (33)$$

La última expresión es una función de p que es continua en el intervalo $[0,\overline{p}]$. Esta función es derivable por lo menos en cada $p\in[0,\overline{p})-\{p_i^m:i=1,\ldots,N\}$. Su derivada la indicaremos como

$$\frac{d}{dp}\left\{(p-c_j).\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right).(1-F_n(\overline{p}-))\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B,b\neq n}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))\right\}.$$

De todo lo anterior se concluye que la *segunda parte* es una función de p que, al ser una suma de funciones continuas en $[0,\overline{p}]$, es continua en dicho intervalo. Además, ella es una suma de funciones que son derivables por lo menos en todo $p \in [0,\overline{p}) - \{p_i^m : i = 1,\dots,N\}$, con lo que ella misma es derivable en dicho conjunto, y su derivada allí es

$$\sum_{\substack{A\cup\{c\}\cup B\\ j\in A}}\sum_{n\in B} -k_j(p-c_j)\left(\sum_{i=1}^{k_c}\pi_{K_A+i}\right)\frac{1-F_n(\overline{p}-)}{F_n(\overline{p}-)-F_n(p)}\prod_{a\in A,a\neq j}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))$$
$$+$$
$$\sum_{A\cup\{j\}\cup B}\left(\sum_{i=1}^{k_j} i\pi_{K_A+i}\right)\frac{d}{dp}\left\{(p-c_j)\prod_{a\in A}F_a(p)\prod_{b\in B}(F_b(\overline{p}-)-F_b(p))\sum_{n\in B}\frac{1-F_n(\overline{p}-)}{F_n(\overline{p}-)-F_n(p)}\right\} \tag{34}$$

Concluímos que para cada $j = 1,\dots,N$, la función Φ_j es una función continua en su dominio, $[0,\overline{p}]$; que es derivable por lo menos en cada $p \in [0,\overline{p}) - \{p_i^m : i = 1,\dots,N\}$; y que, de acuerdo a las fórmulas (22) y (34), su derivada allí está dada por la fórmula en el enunciado del presente teorema. □

Podemos ya formular un criterio para determinar si un perfil admisible dado de funciones $F_1,\dots,F_N$ es un equilibrio de Nash, el cual sirve de base para el método de construcción de dichos equilibrios que presentaremos en la siguiente sección.

Teorema 3. *Sea $F_1,\dots,F_N$ un perfil admisible. $F_1,\dots,F_N$ es un equilibrio de Nash si y sólo si para todo $k = 1,\dots,N$, si $j \geq k$ entonces Φ_j' es cero en el intervalo (p_k^m, p_{k-1}^m) (aquí se toma p_0^m como $\overline{p}$).*

Demostración. Supongamos que $F_1,\dots,F_N$ es un equilibrio de Nash. De acuerdo al teorema 1, para cada $j = 1,\dots,N$, la función Φ_j es constante en el intervalo $[p_j^m,\overline{p}]$. Esto implica que para cada $k = 1,\dots,N$, si $j \geq k$ entonces Φ_j será constante en el intervalo (p_k^m, p_{k-1}^m), ya que, debido a que $0 < p_N^m \leq \dots \leq p_1^m < \overline{p}$, $(p_k^m, p_{k-1}^m) \subset [p_j^m,\overline{p}]$. En consecuencia, Φ_j' es cero en (p_k^m, p_{k-1}).

Recíprocamente, supongamos que para cada $k = 1,\dots,N$, si $j \geq k$ entonces Φ_j' es cero en el intervalo (p_k^m, p_{k-1}^m), y por tanto Φ_j es constante en este intervalo. Esto implica que para cada $j = 1,\dots,N$, la función Φ_j es constante en el intervalo (p_k^m, p_{k-1}^m), para cada $k \leq j$. Ahora, como $\cup_{k=1}^{j}(p_k^m, p_{k-1}^m) = [p_j^m,\overline{p}] - \{p_k^m : k = 0,\dots,j\}$, la función Φ_j, al ser continua, tendrá que ser constante en todo el intervalo $[p_j^m,\overline{p}]$. Luego, por el teorema 1, tenemos que $F_1,\dots,F_N$ es un equilibrio de Nash.

□

5. Método de construcción de equilibrios de Nash

Vamos ahora a formular un procedimiento computacional para construir perfiles admisibles en equilibrio de Nash, basado en el criterio presentado en la sección anterior (Teorema 3). Debemos enfatizar que el método que propondremos, al emplear métodos numéricos para solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales (ordinarios), y al basar algunas decisiones en juicios, por parte del usuario, acerca de imágenes en una pantalla de computador, no pretende producir soluciones matemáticamente certificadas.

Partimos de unos generadores $g_1, \ldots, g_N$, con capacidades diarias de producción $k_1, \ldots, k_N$ y costos de producción unitarios $c_1, \ldots, c_N$; de una distribución de probabilidad de la demanda diaria $\pi_1, \ldots, \pi_K$, y de un precio unitario máximo $\overline{p}$.

Empezamos por elegir el generador que, intuitivamente, parece tener ventaja sobre los demás. Después de una renumeración de los generadores, podemos suponer que este jugador es g_1. Luego se intenta construir un perfil admisible $F_1, \ldots, F_N$ que sea un equilibro de Nash, con $F_2(\overline{p}-) = \cdots = F_N(\overline{p}-) = 1$, mediante el procedimiento siguiente.

Para describirlo, necesitaremos la siguiente terminología. Sea $a \in (0, \overline{p}]$ y $G_1, \ldots, G_N$ funciones que van de $[a, \overline{p}]$ en $[0, \infty)$, tales que para ciertos $j_1, \ldots, j_n$ donde $0 \leq n < N$, $G_{j_1}(a) = \cdots = G_{j_n}(a) = 0$ y $G_j(a) > 0$ si $j \neq j_k, k = 1, \ldots, n$. Una *extensión hacia atrás de* $G_1, \ldots, G_N$, consta de un $b \in (0, a)$ y de funciones $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_N$, con dominio $[b, \overline{p}]$, tales que

1. para todo $j = 1, \ldots, N$, $\hat{G}_j$ coincide con G_j en el intervalo $[a, \overline{p}]$
2. para cada $k = 1, \ldots, n$, $\hat{G}_{j_k} = 0$ en el intervalo $[b, a]$.
3. las funciones $\hat{G}_j$ con $j \neq j_k, k = 1, \ldots, n$ forman una solución, en el intervalo $[b, a]$, del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de $N - n$ ecuaciones y $N - n$ incógnitas $F_j, j \neq j_k, k = 1, \ldots, n$, que se obtiene tomando las ecuaciones $\Phi_j'(p) = 0$ con $j \neq j_k, k = 1, \ldots, n$,(ver enunciado del Teorema 2) y sustituyendo por cero cada aparición de F_{j_k} y de F_{j_k}' en ellas; con condiciones iniciales $G_j(a)$, $j \neq j_k, k = 1, \ldots, n$.

Una extensión hacia atrás se llamará *exitosa*, si existe $q \in [b, a)$ tal que para al menos un $j \notin \{j_1, \ldots, j_n\}$, $\hat{G}_j(q) = 0$, y en el intervalo $(q, a]$, las $\hat{G}_j$ con $j \neq j_k, k = 1, \ldots, N$, son positivas, estrictamente crecientes y suaves. Un q con estas propiedades es necesariamente único.

Se fija un número natural n "grande" y se sigue la siguiente rutina:

Paso 1. Haga $i = 0$

Paso 2. Haga $G_1, \ldots, G_N : \{\overline{p}\} \to [0, 1]$ tales que $G_1(\overline{p}) = \frac{n-i}{n}$, $G_2(\overline{p}) = \cdots = G_N(\overline{p}) = 1$.

Paso 3. Se intenta construir una extensión hacia atrás exitosa de $G_1, \ldots, G_N$.

Paso 4. Si no se puede construir la extensión e $i < n$, se incrementa i en 1 y se va al Paso 2. Si no se puede construir la extensión e $i = n$, se detiene el proceso y se declara que el proceso no arrojó ningún resultado.

Paso 5. Si sí se pudo construir la extensión, sea ella $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_N : [b, \overline{p}] \to [0,1]$ y sea $q \in [b, \overline{p})$ como en la definición de extensión exitosa.

Paso 6. Si $\hat{G}(q) = \cdots = \hat{G}_N(q) = 0$ entonces el proceso se detiene y si se define F_1 como la función que vale cero en $[0,q]$, que coincide con $\hat{G}_1$ en $[q, \overline{p})$ y $F_1(\overline{p}) = 1$; y F_j con $j = 2, \ldots, N$ como la función que vale cero en $[0,q]$, y coincide con $\hat{G}_j$ en el intervalo $[q, \overline{q}]$, resulta que $F_1, \ldots, F_N$ es un perfil admisible que es un equilibrio de Nash.

Paso 7. Si para algún j, $\hat{G}_j(q) > 0$, sean $G_1, \ldots, G_N$ las restricciones de las funciones $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_N$ al intervalo $[q, \overline{p}]$ y vuelva al Paso 3.

Si este proceso no produce un resultado, entonces se vuelve a hacer pero tomando como g_1 cualquier otro generador.

6. Trabajo futuro

Al principio de la sección 4. se dijo que la restricción a perfiles admisibles es en principio justificada por los resultados obtenidos por von der Fehr y Harbord en el caso en que todos los generadores tienen la misma capacidad. Sería más satisfactorio dar una demostración similar a la que aparece en [1], en nuestra situación más general, es decir, demostrar que si $F_1, \ldots, F_N$ es un perfil de estrategias en equilibrio de Nash, entonces $F_1, \ldots, F_N$ será un perfil admisible.

Parece también razonable suponer que los métodos desarrollados en el presente artículo puedan extenderse al caso en que cada generador tenga varias plantas de generación de electricidad y que pueda ofrecer un precio unitario distinto para cada una de ellas. Incluso se podría tratar el caso en que no sólo se ofrecen precios por planta, sino también cantidades máximas de generación por planta.

Referencias

[1] von der Fehr, N.-H. M. and Harbord, D. (1992a). 'Spot market competition in the UK electricity industry.' Memorandum no. 9/1992, Department of Economics, University of Oslo. von der Fehr, N.-H. M. and Harbord, D. (1992 b). 'Long-term contracts and imperfectly competitive spot markets: a study of the UK electricity industry.' Memorandum no. I 5/ 1992, Department of Economics, University of Oslo.

[2] http://es.slideshare.net/gauthamreddy39/bidding-strategies-in-deregulated-power-market

[3] Schöne, S. (2009). Auctions in the electricity market: bidding when production capacity is constrained (Vol. 617). Springer Science and Business Media.

[4] Vetsikas, I. A. (2014, May). Equilibrium strategies for multi-unit sealed-bid auctions with multi-unit demand bidders. In Proceedings of the 2014 international conference on Autonomous agents and multi-agent systems (pp. 1053-1060). International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems.