TESSERACT SONORO

Patrones numéricos, representaciones geométricas y aplicación musical

a partir del hipercubo mágico de orden 3.

Por EDGAR ANDRÉS PÁEZ GABRIUNAS

Compositor, docente, director coral, violinista. Desde 1988 co-integrante del dueto "Música para el pie izquierdo", ganadores del Gran Premio "Mono Núñez" 1996, director Coro de Cámara Za-Chia-Ty (1988-2006), director Coro Polifónico UPB-Bucaramanga (1994-). Ganador Becas de Creación, 2004 Ministerio de Cultura, 2010 Gobernación de Santander. Licenciatura en Música, Universidad Industrial de Santander, 1993 (Mención CUM LAUDE). Diplomado en Composición Musical Erudita (Maestro Blas Atehortúa), Universidad Industrial de Santander, 2002. Especialista en Gerencia de la Comunicación Organizacional, Universidad Pontificia Bolivariana, 2008. Diplomado en Educación, Universidad Pontificia Bolivariana 2012. Tallerista de escritura Coral y Técnicas de Montaje, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, 2013. Estudiante Maestría en Música, Énfasis en Composición, EAFIT 2014-2015.

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE MÚSICA

MAESTRÍA EN MÚSICA – ÉNFASIS COMPOSICIÓN

Medellín, 12 de noviembre de 2015

RESUMEN

Ochenta y un números asignados a ochenta y un notas, tales como figuran en modelos de hipercubos mágicos de orden 3 ($3^4 = 81$), brindan patrones de distancias (numéricas-interválicas) de determinada regularidad y simetría. Existen múltiples maneras de representar y leer los ordenamientos numéricos, de modo que se pueden escoger muy distintas maneras de abocar el orden de aparición musical de las notas en cada episodio de 81 de ellas.

Por su rigor matemático, la intuición tendería a presuponer que el resultado sonoro sería siempre atonal y abstracto (en semejanzas con el más puro estilo Weberniano). Sin embargo, muchas de las variantes muestran agrupaciones significativamente regulares por coincidencia de octavas, dando como resultado colecciones consistentes, perceptibles y clasificables tonalmente.

Podemos ir de los patrones numéricos a la aplicación musical y, de ahí, a las representaciones geométricas, para arribar finalmente al tratamiento artístico. La composición de “Tesseract” para orquesta de cuerdas (2015) parte de los conceptos de representación geométrica para regir el diseño de su macroforma, siempre con la idea de dar dirección a la atención del oyente. Los números y las representaciones geométricas (abstractos y atemporales) son investidos de un flujo temporal para ofrecer así una experiencia estética en la manera de la música como arte diacrónico.

PALABRAS CLAVES: Composición, Música, Matemáticas, Geometría hiperespacial, Hipercubo mágico, Pantonalismo, Serialismo, *Hiperserialismo por conjuntos variables*, *Pansonismo*.

ABSTRACT

Eighty-one numbers assigned to eighty-one notes, such as listed in models of magic hypercubes of order 3 (34 = 81), provide distances (numeric/intervalic) patterns of certain regularity and symmetry. There are multiple ways to represent and to read numeric systems, so one can choose different ways to address the order of musical appearance of the notes on each episode of 81 of them.

By its mathematical rigor, the intuition would tend to presuppose that the sonorous result would always be abstract and atonal (on similarities with the purest Weberniano style). However, many variants are significantly regular groupings by coincidence of octaves, giving result in consistent, perceptible and classifiable tonal collections

We can go from numeric to musical application, and hence, patterns for geometric representations, to finally arrive at the artistic treatment. "Tesseract" is a composition for String Orchestra (2015) based on the concepts of geometric representation to govern the design of its macroform, always with the idea of giving direction to the attention of the listener. The numbers and the geometric representations (abstract and timeless) are translated to a temporary stream to provide an aesthetic experience in the way of the music as a diachronic art.

Key words: Composition, Music, Mathematics, Hyperspatial Geometry, Magic Hypercube, Pantonalism, Serialism, Hyperserialism, Variable sets Hyperserialism, *Pansonicism*.

Los cuadrados mágicos consisten en la organización de números en tablas donde cualquiera de sus líneas suma una misma cantidad. Esto se ha extendido a modelos tridimensionales (cubos) y tetradimensionales (hipercubos) donde se cumple la misma condición de suma. El Hipercubo mágico de orden 3 nos presenta la organización de 81 números diferentes regidos por patrones de distribución simétrica. Ya que un piano contiene 88 teclas, podemos asignar la relación entre cada tecla y un valor numérico diferente, prescindiendo de las sobrantes en los extremos. Existen múltiples formas de representar gráfica y geométricamente dichos modelos numéricos, donde cada representación puede traducirse en distintas opciones para decidir el orden de aparición en el momento de pasar a la escritura musical.

Los primeros hipercubos mágicos de orden 3 fueron construídos por Plank a partir de 1905 según consta en la página web de Harvey Heinz. Asimismo, J. Hendricks publicó entre 1960 y 1999 numerosos artículos acerca de la construcción numérica y sus representaciones geométricas de los hipercubos mágicos (Heinz, 1998).

En la historia, encontramos numerosos ejemplos de aplicación musical de modelos y conceptos relacionados con la geometría y la aritmética, donde uno de los más notables representantes (en particular en obras contrapuntísticas) es Johann Sebastian Bach (1685-1750). Casos como el Canon Cangrejo, Canon Enigmático, Canon eternamente ascendente y diversos tipos de Fugas y otros géneros, tomados de obras como ‘El Clave Bien Temperado’, ‘Ofrenda Musical’ o ‘el Arte de la Fuga’, son frecuentemente descritos y analizados en términos propios de, o asimilables a la geometría, como traslación, rotación, inversión, aumentación, proyección y retrogradación. Desde comienzos del siglo XX, con el desarrollo de la técnica dodecafónica y serialista, se implementó la asociación de las 12 notas cromáticas con valores numéricos del 0 al 11 y su principio de construcción pre-compositiva es netamente matemático y geométrico. En la última mitad del siglo, esto evolucionó hacia técnicas y teorías profundamente enlazadas con la ciencia matemática: Serialismo Integral, Espectralismo, Teoría de conjuntos (*Set Theory*) musical y música estocástica o probabilística.

En música, las técnicas del dodecafonismo y del serialismo, introdujeron de manera sistemática la aplicación de operaciones matemáticas para la construcción y diseño de elementos musicales. En cuanto a simetrías, las obras de Webern representan el más puro y abstracto manejo de ellas (*Symphony Op. 21, Streichquartett Op. 28*). Esta línea fue continuada y extendida por el compositor norteamericano Milton Babitt (*Simple variations, String quartets*). Se ha demostrado repetidamente que la aplicación de la serie de Fibonacci y la proporción áurea, lo mismo que la serie armónica, han sido un fenómeno recurrente en numerosas composiciones clásicas, románticas y modernas (Beethoven, Debussy, Bartók). Erno Lendvai, estudiando la obra de Bela Bartók, presenta demostraciones del uso sistemático de la serie de Fibonacci y la proporción áurea (Erno Lendvai, Alan Bush, 2003), se ha encontrado también en trabajos de Bartók una técnica muy cercana a la teoría de fractales. La Teoría de conjuntos (*Set Theory*) desarrolla un sistema, basado en el empleo de operaciones aritméticas, que permite analizar las obras postonales y sirve, a su vez, como poderosa herramienta de composición para los músicos contemporáneos que comulgan con la tendencia mencionada (Straus, 2000).

Revisando trabajos de composición conocidos, de la segunda mitad del siglo XX, encontramos obras de Ligeti (Ligeti, Atmospheres, 1961) (Ligeti, Lontano, 1969) donde maneja regularmente un amplio espectro del registro sonoro cromático, que Jonathan Bernard analiza y descifra en varios artículos (Bernard. 1987, 1994). El concepto de hipercubo aparece en el artículo *A Musical and Mathematical Context*, que contiene adicionado un sub-artículo (pp. 339-359) de Paul Lombardi y Michael Wester titulado *A Tesseract in Boulez´s Structures 1ª,* donde presentan un análisis de las varias combinaciones de series agrupadas en una sola serie multidimensional (hipercúbica) (Crickmore, 2008).

Recientemente, Dmitri Tymoczko (2011), en su libro *A geometry of music, Harmony and counterpoint in the extended practice*, emplea el recurso de la representación geométrica para aplicar al análisis teórico de músicas de todos los tiempos y géneros, donde incorpora el hipercubo para graficar e ilustrar, con fundamento teórico, cómo se comportan ciertos enlaces y conducciones de voces en obras cromáticas y postonales (Tymoczko, 2011).

Hasta ahora no es evidente que los compositores o los teóricos hayan relacionado la organización numérica de los hipercubos mágicos con la música, siendo estos hipercubos un recurso potente y multiforme por su rigor y perfección matemática y por ser automáticamente simétricos y ordenados en patrones regulares, lo que favorecería notablemente su aplicación en la composición musical.

Se presenta aquí, entonces, una oportunidad de explorar, analizar y aplicar el comportamiento de las estructuras numéricas hipercúbicas a lo musical, con el fin de dar comienzo a una suerte de hiperserialismo musical que renueve y continúe una tradición, técnica y artística, que se desarrolló a lo largo del siglo XX y que históricamente lo caracterizó. Este hiperserialismo podría llegar a contribuír en nuevas búsquedas dentro del serialismo y técnicas postonales para el siglo XXI.

Cabe preguntarse: ¿Al traducir musicalmente esas organizaciones de números, para nada aleatorias, podrá percibirse auditivamente alguna organización coherente? Al someter esas agrupaciones de notas al análisis según las teorías clásicas y contemporáneas, ¿encontraremos estructuras e interpretaciones acordes con cada una de ellas? Tomando como referentes, modelos de trabajo precompositivo como algunos de K. H. Stockhausen, así como modelos de técnicas de procesamiento de información gráfica de fenómenos acústicos o material matemático para representarlos musicalmente (como los que realiza la corriente del espectralismo musical), podremos elaborar algoritmos particulares para implementar la distribución de los 81 números de los hipercubos mágicos en notas musicales. En este proceso, estamos integrando 3 de los componentes del QUADRIVIUM medieval -Aritmética, Geometría y Música- (Lundy Miranda, Daud Sutton, Anthony Ashton, Jason Martineau, John Martineau, 2011) con el objeto de lograr un producto artístico musical basado en representaciones geométricas de patrones numéricos definidos.

Someteremos a análisis la información musical tabulada proveniente de las representaciones geométricas de los modelos numéricos de los hipercubos. Encontraremos resultados sorprendentes en casos donde la intuición presupondría aleatoriedad e indeterminismo. Dependiendo de los enfoques de análisis, encontraremos que el insumo numérico puede interpretarse y, por tanto, manipularse, ya atonalmente, ya diatónicamente, siendo posible, de una manera coherente y articulada, plasmar con "personificación" independiente los variados estilos o conectarlos progresivamente. Finalmente, presentaremos: 1)algunas de las decisiones de construcción musical que se determinaron para la composición "TESSERACT" (para orquesta de cuerdas) y cómo las estructuras numéricas y las representaciones geométricas influyeron en el diseño de las secciones y en la macro forma de la obra musical; y 2) plantearemos puntos de partida para discusión y análisis de otras posibilidades de implementación futuras como modelos posibles para otros compositores y para los analistas teóricos.

REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS

Para llegar a la construcción geométrica de un hipercubo o *tesseract*, conviene partir desde un punto único e ir sumando elementos a medida que añadimos dimensiones.

Se parte de un punto, se duplica dicho punto y se une con una línea (a). Ahora duplicamos esa línea recta y unimos las dos resultantes con dos líneas de cierre con ángulos de 90°, con lo que se genera un cuadrado (b). Luego avanzamos en el recorrido, formando un cubo a partir de la figura anterior como uno de los seis lados, con ángulos internos de 90° (c); esta figura tridimensional, vista en un plano de dibujo, distorsiona, bajo las leyes de la perspectiva, los ángulos rectos en ángulos agudos y obtusos, de tal suerte que algunos cuadrados parecerían rombos. Es importante anotar lo anterior en vista de que progresaremos ahora a la representación hiperespacial, con cuatro dimensiones. Ahora, para generar esa representación del hipercubo, simplemente se debe duplicar el cubo (c) en una nueva dirección (que en un espacio tetra-dimensional serían otros 90 grados direccionalmente diferentes de los tres anteriores) y se unen, como ha sido indicado con las flechas en cada figura, para obtener el hipercubo (d).

Se muestra aquí la secuencia de construcción: Punto, línea, cuadrado, cubo e hipercubo.

(a) (b) (c) (d)

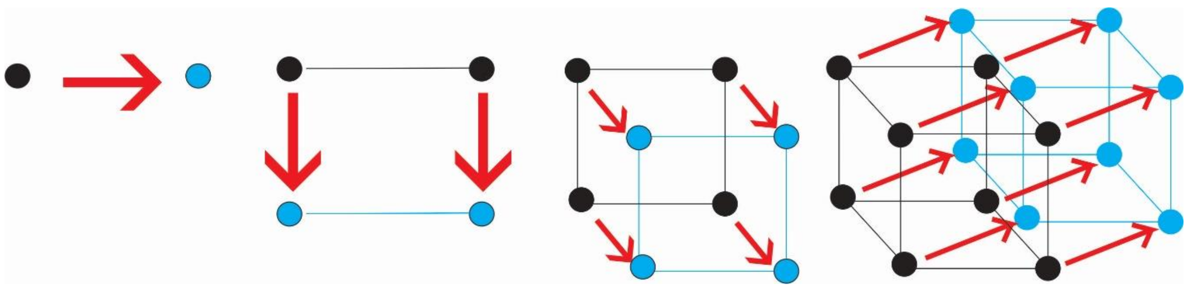

Ilustración 1 Secuencia de Construcción del punto al hipercubo

Si se entiende y acepta la distorsión que sufrió la versión plana del cubo (dos cuadrados perfectos unidos por rombos), entonces para el hipercubo bastaría con imaginar, en un modelo tridimensional, dos cubos perfectos unidos por láminas rómbicas. Así como, en el cubo, algunas áreas, líneas y puntos figuran dentro del área total del dibujo, de igual manera en la representación tridimensional del hipercubo, varias líneas, planos y puntos quedarán dentro del volumen total del modelo.

La direccionalidad según las dimensiones

Un cuadrado contiene dos tipos de orientación de líneas. Un cubo contiene tres tipos de orientación de cuadrados. Un hipercubo contiene cuatro tipos de orientación de cubos.

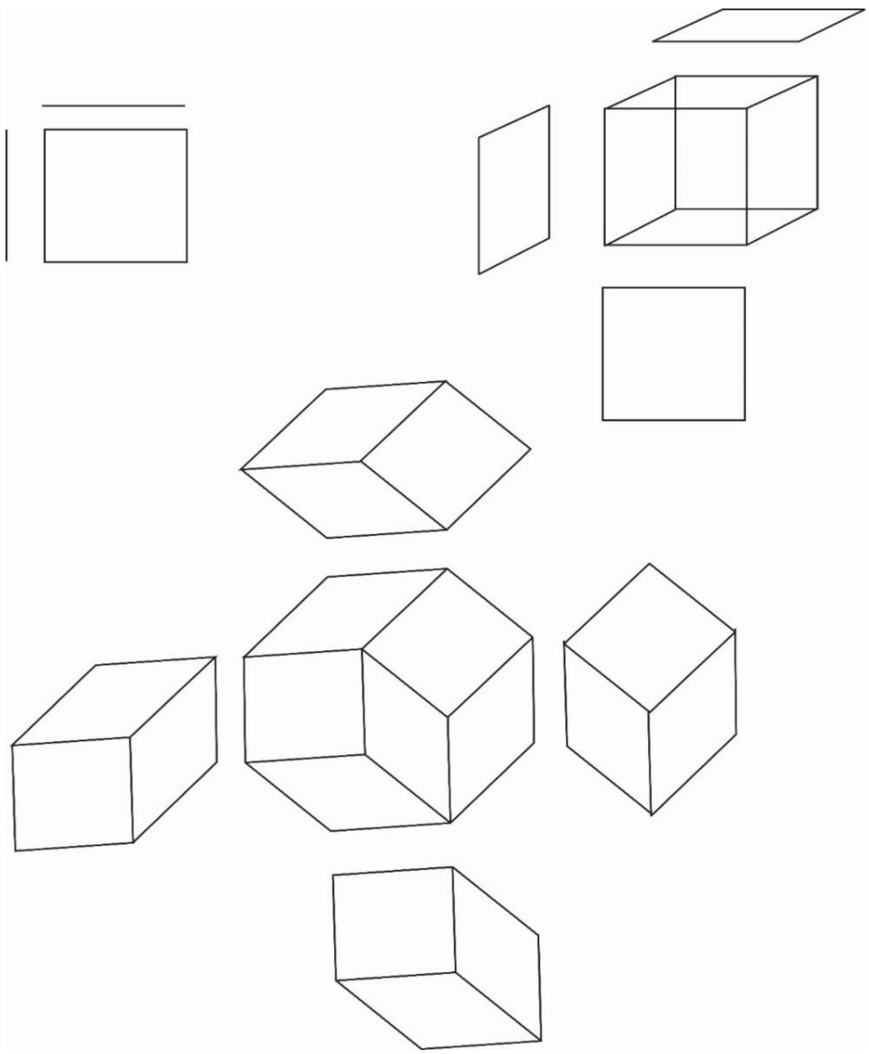

Ilustración 2 La direccionalidad según las dimensiones

CUADRADOS, CUBOS E HIPERCUBOS MÁGICOS DE ORDEN 3

Aunque hay construcciones de orden 4, 5, etc., nos limitaremos únicamente a construcciones de orden 3, es decir cuadrados, cubos e hipercubos constituídos por filas de tres números. Por lo tanto, se tienen: líneas de 3^1 valores (3), planos de 3^2 (9), cubos de 3^3 (27) y un gran hipercubo de 3^4 (81).

CUADRADO MÁGICO DE ORDEN 3

Se obtiene una organización de los números del 1 al 9, de modo tal que cada fila, columna o diagonal suman una misma cantidad (la cantidad por sumar se puede deducir tomando los dos valores extremos y el central: 1+9+5=15). Sólo es posible una organización básica, ya que las demás posibles consisten simplemente en rotaciones o inversiones de la misma.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

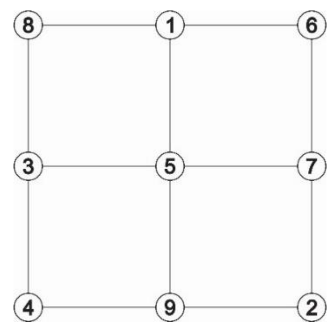

Ilustración 3 Cuadrado mágico de orden 3 y el mismo en red.

Esta tabla puede enlistarse en tres filas de tres, de dos formas diferentes, según se miren horizontal o verticalmente.

Opción 1

8	1	6

(a)

Fila superior

3	5	7

(b)

Fila central

4	9	2

(c)

Fila inferior

Opción 2

8	3	4

(a)

Columna izquierda

1	5	9

(b)

Columna central

6	7	2

(c)

Columna derecha

El número de dimensiones equivale al número de “vistas” que se pueden hacer (Para dos dimensiones, 2 vistas. Para tres dimensiones, 3 vistas. Para cuatro dimensiones, 4 vistas).

A medida que se aumentan las dimensiones, existen mayores cantidades de variantes de combinación donde se cumple la condición de suma. Pero, por ejemplo, en cuanto a diagonales, sólo se toman en cuenta las grandes, las de las esquinas opuestas de la figura: no se contemplan las diagonales de cada plano.

MODELO DE CUBO MÁGICO DE ORDEN 3

$3^3=27$ 1+27+14=42

22	12	8
11	7	24
9	23	10

2	25	15
27	14	1
13	3	26

18	5	19
4	21	17
20	16	6

Ilustración 4 Cubo mágico de orden 3

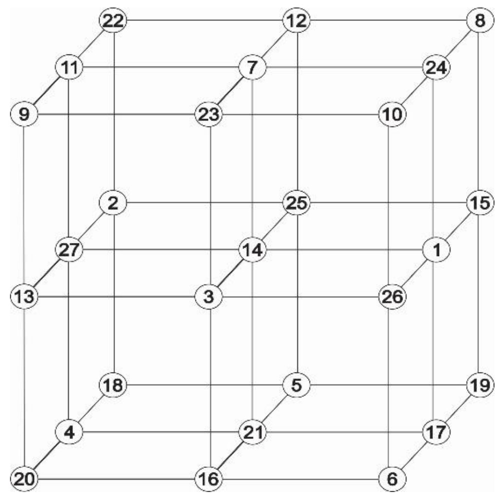

Ilustración 5 Cubo mágico en red

La tabla de la izquierda puede presentarse con tres distintas vistas, que fácilmente se visualizan en la figura en red de la izquierda:

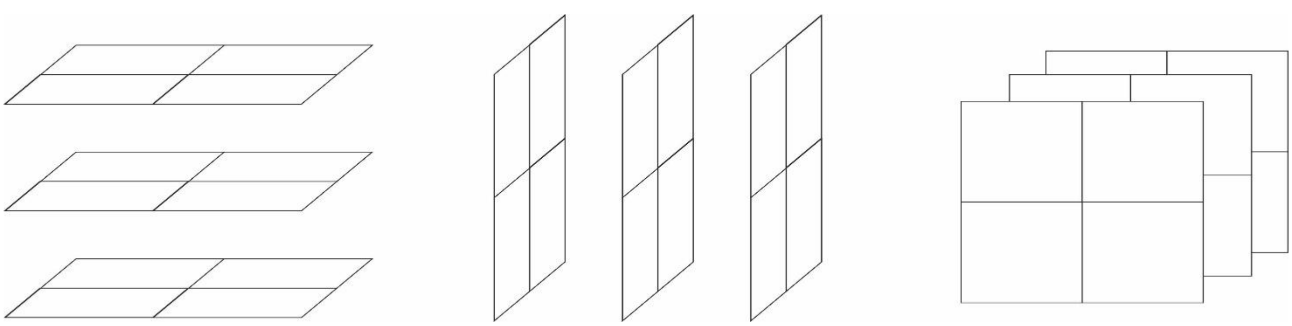

Ilustración 6 Planos en el cubo

Planos inferior, central y superior   Paredes laterales   Paredes Frontales

Planos

22	12	8
11	7	24
9	23	10

Superior

2	25	15
27	14	1
13	3	26

Central

18	5	19
4	21	17
20	16	6

Inferior

Esta tabla, según la “vista”, se redistribuye, pero se trata del mismo cubo mágico. Lo que cambia, es la dirección de los planos enlistados.

Paredes laterales

9	11	22
13	27	2
20	4	18

Pared izquierda

23	7	8
3	14	25
16	21	5

Pared central

10	24	8
26	1	15
6	17	22

Pared derecha

Paredes frontales

9	23	10
13	3	26
20	16	6

Pared delantera

11	7	24
27	14	1
4	21	17

Pared intermedia

22	12	8
2	25	15
18	5	19

Pared posterior

MODELO DE HIPERCUBO MÁGICO DE ORDEN 3

3^4=81 1+81+41=123

Hendricks propuso el siguiente modelo para presentar la distribución numérica de los hipercubos mágicos, al que le he incluído el trazado de los ejes centrales (Heinz, 1998).

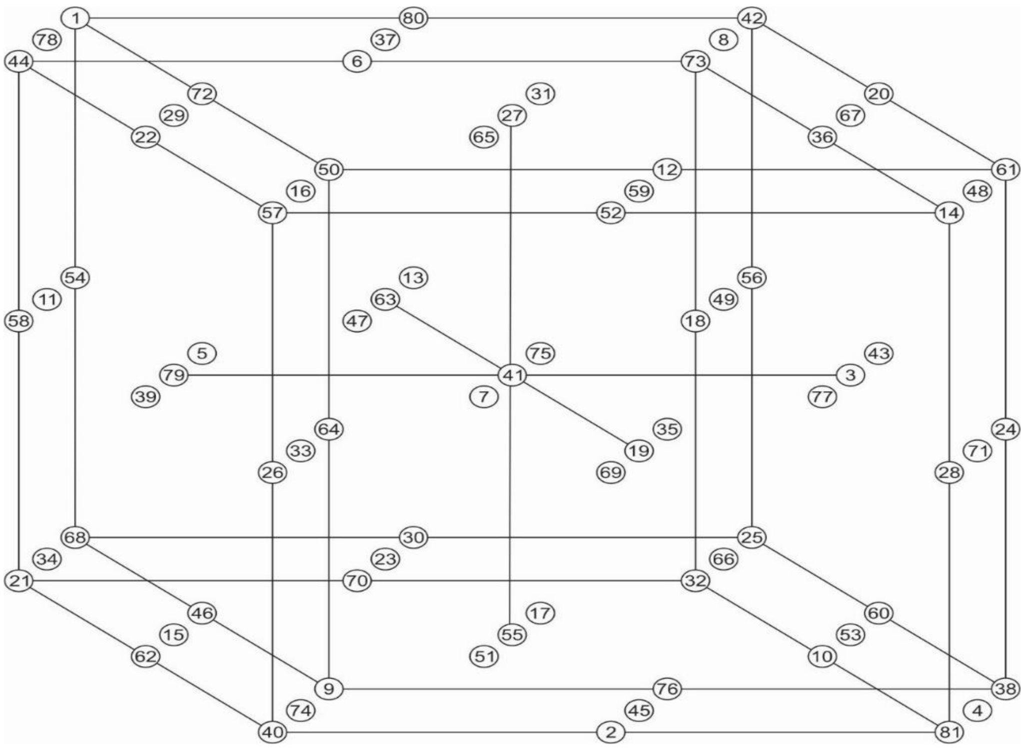

Ilustración 7 Hipercubo mágico de orden 3 según modelo de Hendricks

Al insertar la red de números en la representación geométrica, comienza a complicarse su lectura. En las siguientes gráficas, se ilustra secuencialmente cómo están distribuídos los cubos en una sola de las vistas.

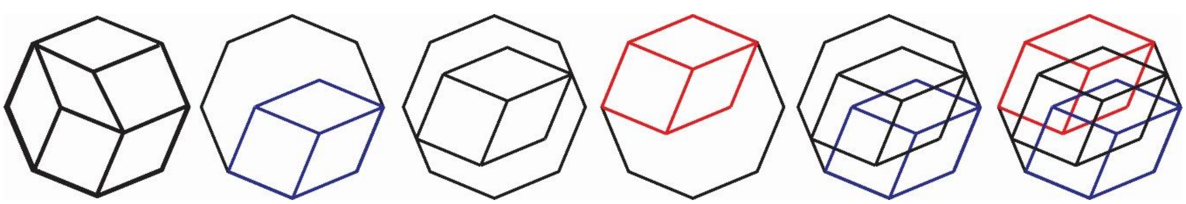

Ilustración 8 Secuencia de cubos en el hipercubo

Al insertar, en este diseño, todas las conexiones en red, se vería así:

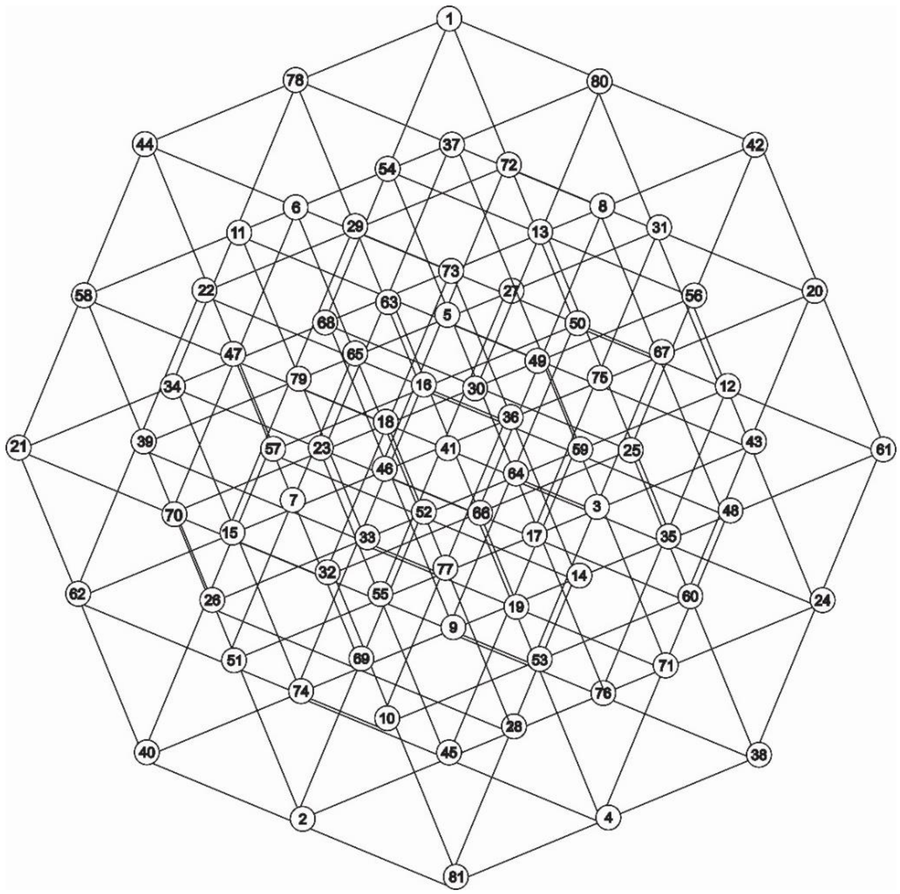

Ilustración 9 Red del hipercubo mágico de orden 3

Esta ilustración, muestra una representación más "realista" que la de Hendricks pero se hace más difícil de interpretar. La misma figura, por capas desde la más posterior hasta la más frontal:

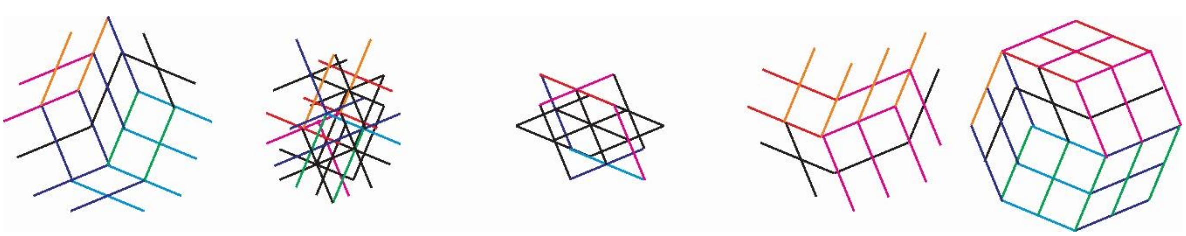

Ilustración 10 Secuencia por capas, del hipercubo

La misma figura con el entramado completo discriminado por colores y grosores diferentes:

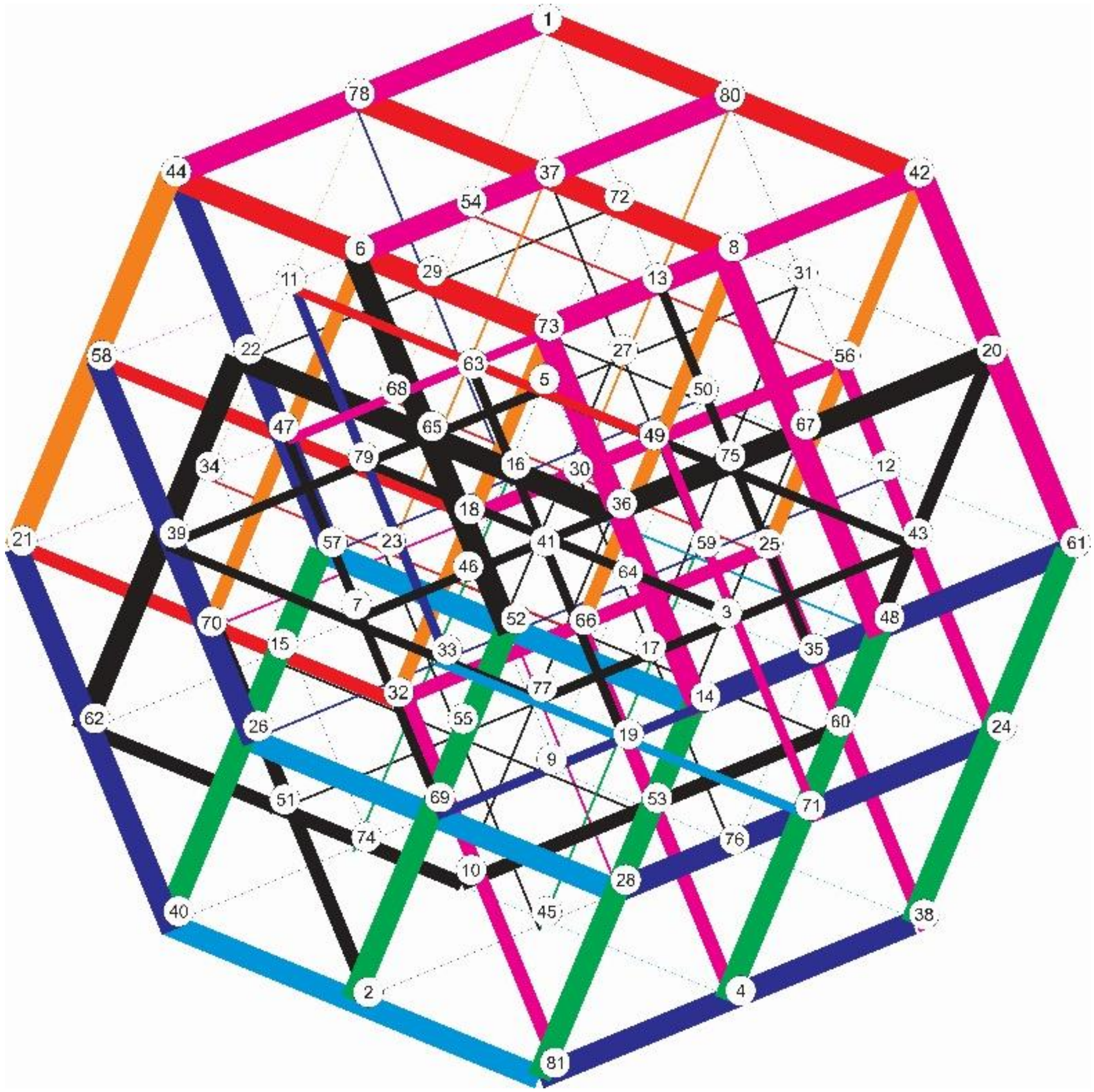

Ilustración 11 Red del hipercubo mágico de orden 3 con diferentes grosores de lineas

Alrededor del hipercubo mágico, según modelo de Hendricks, están separados los tres cubos para cada una de las cuatro vistas. Aunque aquí la mayoría de los cubos aparecen distorsionados (aplanados), en el espacio tetradimensional todos son cubos regulares perfectos. Las tablas numéricas que se usarán para los análisis musicales representan cada una de las cuatro vistas de un mismo hipercubo.

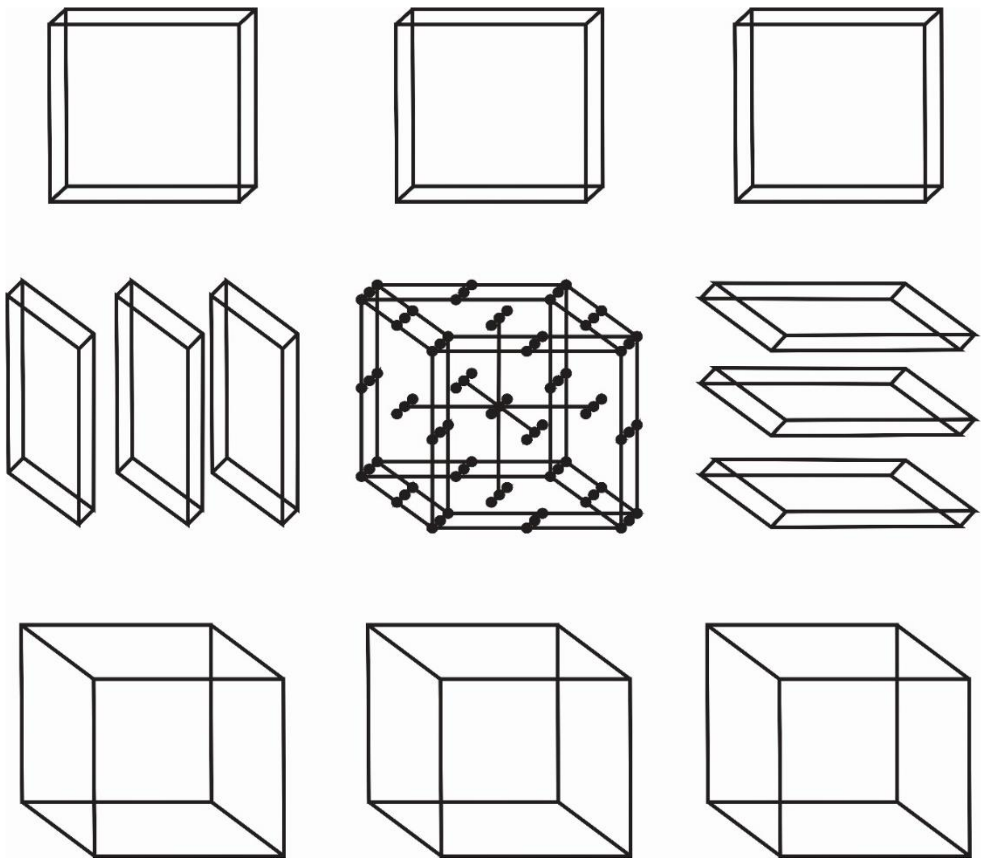

Ilustración 12 Cubos que componen cada una de las vistas de un hipercubo

Cuatro tablas cuatro tablas de un mismo hipercubo, en representación plana, organizadas cada una según las cuatro vistas básicas posibles.

1	72	50	80	31	12	42	20	61
78	29	16	37	27	59	8	67	48
44	22	57	6	65	52	73	36	14
54	5	64	13	75	35	56	43	24
11	79	33	63	41	19	49	3	71
58	39	26	47	7	69	18	77	28
68	46	9	30	17	60	9	76	38
34	15	74	23	55	45	66	53	4
21	62	40	70	51	2	32	10	81

1	80	42	72	31	20	50	12	61
78	37	8	29	27	67	16	59	48
44	6	73	22	65	36	57	52	14
54	13	56	5	75	43	64	35	24
11	63	49	79	41	3	33	19	71
58	47	18	39	7	77	26	69	28
68	30	9	46	17	76	9	60	38
34	23	66	15	55	53	74	45	4
21	70	32	62	51	10	40	2	81

1	72	50	80	31	12	42	20	61
54	5	64	13	75	35	56	43	24
68	46	9	30	17	60	9	76	38
78	29	16	37	27	59	8	67	48
11	79	33	63	41	19	49	3	71
34	15	74	23	55	45	66	53	4
44	22	57	6	65	52	73	36	14
58	39	26	47	7	69	18	77	28
21	62	40	70	51	2	32	10	81

1	80	42	72	31	20	50	12	61
54	13	56	5	75	43	64	35	24
68	30	9	46	17	76	9	60	38
78	37	8	29	27	67	16	59	48
11	63	49	79	41	3	33	19	71
34	23	66	15	55	53	74	45	4
44	6	73	22	65	36	57	52	14
58	47	18	39	7	77	26	69	28
21	70	32	62	51	10	40	2	81

Ilustración 13 Tablas de las cuatro vistas básicas de un mismo hipercubo

En las Ilustraciones9, 11 y 13, valdría la pena verificar, a modo de ejercicio, la ubicación de los números que se conectan con el **1** (1-80-42, 1-72-50, 1-78-44 y 1-54-68).

Música

Definición del espacio de registro de alturas *(Pitch space (ps))*

Se hace la asignación: el **1** al **C#/Db**$_1$, el **2** al **D**$_1$, y así sucesivamente con toda la escala cromática, pasando por el **41 (F**$_4$**)** hasta llegar al **81 (A**$_7$**)**, cada valor numérico corresponde a una nota musical. He aquí la tabla de equivalencias de todas las notas

NOTAS: / OCTAVA	C	C#/ Db	D	D#/ Eb	E	F	F#/ Gb	G	G#/ Ab	A	A#/ Bb	B
1	[0]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
3	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
4	36	37	38	39	40	**41**	42	43	44	45	46	47
5	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
7	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	[ ]	[ ]

Ilustración 14 Equivalencia de números y alturas musicales

Hallamos enseguida una tabla plana con los números de uno de los hipercubos mágicos seleccionados, a la cual haremos un barrido para decidir el orden en que aparecerán las notas en la partitura.

23	34	66	30	68	25	70	21	32
36	65	22	67	27	29	20	31	72
64	24	35	26	28	69	33	71	19
37	78	8	80	1	42	6	44	73
77	7	39	3	41	79	43	75	5
9	38	76	40	81	2	74	4	45
63	11	49	13	54	56	47	58	18
10	51	62	53	55	15	60	17	46
50	61	12	57	14	52	16	48	59

Ilustración 15 barrido de notas en diagonal

Partiendo de la esquina inferior izquierda se extraen los números para determinar el orden de aparición en la partitura. En el primer pulso, habrá un solo sonido (el 50); en el siguiente, sonarán dos (61 y 10); en el tercero, 3 y así sucesivamente, hasta llegar a la gran diagonal donde tendremos 9 sonidos (resaltados en negrilla) y decrecerá hasta uno solo en la esquina opuesta a la del comienzo (32).

Queda así el listado:

/50/ /61,10/ /12,51,63/ /57,62,11,9/ /14,53,49,38,77/ /52,55,13,76,7,37/ /16,15,54,40,39,78,64/ /48,60,56,81,3,8,24,36/ **/59,17,47,2,41,80,35,65,23/** /46,58,74,79,1,26,22,34/ /18,4,43,42,28,67,66/ /45,75,6,69,27,30/ /5,44,33,29,68/ /73,71,20,25/ /19,31,70/ /72,21/ /32/.

Veamos enseguida estos números transcritos a notas en cuatro pentagramas (nótese que el primero está en clave de fa con octava abajo y el cuarto está en clave de sol con octava arriba):

Ilustración 16 Resultado en partitura

								G#								
							A	F	G							
						F#	C	B	D	G						
					E	E	G#	B	Bb	F#	D#					
				F	G	F#	C	F	Bb	G	A	G#				
			D	F	E	E	C	B	Bb	F#	A	G#	C#			
		Eb	A	C#	C#	D#	C	B	D	E	F#	A	B	Bb		
	Db	Eb	B	D	C#	E	G#	F	Bb	F#	D#	F	C#	G	C	
D	Bb	C	A	D	G	D#	Eb	D	Db	E	F#	F	G#	D	A	G#

Ilustración 17 Conteo de notas

Suprimiendo las duplicaciones:

							A	G#	G							
			D	F	E	F#	C	B	D	G	A	G#	B	Bb		
	Db	Eb	B	C#	C#	E	G#	F	Bb	F#	D#	A	C#	G	D	
D	Bb	C	A	D	G	D#	Eb	D	Db	E	F#	F	G#	D	A	G#

Ilustración 18 Conteo de notas una vez suprimidas las duplicaciones

Las 81 notas, aunque se asignaron en grupos de hasta 9 simultáneas, al desconsiderar las duplicaciones por octava, muestran “acordes” de no más de 4 notas.

Percepción

Cabe señalar que los conceptos geométricos nos servirán para organizar los números de un plano, por ejemplo, pero no necesariamente se "oirá" dicho plano. Cuando se reemplazan los números por notas, la "sensación" de plano o volumen sufre una alteración, se "desfigura", ya que, si asignamos una altura (en torre) a cada celda, correspondiente a cada valor se vería así:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ilustración 19 Cuadrado Mágico

Ilustración 20 Cuadrado mágico por alturas

De modo que la versión plana del hipercubo nos daría visualmente, imaginando una ciudad con 81 cuadras , cada una edificada con una altura diferente, una especie de *Manhatann*, con sus respectivos rascacielos y sus pequeñas edificaciones con todas las alturas posibles.

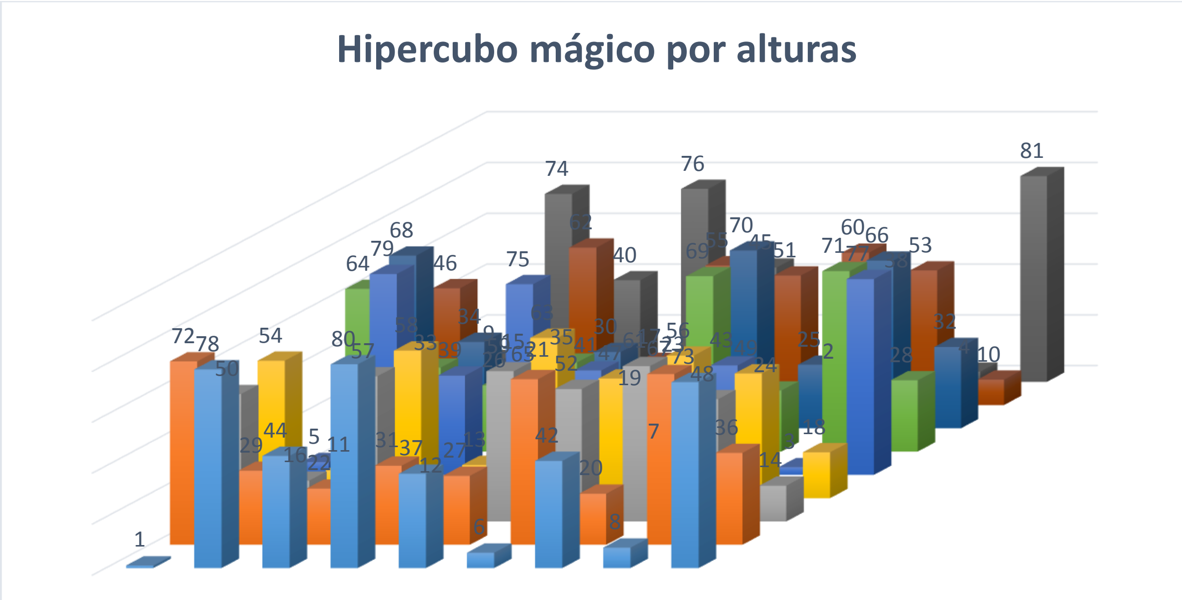

Ilustración 21 Hipercubo mágico por alturas

Análisis y síntesis musical

Más adelante se presentarán 3 páginas que servirán de plantilla con la información de tres hipercubos distintos que llamaremos Hipercubo 1(H1), Hipercubo 2(H2) e Hipercubo 3(H3). Cada plantilla contiene: en la primera fila, la tabulación de los valores numéricos en *Pitch space* para cada una de las 4 vistas básicas posibles. En la segunda fila, la tabulación de los valores numéricos convertidos a *Pitch class*. Las filas tercera y cuarta presentan resultados de análisis y síntesis, donde cada casilla de 3x3 se ha re-agrupado para destacar características especiales. Hay tres tamaños y tipos de número: Las de tamaño grande, indican que dicho valor aparece repetido en la casilla 3 veces. Las de tamaño intermedio, indican que aparece dos veces. Las de tamaño pequeño, que aparece una sola vez.

Los colores buscan facilitar la visualización de ciertas características de agrupación.

La cuarta fila sintetiza el estudio por *Set Class.* La tabla de reducción a categorías de conjuntos *(SET CLASS – SC)* se extrajo de la siguiente manera:

Para cada celda (de 3x3), se ordenaron los números de menor a mayor y se subdividieron en tres grupos de tres, convirtiéndolas entonces en grados genéricos (*Pitch class*); se encontrará siempre una conducta interválica idéntica en cada grupo consecutivo de 3 valores.

Para la lectura indicada como “horizontal”, los valores se convirtieron a PC y a cada terna se le dedujo su *Prime form.* Los tres grupos obedecen siempre a un mismo patrón. Para la “vertical” se calculó la diferencia de alturas entre los subgrupos restando, cuando era el caso, las octavas de más, quedando valores de PC y se calculó la *Prime form.* Esto nos permite visualizar algunas características particulares de cada hipercubo así como algunas notables coincidencias y diferencias, al comparar los 3 hipercubos.

El Hipercubo 3 requirió una fila adicional de síntesis donde se re-examina la primera vista, mostrando en secuencia la reorganización de sus componentes para visualizar cómo están distribuídos y cómo coinciden los valores por celdas de 3x3. Es decir, de izquierda a derecha, se ve la vista 1, los valores más frecuentemente coincidentes (en dos colores), los valores faltantes para completar las celdas y, por último, la presentación, por colores y reagrupados, de dicha organización. Si se compara la tabla inicial con la final, podrá verificarse que cada celda de 3x3 conserva, reagrupados, todos los valores.

Hipercubo 1

66	34	23	25	68	30	32	21	70
22	65	36	29	27	67	72	31	20
35	24	64	69	28	26	19	71	33
8	78	37	42	1	80	73	44	6
39	7	77	79	41	3	5	75	43
76	38	9	2	81	40	45	4	74
49	11	63	56	54	13	18	58	47
62	51	10	15	55	53	46	17	60
12	61	50	52	14	57	59	48	16

66	25	32	34	68	21	23	30	70
22	29	72	65	27	31	36	67	20
35	69	19	24	28	71	64	26	33
8	42	73	78	1	44	37	80	6
39	79	5	7	41	75	77	3	43
76	2	45	38	81	4	9	40	74
49	56	18	11	54	58	63	13	47
62	15	46	51	55	17	10	53	60
12	52	59	61	14	48	50	57	16

66	34	23	25	68	30	32	21	70
8	78	37	42	1	80	73	44	6
49	11	63	56	54	13	18	58	47
22	65	36	29	27	67	72	31	20
39	7	77	79	41	3	5	75	43
62	51	10	15	55	53	46	17	60
35	24	64	69	28	26	19	71	33
76	38	9	2	81	40	45	4	74
12	61	50	52	14	57	59	48	16

66	25	32	34	68	21	23	30	70
8	42	73	78	1	44	37	80	6
49	56	18	11	54	58	63	13	47
22	29	72	65	27	31	36	67	20
39	79	5	7	41	75	77	3	43
62	15	46	51	55	17	10	53	60
35	69	19	24	28	71	64	26	33
76	2	45	38	81	4	9	40	74
12	52	59	61	14	48	50	57	16

Ilustración 22 Hipercubo 1 pitch space

6	t	e	1	8	6	8	9	t
t	5	0	5	3	7	0	7	8
e	0	4	9	4	2	7	e	9
8	6	1	6	1	8	1	8	6
3	7	5	7	5	3	5	3	7
4	2	9	2	4	9	9	4	2
1	e	3	8	6	1	6	t	e
2	3	t	3	7	5	t	5	0
0	1	2	4	2	9	e	0	4

6	1	8	7	8	9	e	6	t
t	5	0	5	3	7	0	7	8
e	9	7	0	4	e	4	2	9
8	6	1	6	1	8	1	8	6
3	7	5	7	5	3	5	3	7
4	2	9	2	4	4	9	9	2
1	8	6	e	6	t	3	1	e
2	3	t	3	7	5	t	5	0
0	4	e	1	2	0	2	9	4

6	7	e	1	8	6	8	9	t
8	6	1	6	1	8	1	8	6
1	e	3	8	6	1	6	t	e
t	5	0	5	3	7	0	7	8
3	7	5	7	5	3	5	3	7
2	3	t	3	7	5	t	5	0
e	0	4	9	4	2	7	e	9
4	2	9	2	4	9	9	4	2
0	1	2	4	2	9	e	0	4

6	1	8	7	8	9	e	6	t
8	6	1	6	1	8	1	8	6
1	8	6	e	6	t	3	1	e
t	5	0	5	3	7	0	7	8
3	7	5	7	5	3	5	3	7
2	3	t	3	7	5	t	5	0
e	9	7	0	4	e	4	2	9
4	2	9	2	4	4	9	9	2
0	4	e	1	2	0	2	9	4

Ilustración 23 Hipercubo 1 pitch class

t	e	0	1	2	3	7	8	9
			4	5	6			
4	5	6	7	8	9	0	e	t
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	0	t	e
			4	5	6			
t	e	0	7	8	9	4	5	6

1	5	6	3	4	5	2	4	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
t	e	0	t	e	0	t	e	0
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
t	e	0	t	e	0	t	e	0
4	6	8	5	6	7	1	4	5

1	6	e	1	6	8	t	6	8
3	t	8				1	9	e
3	5	t	3	5	7	0	5	7
0	2	7				3	8	t
2	4	0	2	4	9	e	4	9
e	1	9				2	7	0

1	6	8	t	6	8	1	6	e
			1	9	e	3	t	8
3	5	t	3	5	7	0	5	7
0	2	7				3	8	t
e	4	9	2	4	0	2	4	9
2	7	0	e	1	9			

Ilustración 24 Hipercubo 1 síntesis

HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[06]	[036]	[03]
HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]
HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[03]	[036]	[06]

HORIZONTAL	[036]	[036]	[036]
VERTICAL	[012]	[015]	[024]
HORIZONTAL	[036]	[036]	[036]
VERTICAL	[012]	[012]	[012]
HORIZONTAL	[036]	[036]	[036]
VERTICAL	[024]	[015]	[012]

HORIZONTAL	[03]	[0]	[03]
VERTICAL	[025]	[025]	[024]
HORIZONTAL	-3	[03]	[03]
VERTICAL	-25	[024]	[025]
HORIZONTAL	[03]	[0]	[03]
VERTICAL	[024]	[025]	[025]

HORIZONTAL	[025]	[024]	[025]
VERTICAL	[0]	[03]	[03]
HORIZONTAL	[025]	[024]	[025]
VERTICAL	[03]	[0]	[03]
HORIZONTAL	[025]	[024]	[025]
VERTICAL	[03]	[03]	[0]

Ilustración 25 Hipercubo 1 set class

Hipercubo 2

1	72	50	80	31	12	42	20	61
78	29	16	37	27	59	8	67	48
44	22	57	6	65	52	73	36	14
54	5	64	13	75	35	56	43	24
11	79	33	63	41	19	49	3	71
58	39	26	47	7	69	18	77	28
68	46	9	30	17	60	9	76	38
34	15	74	23	55	45	66	53	4
21	62	40	70	51	2	32	10	81

1	80	42	72	31	20	50	12	61
78	37	8	29	27	67	16	59	48
44	6	73	22	65	36	57	52	14
54	13	56	5	75	43	64	35	24
11	63	49	79	41	3	33	19	71
58	47	18	39	7	77	26	69	28
68	30	9	46	17	76	9	60	38
34	23	66	15	55	53	74	45	4
21	70	32	62	51	10	40	2	81

1	72	50	80	31	12	42	20	61
54	5	64	13	75	35	56	43	24
68	46	9	30	17	60	9	76	38
78	29	16	37	27	59	8	67	48
11	79	33	63	41	19	49	3	71
34	15	74	23	55	45	66	53	4
44	22	57	6	65	52	73	36	14
58	39	26	47	7	69	18	77	28
21	62	40	70	51	2	32	10	81

1	80	42	72	31	20	50	12	61
54	13	56	5	75	43	64	35	24
68	30	9	46	17	76	9	60	38
78	37	8	29	27	67	16	59	48
11	63	49	79	41	3	33	19	71
34	23	66	15	55	53	74	45	4
44	6	73	22	65	36	57	52	14
58	47	18	39	7	77	26	69	28
21	70	32	62	51	10	40	2	81

Ilustración 26 Hipercubo 2 pitch class

1	0	2	8	7	0	6	8	1
6	5	4	1	3	e	8	7	0
8	t	9	6	5	4	1	0	2
6	5	4	1	3	e	8	7	0
e	7	9	3	5	7	1	3	e
t	3	2	e	7	9	6	5	4
8	t	9	6	5	4	1	0	2
t	3	2	e	7	9	6	5	4
9	2	4	t	3	2	8	7	9

1	8	6	0	7	8	2	0	1
6	1	8	5	3	7	4	e	0
8	6	1	t	5	0	9	4	2
6	1	8	5	3	7	4	e	0
e	3	1	7	5	3	9	7	e
t	e	6	3	7	5	2	9	4
8	6	1	t	5	0	9	4	2
t	e	6	3	7	5	2	9	4
9	t	8	2	3	7	4	2	9

1	0	2	8	7	0	6	8	1
6	5	4	1	3	e	8	7	0
8	t	9	6	5	4	1	0	2
6	5	4	1	3	e	8	7	0
e	7	9	3	5	7	1	3	e
t	3	2	e	7	9	6	5	4
8	t	9	6	5	4	1	0	2
t	3	2	e	7	9	6	5	4
9	2	4	t	3	2	8	7	9

1	8	6	0	7	8	2	0	1
6	1	8	5	3	7	4	e	0
8	6	1	t	5	0	9	4	2
6	1	8	5	3	7	4	e	0
e	3	1	7	5	3	9	7	e
t	e	6	3	7	5	2	9	4
8	6	1	t	5	0	9	4	2
t	e	6	3	7	5	2	9	4
9	t	8	2	3	7	4	2	9

Ilustración 29 Hipercubo 2 pitch class

		0,1,6,8			0,1,6,8			0,1,6,8
	5			3,5,7,e			7	
2,4,9,t			4			2		
		6						0,1,6,8
	3,5,7,e			3,5,7,e			3,5,7,e	
2,4,9,t						4		
		8			6			0,1,6,8
	3			3,5,7,e			5	
2,4,9,t			2,4,9,t			2,4,9,t		

Ilustración 28 Hipercubo 2 síntesis aplicable a las vistas 1 y 3

1	6	8	0	5	7	2	4	0
			3	8	t	e	1	9
1	6	e	3	5	7	e	4	9
3	t	8				2	7	0
t	6	8	3	5	t	2	4	9
1	9	e	0	2	7			

Ilustración 27 Hipercubo 2 síntesis 2 aplicable a las vistas 2 y 4

HORIZONTAL	[036]	[036]	[06]
VERTICAL	[048]	[015]	[015]
HORIZONTAL	[036]	[06]	[036]
VERTICAL	[015]	[048]	[015]
HORIZONTAL	[06]	[036]	[036]
VERTICAL	[015]	[015]	[048]

HORIZONTAL	[048]	[015]	[015]
VERTICAL	[036]	[036]	[06]
HORIZONTAL	[015]	[048]	[015]
VERTICAL	[036]	[06]	[036]
HORIZONTAL	[015]	[015]	[048]
VERTICAL	[06]	[036]	[036]

HORIZONTAL	[025]	[025]	[024]
VERTICAL	[0]	[027]	[03]
HORIZONTAL	[025]	[024]	[025]
VERTICAL	[027]	[0]	[03]
HORIZONTAL	[024]	[025]	[025]
VERTICAL	[03]	[03]	[0]

HORIZONTAL	[0]	[03]	[03]
VERTICAL	[027]	[027]	[024]
HORIZONTAL	[03]	[0]	[03]
VERTICAL	[027]	[024]	[027]
HORIZONTAL	[03]	[03]	[0]
VERTICAL	[024]	[027]	[027]

Ilustración 30 Hipercubo 2 set class

Hipercubo 3

69	7	47	25	38	60	29	78	16
20	42	61	33	79	11	70	2	51
34	74	15	65	6	52	24	43	56
28	77	18	68	9	46	27	37	59
72	1	50	19	41	63	32	81	10
23	45	55	36	73	14	64	5	54
26	39	58	30	76	17	67	8	48
31	80	12	71	3	49	21	40	62
66	4	53	22	44	57	35	75	13

69	25	29	7	38	78	47	60	16
20	33	70	42	79	2	61	11	51
34	65	24	74	6	43	15	52	56
28	68	27	77	9	37	18	46	59
72	19	32	1	41	81	50	63	10
23	36	64	45	73	5	55	14	54
26	30	67	39	76	8	58	17	48
31	71	21	80	3	40	12	49	62
66	22	35	4	44	75	53	57	13

69	7	47	25	38	60	29	78	16
28	77	18	68	9	46	27	37	59
26	39	58	30	76	17	67	8	48
20	42	61	33	79	11	70	2	51
72	1	50	19	41	63	32	81	10
31	80	12	71	3	49	21	40	62
34	74	15	65	6	52	24	43	56
23	45	55	36	73	14	64	5	54
66	4	53	22	44	57	35	75	13

69	25	29	7	38	78	47	60	16
28	68	27	77	9	37	18	46	59
26	30	67	39	76	8	58	17	48
20	33	70	42	79	2	61	11	51
72	19	32	1	41	81	50	63	10
31	71	21	80	3	40	12	49	62
34	65	24	74	6	43	15	52	56
23	36	64	45	73	5	55	14	54
66	22	35	4	44	75	53	57	13

Ilustración 31 Hipercubo 3 pitch space

9	7	e	1	2	0	5	6	4
8	6	1	9	7	e	t	2	3
t	2	3	5	6	4	0	7	8
4	5	6	8	9	t	3	1	e
0	1	2	7	5	3	8	9	t
e	9	7	0	1	2	4	5	6
2	3	t	6	4	5	7	8	0
7	8	0	e	3	1	9	4	2
6	4	5	t	8	9	e	3	1

9	1	5	7	2	6	e	0	4
8	9	t	6	7	2	1	e	3
t	5	0	2	6	7	3	4	8
4	8	3	5	9	1	6	t	e
0	7	8	1	5	9	2	3	t
e	0	4	9	1	5	7	2	6
2	6	7	3	4	8	t	5	0
7	e	9	8	3	4	0	1	2
6	t	e	4	8	3	5	9	1

9	7	e	1	2	0	5	6	4
4	5	6	8	9	t	3	1	e
2	3	t	6	4	5	7	8	0
8	6	1	9	7	e	t	2	3
0	1	2	7	5	3	8	9	t
7	8	0	e	3	1	9	4	2
t	2	3	5	6	4	0	7	8
e	9	7	0	1	2	4	5	6
6	4	5	t	8	9	e	3	1

9	1	5	7	2	6	e	0	4
4	8	3	5	9	1	6	t	e
2	6	7	3	4	8	t	5	0
8	9	t	6	7	2	1	e	3
0	7	8	1	5	9	2	3	t
7	e	9	8	3	4	0	1	2
t	5	0	2	6	7	3	4	8
e	0	4	9	1	5	7	2	6
6	t	e	4	8	3	5	9	1

Ilustración 32 Hipercubo 3 pitch class

9	7	e	1	2	0	5	6	4
8	6	1	9	7	e	t	2	3
t	2	3	5	6	4	0	7	8
4	5	6	8	9	t	3	1	e
0	1	2	7	5	3	8	9	t
e	9	7	0	1	2	4	5	6
2	3	t	6	4	5	7	8	0
7	8	0	e	3	1	9	4	2
6	4	5	t	8	9	e	3	1

5	9	t	2	6	7	3	4	e
1	8	0				1	8	0
0	4	8	1	5	9	2	6	t
3	7	e				3	7	e
6	7	e	3	4	8	0	1	5
2	9	t				2	9	t

4	5	6	4	5	6	4	5	6
2	3	7	0	1	2	0	1	3
9	t	e	8	9	t	7	8	e
0	1	8	3	7	e	2	9	t
2	6	7	1	5	9	3	4	8
4	5	6	4	5	6	4	5	6
2	3	7	0	1	2	0	1	3
9	t	e	8	9	t	7	8	e

1	2	3	1	2	3	t	e	0
4	5	6	4	5	6			
7	8	9	7	8	9	4	5	6
7	8	9	1	2	3	1	2	3
			4	5	6			
0	e	t	7	8	9	t	e	0
t	e	0	1	2	3	1	2	3
			4	5	6	4	5	6
4	5	6	7	8	9	7	8	9

Ilustración 33 Hipercubo 3 síntesis a

HORIZONTAL	[015]	[027]	[024]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]
HORIZONTAL	[027]	[027]	[027]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]
HORIZONTAL	[024]	[027]	[015]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]

HORIZONTAL	[015]	[015]	[015]
VERTICAL	[03]	[0]	[03]
HORIZONTAL	[048]	[048]	[048]
VERTICAL	[03]	[0]	[03]
HORIZONTAL	[015]	[015]	[015]
VERTICAL	[03]	[0]	[03]

HORIZONTAL	[015]	[048]	[015]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]
HORIZONTAL	[015]	[048]	[015]
VERTICAL	[06]	[06]	[06]
HORIZONTAL	[015]	[048]	[015]
VERTICAL	[036]	[036]	[036]

HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[036]	[06]	[06]
HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[03]	[036]	[03]
HORIZONTAL	[012]	[012]	[012]
VERTICAL	[06]	[036]	[036]

Ilustración 34 Hipercubo 3 set class

Continuación Hipercubo 3

9	7	e	1	2	0	5	6	4
8	6	1	9	7	e	t	2	3
t	2	3	5	6	4	0	7	8
4	5	6	8	9	t	3	1	e
0	1	2	7	5	3	8	9	t
e	9	7	0	1	2	4	5	6
2	3	t	6	4	5	7	8	0
7	8	0	e	3	1	9	4	2
6	4	5	t	8	9	e	3	1

2	1	3	2	1		2		3
		6	4	5	6	4	5	6
7	9	8	7	9		7		8
2	1		2	1	3		1	3
4	5	6		5		4	5	6
7	9		7	9	8		9	8
2		3		1	3	2	1	3
4	5	6	4	5	6	4		
7		8		9	8	7	9	8

	t,e			e,0			t,0	
	e,0			t,0			t,e	
	t,0			t,e			0,e	

2	1	3	2	1	0	2	0	3
t	e	6	4	5	6	4	5	6
7	9	8	7	9	e	7	t	8
2	1	0	2	1	3	e	1	3
4	5	6	0	5	t	4	5	6
7	9	e	7	9	8	t	9	8
2	0	3	e	1	3	2	1	3
4	5	6	4	5	6	4	0	e
7	t	8	t	9	8	7	9	8

Ilustración 35 Hipercubo 3 síntesis b aplicada a la vista 1

El Hipercubo 3 requirió una fila adicional de síntesis (Ilustración 35) donde se re-examina la primera vista (en pc) mostrando, en secuencia, la reorganización de sus componentes para visualizar cómo están distribuídos y cómo coinciden los valores por celdas de 3x3. Es decir, de izquierda a derecha, se ve la vista 1, en segundo lugar los valores más frecuentemente coincidentes (en dos colores), en tercer lugar los valores faltantes para completar las celdas y, por último, la presentación, por colores y reagrupados, de dicha organización. Si se compara la tabla inicial con la final, podrá constatarse que cada celda de 3x3 conserva, reagrupados, todos los valores.

Algunos resultados extraídos de la información de las síntesis y de las clasificaciones por *set class*

Se pueden extraer numerosas deducciones a partir de la información presentada en las síntesis (filas 3 y 4). Se presentan, a continuación, sólo algunas de las más notables.

La vista 1 del Hipercubo 3 es especial; se muestra y comporta como si fuera un *Sudoku* y como una matriz: No repite valores en fila o columna alguna, ni en cada celda de 3x3. Como matriz, es como si fuera la manera de serializar “hipercúbicamente” el material (al ser una “matriz” de 9x9 y nó una de 12x12, necesariamente faltarán tres valores en cada fila, columna o celda).

Aspecto Cromático

Los hipercubos 1 y 3 tienen, por lo menos, una vista donde todas las lecturas horizontales son de la clase 012, según la *Set Theory* (Straus, 2000). Las vistas son H1 (vista 1) y H3 (vista 4). Las celdas de 3x3 aparecen en cada hipercubo pero con otra distribución:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

HIPERCUBO 3

G	A	D
B	E	H
F	I	C

HIPERCUBO 1

Lo anterior quiere decir que, si se desea lograr una escritura musical predominantemente cromática, entonces se usa como insumo alguna de estas dos vistas donde se puede manipular el material con *sets* tricordales de la clase 012.

H1 Y H3 tienen una vista donde 5 celdas se componen del set complementario de la clase 012, es decir, la clase 012345678, siempre con los valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Aspecto Diatónico

H1 y H2 comparten vistas donde predominan grupos de notas (1,6,8), (3,5,7) y (2,4,9). En H1, las vistas 3 y 4; en H2, las vistas 2 y 4, idénticas en la síntesis. Al sacar el inventario del número de veces que se repite cada pc y ubicándolos en una tabla donde se ordena en una escala cromática, se observará la conducta de tres familias diatónicas. Por ejemplo, en la primera familia (donde predomina 1, 6 y 8), estos pc aparecen 6,7 y 6 veces respectivamente. Los otros valores aparecen así:

pc “e”, 3 veces; pc “t”, 3 veces; pc “9”, 1 vez; pc “3”, 1 vez. En seguida, se presenta la tabulación de las tres familias, empezando por la nota que aparece más veces.

NOTA	**F#/ Gb**	**G**	**G#/ Ab**	**A**	**A#/ Bb**	**B**	**C**	**C#/ Db**	**D**	**D#/ Eb**	**E**	**F**
# veces	7		6	1	3	3		6		1		

Ilustración 36 Familia 1, 6, 8

NOTA		**F**	**F#/ Gb**	**G**	**G#/ Ab**	**A**	**A#/ Bb**	**B**	**C**	**C#/ Db**	**D**	**D#/ Eb**	**E**
# veces		7		6	1		3		3		1	6	

Ilustración 37 Familia 3, 5, 7

NOTA		**E**	**F**	**F#/ Gb**	**G**	**G#/ Ab**	**A**	**A#/ Bb**	**B**	**C**	**C#/ Db**	**D**	**D#/ Eb**
# veces		7			1		6		3	3	1	6	

Ilustración 38 Familia 2, 4, 9

Compilando las tres familias, para comparar distribución y notas comunes:

NOTA	**E**	**F**	**F#/Gb**	**G**	**G#/Ab**	**A**	**A#/Bb**	**B**	**C**	**C#/Db**	**D**	**D#/Eb**
# veces			**7**		**6**	**1**	**3**	**3**		**6**		**1**
# veces		**7**		**6**	**1**		**3**		**3**		**1**	**6**
# veces	**7**			**1**		**6**		**3**	**3**	**1**	**6**	

Ilustración 39 las tres familias

Se puede mostrar cada familia como compuesta por grupos diatónicos con nombres de notas de una escala, donde la primera y la tercera tienen sólo una nota (que aparece sólo una vez) que no pertenecería o que significaría una suerte de giro cromático (señaladas en rojo)

		F#		**G#**	**A**	**A#**	**B**		**C#**		**D#**
	F		**G**	**Ab**		**Bb**		**C**		**D**	**Eb**
E			**G**		**A**		**B**	**C**	**Db/C#**	**D**	

Ilustración 40 Escalas

Quiere decir que, si se desea lograr una escritura musical predominantemente diatónica, entonces se usa como insumo alguna de estas dos vistas donde se puede manipular el material como grupos tonales.

Coincidencias y diferencias

H1 funciona como un comodín: en algunas vistas, se emparenta con H2 y, en otras, con H3.

El Hipercubo más homogéneo sería el H2, como se evidencia en la síntesis y sería el “más diatónico”, mientras que el “más atonal” sería H3.

En general, una manera de identificar las características de cada vista consiste en localizar dónde está el valor 1 en la tabulación en el *pitch space* y, enseguida, revisar cuáles son los siguientes dos valores más cercanos y, entonces, descifrar la conducta interválica. Asimismo, hay vistas donde las celdas de H1 comparten los mismos valores de celdas de H2 o H3, pero con distintas orientaciones.

La composición “Tesseract” para orquesta de cuerdas

En esta primera tentativa de aplicación musical de los valores de hipercubos mágicos de orden 3, se decidió escribir para conjunto de cuerdas y nó para orquesta sinfónica, principalmente por dos razones: en primer lugar, para simplificar el proceso, ya complejo, de manipulación continua de 81 valores y, en segundo lugar, para aprovechar la homogeneidad tímbrica que ofrece la familia de arcos en comparación con la heterogeneidad de una orquesta completa (más rica, pero que implicaría, de momento, más complicaciones).

La orquesta de cuerdas se subdivide en tres grupos donde, en muchos episodios, cada uno se encarga de abarcar los valores de un solo cubo, sumando entres los tres el de un hipercubo completo. Podría considerarse la posibilidad de escribir una versión más camerística, si se quiere más precisión y control interpretativo pero, en este caso, se ha preferido la *voluminosidad* sonora de una orquesta completa.

Ahora, presentamos relación del criterio elegido para diseñar y ejecutar la macro-forma de la composición:

Primero, vale recordar que el proceso de conversión de los números a notas y su aplicación musical, según representaciones geométricas para un tratamiento artístico, no busca ni garantiza que, en el resultado sonoro, el oyente perciba los planos o volúmenes específicos. Sin embargo, los conceptos geométricos ayudarán a caracterizar el tratamiento de bloques de la composición, de manera que unos serán puntuales (puntillistas), lineales (conectando notas), para llegar a ser más "melódicos"; otros serán planos (por conectar o entrelazar puntos y líneas) y llegarán a ser "contrapuntísticos" y, por último, otros más serán volumétricos llegando a ser "armónicos o corales". La suma de estos tratamientos da los resultados hipercúbicos. Cada episodio recorre un hipercubo (con una vista y un tratamiento particular de barrido) de manera puntual, lineal, plana o volumétrica.

Macro-forma

Puntos: Tan fríos como son los números en su distribución hipercúbica mágica, así de fríos se presentan en pizzicato, para dar, literalmente, un efecto puntillista. Artísticamente, se aplicaron cambios de dinámica iniciando plano (frío) en *pp* para el primer hipercubo, en *forte* para el segundo, y el tercero fluctuará en crescendo. Rítmicamente, para propiciar la direccionalidad de atención del oyente, los episodios fluctúan con la compresión de la duración.

Líneas: Notas largas con el uso del arco y que conectan con las siguientes. Recorridos en unísono por "hiperescalas" y bloques monódicos. Finaliza esta sección con el recorrido de un hipercubo con diseño melódico.

Planos: grupos de notas rápidas que se repiten obstinadamente y que van completando "planos" que se superponen para abarcar progresivamente los valores de cada cubo. Aquí se han aprovechado, principalmente, las vistas con *sets* de la clase 012, contrastando en el medio con una vista rápida por grupos diatónicos.

Los planos van entrelazándose (contrapunto) dando, poco a poco, la idea de volumen (armónico), hasta que, literalmente, presenta los Volúmenes, en organización y distribución por acordes de hasta 27 sonidos simultáneos.

En adelante, se retoman materiales de episodios anteriores modificando su tratamiento para hacer las veces de “reexposición”. La última sección, denominada aquí “CODA”, presenta primero un episodio donde se superponen los tres hipercubos (H1, H2 Y H3) para insinuar un versión de “hipervolumen” en un breve pasaje, seguido por un episodio de reexposición del esquema melódico con acompañamiento libre y textura de regularidad rítmica. Culmina con una especie de “cadenza” cuyos acordes corresponden al H2.

PARTE I	1	PUNTOS		2	LÍNEAS		3	MELÓDICO	
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	Pizz. H1	Pizz. H3	Pizz. H2	Arco Hiper-escalas H1	Arco Hiper-escalas H3	Arco Hiper-escalas H1	Condensa-ciones por bloques	Condensa-ciones por bloques	Condensa-ciones por bloques

PARTE II	1	PLANOS		2	ENTRE PLANOS Y VOLÚMENES		3	VOLÚMENES ARMÓNICO	
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	Superposición Linear H2	Superposición Linear H3	Superposición Linear H1	1.1.1 POR CUBOS H3	1.1.2 POR CUBOS H1	H2 POR CUBOS H2	H3	H1	H2

PARTE III	1	REEXPOSICIONES CON NUEVOS TRATAMIENTOS		2	REEXPOSICIONES CON NUEVOS TRATAMIENTOS		3	CODA	
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	Superposición Linear H2	Superposición Linear H3	SuperposIción Linear H1	1.1.1 POR CUBOS H3	1.1.2 POR CUBOS H1	H2	SUPERPOSICIÓN DE LOS 3 HIPERCUBOS	RECAP. ÚLTIMO MELÓDICO	H2

Ilustración 41 Descripción etapas en la macro-forma

Otra manera de subdividir la macro-forma: Primero, 6 secciones, con 3 episodios cada una, turnando H1, H2 Y H3. Segundo 3 secciones, con 2 episodios cada una, por parejas del mismo hipercubo (H3H3, H1H1, H2H2) re-exponiendo material del primer bloque, con tratamientos variados. Por último, una sección de 3 episodios que conforman la CODA.

En seguida, unos ejemplos representativos.

Ilustración 43, ejemplo 1: Primer episodio (puntos)

Ilustración 44, ejemplo 2: Concepto de volumen; cada grupo abarca las notas de un cubo y, verticalmente, los tres grupos van completando acordes de 27 notas que se van traslapando. Pasa por las tres escalas diatónicas.

Ilustración 45, ejemplo 3: *Tutti,* unísonos, concepto lineal, pertenecen al H3.

Ilustración 46, ejemplo 4: Tres acordes, cada uno de 27 notas.

Ilustración 47, ejemplo 5: Muestra de una reexposición. El episodio 2 (que era en *pizzicato.*) se replantea con notas extendidas para dar un resultado contrapuntístico, cuya polifonía comienza a dejar una impresión de entre-planos (conexión de líneas) y volumen (simultaneidad de sonidos).

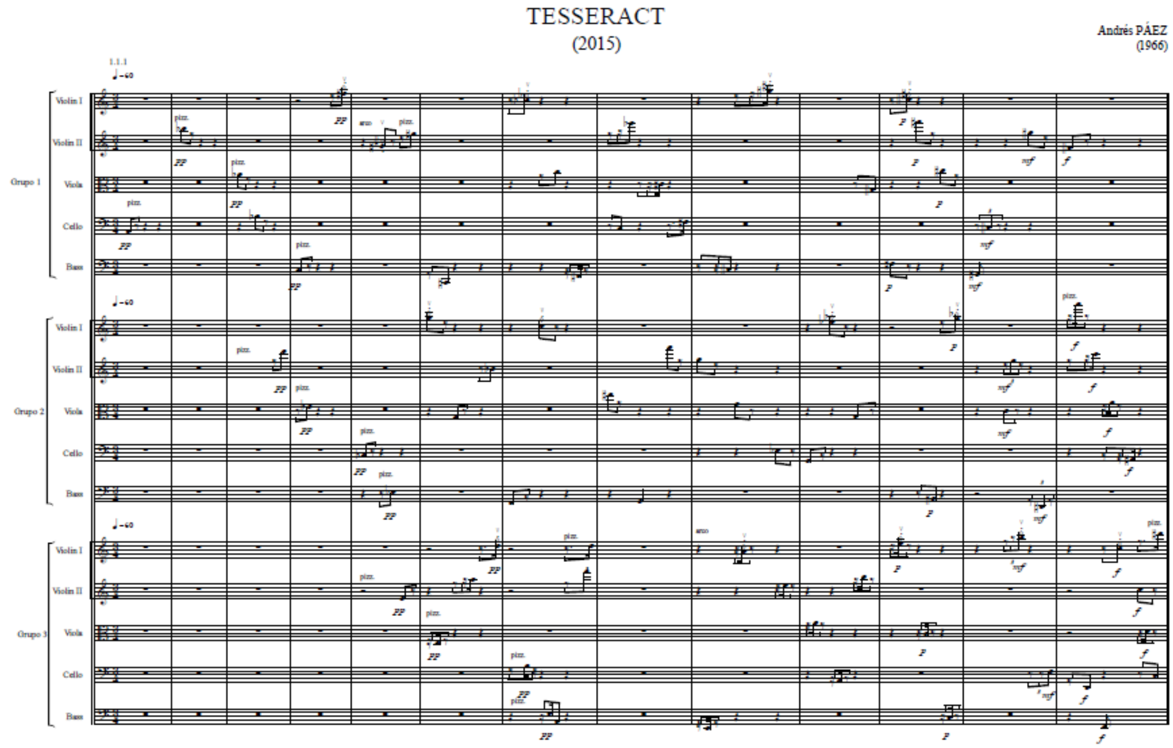

Ilustración 42 Ejemplo 1 Partitura Tesseract

Ilustración 43 Ejemplo 2 Partitura Tesseract

Ilustración 44 Ejemplo 3 Partitura Tesseract

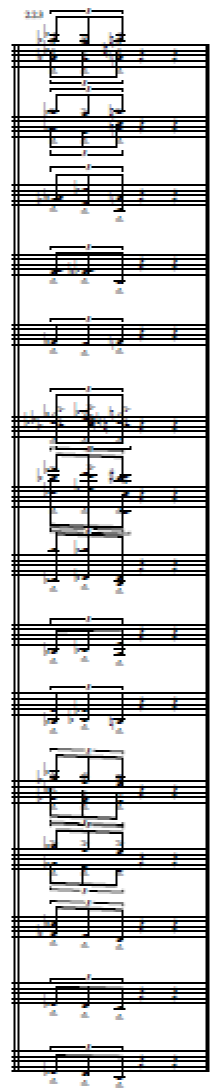

Ilustración 45 Ejemplo 4 Partitura Tesseract

Ilustración 42 Ejemplo 5 Partitura Tesseract

Conclusiones y Discusión

La aplicación musical de los patrones numéricos de los hipercubos mágicos muestra una regularidad interválica consistente y regular que, a través de herramientas de la *Set Theory*, puede interpretarse o usarse tanto atonal como tonalmente.

Las representaciones geométricas y el empleo del hipercubo o *tesseract,* ya ha sido implementado, tanto en la teoría (Tymoczko, 2011), como en la práctica en Boulez (Crickmore, 2008). En este caso, al parecer novedoso, el punto de partida ha sido el asunto aritmético con el hipercubo mágico, al que se le ha encontrado una asignación hacia lo musical-interválico, mostrándose notablemente coherente y multiforme.

En el artículo, se hizo: un recorrido por los conceptos geométricos concernientes a lo hipercúbico, una aplicación y análisis musical de los patrones numéricos y una muestra de la primera tentativa de aplicación artística en una composición musical.

Aquí sólo se revisaron 3 modelos de hipercubo mágico (4 dimensiones) de orden 3 (enlaces de a tres valores), que podrían ser clasificados musicalmente en 3 categorías: A) Los que, en al menos una de las vistas, están comprimidos en la forma 012. B) Los que, en al menos una de las vistas, presentan barridos que conforman grupos diatónicos. C) Los que, en al menos una de las vistas, se muestran como en el H3: con similitudes a “matrices” del tipo *sudoku*. Valdría la pena revisar musicalmente, dentro de las más de 400 posibilidades de combinación, cuántas categorías interválicas más existirían. ¿Habrá algún otro tipo de categoría?, ¿Cuál sería su característica más notable?, ¿Qué consecuencias musicales podría tener el hallazgo y uso de esa otra categoría, si existiera?

Aritméticamente, existen otros formatos de cuadrados mágicos y *tesseracts* de órdenes distintos al 3. Algunos tienen, por ejemplo, valores del 1 al 64, que abarca un registro menos extenso que el de 81 números y, por lo tanto sería más *amable* para escribir, digamos, para cuarteto de cuerdas.

Queda abierta, pues, la posibilidad de investigación, análisis, profundización y sistematización de este recurso matemático para hallar fórmulas y nuevas generalizaciones que podrían llegar a ser útiles en música, tanto en el nivel teórico como en el composicional, a partir de este primer acercamiento exploratorio de un recurso que se ve como aún más prometedor.

Listado de Ilustraciones

Bibliografía

Bernard, J. (1987). Ligeti's Problem, and His Solution. *Music Analisys*, 207-236.

Bernard, J. (1994). Voice Leading as a Spatial Function in tha Music of Ligeti. *Music Analisys, Vol. 13, No. 2/3*, 227-253.

Erno Lendvai, Alan Bush. (2003). *Bela Bartók. An Anlisys of his Music.* London: Idea Books.

Heinz, H. D. (Mayo de 1998). *Magic squares*. Obtenido de http://www.magiq_squares.net

Ligeti, G. (1961). *Atmospheres.* Viena: Universal Edition.

Ligeti, G. (1969). *Lontano.* Mainz: Schott Musik Internatinal.

Lundy Miranda, Daud Sutton, Anthony Ashton, Jason Martineau, John Martineau. (2011). *QUADRIVIUM The Four Classical Liberal Arts of Number, geometry, Music & Cosmology.* New York: Walter & Company - Wooden Books, Ltd.

Pickover, C. A. (2000). *Wonders of Numbers.* Oxford: Oxford University Press.

Straus, J. N. (2000). *Introduction to Post-Tonal Theory* (Second Edition ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Tymoczko, D. (2011). *A GEOMETRY OF MUSIC Harmony and Counterpoint in the Extended Commmon Practice.* New York: Oxford University Press, Inc.