UNIVERSIDAD EAFIT®

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Iniciación al Cálculo

Elementos generales de trigonometría

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

La trigonometría es una parte importante de la matemática básica. Tiene sus orígenes en la necesidad de solucionar triángulos, bien sea para encontrar el valor de la medida de sus lados o los ángulos entre ellos. Para la solución de triángulos se aplica la ley del seno y la del coseno, que permiten establecer relaciones entre los lados de un triángulo y los ángulos interiores del mismo. Son variados los campos y las ramas de la ciencia en las que las funciones trigonométricas permiten hallar soluciones a diversos problemas que describen situaciones periódicas, como giros repetidos en un determinado período de tiempo, diversos ciclos terrestres, entre otros.

El módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Estudiar conceptos trigonométricos relacionados con la solución de triángulos.

Objetivos específicos

- Solucionar problemas con triángulos, aplicando propiedades de las funciones trigonométricas.
- Plantear proporciones en triángulos.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados son básicos para comprender conceptos fundamentales del Cálculo y de las Matemáticas en general.

El tiempo estimado para la solución del taller es de tres (3) horas.

En su estudio y solución le deseamos muchos éxitos.

1. Los ángulos y sus medidas

Un ángulo es la figura formada por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo (llamado vértice), desde una "posición inicial" llamado *lado inicial*, hasta una "posición final" denominado *lado final* (o *lado terminal*).

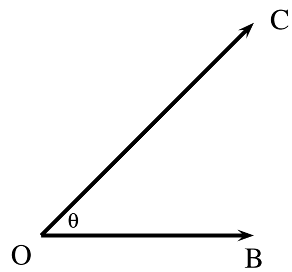

Figura 1: Ángulo θ medido en *sentido positivo*.

En la Figura 1, el punto O es el punto fijo, el rayo $\overrightarrow{OB}$ es el *lado inicial* y el rayo $\overrightarrow{OC}$ es el *lado final*. Si el desplazamiento es contrario al movimiento de las manecillas del reloj, se dice que el ángulo θ está medido en *sentido positivo*. En caso contrario, se dice que el ángulo está medido en *sentido negativo*.

Existen diferentes medidas para los ángulos. La utilización de cada una de ellas está asociada a diferentes aplicaciones en las ciencias.

a. **Grados sexagesimales:** si se trabaja en la solución de triángulos, la medida más utilizada son los grados sexagesimales $(^{o})$, que resultan de dividir la longitud de la circunferencia en 360 partes iguales.

b. **Grados centesimales:** otra medida menos utilizada son los grados centesimales $(^{g})$, que se obtienen de dividir la circunferencia en 400 partes iguales.

c. **Grados en radianes:** en las aplicaciones físicas, se miden los ángulos en radianes (rad) o en revoluciones o giros. Un radián equivale a un ángulo plano con el vértice en el centro de la circunferencia y que le corresponde un arco de longitud igual al radio de la circunferencia, como se muestra en la Figura 2. Aquí, la medida de la longitud del segmento $\overline{OB}$ (radio de la circunferencia) es igual a la medida de la longitud del arco $\widehat{BC}$. Una revolución equivale a una vuelta completa sobre la circunferencia.

2. Relaciones entre diferentes formas de medir ángulos

Las medidas angulares se realizan sobre un arco de circunferencia centrada en el origen. Al dibujar circunferencias concéntricas y trazar rayos desde el origen, los arcos que interceptan dos rayos son proporcionales a sus radios.

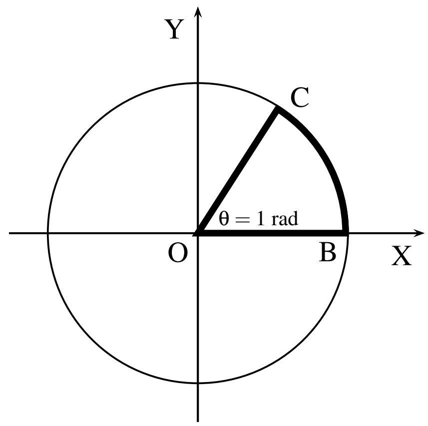

Figura 2: El ángulo θ equivale a un radián.

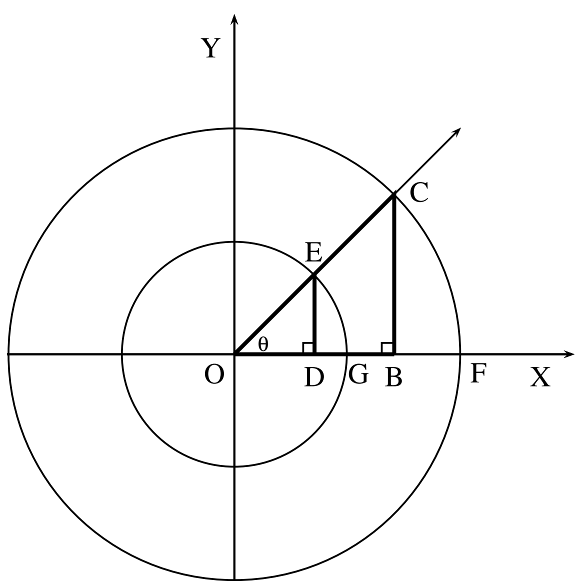

Figura 3: Arcos proporcionales y triángulos semejantes.

Observaciones

a. En una circunferencia de radio r, el arco determinado por un ángulo central θ medido en radianes es $r\theta$.

b. En la Figura 3, el rayo $\overrightarrow{OX}$ es fijo, el rayo $\overrightarrow{OC}$ se gira en sentido positivo, θ es el ángulo que se forma entre ellos, de ahí se tiene:

$$\frac{m(\widehat{FC})}{m(\widehat{GE})} = \frac{m(\overline{OC})\theta}{m(\overline{OE})\theta} = \frac{m(\overline{OC})}{m(\overline{OE})} = \frac{m(\overline{CB})}{m(\overline{ED})}$$

Ejercicio

Si el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ *rad* es central en una circunferencia de radio $r = 4cm$, la medida del arco subtendido es

a. 5 *cm*

b. $\frac{1}{6}\pi$ *cm*

c. $\frac{1}{3}\pi$ *cm*

d. $\frac{2}{3}\pi$ *cm*

Ejercicio

Si la longitud de un arco de circunferencia es $4cm$ y el radio de la misma es $3cm$, el ángulo central θ es

a. $\frac{4}{3}$ *rad*

b. $\frac{3}{4}$ *rad*

c. $\frac{1}{3}$ *rad*

d. $\frac{1}{4}$ *rad*

En la Figura 3 los triángulos $\triangle ODE$ y $\triangle OBC$, son rectángulos y al tener el ángulo agudo común θ son semejantes, por lo tanto las medidas de las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

Entre los triángulos rectángulos $\triangle ODE$ y $\triangle OBC$ se pueden establecer, entre otras, las siguientes relaciones que son básicas en el trabajo con ángulos y en la definición de las funciones trigonométricas:

$$\frac{m(\overline{OD})}{m(\overline{OE})} = \frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OC})}$$
$$\frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{OE})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{OC})}$$

De lo anterior, se deduce que las proporciones entre los lados de los triángulos definidos de esta manera se mantienen y, por lo tanto, sin importar la longitud del radio de la circunferencia con que se trabaje, los resultados son los mismos. Es por esto, que las definiciones y medidas trigonométricas, usualmente, se hace a partir de la circunferencia de radio uno (1).

La longitud de la circunferencia está dada por la fórmula $L_c = 2\pi r$. Por lo tanto, la medida de la longitud de la circunferecia de radio uno es $L_c = 2\pi$. Como los ángulos medidos en radianes son una relación entre el radio de la circunferencia y su longitud, se tiene que la medida angular de la circunferencia es $\frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad$.

En grados sexagesimales, la circunferencia tiene 360^o, por lo tanto $2\pi\ rad = 360^o$. Es decir, $\pi\ rad = 180^o$, que es la relación básica para pasar de medir ángulos en radianes a sexagesimales o viceversa.

A partir de esta fórmula se tiene que:

$$1\ rad = \frac{180^o}{\pi} \cong 57.295^o$$

$$1^o = \frac{\pi\ rad}{180} \cong 0.01745\ rad$$

Esto permite concluir que para convertir radianes a grados sexagesimales, se multiplica por $\frac{180^o}{\pi}$ y para convertir de grados sexagesimales a radianes se multiplica por $\frac{\pi\ rad}{180}$.

Ejemplo

a. Convertir $\frac{\pi}{6}\ rad$ a grados sexagesimales.

   Al aplicar las fórmula anteriores se tiene que $\frac{\pi}{6}\ rad = \left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)\left(\frac{180^o}{\pi\ rad}\right) = 30^o$

b. Convertir 135^o a radianes.

   En este caso se tiene que $135^o = 135^o\left(\frac{\pi\ rad}{180^o}\right) = \frac{3}{4}\pi\ rad$

Ejercicio

Al convertir $\frac{7\pi}{6}$ *rad* a grados sexagesimales se obtiene

a. 120^{o}

b. 270^{o}

c. 150^{o}

d. 210^{o}

Un giro o revolución equivale a 360^{o}, a 2π *rad* o a 400^{g}. A partir de estas equivalencias se pueden hacer transformaciones de una unidad de medida a las otras.

Ejercicio

Un giro y medio equivalen a

a. 3π *rad* o a 540^{o}

b. 4π *rad* o a 540^{o}

c. 3π *rad* o a 380^{o}

d. 5π *rad* o a 540^{o}

3. Funciones trigonométricas

La trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Las funciones trigonométricas se definen en triángulos rectángulos.

En la Figura 4, el triángulo $\triangle OBC$:

- La hipotenusa es el segmento $\overline{OC}$ y su medida es $m(\overline{OC}) = h$
- El cateto opuesto al ángulo θ es el segmento $\overline{BC}$ y su medida es $m(\overline{BC}) = y$
- El cateto adyacente al ángulo θ es el segmento $\overline{OB}$ y su medida es $m(\overline{OB}) = x$

A partir del triángulo $\triangle OAC$ y de sus medidas se definen las seis (6) funciones trigonométricas de la siguiente manera:

$\text{sen}(\theta) = \dfrac{m(\overline{BC})}{m(\overline{OC})} = \dfrac{y}{h}$: Cateto opuesto sobre hipotenusa.

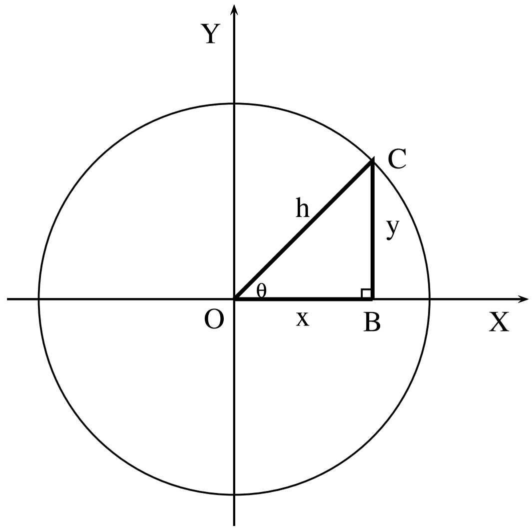

Figura 4: Triángulo rectángulo y circunferencia de radio h.

$\cos(\theta) = \dfrac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OC})} = \dfrac{x}{h}$: Cateto adyacente sobre hipotenusa.

$\tan(\theta) = \dfrac{m(\overline{BC})}{m(\overline{OB})} = \dfrac{y}{x}$: Cateto opuesto sobre cateto adyacente.

$\csc(\theta) = \dfrac{m(\overline{OC})}{m(\overline{BC})} = \dfrac{h}{y}$: Hipotenusa sobre cateto opuesto.

$\sec(\theta) = \dfrac{m(\overline{OC})}{m(\overline{OB})} = \dfrac{h}{x}$: Hipotenusa sobre cateto adyacente.

$\mathrm{cotg}(\theta) = \dfrac{m(\overline{OB})}{m(\overline{BC})} = \dfrac{x}{y}$: Cateto adyacente sobre cateto opuesto.

En el caso en el que el radio de la circunferencia sea uno (1), es decir $h = 1$, para el seno y el coseno se tienen las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{OC})} = \frac{y}{h} = \frac{y}{1} = y, \text{ de donde } \operatorname{sen}(\theta) = y$$

$$\cos(\theta) = \frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OC})} = \frac{x}{h} = \frac{x}{1} = x, \text{ de donde } \cos(\theta) = x$$

En la Figura 5, se muestran estas relaciones.

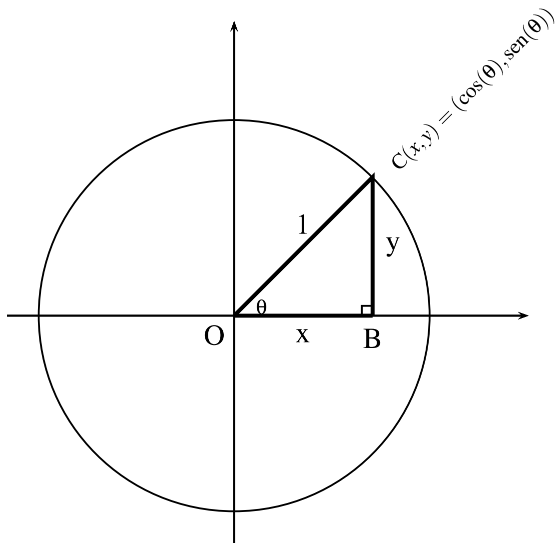

Figura 5: Coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria.

A partir de estas relaciones se puede encontrar qué punto sobre la circunferencia unitaria le corresponde a un ángulo θ dado.

Ejemplos

a. Encuentre las coordenadas del punto $C(x,y)$, sobre la circunferencia unitaria, que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ *rad*, medido positivamente a partir del eje X.

   Para encontrar la solución, se configura la calculadora en el modo *rad* y se evalúa:

   $x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$

   $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

   Por lo tanto, el punto sobre la circunferencia que le corresponde al ángulo $\frac{\pi}{3}$ *rad* es $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. El punto sobre la circunferencia se muestra en la Figura 6.

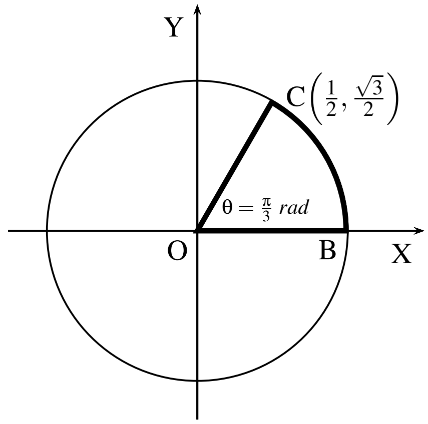

Figura 6: Coordenadas para $\frac{\pi}{3}$ *rad* en la circunferencia unitaria.

b. Encuentre las coordenadas del punto $C(x,y)$, sobre la circunferencia unitaria, que forman un ángulo de 45^{o}, medido positivamente a partir del eje X.

   Para encontrar la solución, se coloca la calculadora en el modo *SD* y se evalúa:

   $x = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

   $x = \text{sen}(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

   Por lo tanto el punto sobre la circunferencia que le corresponde al ángulo 45^{o} es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. El punto sobre la circunferencia se muestra en la Figura 7.

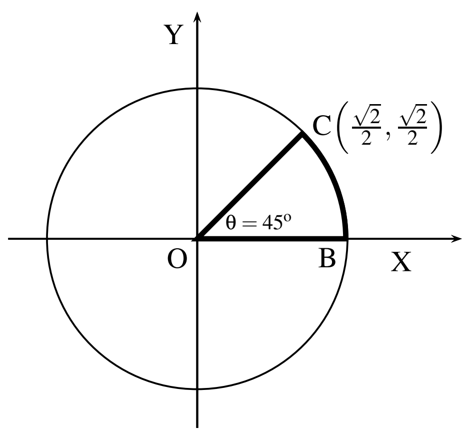

Figura 7: Coordenadas para 45^{o} en la circunferencia unitaria.

Ejercicio

Las coordenadas del punto $C(x,y)$, sobre la circunferencia unitaria, que forman un ángulo de $\frac{9\pi}{7}$, medido positivamente a partir del eje X son

a. $x \approx 0.623$, $y \approx 0.781$

b. $x \approx -0.623$, $y \approx -0.781$

c. $x \approx -0.623$, $y \approx 0.781$

d. $x \approx 0.623$, $y \approx -0.781$

3.1. Otras propiedades de las funciones trigonométricas

Las funciones $\csc(\theta)$, $\sec(\theta)$, $\tan(\theta)$ y $\operatorname{cotg}(\theta)$ se definen a partir de las funciones $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ de la siguiente manera (Ver Figura 4):

$$\tan(\theta) = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{OB})} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}, \text{ para } \cos(\theta) \neq 0, \text{ de donde } \tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\sec(\theta) = \frac{m(\overline{OC})}{m(\overline{OB})} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos(\theta)}, \text{ para } \cos(\theta) \neq 0, \text{ de donde } \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\csc(\theta) = \frac{m(\overline{OC})}{m(\overline{BC})} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \text{ para } \operatorname{sen}(\theta) \neq 0, \text{ de donde } \csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

$$\operatorname{cotg}(\theta) = \frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{BC})} = \frac{x}{y} = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}, \text{ para } \operatorname{sen}(\theta) \neq 0, \text{ de donde } \operatorname{cotg}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

4. Los cuadrantes y los signos de las funciones trigonométricas

En las sección anterior, para la circunferencia unitaria, la función coseno se asoció con el eje X y la función seno con el eje Y. Por lo tanto, los signos de cada una de ellas, en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano, corresponden al signo de x e y respectivamente. Los cuadrantes y los signos para x e y se presentan en la Figura 8.

Por ejemplo, en el cuadrante II, el signo para x es menos $(-)$ y para y es más $(+)$. Es decir, que a la función coseno, en el cuadrante II, le corresponde el signo menos $(-)$ y a la función seno, le corresponde el signo

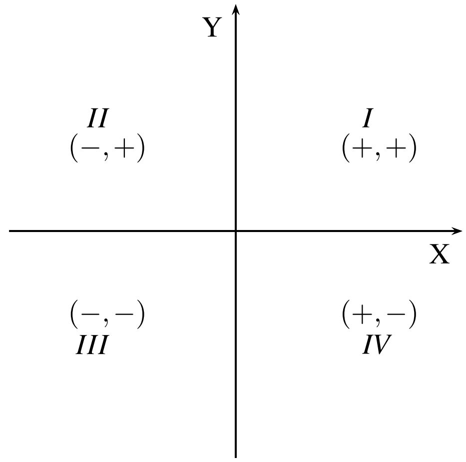

Figura 8: Cuadrantes y sus respectivos signos

más $(+)$. Teniendo en cuenta los signos para seno y coseno, se pueden encontrar los signos correspondientes para las otras funciones trigonométricas dado un ángulo cualquiera.

Ejercicio

Los signos de $\text{cotg}(175^{\text{o}})$ y de $\csc\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, respectivamente son

a. $+$ y $+$

b. $+$ y $-$

c. $-$ y $-$

d. $-$ y $+$

5. Ángulos notables en la circunferencia unitaria

En muchas aplicaciones matemáticas y físicas se ejemplifican diversas situaciones con ángulos tales como 0^{o}, 30^{o}, 45^{o}, 60^{o} y 90^{o}, respectivamente $0\ rad$, $\frac{\pi}{6}\ rad$, $\frac{\pi}{4}\ rad$, $\frac{\pi}{3}\ rad$ y $\frac{\pi}{2}\ rad$, que se denominan ángulos notables en el primer cuadrante.

En la Figura 9, se muestran los ángulos notables y las coordenadas de los puntos correspondientes en la circunferencia unitaria.

Si θ es un ángulo notable en el primer cuadrante, $\theta+\pi$ es el ángulo correspondiente en el tercer cuadrante.

Ejemplo:

El ángulo $\frac{\pi}{6}$ está en el primer cuadrante, su opuesto (notable) en el tercer cuadrante es $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.

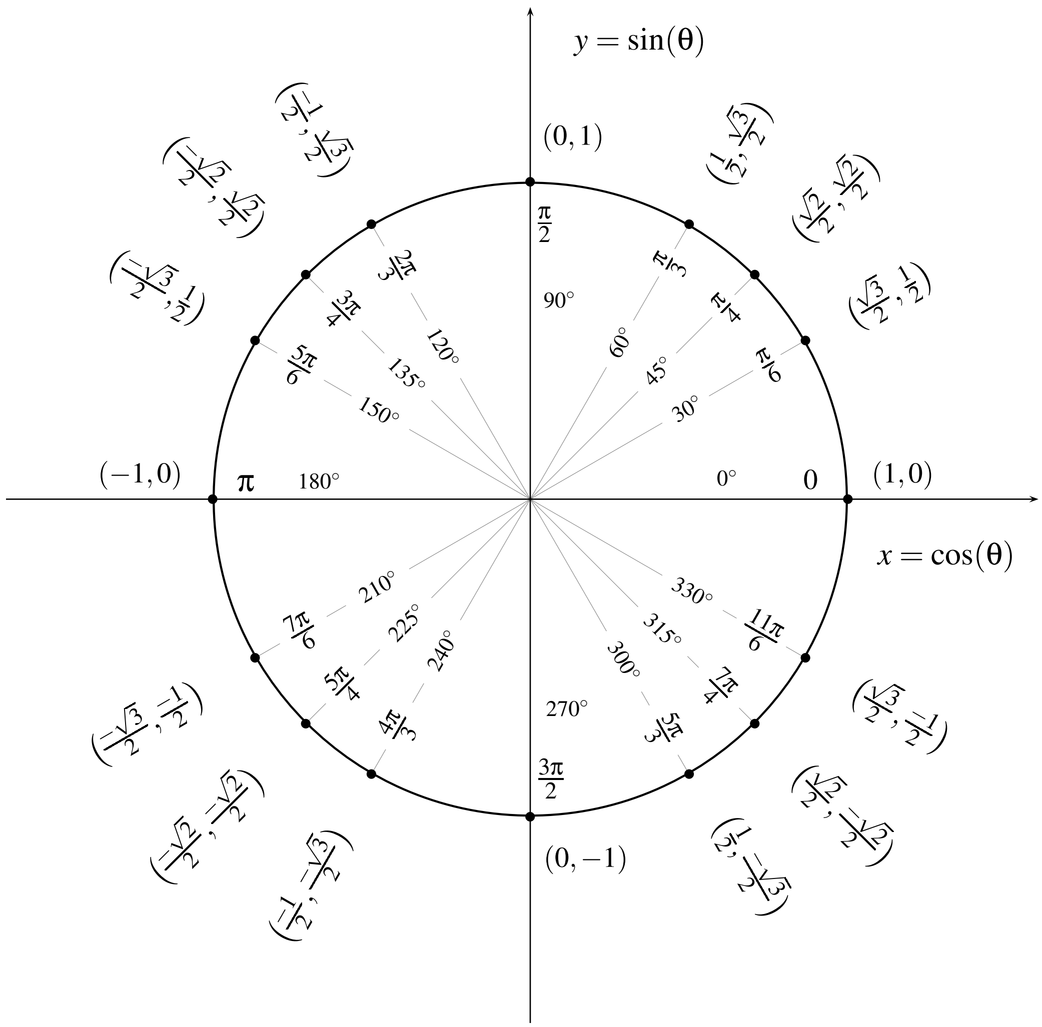

Figura 9: Círculo trigonométrico, tomado de:

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit−circle−angles.svg?uselang=es

Ejemplos

a. Encuentre el ángulo opuesto de $\frac{2\pi}{3}$ y las coordenadas del punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria.

   El ángulo opuesto de $\frac{2\pi}{3}$ se encuentra sumándole π. Esto es $\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$. Las coordenadas del punto correspondiente son:

$x = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$, $y = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$.

Luego $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, que es el punto correspondiente al ángulo $\theta = \frac{5\pi}{3}$, sobre la circunferencia unitaria, medido positivamente, a partir del eje X (rayo $\overrightarrow{OX}$).

b. Para el punto $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, ubicado sobre la circunferencia unitaria, determine el cuadrante en el que se encuentra y el ángulo correspondiente medido positivamente a partir del eje X.

El punto tiene las dos coordenadas negativas, por lo tanto se encuentra en el tercer cuadrante. Al observar su ubicación en la circunferencia unitaria, se tiene que corresponde al ángulo $\theta = \frac{7\pi}{6}\ rad = 210^{\text{o}}$

c. Encuentre $\tan(210^{\text{o}})$.

A partir de las identidades trigonométricas básicas se tiene que:

$$\tan(210^{\text{o}}) = \frac{\text{sen}(210^{\text{o}})}{\cos(210^{\text{o}})} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.

Ejercicio

Para el ángulo $\theta = \frac{5\pi}{3}\ rad = 300^{\text{o}}$, medido positivamente, encuentre, respectivamente, el ángulo opuesto y el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria.

a. $\frac{2\pi}{3}\ rad = 120^{\text{o}}$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\frac{\pi}{3}\ rad = 120^{\text{o}}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c. $\frac{4\pi}{3}\ rad = 110^{\text{o}}$, $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

d. $\frac{2\pi}{3}\ rad = 120^{\text{o}}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejercicio

$\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ es

a. 2

b. -2

c. $-\sqrt{2}$

d. $\sqrt{2}$

5.1. Funciones trigonométricas inversas

Para un ángulo θ medido en *rad*, grados sexagesimales o cualquier otro sistema de medida, se pregunta por el valor que le corresponde de acuerdo con una función trigonométrica. Por ejemplo, $\text{sen}(30^{\text{o}}) = 0.5$. En este caso, la pregunta que se está resolviendo es: para $\theta = 30^{\text{o}}$, *¿cuál es el valor de* $\text{sen}(30^{o})$*?* Con ayuda del círculo unitario (Figura 9) o de una calculadora en el modo "DEG", se obtiene el valor 0.5. Lo mismo ocurre para todas y cada una de las funciones trigonométricas estudiadas.

Ahora, cabe hacer la pregunta al contrario: para el valor 0.5 y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ¿cuál es el ángulo θ correspondiente para la función seno? De nuevo, con la ayuda del círculo unitario (Figura 9), se observa que la segunda componente de los puntos que se encuentran sobre él, para $\frac{1}{2} = 0.5$ le corresponde un ángulo de $30^{\text{o}} = \frac{\pi}{6}$ *rad*. Note que en la circunferencia unitaria no es el único valor posible, puesto que entre $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ se encuentra el ángulo $\theta = 150^{\text{o}} = \frac{5\pi}{6}$. Esta pregunta no tiene una única respuesta en el círculo unitario, por lo tanto hay que restringir el intervalo en el que se quiere encontrar el ángulo correspondiente.

Cuando se pregunta de esta segunda manera, la solución se encuentra aplicando las funciones trigonométricas inversas. Que se representan de la siguiente manera:

Función	θ	Inversa
$x = \text{sen}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \text{sen}^{-1}(x)$
$x = \cos(\theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$	$\theta = \cos^{-1}(x)$
$x = \tan(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \tan^{-1}(x)$
$x = \sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$	$\theta = \sec^{-1}(x)$
$x = \csc(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ ó $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$	$\theta = \csc^{-1}(x)$
$x = \text{cotg}(\theta)$	$0 < \theta < \pi$	$\theta = \text{cotg}^{-1}(x)$

Cuadro 1: Funciones trigonométricas y sus inversas.

Observaciones

a. Para las funciones trigonométricas inversas $\text{sen}^{-1}(\theta) \neq \frac{1}{\text{sen}(\theta)} = \csc(\theta)$. Recordar que $\text{sen}^{-1}(x)$ significa el valor o los valores de x que están en un intervalo dado, para los que $\text{sen}(\theta) = x$ en ese intervalo.

b. Si $x = 0.3$, para encontrar $\cos^{-1}(0.3)$ en el intervalo $0^{\text{o}} \leq \theta \leq 180^{\text{o}}$. Se utiliza la calculadora en el modo "SD", de donde se obtiene que $\cos^{-1}(0.3) \approx 72.542^{\text{o}}$, que es un ángulo en el intervalo dado.

c. Para las funciones $\text{sen}^{-1}(x)$ y $\cos^{-1}(x)$, los valores de x deben de estar entre -1 y 1, es decir $-1 \leq x \leq 1$.

Ejemplos

a. Encuentre el ángulo para el que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

En este caso, observando el círculo unitario, se tiene que la primera componente para la que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es positivo le corresponde un ángulo de $45^o = \frac{\pi}{4}$ y este valor corresponde al primer cuadrante en donde se define el intervalo pedido.

Otra forma de encontrar la solución a este ejercicio es utilizar la calculadora en el modo "DEG" y utilizando la tecla "SHIFT", "COS" y digitando el valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se encuentra el ángulo correspondiente. En algunas calculadoras en lugar de la tecla "SHIFT", se tiene "INV". Si se quiere encontrar el valor del ángulo en radianes, hay que configurar la calculadora en el modo "RAD".

b. Encuentre el ángulo para el que $\tan(\theta) = \sqrt{3}$, en el intervalo $0 \leq \theta \leq 360^o$.

Se sabe que $\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, que corresponden, respectivamente, a los ángulos 60^o, 240^o. Por lo tanto, la solución al ejercicio planteado en el intervalo $0 \leq \theta \leq 360^o$, tiene cuatro soluciones.

Ejercicio

El ángulo para el que $\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ en el intervalo $180^o \leq \theta \leq 270^o$ es

a. 210^o

b. 150^o

c. 200^o

d. 180^o

Ejercicio

El valor de $\tan^{-1}(0.5)$ en el intervalo $-90^o < \theta < 90^o$ es

a. $\theta \approx 25.123^o$

b. $\theta \approx 26.565^o$

c. $\theta \approx 24.032^o$

d. $\theta \approx 27.825^o$

6. Gráficas de las funciones $\operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\tan(\theta)$

Al definir las funciones trigonométricas en el círculo unitario, se mostró que todas corresponden a relaciones en triángulos rectángulos. Determinar sus gráficas, dominio, rango, período y puntos en el plano cartesiano permite tener una mejor comprensión de ellas.

6.1. La función $\operatorname{sen}(\theta)$

Al realizar una tabulación de valores con los ángulos notables en la circunferencia unitaria y colocar los ángulos sobre el eje X y los valores de la función en el eje Y, se tiene la siguiente tabla para los valores en el primer cuadrante:

θ *rad*	0 *rad*	$\frac{\pi}{6}$ *rad*	$\frac{\pi}{4}$ *rad*	$\frac{\pi}{3}$ *rad*	$\frac{\pi}{2}$ *rad*	$\dots$
$\operatorname{sen}(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\dots$

Cuadro 2: Algunos puntos de la función $\operatorname{sen}(\theta)$ en el primer cuadrante.

A partir de la ubicación de estos puntos, en el plano cartesiano, se obtiene la siguiente gráfica para la función seno:

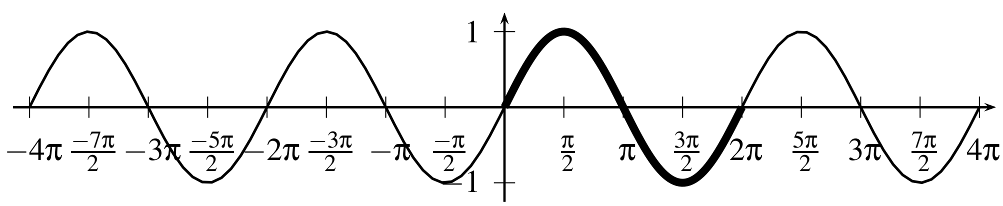

Figura 10: Función $\operatorname{sen}(\theta)$.

Observaciones

a. La función $\operatorname{sen}(\theta)$ se extiende desde $(-\infty,\infty)$ sobre el eje X, por lo tanto el dominio de la función es $(-\infty,\infty)$ y se denota por $\mathcal{D}_{\operatorname{sen}(\theta)} = (-\infty,\infty)$.

b. La función $\operatorname{sen}(\theta)$ en el eje Y tiene sus imágenes en el intervalo $[-1,1]$; este es el rango y se denota por $\mathcal{R}_{\operatorname{sen}(\theta)} = [-1,1]$.

c. El período de la función $\operatorname{sen}(\theta)$ es 2π y es el intervalo en el que hace un ciclo o vuelta completa. En la Figura 10, la parte resaltada muestra un período. Note que tanto a derecha de cero (0), como a izquierda, para cada intervalo de longitud 2π, la función se repite indefinidamente.

Ejemplo

A partir de la gráfica de $\operatorname{sen}(\theta)$, encuentre el valor de $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$.

Al observar la gráfica de la función $\operatorname{sen}(\theta)$, se observa que para $\theta = -\frac{7\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1$.

Ejercicio

A partir de la gráfica de $\operatorname{sen}(\theta)$ encuentre el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

a. 0

b. -1

c. 1

d. 0.25

6.2. La función $\cos(\theta)$

Al realizar una tabulación de valores con los ángulos notables en la circunferencia unitaria y colocar los ángulos sobre el eje X y los valores de la función en el eje Y, se tiene la siguiente tabla para los valores en el primer cuadrante:

θ *rad*	0 *rad*	$\frac{\pi}{6}$ *rad*	$\frac{\pi}{4}$ *rad*	$\frac{\pi}{3}$ *rad*	$\frac{\pi}{2}$ *rad*	...
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	...

Cuadro 3: Algunos puntos de la función $\cos(\theta)$ en el primer cuadrante.

A partir de la ubicación de estos puntos, en el plano cartesiano, se obtiene la siguiente gráfica para la función coseno:

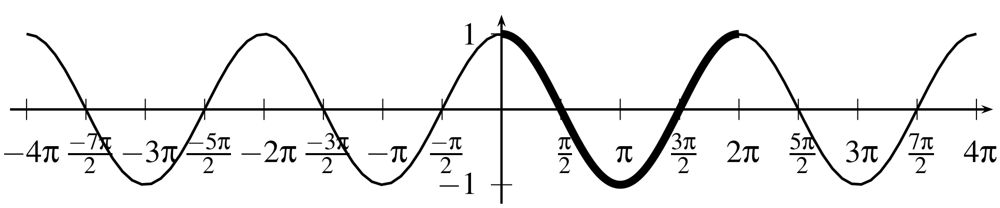

Figura 11: Función $\cos(\theta)$.

Observaciones

a. La función $\cos(\theta)$ se extiende desde $(-\infty,\infty)$ sobre el eje X, por lo tanto el dominio de la función es $(-\infty,\infty)$ y se denota por $\mathcal{D}_{\cos(\theta)} = (-\infty,\infty)$.

b. La función $\cos(\theta)$ en el eje Y tiene sus imágenes en el intervalo $[-1,1]$; este es el rango y se denota por $\mathcal{R}_{\cos(\theta)} = [-1,1]$.

c. El período de la función $\cos(\theta)$ es 2π y es el intervalo en el que hace un ciclo o vuelta completa. En la Figura 11, la parte resaltada muestra un período. Note que tanto a derecha de cero (0), como a izquierda, para cada intervalo de longitud 2π la función se repite indefinidamente.

Ejemplo

A partir de la gráfica de $\cos(\theta)$ encuentre el valor de $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Al observar la gráfica de la función $\cos(\theta)$, se observa que para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, corta el eje X, por lo tanto, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Ejercicio

A partir de la gráfica de $\cos(\theta)$, encuentre el valor de $\cos(-3\pi)$

a. 0

b. -1

c. 1

d. 0.25

6.3. La función $\tan(\theta)$

Al realizar una tabulación de valores con los ángulos notables en la circunferencia unitaria y colocar los ángulos sobre el eje X y los valores de la función en el eje Y, se tiene la siguiente tabla para los valores en el primer cuadrante:

θ *rad*	0 *rad*	$\frac{\pi}{6}$ *rad*	$\frac{\pi}{4}$ *rad*	$\frac{\pi}{3}$ *rad*	$\frac{\pi}{2}$ *rad*	...
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	...

Cuadro 4: Algunos puntos de la función $\tan(\theta)$ en el primer cuadrante.

A partir de la ubicación de estos puntos se obtiene la siguiente gráfica para la función tangente:

Observaciones

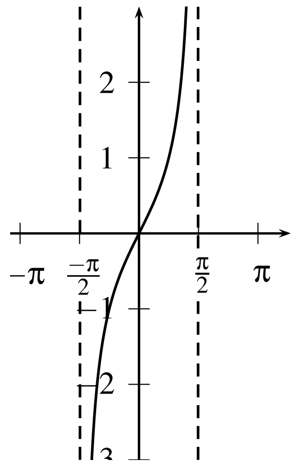

Figura 12: Función $\tan(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

a. Un período de la función $\tan(\theta)$, sobre el eje X toma valores en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo tanto el dominio de la función es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y se denota por $\mathcal{D}_{\tan(\theta)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b. El recorrido de la función $\tan(\theta)$ en el eje Y es $(-\infty, \infty)$; este es el rango y se denota por $\mathcal{R}_{\tan(\theta)} = (-\infty, \infty)$.

c. El período de la función $\tan(\theta)$ es π y es el intervalo en el que la gráfica de la función es completa. A la derecha de $\frac{\pi}{2}$, como a la izquierda $-\frac{\pi}{2}$, para cada intervalo abierto de longitud π, se obtiene una gráfica completa un período de la función $\tan(\theta)$.

d. Las líneas rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales de la función $\tan(\theta)$.

Ejercicio

A partir de la gráfica de $\tan(\theta)$ encuentre el valor de $\tan(0)$

a. 0

b. -1

c. 1

d. 0.25

7. Identidades básicas de las funciones trigonométricas

Una de las formas de escribir las identidades trigonométricas es partiendo del círculo unitario y aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos que se pueden formar en él.

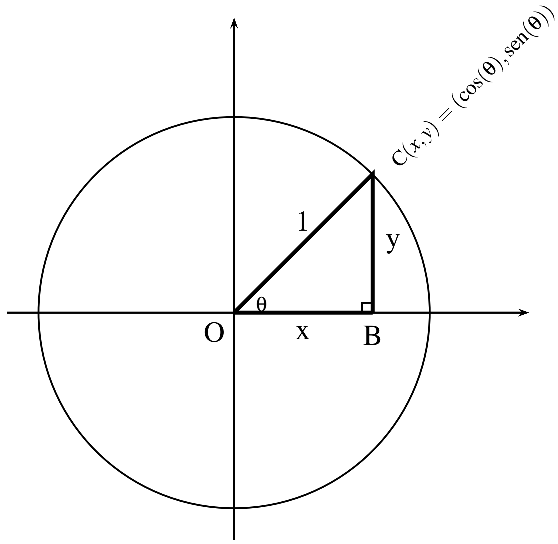

Figura 13: Coordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria.

En el triángulo rectángulo $\triangle OBC$ de la Figura 13, al aplicar el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

Allí $C(x,y) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$, de donde $x = \cos(\theta)$ y $y = \operatorname{sen}(\theta)$: al sustituir x e y en la ecuación 1, se obtiene:

$$\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1 \tag{2}$$

Al dividir la ecuación (2) por $\operatorname{sen}^2(\theta)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \\ \operatorname{cotg}^2(\theta) + 1 &= \csc^2(\theta) \end{aligned}$$

Al dividir la ecuación (2) por $\cos^2(\theta)$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} &= \frac{1}{\cos^2(\theta)} \\
1 + \tan^2(\theta) &= \sec^2(\theta)
\end{aligned}
$$

De esta forma, se obtienen las siguientes tres identidades fundamentales para el trabajo en trigonometría:

$$
\begin{aligned}
\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) &= 1 \\
\operatorname{cotg}^2(\theta) + 1 &= \csc^2(\theta) \\
1 + \tan^2(\theta) &= \sec^2(\theta)
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones se utilizan para transformar, simplificar o expandir ecuaciones que contengan funciones trigonométricas.

Ejemplos

a. Comprobar que $\tan(\theta) + \operatorname{cotg}(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta)$

$$
\begin{aligned}
\tan(\theta) + \operatorname{cotg}(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta} + \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{1}{\cos(\theta)} \\
&= \csc(\theta)\sec(\theta) \\
&= \sec(\theta)\csc(\theta)
\end{aligned}
$$

b. Comprobar que $\cot^2(\theta) = \cos^2(\theta) + (\cot(\theta)\cos(\theta))^2$.

Para comprobar una identidad trigonométrica, se puede comenzar por cualquiera de los dos lados. En este caso se parte de la derecha:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta)+(\cot(\theta)\cos(\theta))^2 &= \cos^2(\theta)+\cot^2(\theta)\cos^2(\theta)\\
&= \cos^2(\theta)(1+\cot^2(\theta))\\
&= \cos^2(\theta)\csc^2(\theta)\\
&= \frac{\cos^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\\
&= \left(\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2\\
&= \operatorname{cotg}^2(\theta)
\end{aligned}$$

Ejercicio

La expresión $\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)\operatorname{cotg}(\theta)$ es igual a

a. $\csc(\theta)$

b. $\sec(\theta)$

c. $\tan(\theta)$

d. $\operatorname{cotg}(\theta)$

Ejercicio

La expresión $\frac{\tan(\theta)+\operatorname{cotg}(\theta)}{\sec(\theta)\operatorname{cotg}(\theta)}$ es igual a

a. $\csc(\theta)$

b. $\sec(\theta)$

c. $\tan(\theta)$

d. $\operatorname{cotg}(\theta)$

8. Identidades trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos

Las fórmulas trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos permiten solucionar diversos problemas en diferentes ramas de las ciencias. De ellas se pueden deducir las fórmulas para los ángulos dobles que permiten expresar los cuadrados de las funciones trigonométricas en términos de ángulos dobles.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\theta+\alpha) &= \operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha)+\cos(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)\\
\operatorname{sen}(\theta-\alpha) &= \operatorname{sen}(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)\\
\cos(\theta+\alpha) &= \cos(\theta)\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)\\
\cos(\theta-\alpha) &= \cos(\theta)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\alpha)\\
\tan(\theta+\alpha) &= \frac{\tan(\theta)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\theta)\tan(\alpha)}\\
\tan(\theta-\alpha) &= \frac{\tan(\theta)-\tan(\alpha)}{1+\tan(\theta)\tan(\alpha)}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Exprese $\cos^2(\theta)$ en términos de ángulos dobles.

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta)\\
&= \cos(\theta)\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\\
&= \cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)\\
&= \cos^2(\theta)-(1-\cos^2(\theta))\\
&= 2\cos^2(\theta)-1
\end{aligned}$$

A partir del resultado anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta)+1 &= 2\cos^2(\theta)\\
\frac{\cos(2\theta)+1}{2} &= \cos^2(\theta)
\end{aligned}$$

De donde $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$.

Ejercicio

La expresión $\tan(2\theta)$ es igual a

a. $\frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$

b. $\frac{2\operatorname{cotg}(\theta)}{1+\operatorname{cotg}^2(\theta)}$

c. $\frac{2\operatorname{cotg}(\theta)}{1-\operatorname{cotg}^2(\theta)}$

d. $\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$

Ejemplo

Sin usar calculadora, encuentre $\operatorname{sen}(15^o)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(15^o) &= \operatorname{sen}(45^o - 30^o) \\
&= \operatorname{sen}(45^o)\cos(30^o) + \cos(45^o)\operatorname{sen}(30^o) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)
\end{aligned}$$

Ejercicio

El valor de $\tan(15^o)$ es

a. $2-\sqrt{3}$

b. $2-\sqrt{2}$

c. $3-\sqrt{2}$

d. $2+\sqrt{3}$

9. Solución de triángulos

En los triángulos rectángulos se definen las funciones trigonométricas. Dada una función trigonométrica en un triángulo rectángulo, se pueden encontrar las otras cinco. En la Figura 14, el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo:

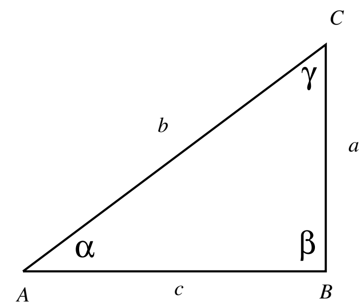

Figura 14: Triángulo rectángulo.

Se tiene que $m(\overline{AB}) = c$, $m(\overline{BC}) = a$ y $m(\overline{AC}) = b$, de donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{a}{b}, \quad \cos(\alpha) = \frac{c}{b}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{c} \\ \csc(\alpha) &= \frac{b}{a}, \quad \sec(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

A partir de una de estas relaciones se pueden conseguir las otras cinco (5).

Ejemplo

Si $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2}{3}$, encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas.

Se sabe que $\operatorname{sen}(\theta)$ es cateto opuesto sobre hipotenusa. Por lo tanto, en el tríangulo rectángulo se tiene que la medida del cateto opuesto es dos (2) unidades y la medida de la hipotenusa es de tres (3) unidades. Por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras se encuentra el cateto adyacente:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{3^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el triángulo rectángulo que se tiene es el de la Figura 15:

De donde se tiene que:

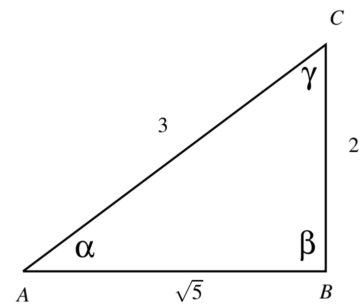

Figura 15: Triángulo rectángulo.

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2}{3}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\csc(\alpha) = \frac{3}{2}, \quad \sec(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

El ángulo α correspondiente es $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.810^{o}$.

Ejercicio

Si $\operatorname{cotg}(\alpha) = 3$ el valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$ y el ángulo α, respectivamente son

a. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha \approx 18.434^{o}$

b. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha \approx 17.434^{o}$

c. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha \approx 18.434^{o}$

d. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \approx 20.434^{o}$

9.1. Ley del seno y ley del coseno

Solucionar un triángulo implica conocer todos sus lados y sus ángulos. Para triángulos rectángulos, las relaciones trigonométricas definidas en ellos y el teorema de Pitágoras permiten determinar todos sus lados y ángulos. Para los triángulos, en general, se deben aplicar el teorema del seno o del coseno para solucionarlos.

El teorema del coseno es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos. Relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

9.1.1. Teorema del coseno

Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ (Figura 40), con ángulos interiores α, β, γ, y la medida de los lados opuestos respectivamente son a, b, c, a dichos ángulos, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

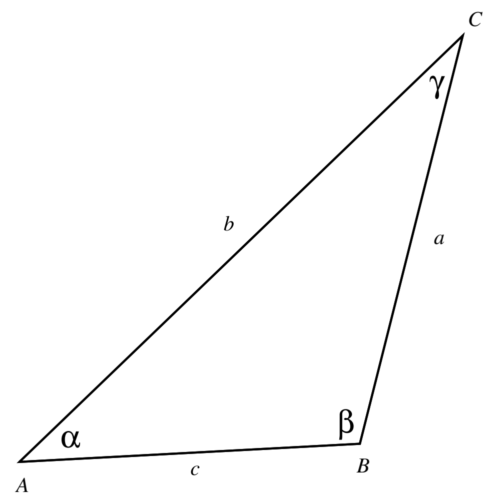

Figura 16: Triángulo.

Observaciones

a. El teorema del coseno se aplica cuando se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos.

b. Si se conocen los tres lados de un triángulo, se puede aplicar para encontrar los ángulos interiores.

Ejemplos

a. Encuentre el tercer lado de un triángulo si se sabe que dos lados miden, respectivamente, 4 y 6 *cm* y el ángulo entre ellos es de 60^o.

   La solución se encuentra aplicando directamente el teorema del coseno. El ángulo dado es agudo (menor de 90^o). Sean b, c los lados dados y $\alpha = 60^o$ los valores dados:

$$
\begin{aligned}
a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\\
=& 4^2 + 6^2 - 2(4)(6)\cos(60^{\text{o}})\\
=& 16 + 36 - 48(0.5)\\
=& 28\\
a =& \sqrt{28}\\
a \approx& 5.2915cm
\end{aligned}
$$

b. Se sabe que los lados de un tríangulo miden $a = 6$ *cm*, $b = 5.6$ *cm* y $c = 4.4$ *cm*, encuentre el ángulo entre b y c.

Al sustituir en la fórmula del coseno se obtiene:

$$
\begin{aligned}
a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\\
6^2 =& (4.4)^2 + (5.6)^2 - 2(4.4)(5.6)\cos(\alpha)\\
36 =& 19.36 + 31.36 - 49.28\cos(\alpha)\\
-14.72 =& -49.28\cos(\alpha)\\
0.2987 =& \cos(\alpha)\\
\alpha =& \cos^{-1}(0.2987)\\
\alpha \approx& 72.620^{\text{o}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Dos lados de un triángulo miden, respectivamente, 3 y 4 *cm* y el ángulo entre ellos es de 45^{o}, el tercer lado mide

a. 2.834 *cm*

b. 5.086 *cm*

c. 5 *cm*

d. 7 *cm*

9.1.2. Teorema del seno

El teorema del seno o ley de senos es una relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados de un triángulo y los senos de los ángulos respectivamente opuestos.

Dado un triángulo $\triangle ABC$ (Figura 16), con ángulos interiores α, β, γ, y la medida de los lados opuestos respectivamente son a, b, c, a dichos ángulos, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Observaciones

a. El teorema del seno es utilizado para resolver problemas en los que se conocen dos ángulos del triángulo y un lado opuesto a uno de ellos.

b. También se usa cuando conocemos dos lados del triángulo y un ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplos

a. Dos ángulos interiores de un triángulo miden respectivamente $\alpha = 30^{o}$ y $\beta = 45^{o}$, el lado opuesto a β mide $10cm$. Encuentre la medida del lado opuesto al ángulo α.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} &= \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}\\
\frac{a}{\operatorname{sen}(30^{o})} &= \frac{10}{\operatorname{sen}(45^{o})}\\
a &= \frac{10\operatorname{sen}(30^{o})}{\operatorname{sen}(45^{o})}\\
a &= \frac{10}{\sqrt{2}}\\
a &= 5\sqrt{2}\\
a &\approx 7.071cm
\end{aligned}$$

b. Dos lados de un triángulo miden, respectivamente, $a = 5cm$ y $c = 8cm$. El ángulo α, opuesto al lado a mide 20^{o}. Encuentre el ángulo γ opuesto al lado c.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} &= \frac{8}{\operatorname{sen}(\gamma)} \\
\frac{5}{\operatorname{sen}(20^{o})} &= \frac{8}{\operatorname{sen}(\gamma)} \\
\operatorname{sen}(\gamma) &= \frac{8\operatorname{sen}(20^{o})}{5} \\
\operatorname{sen}(\gamma) &\approx \frac{8(0.3420)}{5} \\
\operatorname{sen}(\gamma) &\approx 0.5472 \\
\gamma &\approx \operatorname{sen}^{-1}(0.5472) \\
\gamma &\approx 33.1773^{o}
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Dos lados de un triángulo miden, respectivamente, $a = 7cm$ y $c = 9cm$. El ángulo α , opuesto al lado a, mide 35^{o}. Encuentre el ángulo γ opuesto al lado c.

a. $\gamma \approx 45^{o}$

b. $\gamma \approx 40^{o}$

c. $\gamma \approx 34.613^{o}$

d. $\gamma \approx 47.515^{o}$

10. Ejercicios

1. La medida angular en grados de un radian es igual a

   a. 90°
   b. 57.3°
   c. 180°
   d. 10°

2. La medida angular en grados de π radianes es igual a

   a. 360°
   b. 57.217°

   c. 90°
   d. 180°

3. La medida angular en radianes de 300° es igual a

   a. $\frac{4\pi}{3}$
   b. $\frac{5\pi}{4}$
   c. $\frac{5\pi}{3}$
   d. $\frac{5\pi}{2}$

4. La medida angular en radianes de 100° es igual a

   a. 1.5
   b. 2.5
   c. $\frac{5\pi}{8}$
   d. 1.7477

5. La medida angular en radianes de 315° es igual a

   a. $\frac{7\pi}{4}$
   b. $\frac{7\pi}{5}$
   c. $\frac{9\pi}{8}$
   d. $\frac{7\pi}{3}$

6. El arco subtendido por un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes y de radio 8 cm mide

   a. 2 cm
   b. 2π cm
   c. 4π cm
   d. 4 cm

7. El arco subtendido por un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ radianes y de radio 3 cm mide

   a. 5π cm
   b. 5 cm
   c. $\frac{5\pi}{2}$ cm
   d. 2.5 cm

8. El arco subtendido por un ángulo de 60° y de radio 4 cm mide

   a. $\frac{4\pi}{3}$ cm

b. 1.333 cm
c. $\frac{8\pi}{3}$ cm
d. $\frac{8}{3}$ cm

9. El arco subtendido por un ángulo de 80° y de radio 9 cm mide

a. 2π cm
b. 2 cm
c. 4π cm
d. 4 cm

10. La siguiente igualdad corresponde a una identidad

a. $\operatorname{sen} x^2 + \cos x^2 = 1$
b. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2(x) = 1$
c. $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2(x)$
d. $\operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2(x)$

11. La siguiente igualdad corresponde a una identidad

a. $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$
b. $\sec(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$
c. $\tan(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$
d. $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

12. La siguiente igualdad no corresponde a una identidad

a. $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
b. $\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$
c. $\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2) = 1$
d. $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

13. La siguiente igualdad no corresponde a una identidad

    a. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
    b. $\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$
    c. $\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(x) = 1$
    d. $\cot(x)\ \tan(x) = 1$

14. El valor de $\cos(225°)$ es

    a. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
    b. $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
    c. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
    d. $\frac{-1}{2}$

15. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{4}) + \cos(\frac{3\pi}{4})$ es

    a. $\frac{-2\sqrt{2}}{2}$
    b. $\frac{2\sqrt{2}}{2}$
    c. 1
    d. 0

16. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{4\pi}{3}) + \cos(\frac{4\pi}{3})$ es

    a. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
    b. $-\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
    c. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
    d. 0

17. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{11\pi}{6}) + \cos(\frac{11\pi}{6})$ es

    a. $-\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
    b. $\frac{1-\sqrt{3}+1}{2}$
    c. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
    d. 1

18. El rango de la función $\tan(x)$ es

    a. $(-\infty, \infty)$

b. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$
c. $[-1, 1]$
d. $(-\infty, 0) \cup (0, -\infty)$

19. El rango de la función $\cos(x)$ es

a. $(-\infty, +\infty)$
b. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
c. $[-1, 1]$
d. $(-1, 1)$

20. El valor de $\operatorname{sen}^{-1}(0.5)$ es

a. $\frac{\pi}{3}$
b. $\frac{\pi}{6}$
c. $\frac{\pi}{4}$
d. 2

21. El valor de $\cos^{-1}(-1)$ es

a. $-\pi$
b. π
c. $\frac{\pi}{2}$
d. 0

22. El valor de $\tan^{-1}(1)$ es

a. $\frac{\pi}{4}$
b. $\frac{-\pi}{4}$
c. $\frac{\pi}{3}$
d. $\frac{-\pi}{3}$

23. El valor de $\tan^{-1}(-1)$ es

a. $\frac{\pi}{4}$
b. $\frac{-\pi}{4}$
c. $\frac{-\pi}{3}$
d. $\frac{-\pi}{6}$

24. El valor de $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ es

a. $\frac{-\pi}{3}$
b. $\frac{\pi}{3}$
c. $\frac{-\pi}{6}$
d. $\frac{\pi}{6}$

25. El valor de $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$ es

a. $\frac{-2\pi}{3}$
b. $\frac{2\pi}{3}$
c. $\frac{\pi}{6}$
d. $\frac{5\pi}{6}$

26. Desde un punto de un terreno, horizontal, se observa la copa de un árbol bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 metros se observa la copa, bajo un ángulo de 60°. Entonces la altura del árbol en metros es igual a

a. 9
b. 8
c. $10\sqrt{3}$
d. $5\sqrt{3}$

27. En el siguiente triángulo rectángulo, la medida de c es

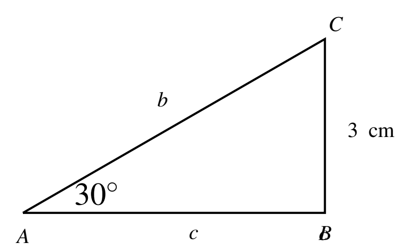

Figura 17: Triángulo rectángulo.

a. $\sqrt{17}$ cm
b. $\sqrt{27}$ cm
c. $2\sqrt{3}$ cm
d. $3\sqrt{2}$ cm

28. En el siguiente triángulo rectángulo, la medida de c es

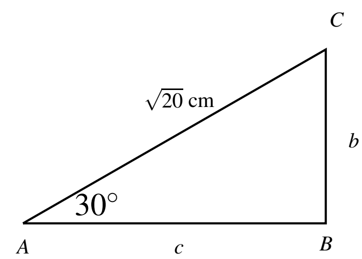

Figura 18: Triángulo rectángulo.

a. $\sqrt{10}$ cm
b. 4 cm
c. $2\sqrt{3}$ cm
d. $\sqrt{15}$ cm

29. En el siguiente triángulo rectángulo, la medida de b es

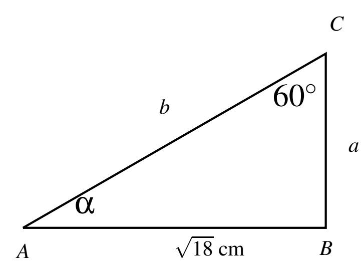

Figura 19: Triángulo rectángulo.

a. $\sqrt{24}$ cm
b. 5 cm
c. $2\sqrt{28}$ cm
d. $\sqrt{20}$ cm

30. En el siguiente triángulo, la medida de a es

a. 7 cm
b. $5\sqrt{2}$ cm
c. 5 cm
d. $2\sqrt{5}$ cm

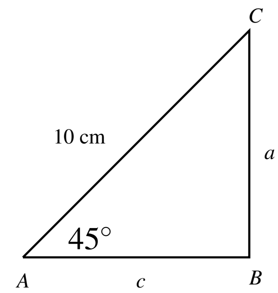

Figura 20: Triángulo rectángulo.

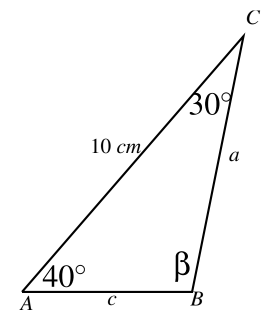

Figura 21: Triángulo.

31. En el siguiente triángulo, la medida de a es

    a. 8 cm
    b. $7\sqrt{2}$ cm
    c. 6.85 cm
    d. $6.452\sqrt{5}$ cm

32. En el siguiente triángulo, la medida de b es

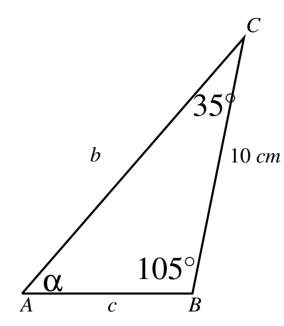

Figura 22: Triángulo.

a. 15.025 cm
b. 17.032 cm
c. 13.112 cm
d. 8.456 cm

33. En el siguiente triángulo, la medida de c es

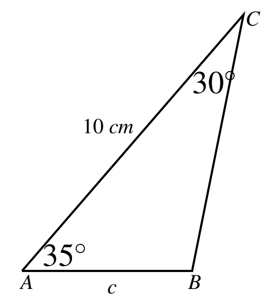

Figura 23: Triángulo.

a. 6.56 cm
b. 4.88 cm
c. 5 cm
d. 5.53 cm

34. En el siguiente triángulo, la medida de c es

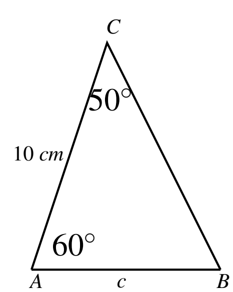

Figura 24: Triángulo.

a. 8.931 cm
b. 8.152 cm
c. 7.842 cm
d. 7.3573 cm

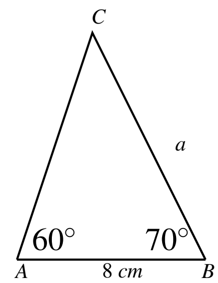

Figura 25: Triángulo.

35. En el siguiente triángulo, la medida de a es

    a. 8.03 cm
    b. 8.5 cm
    c. 9.04 cm
    d. 9.08 cm

36. En el siguiente triángulo, la medida de c es

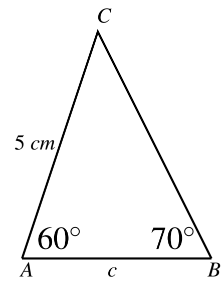

Figura 26: Triángulo.

a. 4.076 cm
b. 4.251 cm
c. 3.833 cm
d. 3.57 cm

37. En el siguiente triángulo, la medida de c es

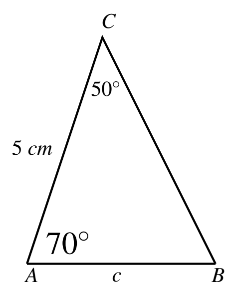

Figura 27: Triángulo.

a. 3.82 cm
b. 4.73 cm
c. 4.42 cm
d. 4.52 cm

38. En el siguiente triángulo, la medida de c es

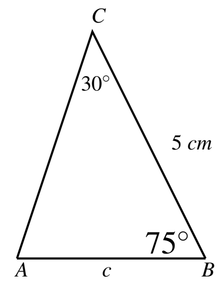

Figura 28: Triángulo.

a. 4.0 cm
b. 3.5 cm
c. 3.0 cm
d. 2.6 cm

39. En el siguiente triángulo, la medida del lado BC es

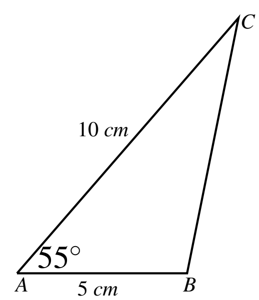

Figura 29: Triángulo.

a. 7.8456 cm
b. 8.0123 cm
c. 8.2240 cm
d. 6.8634 cm

40. En el siguiente triángulo, la medida del lado *BC* es

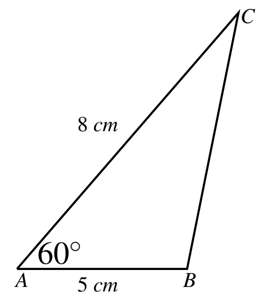

Figura 30: Triángulo.

a. 7.0000 cm
b. 6.8523 cm
c. 6.4013 cm
d. 7.4217 cm

41. En el siguiente triángulo, la medida del lado *AC* es

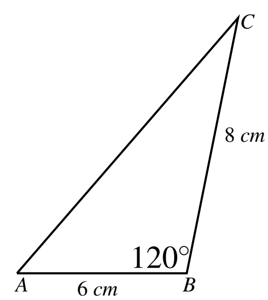

Figura 31: Triángulo.

a. 12.845 cm
b. 10.346 cm
c. 11.542 cm
d. 12.166 cm

42. En el siguiente triángulo, la medida del lado AC es

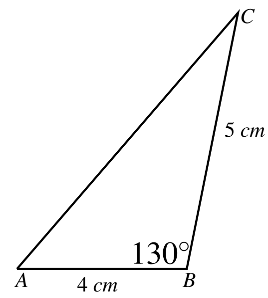

Figura 32: Triángulo.

a. 8.453 cm
b. 8.168 cm
c. 7.923 cm
d. 6.753 cm

43. En el siguiente triángulo, la medida del lado AC es

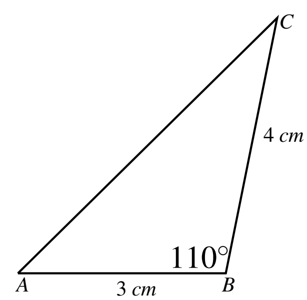

Figura 33: Triángulo.

a. 5.214 cm
b. 6.321 cm
c. 5.763 cm
d. 5.961 cm

44. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

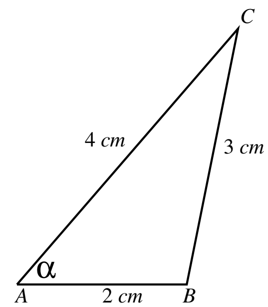

Figura 34: Triángulo.

a. 43.420
b. 45.153
c. 46.567
d. 48.121

45. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

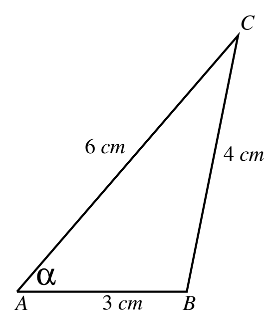

Figura 35: Triángulo.

a. 32.1022
b. 36.3360
c. 38.1375
d. 40.2301

46. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

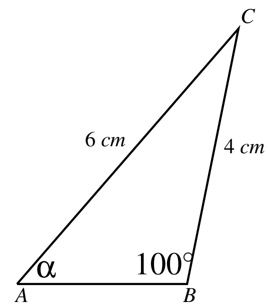

Figura 36: Triángulo.

a. 41.0364
b. 38.2310
c. 36.8943
d. 44.0233

47. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

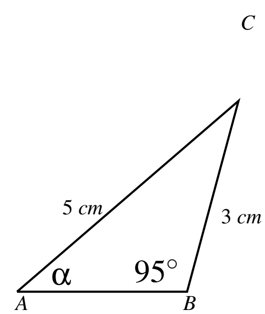

Figura 37: Triángulo.

a. 40.4351
b. 38.0231
c. 36.7065
d. 34.23

48. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

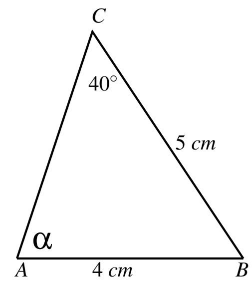

Figura 38: Triángulo.

a. 45.2059
b. 56.3214
c. 50.4261
d. 53.4641

49. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

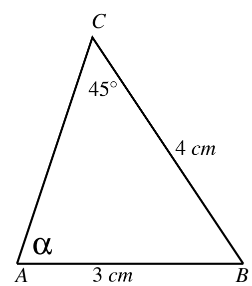

Figura 39: Triángulo.

a. 60.3159
b. 70.5287
c. 72.5312
d. 75.2157

50. En el siguiente triángulo, la medida en grados del ángulo α es

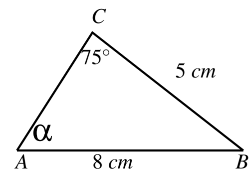

Figura 40: Triángulo.

a. 44.3159
b. 40.0030
c. 37.1356
d. 35.2157

11. Bibliografía

1. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). Precálculo con avances de cálculo. McGraw-Hill Interamericana.

2. James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.

3. Leithold, L., & González, F. M. (1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Oxford University Press.

4. Sullivan, M. (1998). Precálculo. Pearson Educación.