



Algunas consideraciones del modelo bidominio basado en el método de volúmenes finitos

Andrei Alain Gonzalez Galeano
Javier Hernan Gil Gomez

Universidad Eafit
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Departamento de Ciencias Básicas
Medellín, Colombia
2014

Algunas consideraciones del modelo bidominio basado en el método de volúmenes finitos

Andrei Alain Gonzalez
Javier Hernan Gil Gomez

Trabajo de Investigación como requisito para optar al título de:
Magister en Matemática Aplicada

Director:
Ph.D. Jairo Villegas G.

Universidad Eafit
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Departamento de Ciencias Básicas
Medellín, Colombia
2014

Resumen

En este trabajo se estudia la actividad eléctrica cardíaca por medio del modelo del bidominio, el cual, describe el comportamiento eléctrico del tejido cardíaco, basado en el flujo de corriente, la distribución del potencial eléctrico y la conservación de carga y corriente [7], para esto se utiliza el esquema de volúmenes finitos construido sobre mallas rectangulares, donde se realiza un análisis cualitativo de acuerdo a las simulaciones realizadas. La discretización se enfocará en los algoritmos existentes para ecuaciones elípticas y parabólicas donde su convergencia estará garantizada por la teoría clásica.

En general el modelo de los volúmenes finitos involucra los siguientes pasos [42]:

- a) Descomposición del dominio en volúmenes de control.
- b) Formulación de las integrales sobre cada volumen de control.
- c) Aproximación de las integrales por integración numérica.
- d) Aproximación de las derivadas por algún esquema numérico como el de Euler.
- e) Montaje y solución del sistema algebraico discreto.

Palabras Claves: Modelo del Bidominio, Volúmenes finitos, Actividad eléctrica del tejido cardíaco.

Abstract

In this paper heart activity through bidominio model, which study describes the electrical behavior of cardiac tissue, based on the current flow, the distribution of the electric potential and the conservation of charge and current [7] for this we use the finite-volume scheme on rectangular grids built where a quantitative analysis according to the simulations performed. The discretization will focus on existing algorithms for elliptic and parabolic equations where convergence will be guaranteed by the classical theory.

Generally the model of finite volumes involves the following steps [42]:

- a) Decomposition of the domain in control volumes.
- b) Formulation of the integrals over each control volume.
- c) Approximation of integrals by numerical integration.
- d) Approximation of derivatives by some numerical scheme like Euler.
- e) Assembly and solution of the discrete algebraic system

Keywords: bidomain Model, Finite Volumes, electrical activity of the heart tissue

Introducción

El comportamiento eléctrico del tejido cardíaco es representado mediante el modelo Bidominio, donde el tejido cardíaco se considera compuesto por dos dominios intracelular y extracelular, interpenetrados y superpuestos, considerados continuos, que ocupan por completo el volumen del corazón, dichos tejidos se encuentran separados por la membrana celular cardíaca que actúa como un aislante [43, 47]; el modelo bidominio se basa en un enfoque de volumen promedio, equivalente a un modelo de cable multidimensional, que describe los potenciales eléctricos promedio y los flujos de corriente intracelular y extracelular del músculo cardíaco [38, 7].

Este modelo está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de tipo parabólico - elíptico con condiciones de frontera tipo Neumann, para la resolución de dichas ecuaciones se requiere de técnicas computacionalmente efectivas, para esto se aplicará el esquema de volúmenes finitos.

El método de los volúmenes finitos es adecuado para realizar simulaciones numéricas discretizando diversos tipos de ecuaciones (elíptica, parabólica o hiperbólica por ejemplo) [8] siendo utilizado ampliamente en varios campos de la ingeniería, tales como la mecánica de fluidos, problemas de calor, o la ingeniería de petróleos.

Algunas de las principales características del método de volúmenes finitos son iguales a las del método de los elementos finitos, ver [29], se pueden usar geometrías arbitrarias con mallas estructurada o no estructuradas produciendo esquemas robustos. Como caso particular consideramos mallas rectangulares, sobre las cuales construiremos el esquema que nos permitirá discretizar las ecuaciones del bidominio. Una característica que hace al método atractivo a la hora de modelar problemas para los cuales el flujo es importante, es la conservación local, que permite que el flujo se mantenga de una celda a otra celda vecina. Se introduce el método a través de ejemplos simples para luego dar una descripción de la discretización de las ecuaciones del bidominio, finalizando con un análisis de los resultados obtenidos de la simulación realizada.

En el capítulo 2 se realiza una breve descripción del modelo Bidominio, y se desarrolla la construcción del modelo monodominio como caso particular del Bidominio, así mismo, se presenta la formulación débil para los modelos Bidominio y monodominio respectivamente.

En el capítulo 3 se presenta una introducción al esquema de volúmenes finitos, con algunos ejemplos clásicos que permiten mostrar la aplicación de la teoría y dar mayor claridad.

En el capítulo 4 se realiza la comparación teórica entre los esquemas de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos. Por otro lado, basados en la simulación realizada en MATLAB de la solución del Modelo Bidominio, se dan algunas consideraciones y comparaciones respecto a la solución con otros métodos de aproximación.

Índice general

Resumen	III
Introducción	IV
1. Fisiología del corazón	1
1.1. El sistema circulatorio	2
1.2. Fisiología del corazón	3
1.3. Sistema de estimulación y conducción	5
1.3.1. Tejido Nodal	7
1.3.2. El sistema de conducción	7
1.3.3. Ritmo eléctrico de las fibras del nodo sinusal	8
1.4. Ciclo cardíaco	9
1.5. Algunas afecciones cardiacas	11
1.5.1. Infarto de miocardio	11
1.5.2. Taquicardia ventricular	13
1.5.3. Fibrilación	13
2. Generalidades de la dinámica celular cardíaca	15
2.1. Membrana celular	15
2.1.1. Canales iónicos	16
2.1.2. Bombas iónicas	17
2.1.3. Uniones gap	17
2.1.4. Modelo de FitzHugh-Nagumo	18
2.2. Conductividad anisotrópica del tejido	19
3. Modelo Bidominio	23
3.1. Ecuación del cable	23
3.2. Descripción del modelo bidominio	27
3.3. Modelo monodominio	30

3.4. Fórmula variacional	31
4. Introduccción a volúmenes finitos	35
4.1. Condiciones generales	37
4.1.1. Caso elíptico	44
4.1.2. Caso parabólico	50
4.1.3. Esquema explícito para la ecuación parabólica	51
4.2. Modelo bidominio por volúmenes finitos	52
4.3. Convergencia del modelo bidominio	54
4.4. Simulación numérica del modelo bidominio	57
4.4.1. Comparación con otras técnicas de discretización	65
5. Conclusiones	67
6. Anexo - Códigos en Matlab	68
Bibliografía	82

Capítulo 1

Fisiología del corazón

El corazón es un órgano muscular situado en la cavidad torácica directamente detrás del esternón. Sus paredes están formadas por tejido muscular cardíaco, reforzado por bandas de tejidos conectivo. Todo el órgano está recubierto de una bolsa fibrosa resistente, de tejido conectivo que se llama *pericardio*. La superficie interna de este saco y la superficie externa del corazón están cubiertas de una capa lisa de células parecidas a las epiteliales, sobre las que se extiende un líquido que reduce la fricción al mínimo al latir el corazón.

Tanto el corazón como todos los vasos están revestidos de una capa de células lisas y aplanadas, el *endotelio*, el cual evita que la sangre se coagule en el interior del sistemas circulatorio. Toda enfermedad o lesión del endotelio que provoque en el mismo una superficie rugosa, puede ser motivo de un trombo en la cavidad. El objetivo de este capítulo es estudiar de manera breve la fisiología del corazón, con el propósito de conocer algunas de las propiedades especiales del músculo cardíaco y el funcionamiento del corazón en general. Para un estudio profundo sobre la fisiología del corazón, véase por ejemplo, [6, 13, 15, 18, 44].

1.1. El sistema circulatorio

El corazón, los vasos sanguíneos y la sangre en sí misma son tres componentes esenciales que requiere el cuerpo para sobrevivir. El sistema circulatorio consiste en dos circuitos separados por los cuales viaja la sangre (el pulmonar y el sistémico). El circuito pulmonar lleva la sangre a los pulmones para ser oxigenada y la regresa al corazón. En los pulmones es removido el dióxido de carbono de la sangre y el oxígeno es tomado por la hemoglobina en los glóbulos rojos. El circuito sistémico lleva la sangre a través del cuerpo para distribuir el oxígeno y regresa la sangre desoxigenada al corazón. La sangre sin oxígeno llega a la aurícula derecha (AD) a través de las venas cavas superior e inferior (VCS y VCI) de la aurícula derecha pasa al ventrículo derecho (VD) a través de la válvula tricóspide. El ventrículo derecho se contrae y envía la sangre a la arteria pulmonar (AP) a través de otra válvula (la pulmonar) que evita que la sangre retroceda hacia el ventrículo. La arteria pulmonar se bifurca en dos arterias una para el pulmón derecho y otra para el izquierdo (en el esquema de la circulación normal, sólo se presenta una arteria pulmonar). En el pulmón se oxigena la sangre y regresa ya oxigenada a la aurícula izquierda (AI) a través de las venas pulmonares. De la aurícula izquierda pasa al ventrículo izquierdo (VI) a través de la válvula mitral y del ventrículo izquierdo a la aorta (AO) a través de otra válvula (aórtica). De la aorta nacen innumerables ramas que llevan la sangre a todos los órganos y tejidos. Las primeras de estas ramas son las arterias coronarias que llevan sangre oxigenada al propio corazón, a la masa muscular cardíaca o miocardio de la que extrae el oxígeno necesario para seguir latiendo. Los demás órganos también extraen el oxígeno. La sangre ya sin oxígeno regresa al corazón, a la aurícula derecha, a través de las venas cavas (VCS y VCI), cerrándose el ciclo.

Siguiendo el diagrama mostrado en la Figura 1.1 podemos describir el camino de la circulación tanto en el corazón como en nuestro cuerpo. El recorrido de la sangre se inicia en el ventrículo derecho (1) y se bombea la sangre por la vía (2), hacia las dos arterias pulmonares. Cuando la sangre fluye a través de los capilares pulmonares (3), estos descargan CO_2 y cargan O_2 a la sangre. La sangre rica en oxígeno fluye hacia atrás a la aurícula izquierda, por las venas pulmonares (4). La sangre rica en oxígeno fluye de la aurícula izquierda hacia el ventrículo izquierdo (5) (cuando el ventrículo se abre, la aurícula se contrae). La sangre del ventrículo izquierdo pasa a la aorta (6), que lleva la sangre rica en oxígeno al sistema superior (7) y tiene también una ramificación de arterias hacia abajo (8), que abastece los órganos abdominales y a la parte más baja del cuerpo. Las arterias transportan la sangre a través de las arteriolas, las cuales por turnos la transporta hacia los capilares. Los capilares se reúnen en vénulas que drenan e intercambian la sangre rica en oxígeno por sangre pobre en él. La sangre pobre

en oxígeno de la parte superior del cuerpo es llevada por una vena grande, la cava superior(9). Igualmente ocurre con la sangre pobre en oxígeno que es drenada y llevada desde la parte inferior por medio de la vena cava inferior (10). Las dos venas cavas llevan su sangre a la aurícula derecha (11). Cuando el flujo de sangre pasa de la aurícula derecha, al ventrículo derecho se completa el recorrido de la sangre por el cuerpo humano.

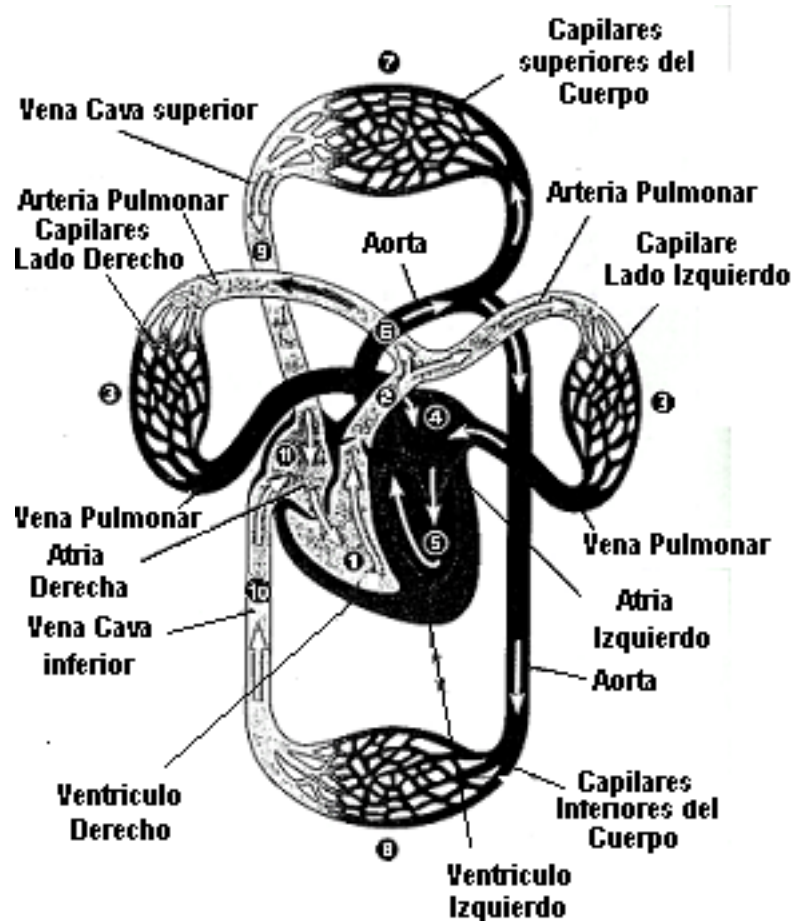


Figura 1.1. El sistema circulatorio.

1.2. Fisiología del corazón

El corazón está compuesto por tres tipos principales de músculo: el auricular, el ventricular y las fibras musculares excitadoras y conductoras especializadas. Los tipos de músculo auricular y ventricular se contraen muy rápidamente, comparado con el músculo esquelético. Las fibras excitadoras y conductoras especializadas se contraen sólo débilmente debido a que contienen pocas fibrillas contráctiles.

El músculo cardíaco es una cavidad de muchas células miocárdicas, todas interconectadas, de tal forma que si se excita una de estas células, el potencial de acción se extiende a todas ellas. Para que la bomba funcione adecuadamente es necesario que las redes de fibras (miocitos) que conforman el músculo auricular y ventricular se contraigan uniforme y sincrónicamente, lo que dispone de una gran unión entre los miocitos dado por los discos intercalares, que es una membrana que permite el flujo libre de iones, entre células, para permitir que el estímulo eléctrico, potencial de acción, de un extremo se transmita linealmente. El corazón se compone en realidad de dos sincitios [24], el auricular que constituye la pared de las dos aurículas y el ventricular que constituye las paredes de los ventrículos. Las aurículas están separadas de los ventrículos por el tejido fibroso que rodea las aberturas valvulares existentes entre las aurículas y los ventrículos. Los potenciales de acción pueden ser conducidos de las aurículas a los ventrículos a través de un sistema especializado de conducción, el haz auriculoventricular (AV), de varios milímetros de diámetro. Esta masa muscular cardíaca en dos sincitios funcionales permite que la aurícula se contraiga un poco antes que los ventrículos, lo que hace efectiva la bomba cardíaca.

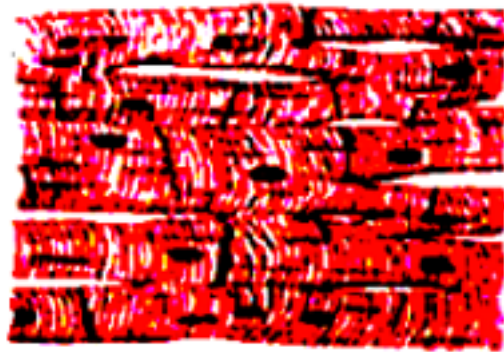


Figura 1.2. Naturaleza sincitial, entrelazada del músculo cardíaco

La Figura 1.2 muestra un cuadro histológico típico del miocardio, con fibras cardíacas entrelazadas, con fibras que se dividen, se reúnen y se separan nuevamente; por lo cual se ve que es un músculo estriado, con miofibrillas típicas que contienen filamentos de *actina* y *miosina*, estos filamentos se interdigitan y se desplazan unos a lo largo de los otros. Las áreas oscuras que atraviesan el músculo cardíaco se llaman *discos intercalares*. Además, membranas celulares que separan entre sí a las células musculares cardíacas. Se deduce que las fibras musculares cardíacas están compuestas por muchas células individuales conectadas en serie entre sí. Las membranas celulares se fusionan unas con otras de manera que forman uniones permeables (gap junctions). Los iones se mueven con facilidad a lo largo de los ejes longitudinales de las fibras musculares cardíacas, por lo que los

potenciales de acción viajan de una célula cardíaca a otra, por intermedio de los discos intercalares, con reducida resistencia.

La Figura 1.3 ilustra las estructuras de las diferentes clases de vasos sanguíneos y como se conectan estos vasos. Si se mira los capilares en su centro, ahí se forma una capa de finas redes neuronales donde los materiales son intercambiados entre la sangre y los tejidos celulares. Para cumplir con este papel, los capilares tienen paredes muy delgadas formadas por una sola capa de células epiteliales, las cuales también están envueltas en una delgada capa de la membrana.

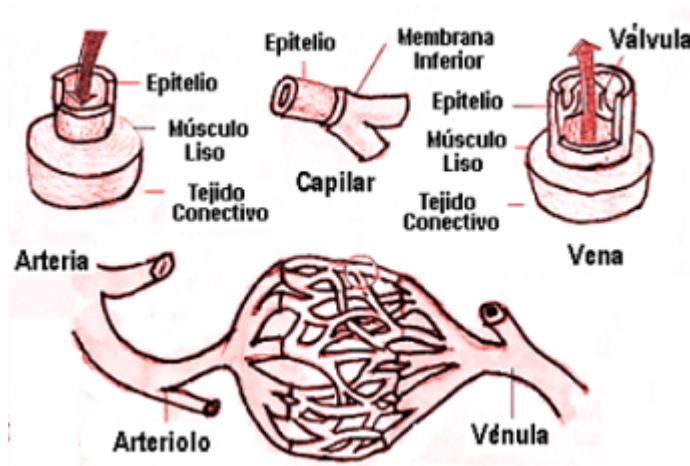


Figura 1.3. Relación de la estructura cardíaca

1.3. Sistema de estimulación y conducción

Latir es una función propia del corazón, manifiesta muy pronto durante el desarrollo embrionario y que continúa durante toda la vida. Todos los tejidos necesitan suministro constante del oxígeno conducido por la sangre circulante.

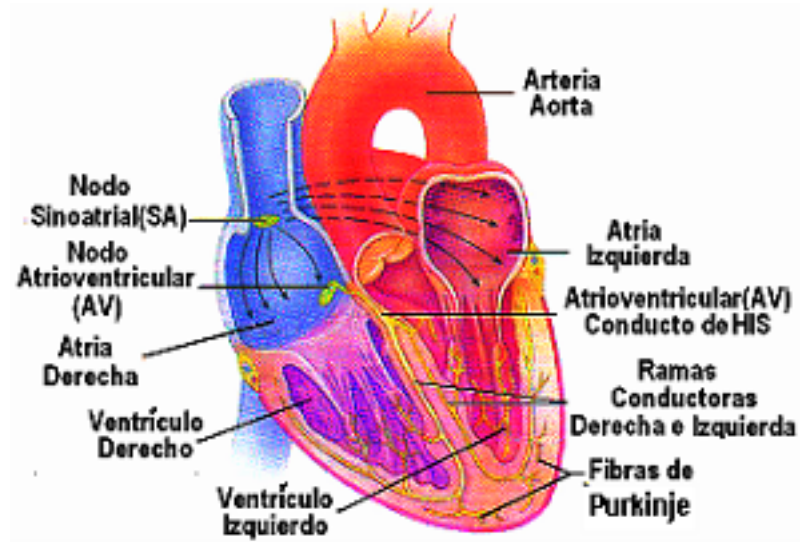


Figura 1.4. El nodo sinusal y el sistema de Purkinje del corazón.

En la Figura 1.4 se muestra el sistema especializado de estimulación y conducción del corazón que controla las contracciones cardiacas. El nodo sinusal, donde se genera el impulso rítmico normal. Las vías internodales que conducen el impulso desde el nodo sinusal hasta el auriculoventricular (AV). El nodo AV, en el cual el impulso procede de las aurículas se demora antes de pasar a los ventrículos. El haz AV, conduce el impulso de las aurículas a los ventrículos. Las ramas derecha e izquierda de las fibras de Purkinje, conducen el estímulo cardíaco a todas las partes de los ventrículos. Las fibras o tejido de Purkinje se localizan en las paredes internas ventriculares del corazón, por debajo del endocardio. Estas fibras son fibras especializadas miocárdicas que conducen un estímulo o impulso eléctrico que interviene en el impulso nervioso del corazón haciendo que éste se contraiga de forma coordinada. Los estímulos celulares se dan por potenciales de acción, que no es más que el cambio brusco de la polaridad de la membrana celular (despolarización) originada por transferencia de iones, que ocasiona una señal y cambios celulares, después de esto, la membrana vuelve a su potencial basal o repolarización (véase p.e., [13, 15, 44]).

1.3.1. Tejido Nodal

El latido del corazón es iniciado y regulado por el tejido nodal, formado por fibras musculares especializadas, los tejidos de Purkinje. Los vertebrados inferiores, como peces y ranas, presentan en el corazón una cavidad aparte, el seno venoso, en el cual desembocan las venas y que sucesivamente encaminan la sangre hacia la aurícula derecha. En las especies más evolucionadas esta disposición desaparece, excepto por un vestigio de tejido nodal que se llama nodo sinusal o sinoauricular situado en el punto en que la vena cava superior entra en la aurícula derecha, véase la Figura 1.4.

Hay un segundo nodo, asentado entre las dos aurículas, inmediatamente por encima de los ventrículos, el nodo auriculoventricular (AV). Desde este último desciende un haz de fibras que se van arborizando a lo largo de los ventrículos. El nodo sinusal desencadena el latido cardiaco y regula la frecuencia de contracción. Por este motivo se llama *marcapaso*. A intervalos regulares se propaga una onda contráctil desde este nodo sinoauricular por la musculatura auricular; al llegar al nodo auriculoventricular, el impulso se propaga a los ventrículos por el haz de tejido nodal. No hay en realidad conexión muscular entre aurículas y ventrículos; la correlación entre sus respectivas contracciones se logra únicamente por el tejido nodal especializado, el cual propaga los impulsos con rapidez casi 10 veces mayor que la del músculo ordinario.

La terminación de las fibras del nodo sinusal se fusiona con las fibras del músculo auricular de alrededor, y los potenciales de acción que se originan en el nodo sinusal salen hacia estas fibras, diseminándose por la masa muscular auricular y finalmente por el nodo AV. Aquí la velocidad es más rápida 0.3 m/s, por la presencia de tres pequeños fascículos de músculo auricular: *fascículo interauricular anterior, medio y posterior*, su velocidad de transmisión se debe a la presencia de fibras especializadas similares a las de *Purkinje*.

1.3.2. El sistema de conducción

El sistema de conducción está organizado de tal forma que el estímulo cardíaco no pase con demasiada rapidez; este retraso de 0.16 segundos da tiempo para que las aurículas vacíen el contenido a los ventrículos antes de que comience la contracción ventricular. Son el nodo AV y las fibras de conducción adyacentes las responsables de este atraso del estímulo cardíaco. La causa inicial de la conducción lenta se debe al tamaño considerable, respecto de las fibras musculares auriculares. La otra causa y tal vez la más importante se debe a dos factores: (1) los potenciales de reposo de la membrana son mucho menos negativos que el resto del miocardio, (2) existen pocas uniones permeables laxas (*gap junctions*) entre las sucesivas células musculares. Estos dos fenómenos aumentan la resistencia al flujo de iones

que estimulan a la célula siguiente.

Las fibras de Purkinje, las cuales se dirigen a los ventrículos desde el nodo AV, excepto en su parte inicial, es decir, en la parte que atraviesa la barrera fibrosa AV. Son fibras mayores que las musculares ventriculares y transmiten el potencial de acción de 1.5 a 4 m/s. Velocidad seis veces mayor a la del músculo cardíaco. Se cree que su rapidez de respuesta a los estímulos se debe a las uniones permeables de las paredes de sus células (gap junctions).

Por último, la característica del haz AV es la capacidad de no permitir que los potenciales de onda se devuelvan de los ventrículos a las aurículas por este conducto. En algunos casos aparecen puentes anormales en la barrera fibrosa en un lugar diferente al haz AV, permitiendo la devolución del estímulo y causando una grave arritmia.

1.3.3. Ritmo eléctrico de las fibras del nodo sinusal

Muchas fibras tienen la capacidad de autoexcitación, proceso que puede causar descargas y contracciones rítmicas automáticas. La porción de este sistema que muestra la mayor capacidad de autoexcitación es la formada por las fibras del nodo sinusal [10], [35]. La Figura 1.5 muestra los potenciales de acción registrados de una fibra del nodo sinusal durante tres latidos y, a título de comparación, un potencial de acción de una fibra muscular ventricular. El potencial de la fibra del nodo sinusal entre descargas tiene una negatividad de tan solo -55 a -66 mV, comparada con los -85 a -90 mV, de la fibra muscular ventricular. La causa de esta menor negatividad se debe a que las membranas celulares del nodo sinusal son permeables al sodio. Hay tres tipos de canales iónicos de las membranas que desempeñan un papel importante en los cambios de voltaje del potencial de acción [16], [46]. Se conocen como: (1) los canales rápidos de sodio, (2) los canales lentos de calcio-sodio y (3) los canales de potasio. La apertura de los canales rápidos de sodio durante unas pocas diez milésimas de segundo es responsable del rápido comienzo del potencial de acción (en forma de punta) que se observa en el músculo ventricular, debido a la rápida penetración de iones positivos de sodio al interior de la fibra.

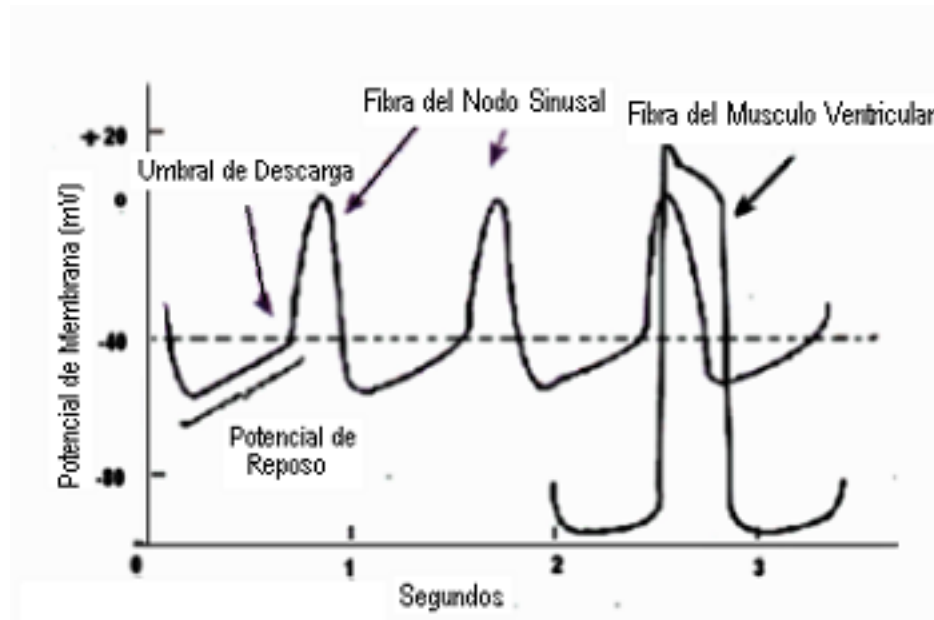


Figura 1.5. Descarga de una fibra del nodo sinusal.

La meseta del potencial de acción es causada por la apertura más lenta de los canales lentos de calcio y sodio que dura unas pocas décimas de segundo. La apertura de los canales de potasio y la difusión de grandes cantidades de iones positivos de potasio al exterior de las fibras devuelven el potencial de la membrana al nivel de reposo. Existe una diferencia de estos canales en la fibra nodo sinusal. Aquí la negatividad es mucho menor que el potencial de reposo (solo -50 mV), y a este grado de negatividad, los canales rápidos de sodio se han inactivado, lo que significa que se han bloqueado. Cuando el potencial de la membrana es menos negativo que unos -60 mV durante unos pocos milisegundos, las puertas de inactivación del lado interno se cierran y quedan así. Por lo tanto, solo pueden abrirse los canales lentos de calcio y sodio y causar así el potencial de acción. Como consecuencia, el potencial de acción se desarrolla más lentamente que el músculo ventricular y se recupera con un descenso lento del potencial de acción, en vez de la recuperación brusca que ocurre en la fibra ventricular.

1.4. Ciclo cardíaco

Se conoce con el nombre de ciclo cardíaco a todos los fenómenos que ocurren desde el inicio de la sístole hasta que empieza nuevamente la otra sístole. El ciclo cardíaco está formado por una etapa de sístole, contracción muscular, y otra etapa de diástole, relajación muscular. Si el nodo sinusal queda inutilizado por alguna lesión o enfermedad, el nodo auriculoventricular toma su función como

marcapaso. El ciclo cardíaco empieza por la despolarización automática que ocurre en el nodo sinusal (marcapasos cardíaco, más adelante se detallará), ubicado en la aurícula derecha cerca a la desembocadura de vena cava superior, el cual transmite el impulso por toda la aurícula y por los haces internodales en busca de despolarizar el nodo AV, el cual retarda el impulso alrededor de 0,1 ms para luego enviar el impulso al ventrículo. Este retraso se hace para que primero se contraiga la aurícula que el ventrículo, bombeando sangre hacia el ventrículo antes de que este haga su gran sístole. Es por esto último que se conoce a las aurículas como las bombas cebadoras.

Cada latido cardíaco consta de una contracción o *sístole*, seguida de una relajación *diástole*. Al ritmo considerado normal de 70 latidos por minuto, cada uno de ellos completo dura 0,85 de segundo. Las aurículas y ventrículos no se contraen simultáneamente; la sístole auricular aparece primero, con duración aproximada de 0,15 de segundo, seguida de la sístole ventricular, con duración también aproximada de 0,30 de segundo. Durante la fracción restante de 0,40 de segundo, todas las cavidades descansaran en estado de relajación. De esta manera, la función impulsora de sangre del corazón sigue una sucesión cíclica. Las fases sucesivas del ciclo, a partir de la sístole auricular, son las siguientes:

- a) Sístole auricular: a lo largo de la aurícula se propaga la onda de contracción, estimulada por el nodo sinusal, con lo cual se obliga a que la sangre llene los ventrículos. Éstos están ya medio llenos, por el hecho que la presión es más baja que en las aurículas, y las válvulas tricóspide y mitral están abiertas. La conducción del impulso por el nodo auriculoventricular es más lenta que a lo largo de otras porciones del tejido nodal, lo que explica la breve pausa después de la sístole auricular y antes de que comience la sístole ventricular.
- b) Comienzo de la sístole ventricular: se contrae el músculo de la pared ventricular, estimulado por el impulso propagado por el haz de tejido nodal y procedente del nodo auriculoventricular, con aumento rápido de la presión en los ventrículos. Al instante se cierran las válvulas mitral y tricóspide, lo que contribuye al primer tono de los ruidos cardíacos.
- c) El periodo de aumento de la presión: la presión en los ventrículos aumenta rápidamente, pero hasta que se equilibra con la de las arterias, las válvulas semilunares permanecen cerradas sin que entre ni salga sangre de los primeros. En el momento en que la presión intraventricular sobrepasa a la de las arterias, se abren las válvulas semilunares y la sangre brota en las arterias aorta y pulmonar.
- d) Comienzo de la diástole ventricular: al entrar en reposo los ventrículos, su presión interna desciende hasta ser menor a la de las arterias, motivo de que

las válvulas semilunares se cierran de golpe y se perciba el segundo ruido cardíaco.

- e) Periodo de descenso de la presión: después del cierre de las válvulas semilunares, las paredes ventriculares siguen relajándose, con paralelo descenso de la presión. Las válvulas tricóspide y mitral siguen cerradas porque la presión ventricular, aún sigue siendo mayor que la auricular. La relajación de las paredes ventriculares da motivo a que al fin la presión intraventricular sea inferior a la de las aurículas, lo que abre las válvulas mitral y tricóspide, con el consiguiente descenso de sangre de aquéllas a los ventrículos.

1.5. Algunas afecciones cardiacas

Las alteraciones de cualquier parte del corazón, incluidas las aurículas, el sistema de Purkinje, o los ventrículos, puede causar una descarga rítmica de impulsos que se extienden a todas direcciones por la totalidad del corazón. La causa más frecuente está en las vías de reentrada que actúan como un circuito localizado que se autoexcita repentinamente, imponiéndose como un marcapaso del corazón.

1.5.1. Infarto de miocardio

En la mayoría de los casos, el infarto de miocardio se debe a la arteriosclerosis de las arterias coronarias. Otras causas pueden ser las embolias y las anomalías congénitas. Los estrechamientos de la luz (estenosis) de las arterias coronarias se forman a través de un proceso denominado aterogénesis, que consiste en el depósito de células, de tejido conectivo y de lípidos, tanto intracelulares como extracelulares, compuestos por colesterol, ésteres de colesterol, triglicéridos y fosfolípidos. Este depósito se realiza excéntricamente, formando la placa de ateroma que se calcifica con frecuencia, o bien hemorragia de los pequeños vasos que crecen dentro de la lesión. El aumento lento y progresivo de la placa va obstruyendo la luz intraarterial, lo que impide el paso de la sangre o crea turbulencias del flujo. De forma aguda, la obstrucción total puede deberse a la formación de un trombo en la superficie irregular de la placa ateromatosa, a la hemorragia en su interior, al desprendimiento de una placa o al espasmo arterial en una zona de por sí comprometida, véase la Figura 1.6.

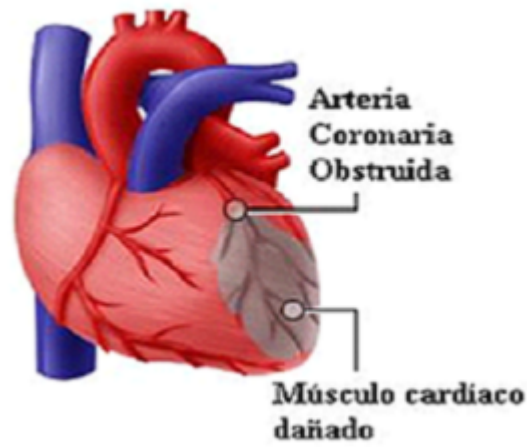
Bloqueo del suministro de sangre

Figura 1.6. Región dañada por infarto al miocárdio.

El infarto del miocardio es consecuencia de la trombosis coronaria. El infarto subendocárdico (infarto incompleto), casi siempre obedece a la oclusión subtotal de una arteria coronaria (trombosis) y tiene buen pronóstico inmediato, pero tardíamente es causa de síndromes isquémicos agudos si no se corrige la isquemia residual. La enfermedad coronaria empieza cuando en estos pequeños vasos se desarrollan las llamadas placas de ateroma, que son un cúmulo de colesterol, calcio y otras sustancias en las paredes de los vasos, véase la Figura 1.7.

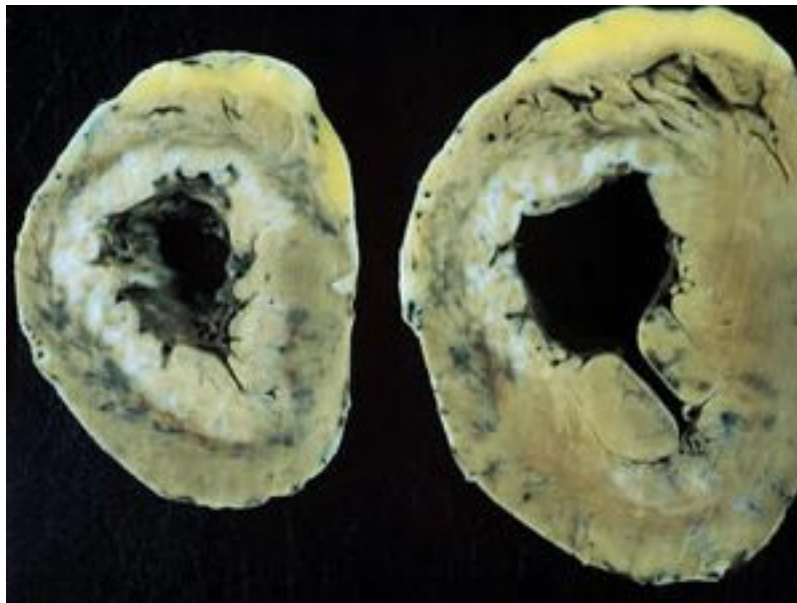


Figura 1.7. Arteria obstruida.

Entonces se compromete en mayor o menor grado el flujo de oxígeno y nutrientes al propio corazón, con efectos que varían desde una angina de pecho o un infarto de miocardio, hasta una insuficiencia cardíaca. La arteriosclerosis en los distintos vasos ocurre de forma irregular, en unos mucho más que en otros. La presencia en un vaso dado de placas de ateroma hace que en dicho vaso existan estrechamientos y que en ellos se desarrolle más fácilmente un trombo, un coágulo de plaquetas, proteínas de la coagulación y desechos celulares que acaba taponando el vaso. Una embolia es un trombo que ha viajado por la sangre hasta llegar a un vaso pequeño donde se enclava como un émbolo. Trombosis y embolia son, términos equivalentes. Los mismos factores que favorecen la arteriosclerosis son los factores que favorecen el desarrollo de enfermedad coronaria.

1.5.2. Taquicardia ventricular

Otro tipo de afección es la taquicardia ventricular, consiste que el corazón late demasiado rápido. Si el problema comienza en las cámaras inferiores del corazón, esto se llama taquicardia ventricular. Cuando el corazón hace una taquicardia ventricular no bombea sangre tan bien. Como consecuencia, éste bombea menos sangre hacia su cuerpo y hacia su cerebro. La víctima puede sentir que el corazón le late con fuerza o puede sentir vértigo o desmayarse. Si la taquicardia ventricular no se trata apropiadamente puede causar la muerte.

1.5.3. Fibrilación

Cuando un impulso penetra desde la aurícula se difunde hasta el final del ventrículo en aproximadamente 0,06 segundos. El ventrículo queda en estado refractario, y por tanto el impulso se interrumpe. En condiciones anormales el impulso puede continuar dando vueltas alrededor del corazón por largo tiempo, en un movimiento circular. En consecuencia, se suprime la acción de bomba del corazón, pues el bombeo requiere que el músculo se relaje y se contraiga. Durante un movimiento circular los músculos de todo el corazón ni se relajan ni se contraen simultáneamente. Los movimientos circulares alrededor de las aurículas causan el llamado aleteo auricular, con las aurículas aleteando rápidamente, pero incapaces de impulsar sangre. Sus movimientos circulares pueden pasar en formas irregulares alrededor de la aurícula provocando *fibrilación auricular*, pequeños movimientos de fibrilación del músculo. Los movimientos circulares que se desarrollan en el ventrículo produce *fibrilación ventricular*, en la cual el músculo se contrae continuamente en movimientos fibrilantes finos ondulatorios. Tales ventrículos no son capaces de impulsar la sangre, y la persona muere rápidamente.

La fibrilación ventricular puede iniciarse con un choque de corriente alterna de 60 ciclos, haciendo que los impulsos vayan en muchas direcciones al mismo tiem-

po en el corazón, y establece tipos irregulares de transmisión del impulso. En la fibrilación ventricular podemos decir que el corazón simplemente tiembla y no bombea sangre hacia el cuerpo o hacia el cerebro. A menos que se de tratamiento en cinco a diez minutos la fibrilación ventricular causa la muerte. Este tratamiento se realiza con un *desfibrilador*, que es un dispositivo diseñado para detectar rápidamente un ritmo cardíaco anormal y potencialmente mortal, proveniente de la cámara inferior del corazón.

En una descarga desfibrilatoria pasa un gran flujo de electrones a través del corazón por un corto periodo de tiempo. El flujo de electrones se llama corriente, la cual se mide en amperes. La presión de empuje del flujo de electrones es denominada potencial eléctrico, y el potencial es medido en voltios. Siempre existe una resistencia al flujo de los electrones, el cual es denominado impedancia, y se mide en ohms. En otras palabras, una descarga desfibrilatoria es el flujo de electrones con cierta presión durante cierto período de tiempo (usualmente milisegundos) a través de una sustancia que genera resistencia, la impedancia transtorácica. La desfibrilación es realizada por el pasaje de una suficiente cantidad de corriente eléctrica (amperes) a través del corazón por breves periodos de tiempo. El flujo de corriente es determinado por la energía elegida (joules) y la impedancia transtorácica (ohms), o resistencia al flujo de la corriente.

En general, un desfibrilador consta de un mando que regula la intensidad de la corriente eléctrica (100, 200, 300, 400 julios); unos cables, que se colocan en el tórax del paciente y recogen la actividad eléctrica cardíaca (electrocardiograma o ECG); una pantalla donde puede observarse el registro ECG; una pequeña impresora de papel y dos paletas que administran la descarga eléctrica sobre la pared torácica del paciente. Este choque pasa por el corazón e interrumpe los latidos irregulares. Entonces el corazón vuelve a latir de manera regular. El desfibrilador sólo es eficaz en caso de fibrilación ventricular, cualquier otra arritmia (taquicardia ventricular, asistolia, disociación AV, fibrilación auricular, taponamiento cardiaco u otras causas de síncope) no responde a este tipo de maniobra.

Capítulo 2

Generalidades de la dinámica celular cardíaca

El corazón posee un sistema llamado cardionector formado por un grupo de células destinadas a producir la excitación y conducción del corazón. Cuando las células están en reposo, existe una diferencia de potencial a través la membrana celular, en condiciones de reposo, el potencial dentro de las células, llamado el potencial intracelular, es negativo en comparación con el potencial extracelular esta diferencia de cargas a ambos lados de la membrana se denomina potencial de reposo. Si el interior de la célula se hace menos negativo, llegando a un nivel crítico, aparece un cambio fuerte en la permeabilidad, entrando masivamente cationes que invierten la carga a uno y otro lado de la membrana, generándose el llamado potencial de acción. Este cambio en la polaridad de la célula es lo que llamamos despolarización. [34, 39, 18, 43]

2.1. Membrana celular

La membrana celular o membrana plasmática es una bicapa de de lípidos conformada por fosfolípidos, glicolípidos y proteínas, de aproximadamente 5 a 8 nm de espesor, aunque es impermeable en sí a los iones, está perforada por un gran número de canales formados por proteínas, fundamentales mantener las concentraciones iónicas correctas en las células; permitiendo reducir la difusión de iones y moléculas en el interior y exterior de la célula, dichas moléculas pueden ser transportadas por diversos procesos entre ellos ósmosis y difusión simple, etc. En el caso de las células excitables, la membrana celular es fundamental en la producción y propagación de impulsos o señales, permitiendo responder de forma específica en diversos procesos celulares[18, 39, 40, 43]. En la siguiente figura se muestra la estructura de la membrana celular.

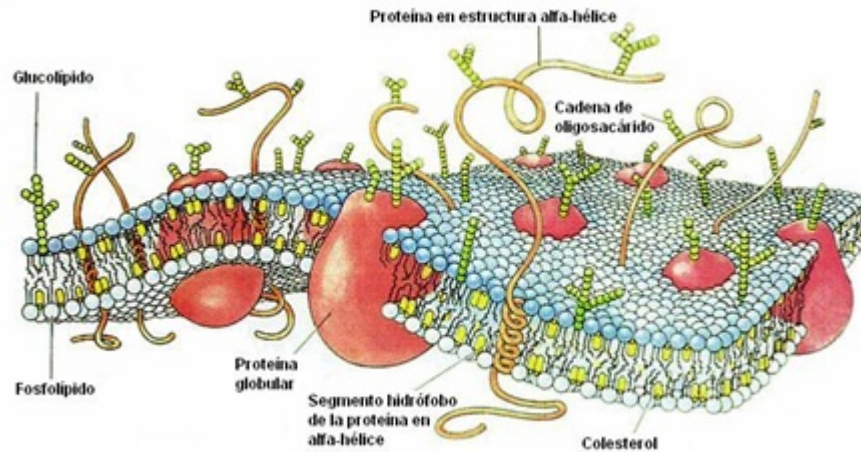


Figura 2.1. Membrana Celular.

A continuación realizaremos una breve descripción de algunos componentes fundamentales de la membrana celular permitiendo una mayor comprensión de las mismas, estos son los canales iónicos, bombas de la membrana y uniones Gap, basados en [39, 43, 18].

2.1.1. Canales iónicos

Un canal iónico es una estructura de proteínas que tiene la capacidad de abrir y cerrar en respuesta a los cambios de las concentraciones y del cambio eléctrico, de igual forma catalizan el flujo de iones provocando cambios de voltaje a través de una membrana. existen diversos tipos de canales iónicos pero no existen una caracterización estándar de ellos, entre los mas comunes están: Los canales de sodio, potasio y calcio.

Los **Canales de Sodio** permiten el paso de iones sodio a través de la membrana celular; en las células cardíacas son responsables de la fase de despolarización del potencial de acción.

Los **Canales de Potasio** permiten la salida de iones de potasio a través de la membrana celular; en células excitables, como las cardíacas, conduce a la repolarización del potencial de membrana, siendo fundamental para mantener el potencial de reposo.

Los **Canales de Calcio** la entrada de calcio al espacio intracelular es esencial para la interacción de las proteínas que son responsables de la contracción mecánica del corazón.

2.1.2. Bombas iónicas

Las bombas son proteínas que utilizan la energía de la hidrólisis de ATP para realizar un transporte activo a través de la membrana celular, de un ion o molécula en contra de un gradiente de concentración química o potencial eléctrico o ambos, por ejemplo: La bomba de sodio potasio y la bomba de calcio[19, ?].

La bomba de $Na - K$ en un solo procedimiento transporta 3 iones de sodio fuera de la célula y permite la entrada de dos de potasio, obteniendo que los iones con más carga positiva estén fuera de la célula comparados con los que se encuentran al interior de la célula, estableciendo una diferencia de potencial en la membrana[43, 17]. En la siguiente figura se puede visualizar dicho proceso.

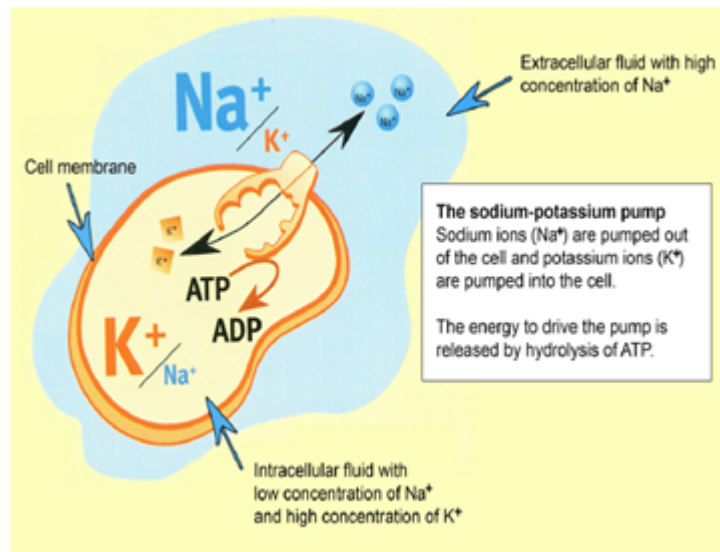


Figura 2.2. Bomba de Sodio-Potasio.

En las células cardíacas, algunos canales se abren en la fase de despolarización debido a un pequeño estímulo eléctrico, cabe aclarar que si dicho estímulo no supera cierto umbral del potencial, no se producen cambios significativos en el potencial de la membrana.

2.1.3. Uniones gap

Las uniones gap o uniones comunicantes son conexiones que se abren o se cierran formadas por el acoplamiento de complejos proteícos, basados en proteínas llamadas conexas en células estrechamente adheridas; siendo las componentes mas importantes en el acoplamiento eléctrico y en la propagación, ya que permiten el flujo de la corriente eléctrica a células adyacentes a través del miocardio.

2.1.4. Modelo de FitzHugh-Nagumo

El modelo de FitzHugh-Nagumo fue presentado en 1962 como una simplificación del modelo de 4 ecuaciones diferenciales no lineales de Hodgkin y Huxley, que describe las propiedades más importantes del potencial de acción y su dinámica; la reducción de FitzHugh-Nagumo a un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden una lineal y otra cúbica, permite realizar un análisis más sencillo e intuitivo, pero que conserva las características cualitativas del modelo inicial.[1, 14, 39]. Simultáneamente Jin-Chi Nagumo propuso un sistema análogo, basado en un circuito cuyas ecuaciones son las de FitzHugh, por tal motivo las ecuaciones se conocen como el modelo de FitzHugh-Nagumo.

Las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo están dadas por [12, 23]:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= v(v - \alpha)(1 - v) - w + I_{app} \\ \frac{dw}{dt} &= \varepsilon(v - \gamma w)\end{aligned}$$

donde, v y w representan las variable rápida(potencial) y de recuperación(lenta) respectivamente, para los parámetros α y ε que controlan comportamientos específicos del modelo, se tiene que $0 < \alpha < 1$, $\varepsilon \ll 1$; la primera ecuación modela el cambio de voltaje y la segunda modela la variable de recuperación del potencial de acción.[18, 43].

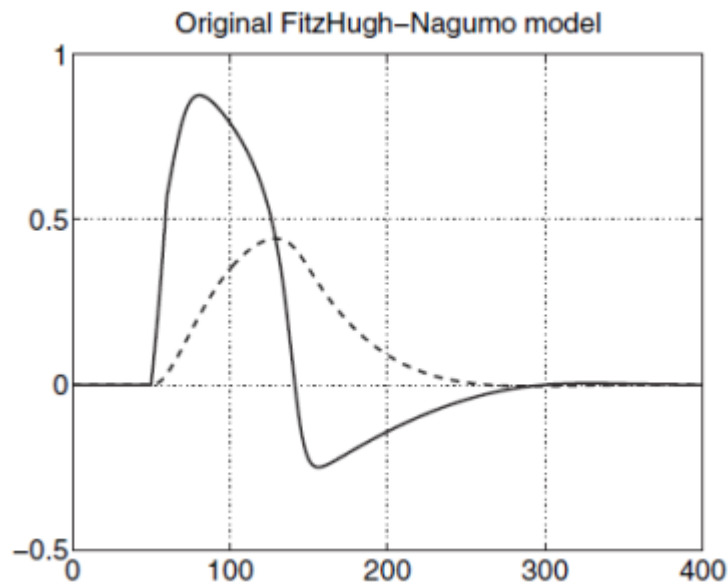


Figura 2.3 Gráficas para v (Línea sólida) y w (Línea punteada)

La anterior gráfica muestra el potencial de acción al aplicar un estímulo I_{app} de 0.05 que dura de $t = 50$ a $t = 60$, donde $\alpha = 0,13$, $\varepsilon = 0,013$ y $\gamma = 1,0$ son los valores originales del modelo.

2.2. Conductividad anisotrópica del tejido

La conductividad del tejido cardíaco tiene un comportamiento anisotrópico, es decir, presenta variaciones en sus propiedades según la dirección y el lugar donde se realice la medición. La conductividad eléctrica del tejido cardíaco debido a su carácter anisotrópico puede representarse por medio de tensores, los cuales al igual que las fibras van a lo largo del tejido.

Definimos en un punto dado de la fibra, un sistema local de vectores ortogonales unitarios [16, 47, 43] , tal que:

$$A = [a_l \quad a_t \quad a_n] \quad (2.1)$$

a_l = vector paralelo a la fibra

a_t = vector transversal a la lamina fibra

El tensor de conductividad local y el campo eléctrico expresado en términos de la base local, esta dada por:

$$M^* = \begin{bmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$E^* = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Considerando la ley de Ohm tenemos que:

$$\begin{aligned} J^* &= M^* E^* \quad (2.4) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_l e_1 \\ \sigma_t e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De acuerdo a 2.2, La conductividad de los medios intracelular y extracelular expresada en términos de la base local (a_l, a_t, a_n) , se representa por:

$$M_i^* = \begin{bmatrix} \sigma_l^i & 0 \\ 0 & \sigma_t^i \end{bmatrix} \quad M_e^* = \begin{bmatrix} \sigma_l^e & 0 \\ 0 & \sigma_t^e \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Por otro lado, el vector corriente (J) y el campo eléctrico (E) en coordenadas rectangulares está dado por:

$$\begin{aligned} J &= A^* J^* \\ E &= A E^* \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde, $A = (a_l, a_t)$ $E^* = A^{-1}E$

Como las columnas de A son vectores unitarios ortogonales, es decir A es ortogonal, entonces $A^{-1} = A^T$ reemplazando 2.4 en 2.6 , obtenemos la relación entre E y J respecto a las coordenadas globales

$$\begin{aligned} J &= A * J^* \\ &= A M * E^* \\ &= A M * A^{-1} E \\ &= A M * A^T E \end{aligned}$$

De acuerdo a esto, los tensores de conductividad global M_i y M_e están definidos como:

$$\begin{aligned} M_i &= A M_i^* A^T \\ M_e &= A M_e^* A^T \end{aligned} \tag{2.7}$$

M_e^* y M_i^* son los tensores de conductividad intracelular y extracelular expresados en la base local (a_l, a_t)

Ya que $[a_l, a_t]^T$ es una base local, se tiene que $I = [a_l a_l^T, a_t a_t^T]$

si reemplazamos 2.5 en 2.7 respectivamente,

$$\begin{aligned} M_i &= A M_i^* A^T \\ M_i &= [a_l \quad a_t] \begin{bmatrix} \sigma_l^i & 0 \\ 0 & \sigma_t^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_l \\ a_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se obtiene,

$$M_i = \sigma_l^i a_l a_l^T + \sigma_t^i a_t a_t^T$$

de forma análoga,

$$M_e = \sigma_l^e a_l a_l^T + \sigma_t^e a_t a_t^T$$

sumando y restando $\sigma_t^i a_l a_l^T$ y aplicando ??

$$\begin{aligned}
 M_i &= \sigma_l^i a_l a_l^T + \sigma_t^i a_t a_t^T \\
 &= \sigma_l^i a_l a_l^T + \sigma_t^i a_t a_t^T + \sigma_t^i a_l a_l^T - \sigma_t^i a_l a_l^T \\
 &= \sigma_t^i (a_l a_l^T + a_t a_t^T) + \sigma_l^i a_l a_l^T - \sigma_t^i a_l a_l^T \\
 &= \sigma_t^i \mathbf{I} + (\sigma_l^i - \sigma_t^i) a_l a_l^T
 \end{aligned}$$

así para M_e se tiene que:

$$M_e = \sigma_t^e \mathbf{I} + (\sigma_l^e - \sigma_t^e) a_l a_l^T$$

resumiendo lo anterior tenemos que,

$$M_j = \sigma_t^j \mathbf{I} + (\sigma_l^j - \sigma_t^j) a_l a_l^T$$

donde, $\sigma_l^j = \sigma_l^j(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\sigma_t^j(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $j \in i, e$ son conductividades intracelular y extracelular respectivamente, en dirección paralela y transversal a lo largo de la fibra [2].

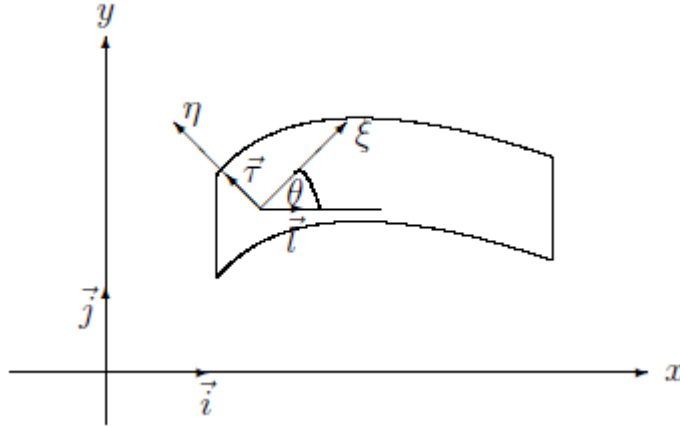


Figura 2.4 Representación de la fibra.

Ahora, si se considera que la fibra rota respecto al eje x , la matriz de rotación A del sistema local al sistema global y A^T del global al local están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

De acuerdo a lo anterior,

$$M_i = AM_i^* A^T \quad ; \quad M_e = AM_e^* A^T \quad (2.9)$$

Sustituyendo 2.8 en 2.9, obtenemos en forma general que:

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \sigma_l^j + \sin^2 \theta \sigma_t^j & \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_l^j - \sigma_t^j) \\ \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_l^j - \sigma_t^j) & \cos^2 \theta \sigma_l^j + \sin^2 \theta \sigma_t^j \end{bmatrix}$$

Para $j = \{i, e\}$, donde θ es el ángulo entre la dirección de la fibra y el eje x

Capítulo 3

Modelo Bidominio

3.1. Ecuación del cable

Las neuronas y células cardíacas están entre las células de nuestro cuerpo que poseen una mayor estructura de cable, considerando un cable como cualquier estructura que proporciona de forma unidimensional, una vía de comunicación para una señal eléctrica. La teoría clásica del cable se remonta a los estudios de Lord Kelvin en 1855 para la señal del cable telégrafo, la aplicación de la ecuación del cable al comportamiento neuronal se debe principalmente a Hodgkin y Rushton(1946).

A continuación se realizará una descripción de la ecuación del cable tomando como referencia [18]. Consideremos la célula como una pieza cilíndrica alargada que cubre el citoplasma; suponer que el potencial depende solo de la longitud y no de variables radiales angulares, permite analizar al cable en una dimensión, este supuesto se denomina como hipótesis, de núcleo de conducción. la siguiente figura muestra el esquema del modelo.

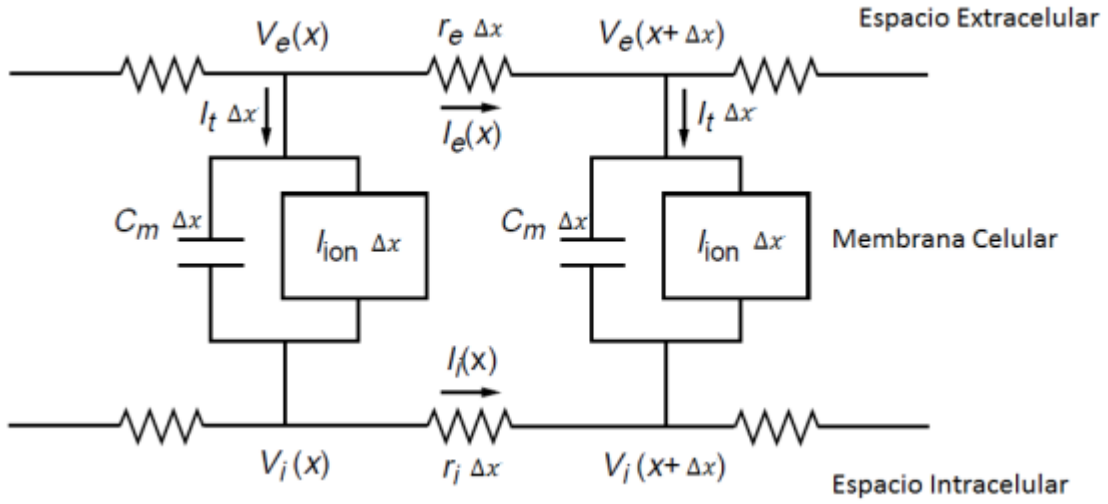


Figura 3.1 Modelo del cable.

Al dividir el cable en trozos cortos de longitud Δx , las corrientes en cualquier sección de dicho cable se balancean y únicamente aparece la corriente axial que tiene componentes intracelulares y extracelulares, las cuales asumimos que son ohmicas; de acuerdo a la figura anterior y aplicando la ley de Ohm se tiene que el voltaje para la componente intracelular está dado por:

$$V_i(x + \Delta x) - V_i(x) = -I_i(x)r_i\Delta x \quad (3.1)$$

donde V_i es el voltaje intracelular, r_i y I_i son la resistencia intracelular por unidad de longitud y la corriente axial intracelular respectivamente. De forma análoga para la componente extracelular el voltaje está dado por:

$$V_e(x + \Delta x) - V_e(x) = -I_e(x)r_e\Delta x \quad (3.2)$$

dividiendo en Δx las ecuaciones 3.1 y 3.2, luego tomando $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos que:

$$I_i = -\frac{1}{r_i} \frac{\partial V_i}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$I_e = -\frac{1}{r_e} \frac{\partial V_e}{\partial x} \quad (3.4)$$

Ahora, considerando que el cable no es afectado por otras corrientes adicionales y que la membrana se puede expresar por un circuito, la corriente axial total puede escribirse como:

$$I_T = I_i + I_i$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff, y teniendo en cuenta que el cambio en las corrientes axiales intracelulares y extracelulares se debe a la corriente transmembrana, obtenemos,

$$I_i(x) - I_i(x + \Delta x) = I_e(x) - I_e(x + \Delta x) = I_{tm}\Delta x$$

dividiendo en Δx y tomando $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos que:

$$I_{tm} = -\frac{\partial I_i}{\partial x} = \frac{\partial I_e}{\partial x} \quad (3.5)$$

considerando que $I_T = I_i + I_e$, sustituyendo por 3.3

$$I_T = -\frac{1}{r_i} \frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{1}{r_e} \frac{\partial V_e}{\partial x}$$

como $V = V_i - V_e$ entonces $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial V_e}{\partial x}$ reemplazando se tiene,

$$\begin{aligned} I_T &= -\frac{1}{r_i} \frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{1}{r_e} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e} \right) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r_e} \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= \frac{-r_e - r_i}{r_i r_e} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r_e} \frac{\partial V}{\partial x} \\ -I_T &= \frac{r_e + r_i}{r_i r_e} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) - \frac{1}{r_e} \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

multiplicando por $-\frac{r_e}{r_e + r_i}$

$$\frac{r_e}{r_e + r_i} I_T = -\frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{r_e + r_i} \frac{\partial V}{\partial x}$$

en consecuencia,

$$\frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) = \left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_e}{r_e + r_i} I_T \quad (3.7)$$

sustituyendo 3.3 en 3.7

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) &= \left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_e}{r_e + r_i} I_T \\ -I_i &= \left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_e}{r_e + r_i} I_T \end{aligned}$$

derivando respecto a (x) y como I_T es constante ya que no hay variación en el potencial

$$\begin{aligned} -\frac{\partial I_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_e}{r_e + r_i} I_T \right] \\ -\frac{\partial I_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ -\frac{\partial I_i}{\partial x} &= \left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{aligned}$$

reemplazando 3.5 en la expresión anterior se tiene que,

$$I_{tm} = \left(\frac{1}{r_e + r_i} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

recordemos que I_{tm} es la suma de las corrientes capacitivas e iónicas, es decir

$$I_{tm} = C_m \frac{\partial V}{\partial t} + I_{ion}$$

de acuerdo a lo anterior,

$$p \left(\frac{V}{r_m} + C_m \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \frac{1}{r_e + r_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

donde r_m es la resistencia de la membrana y C_m es la capacitancia, en consecuencia, suponiendo que r_i, r_e son constantes y que p es el perímetro del axón. reorganizando términos en la expresión anterior.

$$r_m + C_m \frac{\partial V}{\partial t} + r_m I_{ion} = \frac{r_m}{p(r_e + r_i)} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

considerando r_i y r_e constantes, tomando $\lambda_m = \sqrt{\frac{r_m}{p(r_e + r_i)}}$ y $\tau_m = r_m C_m$ podemos reescribir la expresión, obteniendo:

$$\tau_m \frac{\partial V}{\partial t} + r_m I_{ion} = \lambda_m^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

si reescalamos la corriente iónica para alguna función f (depende del voltaje y tiempo) que tiene unidades de voltaje, se define

$$I_{ion} = f(V, t)$$

introduciendo variables adimensionales

$$T = \frac{t}{\tau_m} \quad y \quad X = \frac{x}{\lambda_m}$$

la ecuación 3.8 toma la forma,

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 X} + f(V, T) \quad (3.9)$$

La ecuación 3.9 se conoce como la ecuación del cable. Si consideramos un cable cortado, con $V = 0$ en la frontera tendríamos condiciones de Dirichlet, por otro lado si consideramos condiciones de Neumann tendríamos que $\frac{\partial V}{\partial T} = 0$ en la frontera, corresponde a un cable que termina con una membrana.

3.2. Descripción del modelo bidominio

El corazón está conformado por un número demasiado grande de células, lo cual no permite modelar cada célula de forma individual y tener un control completo de las variaciones de los potenciales[43], el modelo Bidominio está basado en un enfoque de volumen promedio.

El modelo Bidominio, describe el comportamiento eléctrico del tejido, basado en el flujo de corriente, la distribución del potencial eléctrico y la conservación de carga y corriente[7]. El tejido cardíaco está compuesto por dos dominios intracelular y extracelular, interpenetrados y superpuestos, considerados continuos y que ocupan por completo el volumen del corazón, dichos tejidos se encuentran separados por la membrana celular cardíaca que actúa como un aislante.

El dominio espacial de nuestro modelo es un subconjunto acotado $\omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera suave $\partial\omega$; los potenciales intracelular y extracelular se denotan por $u_i = u(x, t)$ y $u_e = u_e(x, t)$ respectivamente, $v = v(x, t) := u_i - u_e$ es conocido como el potencial transmembrana, la conductividad del tejido intracelular y extracelular está representada por M_i y M_e .

A partir de las ecuaciones de Maxwell, la relación entre los campos eléctrico y magnético viene dada por

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

donde E y B son los puntos fuertes de los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente. La corriente J en un conductor viene dada por la relación general:

$$J = ME$$

Se tiene que

$$J = -M\nabla u$$

donde M es la conductividad del medio. De acuerdo a esto,

$$\begin{aligned} J_i &= -M_i\nabla u_i \\ J_e &= -M_e\nabla u_e \end{aligned} \quad (3.10)$$

Supongamos que el único camino de flujo de corriente es a través de la membrana celular, $i_{app}(x, t) = i_{app}$ es una corriente de estimulación aplicada al espacio extracelular (Por ejemplo, estimulación de electrodos)[9]. La corriente intracelular a través de la membrana por unidad de volumen (I_m) puede expresarse para los espacios intracelulares y extracelulares, como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot J_i &= -I_m \\ \nabla \cdot J_e &= I_m - i_{app} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde, I_m es la corriente transmembrana por unidad de volumen, que se compone de una corriente capacitiva y una corriente iónica [7], dada por;

$$I_m = \beta \left\{ C_m \frac{\partial v}{\partial t} + I_{ion} \right\} \quad (3.12)$$

Sustituyendo 3.10 y 3.12 en 3.11

$$\nabla \cdot M_i \nabla u_i = I_m \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot M_e \nabla u_e - i_{app} = -I_m \quad (3.14)$$

$$-\nabla \cdot M_i \nabla u_i = \nabla \cdot M_e \nabla u_e + i_{app} \quad (3.15)$$

Por la ley de conservación de corriente,

$$\nabla \cdot (M_i \nabla u_i) = -\nabla \cdot (M_e \nabla u_e) \quad (3.16)$$

Sustituyendo 3.12 y reorganizando términos en las ecuaciones 3.13 y 3.14

$$\beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (M_i \nabla u_i) + \beta I_{ion} = 0$$

$$\beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) + \beta I_{ion} = i_{app}$$

Considerando el modelo para la membrana de Fitzhugh- Nagumo, dado por:

$$\begin{aligned} H(v, w) &= av - bw \\ I_{ion}(v, w) &= -\lambda(w - v(1 - v)(v - \theta)) \end{aligned}$$

donde a, b, λ y θ son parámetros propios del sistema. El modelo Bidominio está dado por el siguiente sistema de reacción - difusión:

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot (M_i \nabla u_i) + \beta I_{ion} &= 0 \\ \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) + \beta I_{ion} &= i_{app} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ya que estamos considerando que el tejido cardíaco está aislado, utilizamos la condición que el flujo en frontera es cero, es decir,

$$(M_j(x) \nabla(u_j)) \cdot n = 0 \quad \text{sobre } \sum_T := \partial\Omega \times (0, T), j \in \{e, i\} \quad (3.18)$$

Reescribiendo 3.17 en términos de v y u_e Restando $M_i \nabla u_e$ de 3.15 se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot M_e \nabla u_e + i_{app} &= -\nabla \cdot M_i \nabla u_i \\ \nabla \cdot M_e \nabla u_e + i_{app} - M_i \nabla u_e &= -\nabla \cdot M_i \nabla u_i - M_i \nabla u_e \\ \nabla \cdot M_i \nabla (u_i - u_e) &= -\nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e - i_{app} \\ \nabla \cdot M_i \nabla v &= -\nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e + i_{app} \\ \nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e + \nabla \cdot M_i \nabla v &= i_{app} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por tanto, el modelo en términos de v y u_e es un sistema parabólico-elíptico fuertemente acoplado está dado por

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) + \beta I_{ion} &= i_{app} \\ \nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e + \nabla \cdot M_i \nabla v &= i_{app} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Imponemos condiciones iniciales $v(0, x) = v_0(x)$, $w(0, x) = w_0$ $x \in \Omega$
Para encontrar la solución v se requiere para la solución v de el modelo bidominio que el valor inicial v_0 sea compatible con 3.18, entonces, si u_i y u_e son valor fijos, el problema puede no tener solución, esto nos lleva a imponer la condición de compatibilidad,

$$\int_{\Omega} u_e(x, t) dx = 0 \quad \text{para casi todo punto, } t \in (0, T) \quad (3.21)$$

3.3. Modelo monodominio

Si $M_i \equiv \lambda M_e$ para alguna constante $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema 3.17 es equivalente a una ecuación parabólica para el potencial transmembrana v , acoplado a una ecuación diferencial ordinaria para la variable gating w , tal que, tomando la segunda ecuación de 3.17 y multiplicando por $\frac{1}{1+\lambda}$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\lambda} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{1+\lambda} \nabla \cdot M_i \nabla u_i + \frac{1}{1+\lambda} \beta I_{ion} &= 0 \\ \frac{\beta C_m}{1+\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla u_i + \frac{\beta I_{ion}}{1+\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ahora multiplicando la primera ecuación de 3.20 por $\frac{\lambda}{1+\lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \nabla \cdot M_e \nabla u_e + \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \\ \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\lambda M_e}{1+\lambda} \nabla u_e + \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \\ \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla u_e + \frac{\lambda}{1+\lambda} \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sumando 3.22 y 3.23 obtenemos

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla u_i + \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla u_e + \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \\ \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla (u_i - u_e) + \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \\ \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla v + \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \end{aligned}$$

El modelo monodominio está dado por:

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{M_i}{1+\lambda} \nabla v + \beta I_{ion} &= \frac{\lambda}{1+\lambda} i_{app} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4. Fórmula variacional

Modelo bidominio

Sea $\varphi, \xi, \psi \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$, multiplicamos por la función test φ ambos lados de [3.20](#), luego integramos por partes sobre $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$.

Para la primera ecuación de [3.20](#) tenemos que:

$$\beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} \varphi + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) \varphi + \beta I_{ion} \varphi = I_{app} \psi$$

$$\int_{\Omega_T} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} \varphi + \int_{\Omega_T} \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) \varphi + \beta I_{ion} \varphi = \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi$$

$$\varphi \beta C_m v \Big|_{\Omega_T} - \int_{\Omega_T} \beta C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + M_e \nabla u_e \varphi \Big|_{\partial \Omega_T} - \int_{\Omega_T} M_e \nabla u_e \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_T} \beta I_{ion} \varphi = \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi$$

$$\varphi \beta C_m v \Big|_{\Omega_T} + \int_{\Omega_T} -\beta C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} - M_e \nabla u_e \cdot \nabla \varphi + \beta I_{ion} \varphi = \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi$$

$$\beta C_m \int_{\Omega} v_0(x) \varphi_0(0, x) dx + \int_{\Omega_T} -\beta C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} - M_e \nabla u_e \cdot \nabla \varphi + \beta I_{ion} \varphi dx \quad dt = \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi dx dt$$

Para la segunda ecuación de [3.20](#) tenemos que:

$$\nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e \varphi + \nabla \cdot M_i \nabla v \varphi = i_{app} \psi$$

$$\int_{\Omega_T} \nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e \varphi + \int_{\Omega_T} \nabla \cdot M_i \nabla v \varphi = \int_{\Omega_T} i_{app} \psi dx dt$$

$$\begin{aligned} (M_i + M_e) \nabla u_e \varphi \Big|_{\Omega_T} - \int_{\Omega_T} (M_i + M_e) \nabla u_e \cdot \nabla \varphi + (M_i \nabla v) \varphi \Big|_{\Omega_T} \\ - \int_{\Omega_T} M_i \nabla v \nabla \cdot \varphi = \int_{\Omega_T} i_{app} \psi dx dt \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_T} - \{ (M_i + M_e) \nabla u_e \cdot \nabla \varphi - M_i \nabla v \cdot \nabla \varphi \} = \int_{\Omega_T} i_{app} \psi dx dt$$

Para la tercera ecuación de 3.20 tenemos que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) = 0$$

$$\int_{\Omega_T} \frac{\partial v}{\partial t} \xi dt dx = \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dt dx$$

$$\int_{\Omega} \int_T \frac{\partial v}{\partial t} \xi dt dx = \int_{\Omega} \int_T H(v, w) \xi dt dx$$

$$\int_{\Omega} \left[\xi w \Big|_T^0 - \int w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \right] dx = \int_{\Omega} \int_T H(v, w) \xi dt dx$$

$$\int [\xi(T, x)w(T, x) - \xi(0, x)w(0, x)] dx - \int_{\Omega} \int_T w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx = \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dx dt$$

$$\int_{\Omega} -\xi(0, x)w(0, x) dx - \int_{\Omega_T} w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx = \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dx dt$$

De acuerdo a lo anterior se define que:

Una tripleta $u = (v, u_e, w)$ de funciones es una solución débil del modelo bidominio 3.20, si $v, u_e \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, 3.18 y las siguientes identidades son válidas para las funciones test $\varphi, \psi, \xi \in \mathbb{D}([0, T] \times \bar{\Omega})$:

$$\beta C_m \int_{\Omega} v_0(x) \varphi_0(0, x) dx + \int_{\Omega_T} -\beta C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} - M_e \nabla u_e \cdot \nabla \varphi + \beta I_{ion} \varphi dx dt = \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi dx dt$$

$$\int_{\Omega_T} -\{(M_i + M_e) \nabla u_e \cdot \nabla \varphi - M_i \nabla v \cdot \nabla \varphi\} dx dt = \int_{\Omega_T} i_{app} \varphi dx dt$$

$$\int_{\Omega} -\xi(0, x)w(0, x) dx - \int_{\Omega_T} w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx = \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dx dt$$

Modelo monodominio

De forma análoga, al proceso realizado para las ecuaciones del modelo Bidominio tenemos que; Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$, multiplicamos por la función test φ ambos lados de 3.24, luego integramos por partes sobre $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$.

Para la primera ecuación de 3.24

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} \varphi - \nabla \cdot \frac{M_i}{1 + \lambda} \nabla v \varphi + \beta I_{ion} \varphi &= \frac{\lambda}{1 + \lambda} i_{app} \varphi \\ \int_{\Omega_T} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx dt - \int_{\Omega_T} \nabla \cdot \frac{M_i}{1 + \lambda} \nabla v \varphi dx dt + \int_{\Omega_T} \beta I_{ion} \varphi dx dt &= \int_{\Omega_T} \frac{\lambda}{1 + \lambda} i_{app} \varphi dx dt \\ \beta C_m \int_{\Omega} v_0(x) \varphi(0, x) dx + \int_{\Omega_T} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx dt \\ + \int_{\Omega_T} \beta I_{ion} dx dt - \frac{1}{1 + \lambda} \nabla \cdot \nabla v \varphi dx dt &= \int_{\Omega_T} \frac{\lambda}{1 + \lambda} i_{app} \varphi dx dt \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación de 3.24

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) &= 0 \\ \int_{\Omega_T} \frac{\partial v}{\partial t} \xi dt dx &= \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dt dx \\ \int_{\Omega} \int_T \frac{\partial v}{\partial t} \xi dt dx &= \int_{\Omega} \int_T H(v, w) \xi dt dx \\ \int_{\Omega} \left[\xi w \Big|_T^0 - \int w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \right] dx &= \int_{\Omega} \int_T H(v, w) \xi dt dx \\ \int_{\Omega} [\xi(T, x) w(T, x) - \xi(0, x) w(0, x)] dx - \int_{\Omega} \int_T w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx &= \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dx dt \end{aligned}$$

Por la anterior se define que:

Una pareja $u = (v, w)$ de funciones es una solución débil del modelo monodominio 3.24, si $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, 3.18 y las siguientes identidades son válidas para las funciones test $\varphi, \in \mathbb{D}([0, T] \times \bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} & \beta C_m \int_{\Omega} v_0(x) \varphi_0(0, x) dx \\ & + \int_{\Omega_T} \left\{ \beta C_m v \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \beta I_{ion} \varphi - \frac{1}{1 + \lambda} M_i \nabla v \cdot \nabla \varphi \right\} dx dt = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_{\Omega_T} I_{app} \varphi dx dt \\ & \int_{\Omega} -\xi(0, x) w(0, x) dx - \int_{\Omega_T} w \frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx = \int_{\Omega_T} H(v, w) \xi dx dt \end{aligned}$$

Capítulo 4

Introducción a volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales. Consideremos una malla de discretización del espacio, entorno a cada punto de esta malla se construye un volumen de control que no se superpone con puntos vecinos, de esta forma el volumen total resulta ser igual a la suma de los volúmenes de control considerados [6]. La ecuación diferencial a resolver se integra sobre cada volumen de control, lo cual entrega como resultado una versión discretizada de dicha ecuación. Para realizar la integración se requiere especificar perfiles de variación de la variable dependiente entre ellos los puntos de malla. La principal propiedad del sistema de ecuaciones discretizadas es que la solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas, independientemente del tamaño de la malla.

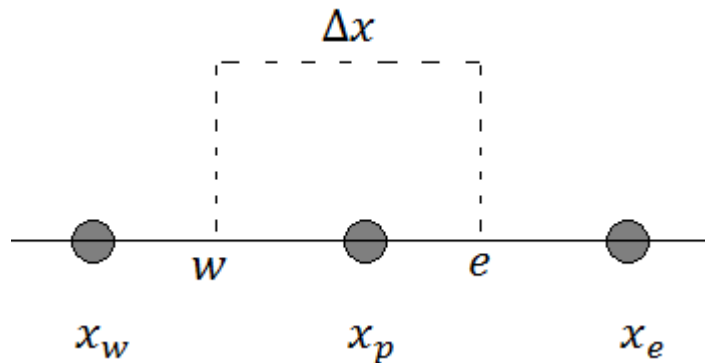


Figura 4.1. Discretización en una dimensión.

El punto fuerte del método es su conexión con las propiedades del flujo, de hecho los fundamentos del método recaen en la discretización directa de la expresión integral de las leyes de conservación esto lo diferencia del método de diferencias

finitas o elementos finitos que discretizan la forma diferencial de las leyes de conservación [11].

Respecto a la forma en que se relacionan las celdas con los puntos del mallado consideramos un esquema en el que se asocian las variables a los centros de la celda y las líneas de los mallados definen las celdas en donde las variables de flujo son valores promediados sobre cada celda. Es de notar que existen otras formas de asociación entre las celdas y los puntos del mallado pero no serán consideradas en este trabajo ver [11].

Ejemplo 1

Consideremos la ecuación,

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S = 0 \quad (4.1)$$

donde k es el coeficiente de conducción de térmica, T es la temperatura y S un término fuente que representa la tasa de generación de calor por unidad de volumen.

Sean x_p, x_w, x_e puntos, con x_p entre x_w y x_e , w entre x_w y x_p y e entre x_p y x_e como la muestra la figura 4.1, tal que w es límite inferior del volumen de control y e es límite superior del volumen de control, denotamos por $d(x_w, x_p)$ la distancia entre x_w y x_p .

La distancia entre w y e es δx , integrando 4.1 tenemos,

$$\int_w^e k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (4.2)$$

Se define $\bar{s}\Delta x = \int_w^e S dx$, la anterior ecuación se reduce a:

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_e - k \frac{dT}{dx} \Big|_w + \bar{s}\Delta x = 0 \quad (4.3)$$

Podemos suponer un paso lineal para las derivadas por tanto,

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_w = k_w \frac{T_{x_p} - T_{x_w}}{d(x_p, x_w)} \quad (4.4)$$

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_e = k_e \frac{T_{x_e} - T_{x_p}}{d(x_p, x_e)}$$

reemplazando en 4.3

$$k_w \frac{T_{x_p} - T_{x_w}}{d(x_p, x_w)} - k_e \frac{T_{x_e} - T_{x_p}}{d(x_p, x_e)} + \bar{s} \Delta x = 0$$

Esta ecuación se puede simplificar llegando a una expresión de de la forma

$$a_p T_{x_p} = a_E T_{x_e} + a_w T_{x_w} + b$$

donde,

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{k_e}{d(x_p, x_e)} & ; & & a_w &= \frac{k_w}{d(x_p, x_w)} \\ a_p &= a_E + a_w & ; & & b &= \bar{s} \Delta x \end{aligned}$$

Extendiendo a 2 ó 3 dimensiones tendríamos

$$a_p T_{x_p} = \sum_i a_i T_{x_i} + b$$

luego la temperatura en x_p se puede expresar en términos de puntos vecinos. Para completar el análisis solo falta estimar k_w, k_e y \bar{s} . Para \bar{S} podemos suponer una aproximación como

$$\bar{S} = S_0 + S_1 T_{x_p} \quad (4.5)$$

donde suponemos que el valor de \bar{s} en el volúmen de control depende únicamente del valor de T en el punto x_p luego podemos reescribir la ecuación como

$$a_p T_{x_p} = a_E T_{x_E} + a_w T_{x_w} + (S_0 + S_1 T_{x_p}) \Delta x$$

reescribiendo tenemos que:

$$\begin{aligned} a_p T_{x_p} &= a_E T_{x_E} + a_w T_{x_w} + b & (4.6) \\ b &= (S_0 + S_1 T_{x_p}) \Delta x \\ a_p &= a_E + a_w - S_1 \Delta x \end{aligned}$$

4.1. Condiciones generales

Reglas básicas

Existen reglas básicas para que las aproximaciones realizadas en la sección anterior sean válidas.

1) Consistencia en los flujos a través de los volúmenes de control. El flujo que sale de un volúmen de control debe igualar al que entra al volúmen de control siguiente. Esto se ilustra en la siguiente figura.

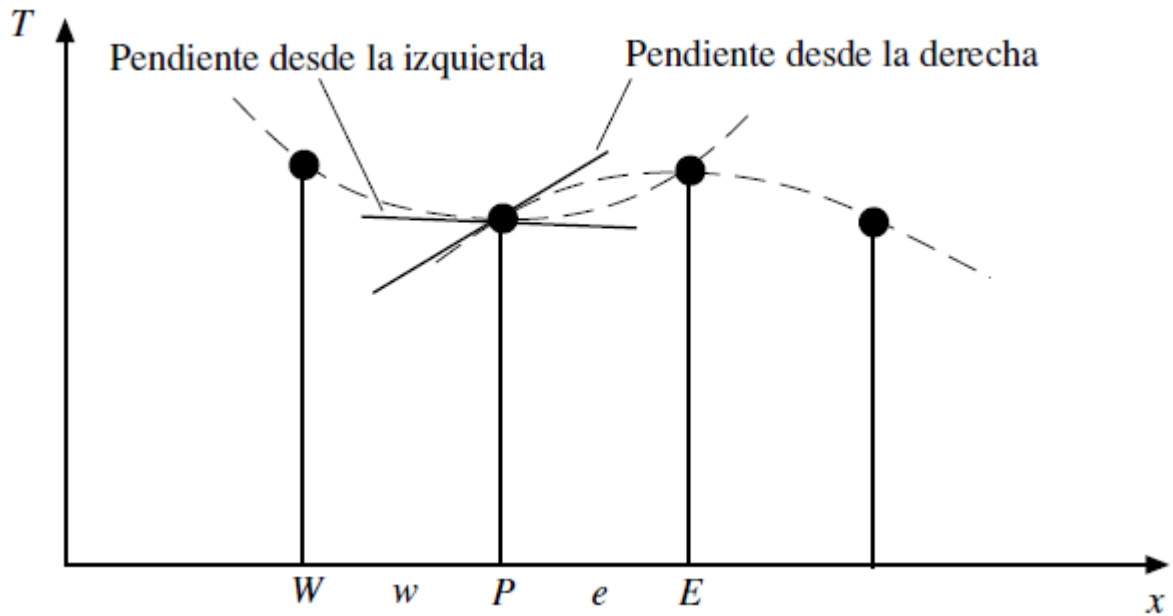


Figura 4.2. Interpolación Cuadrática.

Se puede observar que una función de interpolación cuadrática, conduce a que los flujos estimados en x_p (dependientes de la curva de interpolación) sean distintos si la aproximación se hace por izquierda o derecha, la función de interpolación debe evitar este problema.

Otro problema que debe evitarse es tener valores distintos al evaluar a k en el límite de control dependiendo de cual sea el volumen de control considerado, esto se evita no usando el valor de k_{x_p} para evaluar el coeficiente k en w o en e

2) Coeficientes positivos

Los coeficientes a_E, a_w, a_p deben ser positivos, ya que un aumento en T_{x_e} y T_{x_w} debe conducir a un aumento en T_{x_p} y esto sucede, si los a_i son positivos.

3) Linealización del término fuente con pendiente negativa.

Para evitar que a_p sea negativo si s_i es muy grande, se requiere s_i que sea negativo.

4) Suma de los coeficientes vecinos

El valor del coeficiente a_p debe ser igual a la suma de los a_i

Coefficiente de conducción en la frontera

En las ecuaciones 4.4 se requiere conocer el coeficiente k en las fronteras, w y e del volumen de control, para esto interpolamos siempre que sean conocidos los valores k_{x_e} , k_{x_p} y k_{x_w} , luego una forma podría ser

$$k_e = f_e k_{x_p} + (1 - f_e) k_{x_e}$$

$$\text{donde } f_e = \frac{d(x_p, e)}{d(x_p, x_e)},$$

si existe uniformidad en la distancia se puede suponer $f_e = 0,5$.

Otra alternativa es la siguiente:

Buscamos que,

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_e = k_e \frac{T_{x_p} - T_{x_e}}{d(x_p, x_e)} \quad (4.7)$$

Supongamos que el volumen k permanece constante dentro de cada volumen de control, adicionalmente supongamos que no existe término fuente S luego $k \frac{dT}{dx} = c_1$, integrando entre x_p y e , y luego, entre e y x_E , despejamos c_1 e igualando esto a 4.7 tenemos,

$$k_e = \left(\frac{1 - f_e}{k_{x_p}} \frac{f_e}{k_{x_e}} \right)^{-1}$$

Luego a_w y a_e están dados por:

$$a_w = \left(\frac{d(x_p, w)}{k_w} + \frac{d(w, x_w)}{k_p} \right)^{-1}$$

$$a_E = \left(\frac{d(x_p, e)}{k_p} + \frac{d(e, x_E)}{k_E} \right)^{-1}$$

Solución de las ecuaciones

Al plantear la ecuación 4.6 en cada punto de la malla se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, que en general, se resuelve por iteraciones donde las 4 reglas básicas establecidas anteriormente, permite asegurar que el procedimiento iterativo converge.

Linealización del término fuente

Si suponemos conocido $S(T)$ una estimación de S en torno a un valor T^* puede obtenerse por series de Taylor.

$$S = S(T^*) + \left(\frac{dS}{dT} \right)^* (T - T^*)$$

donde $\left(\frac{dS}{dT} \right)^*$ es el gradiente de S evaluado en T^* que al compararlo con 4.5

tenemos que: $S_1 = \left(\frac{dS}{dT} \right)^*$

Las anteriores expresiones permiten calcular aproximaciones para S_0 y S_1

Condiciones de borde

Denotemos un borde inferior B , existen principalmente 2 condiciones de borde que son de interés, Dirichlet y Von Neumann. La primera especifica el valor de la variable de estado en el borde y se conoce como T_B en este caso podemos considerar $T_{x_w} = T_B$. La segunda corresponde a una condición conocida en B , para este caso construimos una ecuación adicional que permita determinar T_B a partir del flujo conocido en B , para ello se integra 4.1 en el volumen de control adyacente al borde el cual corresponde a medio volumen de control construido en torno al primer punto interior de la malla.

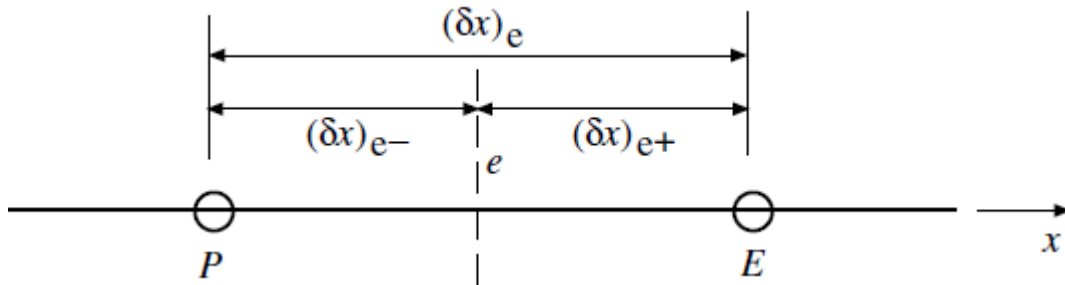


Figura 4.3. Detalle de Distancias.

Integrando 4.1 entre B e i tenemos

$$\int_B^i \frac{d}{dT} k \frac{dT}{dx} dx + \int_B^i S dx = 0$$

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_i - k \frac{dT}{dx} \Big|_B + \bar{S} \Delta x = 0$$

definamos el flujo T en la dirección x como:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

por lo tanto tenemos que,

$$q_B - q_i + (S_0 + S_1 T_B) \Delta x = 0 \quad (4.8)$$

con q_B denota el flujo en B que es conocido dado que es la condición en el borde q_i es el flujo en i y puede estimarse como

$$q_i = -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_i = k_i \frac{T_B - T_I}{d(B, I)}$$

reemplazando en 4.8,

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

con

$$\begin{aligned} a_I &= \frac{k_i}{d(B, i)} \\ a_B &= a_I - S_1 \Delta x \\ b &= S_0 \Delta x + q_B \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente ecuación,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \quad (4.9)$$

ρ es la densidad y C_p el calor específico, los cuales se supondrán constantes. En esta ecuación la solución procede en el tiempo a partir de una distribución inicial de temperatura, luego dados los valores de T en el tiempo t , se determinan los valores en el tiempo $t + \Delta t$. Denotamos por $T_{x_w}^0, T_{x_p}^0, T_{x_e}^0$ los valores en el tiempo $t + \Delta t$.

La ecuación de discretización se determina integrando 4.9 en el volumen de control dado en la figura 1 sobre el intervalo de tiempo que va desde t hasta $t + \Delta t$

$$\rho C_p \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt dx \quad (4.10)$$

integrando el lado izquierdo, suponiendo que T_{x_p} predomina en todo el volumen de control de modo que

$$\rho C_\rho \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \rho C_\rho \Delta x (T_{x_p}^1 - T_{x_p}^0)$$

integrando el lado derecho e igualando tenemos,

$$\rho C_\rho \Delta x (T_{x_p}^1 - T_{x_p}^0) = \int_t^{t+\Delta t} \left[k_e \frac{T_{x_e} - T_{x_p}}{d(x_e, x_p)} - k_w \frac{T_{x_p} - T_{x_w}}{d(x_p, x_w)} \right] dt$$

ahora es necesario saber como varían $T_{x_w}, T_{x_p}, T_{x_e}$ en el intervalo de tiempo t y $t + \Delta t$ entonces podemos suponer que,

$$\int_t^{t+\Delta t} T_{x_p} dt = f T_{x_p}^1 + (1 - f) T_{x_p}^0 \Delta t$$

donde f denota un factor de peso ponderado entre 0 y 1, siguiendo el proceso, análogamente se tiene que,

$$\begin{aligned} \rho C_\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} (T_{x_p}^1 - T_{x_p}^0) = & f \left[k_e \frac{T_{x_e}^1 - T_{x_p}^1}{d(x_p, x_e)} - k_w \frac{T_{x_p}^1 - T_{x_w}^1}{d(x_p, x_w)} \right] + \\ & (1 - f) \left[k_e \frac{T_{x_e}^0 - T_{x_p}^0}{d(x_p, x_e)} - k_w \frac{T_{x_p}^0 - T_{x_w}^0}{d(x_p, x_w)} \right] \end{aligned}$$

Ordenando términos,

$$\begin{aligned} a_p T_{x_p} = & a_E \left[f T_{x_e}^1 + (1 - f) T_{x_e}^0 \right] + \\ & a_w \left[f T_{x_w}^1 + (1 - f) T_{x_w}^0 \right] + \\ & \left[a_p^0 - (1 - f) a_E - (1 - f) a_w \right] T_{x_p}^0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

donde,

$$a_p^0 = \frac{\rho C_p \Delta x}{\Delta t} \quad ; \quad a_w = \frac{k_w}{d(x_p, x_w)}$$

Si $f = 0$ se denomina esquema explícito

Si $f = 1$ se denomina esquema implícito

Si $f = 0,5$ se denomina esquema Crank-Nicolson

Los distintos valores para f pueden ser interpretados en términos de la variación de T_{x_p} en el intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$; el esquema explícito implica que el valor antiguo $T_{x_p}^0$, prevalece en todo el intervalo de tiempo excepto en $t + \Delta t$

cuando el valor T_{x_p} cambia al valor $T_{x_p}^1$, en cambio el esquema implícito supone un cambio rápido del valor $T_{x_p}^0$ al valor $T_{x_p}^1$ y este se mantiene hasta el final, es decir hasta el tiempo $t + \Delta t$.

El esquema Crank-Nicolson supone una variación lineal desde $T_{x_p}^0$ hasta $T_{x_p}^1$. Consideremos el esquema implícito cuando $f = 0$.

$$a_p T_{x_p}^1 = a_E T_{x_e}^0 + a_w T_{x_w}^0 + (a_p^0 - a_E - a_w) T_{x_p}^0$$

Luego $T_{x_p}^1$ solo depende de las variables conocidas del intervalo de tiempo anterior $T_{x_p}^0, T_{x_w}^0, T_{x_e}^0$, cualquier esquema con $f \neq 0$ es un esquema implícito pues T_{x_p} depende en alguna medida de las variables conocidas $T_{x_w}^1, T_{x_e}^1$. Para el esquema explícito es necesario que todos los coeficientes sean positivos. luego necesitamos que,

$$a_p^0 > a_E + a_w$$

Lo cual se obtiene considerando, $k_E = k_w = k$ y $\Delta x = d(x_p, x_E)$. Por tanto se debe cumplir

$$\rho C_p \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2k}{\Delta x} \quad \text{ó} \quad \Delta t < \frac{\rho C_p (\Delta x)^2}{2k}$$

Es de notar que puede ocurrir que Δt sea muy grande entonces la variación lineal T_{x_p} es poco realista luego $T_{x_p}^0$ tenderá mucho mas rápido a $T_{x_p}^1$ así es mas conveniente un esquema implícito Imponiendo $f = 1$ se tiene usando 4.11

$$a_p T_{x_p} = a_E T_{x_E}^1 + a_W T_{x_W}^1 + a_p^0 T_{x_p}^0 \quad \text{ó} \quad a_p T_{x_p} = a_E T_{x_E} + a_W T_{x_W} + b \quad (4.12)$$

dado que,

$$a_E = \frac{k_E}{d(x_e, x_p)} \quad ; \quad a_W = \frac{k_W}{d(x_w, x_p)} \quad ; \quad \rho C_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = a_p^0$$

$$b = S_0 \Delta x + a_p^0 T_{x_p}^0 \quad ; \quad a_p = a_E + a_W + a_p^0 - S_1 \Delta x$$

Si el coeficiente K depende de T entonces esta ecuación se puede calcular iterativamente en cada paso del tiempo.

para el caso de 2 dimensiones se puede considerar

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} k_x \frac{\partial T}{\partial y} + S$$

generalizando el caso unidimensional tenemos,

$$a_p T_{x_p} = a_E T_{x_E} + a_w T_{x_W} + a_N T_{x_N} + a_S T_{x_S} + b$$

donde,

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{K_E \Delta y}{d(x_e, x_p)} & ; & & a_w &= \frac{(k_W \Delta y)}{d(x_W, x_p)} \\ a_N &= \frac{k_N \Delta x}{d(x_p, x_n)} & ; & & a_s &= \frac{k_s \Delta x}{d(x_p, x_s)}; \\ a_p^0 &= \frac{\rho C_p \Delta x \Delta y}{\Delta t} & ; & & b &= S_0 \Delta x \Delta y + a_p^0 T_p^0 \\ a_p &= a_w + a_N + a_s + a_p^0 - S_1 \Delta x \end{aligned}$$

Para la discretización del modelo del bidominio es necesario construir los esquemas para el caso elíptico y parabólico donde los términos difusivos serán la base del modelo.

4.1.1. Caso elíptico

Para el estudio de este caso se seguirá el esquema realizado en [8] luego se considera la siguiente ecuación.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(v \cdot u)(x, t) = 0; \quad x \in \mathfrak{R}^2, t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.13)$$

con condiciones,

$$u(x, 0) = u_o(x) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \quad \text{y} \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Sea τ una malla de \mathbb{R}^2 que consiste en subconjuntos poligonales acotados convexos de \mathbb{R}^2 y sea $k \in \tau$ un elemento de la malla τ que llamaremos volumen de control(celda) integrando 4.13 sobre k y utilizando el teorema de Green se tiene,

$$\int_k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\partial k} v(x, t) \cdot n_k(x) u(x, t) d\gamma = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_2 \quad (4.14)$$

donde n_k denota el vector normal para k .

Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y $t_n = nr$ con $n \in \mathbb{N}$ escribiendo la ecuación 4.14 en el tiempo t_n y discretizando la derivada parcial encontramos una aproximación $u^n(x)$ de la solución de 4.13 en el tiempo t_n la cual satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{|k|} \int_k (u^{n+1}(x) - u^n(x)) dx + \int_{\partial k} v(x, t_n) \cdot n_k(x) u^n(x) d\gamma = 0 \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

Donde $d\gamma$ denota la medida sobre ∂k y $u^0(x)=u(x,0) = u_o(x)$.

Se define $(u_k^n)_{k \in \tau} n \in \mathbb{N}$ como las incógnitas discretas con $k \in \tau$. y ε_k como el conjunto de bordes incluidos en ∂k para $\sigma \subset \partial k$, donde $n_{K,\sigma}$ denota el vector normal unitario sobre σ fuera de K . Ahora se puede escribir la integral como:

$$\int_{\partial k} v(x, t_n) \cdot n_k(x) u^n \partial\gamma = \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} \int_{\sigma} v(x, t_n) \cdot n_{K,\sigma} u^n(x) \partial\gamma \quad (4.17)$$

para $\sigma \subset \partial k$, además sea

$$v_{k,\sigma}^{(n)} = \int_{\sigma} v(x, t_n) n_{K,\sigma} \partial\gamma$$

donde cada término puede ser discretizado de acuerdo a el signo del flujo:

$$F_{k,\sigma}^{(n)} = \begin{cases} v_{k,\sigma}^{(n)} u_k^{(n)}, & \text{si } v_{k,\sigma}^{(n)} \geq 0 \\ v_{k,\sigma}^{(n)} u_l^{(n)}, & \text{si } v_{k,\sigma}^{(n)} < 0 \end{cases}$$

donde l denota una vecindad de k .

El valor de la variable asignado en la cara tiene un sentido físico evidente, el cual es proporcionado por la corriente incidente, es decir el valor de u viene determinado exclusivamente por la dirección de la malla, en que el flujo incide en la celda. Este esquema se denomina upwinding y garantiza la estabilidad del método para mas detalle ver [8]. De acuerdo a esto se tiene el siguiente esquema de discretización.

$$\begin{aligned} \frac{m(k)}{\Delta t} (u_k^{n+1} - u_k^n + \sum_{\sigma \in \varepsilon_k} F_{k,\sigma}^{(n)}) &= 0 \\ \forall k \in \tau \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_k^{(0)} &= \int_k u_0(x) dx \end{aligned}$$

donde $m(k)$ denota la medida del volumen de control k .

Observación

Una característica fundamental que debe tener todo esquema de volúmenes finitos es ser conservativo, es decir se debe satisfacer la igualdad $F_{k,\sigma}^{(n)} = -F_{l,\sigma}^{(n)}$ para todo $k, l \in \tau$ y $n \in \mathbb{N}$.

Problema elíptico unidimensional

Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -u_{xx}(x) &= f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sea $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$, si $f \in C([0, 1])$ existe una única solución, ver [8]. Se puede ver que $-u_{xx} = f$ puede ser escrito como $\text{div}(F) = f$ con $F = -u_x$, consideremos una malla denotada por τ definida sobre el intervalo $(0, 1)$ que consiste de N celdas llamadas volúmenes de control, denotadas por k_i , $i = 1, 2, \dots, N$ y N puntos x_i en el intervalo $(0, 1)$, para $i = 1, 2, \dots, N$ que satisface las siguientes suposiciones :

Una malla admisible en $(0, 1)$ notada por τ , esta dada por la familia $(k_i)_{i=1..N}$ tal que $k_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ y una familia $(x_i)_{i=0..N+1}$ tal que

$$x_0 = x_{\frac{1}{2}} = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_N < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$$

definimos sobre los conjuntos,

$$h_i = m(k_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

con la condición $\sum_{i=1}^N h_i = 1$

$$\begin{aligned} h_i^- &= x_i - x_{i-\frac{1}{2}} & ; & & h_i^+ &= x_{i+\frac{1}{2}} - x_i, & i &= 1, 2, \dots, N \\ & & & & h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i, & i &= 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

donde, el tamaño $(\tau) = h = \max \{h_i, i = 1, 2, \dots, N\}$

Las variables discretas desconocidas son notadas por $u_i = 1, 2, \dots, N$ y se suponen como aproximaciones de u en la celda k_i . Las variables discretas u_i pueden ser tomadas como el valor medio u en k_i o como el valor de $u(x_i)$ es decir el valor de u en otros valores de k_i , integrando 4.18 sobre cada celda k_i tenemos,

$$u_x(x_{i-\frac{1}{2}}) - u_x(x_{i+\frac{1}{2}}) = \int_{k_i} f(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Una aproximación para $-u_x(x_{i+\frac{1}{2}})$ con $i = 1, 2, \dots, N - 1$ es

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

La anterior aproximación es consistente en sentido que, si $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ entonces,

$$F_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} = -u_x(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(h)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de la frontera y tomando,

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x) dx \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

El esquema de volúmenes finitos para el problema 4.18 es:

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} &= h_i f_i & i = 1, 2, \dots, N \\ F_{i+\frac{1}{2}} &= -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ F_{\frac{1}{2}} &= -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}} \\ F_{N+\frac{1}{2}} &= \frac{u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Escribiendo en forma matricial,

$$AU = B \tag{4.19}$$

con $u = (u_1, \dots, u_N)^T$; $b = (b_1, \dots, b_N)^T$, A y b definidos por:

$$\begin{aligned} (AU)_i &= \frac{1}{h_i} \left(-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) \quad i = 1, \dots, N \\ b_i &= \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x) dx \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Ecuaciones elípticas de grado superior

Consideremos la siguiente ecuación elíptica

$$-\Delta u(x) + \operatorname{div}(v \cdot u) + bu = f(x) \quad (4.20)$$

dado que,

$$u(x) = g(x)$$

para $x \in \Omega$, además se tiene que,

- a) Ω es un conjunto abierto poligonal de 2 ó 3 dimensiones
- b) $b \geq 0$
- c) $f \in L^2(\Omega)$
- d) $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$; $\operatorname{div}(v) \geq 0$ con $d = 2$ ó 3

Por ahora se supone $b = 0$, $v = 0$, $d = 2$, $g = 0$ y $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, denotemos por (x, y) un punto de \mathbb{R}^2 .

Para $\tau = (k_{i,j})_{i=1,2,\dots,N_1; j=1,2,\dots,N_2}$ una malla admisible de $(0, 1) \times (0, 1)$ la cual satisface lo siguiente:

Sean $h_1 \dots h_{N_1} > 0$, $k_1, \dots, k_{N_2} > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N_1} h_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N_2} k_i = 1, \quad h_0 = h_{N_1+1} = k_0 = k_{N_2+1} = 0$$

$$x_{\frac{1}{2}} = 0, \quad x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h_i$$

$$\text{para } i = 1, 2, \dots, N_1, \quad x_{N_1+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{para } j = 1, 2, \dots, N_2, \quad y_{\frac{1}{2}} = 0 \quad k_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} \text{ tal que } y_{N_2+\frac{1}{2}} = 1$$

$$k_{i,j} = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$$

Sea $(x_i)_{i=0,1,\dots,N_1+1}$ y $(y_j)_{j=0,1,\dots,N_2+1}$ tal que,

$$\begin{array}{lll} x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} & \text{para } i = 1, 2, \dots, N_1 & x_0 = 0, \quad x_{N_1+1} = 1 \\ y_{j-\frac{1}{2}} < y_j < y_{j+\frac{1}{2}} & \text{para } j = 1, 2, \dots, N_2 & y_0 = 0, \quad y_{N_2+1} = 1 \end{array}$$

Sea $x_{i,j} = (x_i, y_j)$ para $i = 1, 2, \dots, N_1$ $j = 1, 2, \dots, N_2$

Definimos $h_i^- = x_i - x_{i-\frac{1}{2}}$, $h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i$ para $i = 1, 2, \dots, N_1$,
 $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N_1$

Análogamente se tiene,

$k_j^- = y_j - y_{j-\frac{1}{2}}$, $k_i^+ = y_{j+\frac{1}{2}} - y_j$ $k_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$ para $i = 1, 2, \dots, N_1$

Adicionalmente, definimos $h = \max \{(h_i; i = 1, 2, \dots, N_1), (k_j; j = 1, 2, \dots, N_2)\}$

Integrando 4.20 bajo cada volúmen de control $k_{i,j}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y) dy + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x(x_{i-\frac{1}{2}}, y) dy \\ & + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_y(x, y_{j-\frac{1}{2}}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_y(x, y_{i+\frac{1}{2}}) dx = \\ & \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Análogamente al ejemplo anterior tenemos,

$$\begin{aligned} & F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} + F_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{i,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j} f_{i,j} \\ & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N_1\} \times \{1, 2, \dots, N_2\} \end{aligned}$$

donde $h_{i,j} = h_{i \times k_j}$ y $f_{i,j}$ es un valor promedio de k bajo $k_{i,j}$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = k_j \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \text{ para } i = 0, 1, \dots, N_1 \quad j = 0, 1, \dots, N_2$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2}} = -h_i \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k_{i+\frac{1}{2}}} \text{ para } i = 0, 1, \dots, N_1 \quad j = 0, 1, \dots, N_2$$

Este esquema satisface la propiedad de ser conservativos pues $F_{i+\frac{1}{2},j} = -F_{i-\frac{1}{2},j}$
 En nuestro desarrollo la siguiente aproximación es valida gracias a que la malla es rectangular, para situaciones mas generales no se tendria un esquema consistente ver [8], pero gracias a la geometría de la malla podemos tomar

$$\nabla u \cdot n_k = \frac{u_L - u_K}{d(K, L)} \quad (4.21)$$

4.1.2. Caso parabólico

El objetivo de esta sección es el estudio de los esquemas de volúmenes finitos aplicados a una clase lineal o no lineal de problemas parabólicos basados en [8].

Consideremos la siguiente ecuación

$$u_t(x, t) - \Delta\varphi(u)(x, t) + \operatorname{div}(v \cdot u)(x, t) + bu(x, t) = f(x, t) \quad (4.22)$$

$$x \in \Omega \quad t \in (0, T)$$

donde Ω es un polígono abierto acotado y subconjunto de \mathbb{R}^d con $d = 2$ ó 3 $T > 0$, $b \geq 0$, $v \in \mathbb{R}^d$ y condiciones iniciales dadas por:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

Sea τ una malla admisible en el sentido expuesto anteriormente con la suposición adicional que $\sigma \in \varepsilon_{ext}$. La discretización del tiempo se puede realizar con un paso de tiempo variable, se define una constante de paso de tiempo $k \in (0, T)$.

Sea $N_k \in \mathbb{N} - 0$ tal que $N_k = \max\{n \in \mathbb{N}, nk < T\}$ y notemos $t_n = nk$ para $n \in \{0, \dots, N_k\}$. denotemos por $u_k^{(n)}$, $k \in \tau$, $n \in 0, 1..N_k + 1$ la aproximación para $u(x_k, nk)$, ahora integramos la ecuación 4.22 sobre cada volumen de control k en el tiempo $t \in (0, T)$ luego tenemos,

$$\begin{aligned} \int_k u_t(x, t) dx - \int_{\partial k} \nabla\varphi(u)(x, t) \cdot n_k(x) d\gamma \\ + \int_{\partial k} v \cdot n_k(x) u(x, t) d\gamma + b \int_k u(x, t) dx \\ = \int_k f(x, t) dx \quad (4.23) \end{aligned}$$

La discretización es obtenida tomando $t = t_n$, usando el esquema de Euler reemplazamos $u_t(x, t_{n+1})$ por

$$\frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t}$$

Escribiendo la aproximación de los términos, en 4.22 e introduciendo una notación similar a las secciones anteriores

$$\begin{aligned} m(k) \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \sum_{\sigma \in \varepsilon_k} F_{k, \sigma}^{(n+1)} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_k} v_{k, \sigma} u_{\sigma+}^{(n+1)} \\ + m(k) b u_k^{(n+1)} = m(k) f_k^n \end{aligned}$$

$\forall k \in \tau, \forall n \in 0, \dots, N_k$ con $d_{k,\sigma} F_{k,\sigma}^n = -m(\sigma)(\varphi(u_\sigma^{(n)}) - \varphi(u_k^{(n)}))$
para $\sigma \in \varepsilon_k$ y $n \in 1, 2, \dots, N_{k+1}$.

Ademas debe satisfacer que

$$F_{k,\sigma}^{(n)} = -F_{L,\sigma}^{(n)}$$

para todo $\sigma \in \varepsilon_{int}$ con $\tau \in K|L$ para $n \in 1, 2, \dots, N_k + 1$

$$\begin{aligned} u_k^0 &= \frac{1}{m(k)} \int_k u_0(x) dx & k \in \tau \\ u_k^0 &= u_0(x_k) & k \in \tau \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la elección de $u_{\sigma,+}^n$ dada por el esquema upwinding se tiene:

$$u_{\sigma,+}^n = \begin{cases} u_k^{(n)} & \text{si } v \cdot n_k \geq 0, \\ u_L^{(n)} & \text{si } v \cdot n_k < 0, \end{cases}$$

esto se tiene para todo $\sigma \in \varepsilon_{int}$

$$u_{\sigma,+}^n = \begin{cases} u_k^{(n)} & \text{si } v \cdot n_k \geq 0, \\ u_\sigma^{(n)} & \text{si } v \cdot n_k < 0, \end{cases}$$

esto se tiene para todo $\sigma \in \varepsilon_k$ tal que $\sigma \subset \partial\Omega$

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{m(k)} \int_k f(x, t_{n+1}) dx \quad \forall k \in \tau \quad ; \quad \forall n \in 0, \dots, N_k$$

4.1.3. Esquema explícito para la ecuación parabólica

Se seguirá la estructura dada en [8]. Sea Ω un subconjunto poligonal abierto de R^d , τ una malla admisible en el sentido expuesto anteriormente. Tomemos $T > 0$, $K \in (0, T)$ y $N_K = \max \{n \in \mathbb{N}, nk < T\}$. Sea $X(\tau, K)$ el conjunto de funciones u de $\Omega \times (0, (N_k + 1)k)$ en \mathbb{R} tal que existe una familia de valores reales $\{u_k^n, k \in \tau, n \in \{0, \dots, N_k\}\}$. Una versión explícita para la ecuación (parabólica) es

$$\begin{aligned} m(k) \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \sum_{h \in N(k)} \tau_{K|L} \varphi(u_L^n) - \varphi(u_K^n) &= m(k) f_k^n \quad \forall k \in \tau \\ u_k^0 &= \frac{1}{m(k)} \int_k u_0(x) dx \quad \forall k \in \tau \end{aligned}$$

Esta condición de valor promedio se tiene por la regularidad del dato inicial

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{Km(K)} \int_{nk}^{nk+1} \int_k f(x, t) dx dt \quad \forall k \in \tau$$

$$\text{con } \tau_{K|L} = \frac{m(K|L)}{d_\sigma}$$

Con $m(K|L)$ la medida de $\sigma_{k|L}$ y d_σ la distancia de x_k a σ

Otra opción es considerar un esquema implícito dado por

$$m(k) \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \sum_{h \in N(k)} \tau_{K|L} \varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1}) = m(k) f_k^n \quad \forall k \in \tau$$

$$u_k^0 = \frac{1}{m(k)} \int_k u_0(x) dx \quad \forall k \in \tau$$

4.2. Modelo bidominio por volúmenes finitos

Malla admisible

Es necesario definir condiciones para la construcción de mallas no necesariamente rectangulares; Sea Ω un polígono abierto acotado subconjunto de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ó 3 . Una malla admisible para un esquema de volumen finito sobre Ω denotada por T está dada por una familia de volúmenes de control, los cuales son subconjuntos poligonales convexos de Ω y una familia de subconjuntos $\bar{\Omega}$ contenidos en \mathbb{R} denotados por ε (son los bordes) con medida estrictamente positiva $d-1$, además de una familia de puntos denotados por P que satisfacen las siguientes propiedades.

- 1) La clausura de la unión de todos los volúmenes de control es $\bar{\Omega}$.
- 2) Para cualquier $K \in \tau$ existe un subconjunto ε_K de ε tal que,

$$\partial K = \bar{K} \setminus K = \cup_{\sigma \in \varepsilon_K} \bar{\sigma}$$

- 3) Para cualquier $(K, L) \in \tau^2$ con $K \neq L$. La medida de Lebesgue de $\bar{K} \cap \bar{L} = 0$ ó $\bar{K} \cap \bar{L} = \bar{\sigma}$ para algún $\sigma \in \varepsilon$, el cual es denotado por $K|L$
- 4) La familia $P = (x_k)_{k \in \tau}$ es tal que $x_K \in \bar{K}$ y si $\sigma = K|L$ asumiendo que $x_K \neq x_L$, la línea que va desde x_K hasta x_L es ortogonal a $K|L$.
- 5) Para cualquier $\sigma \in \varepsilon$ tal que $\sigma \subset \partial\Omega$, Sea K el volumen control tal que $\sigma \in \varepsilon_K$. Si $x_K \notin \sigma$, sea $D_{K,\sigma}$ la línea que va desde x_K hasta σ y es ortogonal a σ y tendremos $D_{K,\sigma} \cap \sigma = y_\sigma$

Algunas consideraciones importantes son:

El tamaño de la malla está definido por $\text{size}(\tau) = \{\text{diam}(k), k \in \tau\}$ para cualquier $K \in \tau$ y $\sigma \in \varepsilon$, $m(K)$ es la medida de K y $m(\sigma)$ es la medida de σ .

$$\varepsilon_{int} = \sigma \in \varepsilon : \sigma \not\subset \partial\Omega \quad ; \quad \varepsilon_{ext} = \sigma \in \varepsilon : \sigma \subset \partial\Omega$$

El conjunto de vecindades de K es denotado por $N(K)$ tal que,

$$N(K) = L \in \tau : \exists \sigma \in \varepsilon_K \bar{\sigma} = \bar{K} \cap \bar{L}$$

Si $\sigma = K|L$ denotaremos d_σ $d_{K|L}$ a la distancia entre x_K y x_L y $d_{k,\sigma}$ la distancia entre x_K y σ .

Si $\sigma \in \varepsilon_K \cap \varepsilon_{ext}$, d_σ denota la distancia entre x_K y y_σ y Para cualquier $\sigma \in \varepsilon$.

El siguiente ejemplo muestra la discretización de términos difusivos con condiciones similares a las ecuaciones del bidominio.

Ejemplo 3

Sea τ una malla admisible, vamos a definir un esquema de volúmenes finitos para discretizar,

$$-\Delta u + \text{div}(\nabla u) + bu = f(x) \text{ con la condición } u(x) = g(x)$$

Sea $f_k = \frac{1}{m(k)} \int_k f(x) dx$, $\forall k \in \tau$ donde, $(u_k)_{k \in \tau}$, denota las variables discretas y las variables $F_{k,\sigma}$ se denominaran *flujo* para todo $k \in \tau$ y $\sigma \in \varepsilon_k$, donde $n_{K,\sigma}$ denota el vector normal unitario hacia el exterior de k y $v_{k,\sigma} = \int_\sigma v(x) n_{K,\sigma} dr$.

Además definimos:

$$\begin{cases} u_{\sigma+} = u_K & \text{Si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ u_{\sigma+} = u_L & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Si $\sigma \subset K \cap \partial\Omega$ entonces

$$\begin{cases} u_{\sigma+} = u_K, & \text{Si } v_{K,\sigma} \geq 0 \\ u_{\sigma+} = g(Y_0), & \text{En otro caso} \end{cases}$$

asumimos que los puntos x_K están localizados en el interior de cada volumen de

control, luego $d_{K,\sigma} > 0$, con $d_{K,\sigma}$ la distancia entre x_K y σ , entonces un esquema para volúmenes finitos sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} F_{K,\sigma} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_K} v_{K,\sigma} u_\sigma + bm(K)u_K &= m(K)f_K, \quad \forall K \in \tau \\ F_{K,\sigma} &= -\tau_{K|L}(u_L - u_K) \quad \forall \sigma \in \varepsilon_{int} \\ F_{K,\sigma} &= -\tau_\sigma(g(Y_0) - u_K) \quad \forall \sigma \in \varepsilon_{ext} \end{aligned}$$

4.3. Convergencia del modelo bidominio

Para probar la existencia de una solución para el esquema, suponemos que el paso de tiempo satisface la condición,

$$\Delta t < \frac{\beta C m}{2\beta C_1 + \frac{\beta^2 \lambda^2}{b} + \frac{a^2}{b^2}}$$

donde a, b, λ son parámetros del modelo de FitzHugh-Nagumo y $\beta C m$ son parámetros del modelo bidominio.

Nota: En el desarrollo del esquema, será utilizada una malla cartesiana y la condición de estabilidad está dada por:

$$\Delta t \leq h \left[2 \max_{k \in \tau} \{|I_{ion,K}| + 2|I_{app,k}|\} + 4h^{-1} \max_{k \in \tau} \{|M_{i,k}| + |M_{e,k}|\} \right]^{-1}$$

Para probar la existencia de la solución se usará el siguiente lema.

Lema 1

Sea z una función tal que $\frac{1}{|\omega|} \int_\Omega z(x) dx = 0$ donde z es una constante sobre cada celda de τ , esto es, $z(x) = z_K$ si $x \in k, k \in \tau$, existe $C_p > 0$ tal que,
 $\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p \|z\|_{H_k(\Omega)}^2$

Teorema 1

Sea D una discretización rectangular de Ω_T entonces el esquema de Volúmenes finitos admite una única solución $(u_{e,k}^n, u_{i,k}^n, w_k^n)$ con $u_{i,K}^n = v_K^n + u_{e,K}^n$ para todo $k \in \tau$ y $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

Para probar este teorema se usará el siguiente resultado.

Lema 2

Sea $A, [\cdot, \cdot], \|\cdot\|$ un espacio de Hilbert de dimensión finita y sea p una función de A en A tal que $[p(\varepsilon), \varepsilon] > 0$ para todo ε con $\|\varepsilon\| = r > 0$, entonces existe $\xi \in A$ tal que $p(\xi) = 0$.

Dm: Consideremos $L_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ el espacio de las funciones constantes a trozos sobre cada $k \in \tau$ con norma,

$$(y_n, z_n)_{L_n(\Omega)} = \sum_{k \in \tau} |k| y_K z_k$$

$$\|y_h\|_{L_h(\Omega)}^2 = \sum_{k \in \tau} |k| |y_K|^2$$

Para $y_n, z_n \in L_n(\Omega)$ y y_k denota constante de y_n en k .

Sea $E_h = H_h(\Omega) \times H_h(\Omega) \times L_h(\Omega)$ un espacio de Hilbert y $\phi_n = (\psi_n, \varphi_n, \xi_n) \in E_h$ y definimos las formas bilineales.

$$A_h(u_h^n, \phi_n) = (\beta C_m v_h^n - \psi_n)_{L_h(\Omega)} + (w_h^n, \xi_h)_{L_h(\Omega)}$$

$$B_h(u_h^{n+1}, \phi_n) = \sum_{K \in \tau} \sum_{\sigma \in \text{int}(K)} d_{e,\sigma}^* (u_{e,l} - u_{e,k}) (\psi_l - \psi_k) + [(d_{i,\sigma}^* + d_{e,\sigma}^*) (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1})$$

$$+ (d_{i,\sigma}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1})) (\varphi_l - \varphi_k)]$$

y el operador C^n vía,

$$(C^n, \phi_n)_n := \sum_{k \in \tau} |K| (-\beta I_{ion}^{n+1} \psi_K) + I_{app,k}^{n+1} \psi_k + I_{app,k}^{n+1} \phi_k - H_k^{n+1} \varepsilon_k$$

con,

$$u_h = (u_{e,h}, u_{i,h}, w_h) \text{ con } u_{i,h} = v_h + u_{e,h}$$

donde,

$$u_{e,h}(x, t) = u_{e,k}^{n+1}$$

$$w_{e,h}(x, t) = w_k^{n+1}$$

$$v_{e,h}(x, t) = v_k^{n+1}$$

Multiplicando por ψ_K la siguiente expresión,

$$\beta C_m |K| \frac{v_k^{n+1} - v_l^{n+1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \text{int}(k)} d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + \beta |k| I_{ion,k}^{n+1} = |k| I_{app,k}^{n+1}$$

obtenemos,

$$\psi_k \beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_L^{n+1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) \psi_k + \psi_k \beta |k| I_{ion,k}^{n+1} = |k| I_{app,k}^{n+1} \psi_k$$

Análogamente, realizando los productos con φ_k y ε_k se tiene,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} (d_{i,\sigma}^* + d_{e,\sigma}^*) (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) \psi_k + d_{i,\sigma}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1}) \psi_k &= |k| I_{app,k}^{n+1} \psi_k \\ \frac{(w_k^{n+1} - w_k^n)}{\Delta t} \varepsilon_h - H_k^{n+1} \varepsilon_h &= 0 \\ \psi_k \beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_l^{n+1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} \psi_k d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + \psi_k \beta |k| I_{ion,k}^{n+1} - \\ |k| I_{app,k}^{n+1} \psi_k + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} (d_{i,\sigma}^* + d_{e,\sigma}^*) (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) \psi_k + d_{i,\sigma}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1}) \psi_k - \\ |k| I_{app,k}^{n+1} \psi_k + \frac{|k| (w_k^{n+1} - w_k^n)}{\Delta t} \varepsilon_k - |k| H_k^{n+1} \varepsilon_k &= 0 \end{aligned}$$

Sumando para todo k se tiene,

$$(C^{n+1}, \phi_n)_h = \sum_{k \in \tau} |k| (\beta I_{ion,k}^{n+1} \psi_k) - I_{app,k}^{n+1} \psi_k - I_{app,k}^{n+1} \varphi_k - H_k^{n+1} \varepsilon_k$$

$$\begin{aligned} B_h(u_h^{n+1}, \phi_n) &= \sum_{k \in \tau} \sum_{\sigma \in int(k)} d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) (\psi_l - \psi_k) + [d_{i,\sigma}^* + d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) \\ &\quad + d_{i,\sigma}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1})] (\varphi_l - \varphi_k) \end{aligned}$$

$$A_h(u_h^n, \phi_n) = (\beta C_m v_h^n - \psi_n)_{L_h(\Omega)} + (w_h^n, \xi_h)_{L_h(\Omega)}$$

reemplazando se obtiene,

$$\frac{1}{\Delta t} (A_h(u_h^{n+1}, \phi_n)) - A_h(u_h^n, \phi_n) + \beta_h(u_h^{n+1}, \phi_n) + (C^{n+1}, \phi_n)_h = 0$$

Definimos $p : E_h \rightarrow E_h$ tal que,

$$[p(u_h^{n+1}), \phi_n] = \frac{1}{\Delta t} (A_h(u_h^{n+1}, \phi_n)) - A_h(u_h^n, \phi_n) + B_h(u_h^{n+1}, \phi_n) + (C^{n+1}, \phi_n)_h$$

en [33] se verifica que p es continua, ya que A, B y C^{n+1} lo son, además que, $[p(u_h^{n+1})u_h^{n+1}] \geq 0$ para $\|u\|_{\varepsilon h}$, luego por el teorema 3.3, existe $u_k^n = (u_{e,k}^n, u_{i,k}^n, w_K^n)$ para todo $k \in \tau$ tal que $p(u_k^n) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} \beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_l^{n+1}}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} d_{e,\sigma}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + \beta |k| I_{ion,k}^n - \\ |k| I_{app,k}^n + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} (d_{i,\sigma}^* + d_{e,\sigma}^*) (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + d_{i,\sigma}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1}) - \\ |k| I_{app,k}^n + \frac{|k|(w_k^{n+1} - w_k^n)}{\Delta t} \varepsilon_k - |k| H_k^n = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, para las ecuaciones del modelo Bidominio existe solución.

4.4. Simulación numérica del modelo bidominio

Sea una malla formada por una familia de volúmenes de control τ , la cual estará formada por rectángulos abiertos de diámetro máximo h que será el tamaño de la malla y sera admisible en el sentido expuesto anteriormente, además para todo $k \in \tau$, x_k denota el centro de k , $\varepsilon(k)$ el conjunto de bordes de k , ε_{int} corresponde a los bordes en el interior de Ω y ε_{ext} el conjunto de bordes de k sobre $\partial\Omega$, luego,

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_{int}(K) \cup \varepsilon_{ext}(k) \quad ; \quad \varepsilon_{int}(k) \cap \varepsilon_{ext}(k) = \emptyset \quad \forall k \in \tau$$

Dado un volumen finito k nosotros denotamos por $N(k)$ el conjunto de vecindades de k con un borde común en K para $L \in N(k)$, $d(k, l)$ denota la distancia entre x_k y x_l , $\sigma = k|l$ es el segmento entre k y l , además $n_{k,\sigma}$ es el vector unitario normal a $\sigma = k|l$ orientado de k hacia l para todo $k \in \tau$, $|k|$ es la notación para la medida de la celda k .

Tenemos que, $\bar{\Omega} = \bigcup_{k \in \tau} \bar{k}$, para $K \cap l = \emptyset$. Si $k, l \in \tau$ y $k \neq l$; el segmento $\overline{x_k x_l}$ y $\sigma = k|l$ son ortogonales.

La malla satisface la siguiente condición para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\min \left\{ \frac{d(k, l)}{\dim(k)} \right\} \geq \alpha \quad \text{para } k \in T, l \in N(k)$$

Para discretizar las ecuaciones del bidominio elegimos una discretización Ω_T que consiste en la malla Ω y un paso temporal $\Delta t \geq 0$, definimos $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

Consideremos ahora las ecuaciones del modelo bidominio

$$\begin{aligned} \beta C_m \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (M_e \nabla u_e) + \beta I_{ion} &= i_{app} \\ \nabla \cdot (M_i + M_e) \nabla u_e + \nabla \cdot M_i \nabla v &= i_{app} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - H(v, w) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Integrando cada ecuación sobre cada celda K y en el tiempo $(t^n, (t^n + \Delta t))$, tenemos:

$$\begin{aligned} \beta \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K C_m \frac{\partial v}{\partial t} dx dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} M_e(x) \nabla u_e \cdot n_{K,l} dx dt + \\ \beta \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K I_{ion}(v, w) dx dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K I_{app} dx dt \\ \beta \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} (M_i(x) \nabla u_e + M_e(x) \nabla u_e) \cdot n_{K,l} dx dt \\ + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Omega} M_i(x) \nabla v \cdot n_{K,l} dx dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K I_{app} dx dt \\ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \frac{\partial w}{\partial t} dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K H(v, w) dx \end{aligned}$$

Donde la condición de no flujo sobre los bordes es tomada de manera independiente. Se consideran 2 propiedades importantes: el teorema de la divergencia que transforma integrales de volumen en integrales de superficie y además se omitirá la integración temporal, se supondrá que los términos difusivos son constantes durante todo salto de tiempo sobre cada celda.

Ahora se discretizan cada uno de los términos de las ecuaciones. Sobre cada celda $k \in \tau$ se definen los tensores de conductividad como:

$$M_{j,k} := \frac{1}{|k|} \int_k M_j(x) dx \quad j \in e, i \quad (4.25)$$

Utilizando 4.25 se puede elegir una aproximación del flujo difusivo teniendo en cuenta que este flujo es cero sobre los bordes externos σ .

$$F_{j,K,L} \begin{cases} \approx \int_{\sigma} (M_j(x) \nabla u_j) \cdot n_{K,L} dr & \text{Para } \sigma \in \varepsilon_{int} \\ 0 & \text{Para } \sigma \in \varepsilon_{ext} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\int_{\sigma} (M_j(x) \nabla u_j) \cdot n_{k,l} dr \approx |\sigma_{k,l}| \nabla u_j(y_{\sigma}) \cdot M_{j,K} n_{k,l}$$

Si $\sigma \in \varepsilon_{int(k)}$ se define $M_{j,k,\sigma} = |M_{j,k,\sigma} n_{k,\sigma}| \quad j \in \{e, i\}$.

luego

$$|\sigma_{k,l}| \nabla u_j(y_{\sigma}) \cdot M_{j,k} n_{k,l} = |\sigma_{k,l}| M_{j,k,\sigma} \nabla u(y_0) \cdot \frac{y_0 - x_k}{d(k, \sigma)}$$

Esta última igualdad no se tiene en general, solo cuando $M_{j,k,l} n_{k,\sigma} = |M_{j,K,L} n_{k,\sigma}| n_{k,\sigma}$, que es el caso donde $n_{K,\sigma}$ es un vector propio de $M_{j,k}$, además recordemos que $d_{k,\sigma} n_{k,\sigma} = y_{\sigma} - x_k$. Así usando 4.21 tenemos la aproximación final

$$|\sigma_{k,l}| M_{j,k,\sigma} \nabla u(y_0) \cdot \frac{y_0 - x_k}{d(k, \sigma)} \approx |\sigma_{k,l}| M_{j,k,\sigma} \nabla u(y_0) \cdot \frac{u_{j,\sigma} - u_{j,k}}{d(k, \sigma)} \quad (4.26)$$

Ahora, si $x_K \notin \sigma$ la expresión natural para F_K, σ sería,

$$F_{j,k,l} = |\sigma_{k,l}| M_{j,k,l} \frac{u_{j,\sigma} - u_{j,k}}{d(k, \sigma_{j,k})} \quad (4.27)$$

Ya que el esquema es conservativo, se puede obtener una aproximación para $u_{j,\sigma}$ en efecto $-F_{j,k,l} = F_{j,l,k}$ así,

$$|\sigma_{k,l}| M_{j,k,l} \frac{u_{j,\sigma} - u_{j,k}}{d(K, \sigma_{k,l})} = \frac{-|\sigma_{k,l}| M_{j,k,l} (u_{j,\sigma} - u_{j,l})}{d(L, \sigma_{k,l})}$$

$$M_{j,k,l} u_{j,\sigma} d(l, \sigma_{k,l}) - M_{j,k,l} u_{j,k} d(l, \sigma_{k,l}) = -M_{j,k,l} u_{j,\sigma} d(k, \sigma_{k,l}) + d(k, \sigma_{k,l}) M_{j,k,l} u_{j,l}$$

$$u_{j,\sigma} (M_{j,k,l} d(l, \sigma_{k,l}) + M_{j,k,l} d(l, \sigma_{k,l})) = M_{j,k,l} u_{j,k} d(l, \sigma_{k,l}) + d(k, \sigma_{k,l}) M_{j,l,k} u_{j,l}$$

entonces,

$$u_{j,\sigma} = \frac{M_{j,k,l} u_{j,k} d(l, \sigma_{k,l}) + d(k, \sigma_{k,l}) M_{j,l,k} u_{j,l}}{M_{j,k,k} d(l, \sigma_{k,l}) + M_{j,l,k} d(k, \sigma_{k,l})}$$

dividiendo el numerador y denominador por $d(l, \sigma) d(k, \sigma)$,

$$u_{j,\sigma} = \frac{\frac{M_{j,k,l} u_{j,k}}{d(k, \sigma)} + \frac{M_{j,k,l} u_{j,l}}{d(l, \sigma)}}{\frac{M_{j,k,l}}{d(k, \sigma)} + \frac{M_{j,l,k} u_{j,l}}{d(l, \sigma)}} \quad (4.28)$$

donde $u_{j,\sigma}$ es la aproximación de $u_j(y_0)$, $j \in \{e, i\}$.

Si $x_k \in \tau$, reemplazando 4.28 en 4.27 y tomando $u_\sigma = u_k$, obtenemos el valor de $F_{j,k,l}$ con $\sigma \in \varepsilon_{int}$

$$F_{j,k,l} = |\sigma_{k,l}| \frac{M_{j,k,l}}{d(k, \sigma)} \left[\left(\frac{d(k, \sigma) d(l, \sigma)}{M_{j,k,l} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} d(k, \sigma)} \right) \left(\frac{M_{j,k,l} u_{j,k}}{d(k, \sigma)} + \frac{M_{j,l,k} u_{j,l}}{d(l, \sigma)} \right) - u_{j,k} \right]$$

$$F_{j,k,l} = |\sigma_{k,l}| M_{j,k,l} \left[\frac{M_{j,l,k} u_{j,k} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} u_{j,k} d(k, \sigma)}{(M_{j,k,l} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} d(k, \sigma)) d(k, \sigma)} - \frac{u_{j,k} M_{j,l,k} d(l, \sigma) - M_{j,l,k} u_{j,k} d(k, \sigma)}{(M_{j,k,l} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} d(k, \sigma)) d(k, \sigma)} \right]$$

$$F_{j,k,l} = \frac{|\sigma_{k,l} M_{j,k,l}| M_{j,l,k} (u_{j,l} - u_{j,k})}{(M_{j,k,l} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} d(k, \sigma))}$$

luego el flujo sobre los bordes internos es:

$$F_{j,k,l} = d_{j,k,l}^* |\sigma_{k,l}| (u_{j,l} - u_{j,k})$$

$$\text{con } d_{k,l}^* = \frac{M_{j,k,l} M_{j,l,k}}{M_{j,k,l} d(l, \sigma) + M_{j,l,k} d(k, \sigma)}$$

La condición del borde se tiene en cuenta, imponiendo condición de no flujo sobre los bordes externos:

$$d_{j,k,l}^* |\sigma_{k,l}| (u_{j,l} - u_{j,k}) = 0 \quad \text{para } \sigma \in \varepsilon_{ext}(k) \quad j = i, e$$

discretizando los demas términos $H(v, w)$ y $I_{ion}(v, w)$

$$H_k^{n+1} := \frac{1}{|k| \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_k H(v, w) dx dt$$

$$I_{ion_k}^{n+1} := \frac{1}{|k| \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_k I_{ion}(v, w) dx dt$$

$$I_{app_k}^n := \frac{1}{|k| \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_k I_{app}(x, t^n) dx dt$$

donde se dividió por Δt por simplicidad.

El cálculo comienza iniciando las variables,

$$v_K^0 = \frac{1}{|k|} \int_k v_0(x) dx$$

$$w_K^0 = \frac{1}{|k|} \int_k w_0(x) dx$$

utilizando el esquema de Euler se tiene que,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_k \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx dt = |k| \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} \quad y \quad \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_k \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx dt = |k| \frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\Delta t}$$

luego reemplazando cada discretización se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_k} F_{e,k,l}^{n+1} + \beta |K| I_{ion_k}^{n+1} = |k| I_{app_K}^{n+1}$$

$$\sum_{\sigma \in \varepsilon_k} F_{i,u_e,k,l}^{n+1} + F_{e,u_e,k,l}^{n+1} + F_{i,v,k,l}^{n+1} = |k| I_{app_k}^{n+1}$$

$$\frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\Delta t} - H_k^{n+1} = 0$$

La forma final del esquema de volúmenes finitos junto con las condiciones está dado por:

$$\beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} d_{e,k,l}^* |\sigma_{k,l}| (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + \beta |k| I_{ion_k}^{n+1} = |k| I_{app_k}^{n+1}$$

$$\sum_{\sigma \in \varepsilon_{int}(k)} |\sigma_{k,l}| d_{i,k,l}^* + d_{e,k,l}^* (u_{e,l}^{n+1} - u_{e,k}^{n+1}) + d_{i,k,l}^* (v_l^{n+1} - v_k^{n+1}) = |k| I_{app_k}^{n+1}$$

$$|k| \frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\Delta t} - |k| H_k^{n+1} = 0$$

La condición de borde se toma imponiendo la siguiente condición de no-flujo sobre los bordes.

$$d_{j,k,l}^* |\sigma_{k,l}| (u_{j,l}^{n+1} - u_{j,k}^{n+1}) = 0 \quad \text{con} \quad \sigma \in \varepsilon_{ext}(k)$$

Respecto a las condiciones de frontera del modelo bidominio, la discretización está dada por:

$$\sum_{k \in \tau} |k| u_{e,k}^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Para la ecuación parabólica se escogió un esquema explícito en la discretización, cuando se toma el caso implícito se exige mayor esfuerzo computacional ver [11] Ahora con base en lo anterior, podemos construir un esquema para el modelo monodominio.

$$\beta C_m |k| \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + \sum_{l \in N(k)} \frac{1}{1 + \lambda} d_{j,k,l}^* |\sigma_{k,l}| (v_l^{n+1} - v_k^{n+1}) +$$

$$\beta |k| I_{ion_k}^{n+1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} |k| I_{app_k}^{n+1}$$

$$|k| \frac{w_k^{n+1} - w_k^n}{\Delta t} - |K| H_k^{n+1} = 0$$

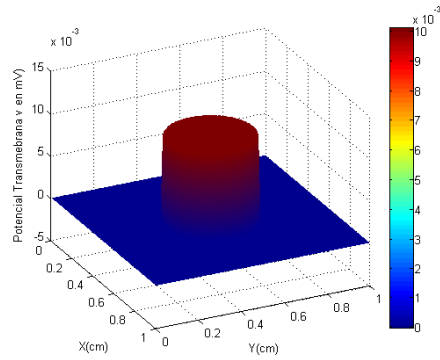
La existencia-unicidad de la solución aproximada y convergencia del esquema numérico, hacia la solución debil, son analizadas en [33], donde se impone la condición,

$$\Delta t \leq h \left(2 \max_{k \in \tau} \{ |I_{ion,k}^n| + |I_{app_k}| \} + 4h^{-1} \max_{k \in \tau} \{ |M_{i,k}| \} \right)$$

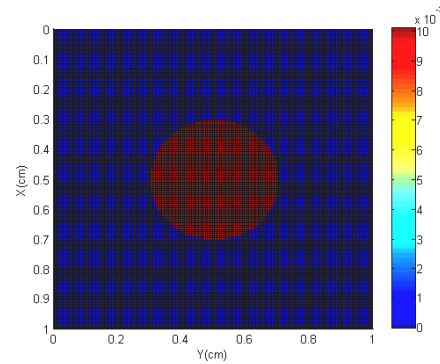
esta condición solo es válida para mallas rectangulares.

Las siguientes gráficas son el resultado de realizar la simulación y programación en Matlab del esquema de volúmenes finitos, para el modelo Bidominio y Monodominio, para mas detalle sobre el código ver anexo. Las constantes y parámetros utilizados para esta simulación fueron tomados de [2, 23, 47].

Para el modelo Monodominio.

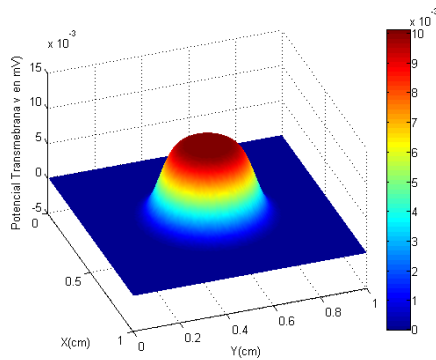


(a) $t=2 \text{ ms}$

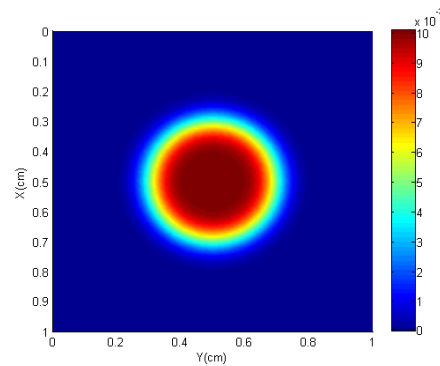


(b) $t=2 \text{ ms}$

En las gráficas anteriores se observa la variación en el potencial inicial ($v = 0$) al aplicar un estímulo instantáneo de 1 mV en $t = 2 \text{ ms}$, al dominio extracelular en el Miocardio, este estímulo fue aplicado en la centro de la región. En las gráficas c) y d) muestran la evolución del potencial en $t = 80 \text{ ms}$.

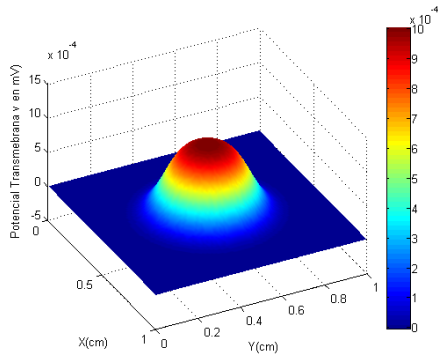
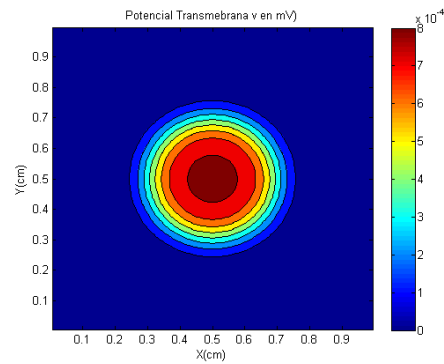


(c) $t=80 \text{ ms}$

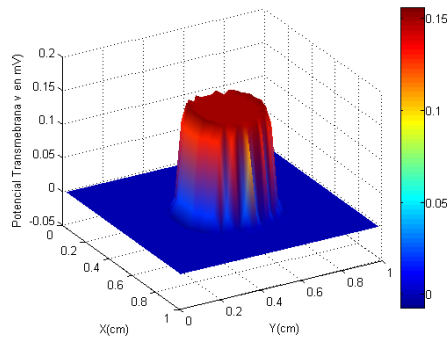
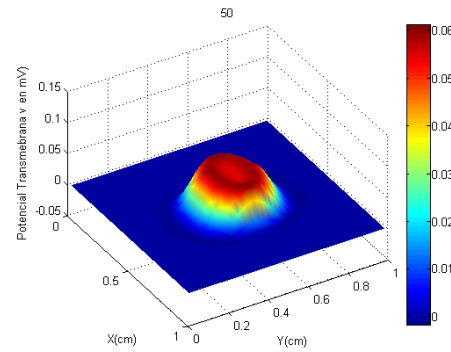


(d) $t=80 \text{ ms}$

Se puede observar la evolución del potencial v pasando por el proceso de repolarización, donde los valores de c) y d) se encuentran en el orden de 10^{-3} mientras que e) y f) están en 10^{-4} , este proceso continúa hasta alcanzar a valores cercanos a cero que coinciden con el potencial en reposo.

(e) $t=150$ ms(f) $t=150$ ms

Para el modelo Bidominio, se realizó la simulación aplicando un estímulo de corriente instantáneo en el centro de la región de 100mV en $t = 3ms$, donde la función de potencial inicial fue $v = 0$, y el potencial intracelular $u_e = 0$.

(g) $t=3$ ms(h) $t=50$ ms

En h) se observa la evolución del potencial que coincide con las fases de despolarización y repolarización del modelo de FitzHugh- Nagumo, cumpliendo las características de un modelo de reacción y difusión.

4.4.1. Comparación con otras técnicas de discretización

El método de los volúmenes finitos es muy diferente al método de las diferencias finitas o al de elementos finitos, aunque algunas veces se puedan relacionar. En términos generales el método de las diferencias finitas se basa en asignar puntos espaciados [26] y aplicar las ecuaciones constitutivas correspondientes del fenómeno en cada punto, adicionalmente en cada discretización se reemplaza la derivada de las incógnitas por diferencias finitas a través de series de Taylor.

El método de las diferencias finitas presenta grandes dificultades cuando los términos de la ecuación son discontinuos; por otro lado, en el método de volúmenes finitos las discontinuidades presentes en los coeficientes no representan ningún problema siempre que las mallas se elijan adecuadamente [8], particularmente los bordes son tomados sobre las discontinuidades.

En conclusión, el esquema de volúmenes finitos difiere del esquema de diferencias finitas en que este es usado para aproximar solo el flujo, garantizando la conservación, mientras que utilizando únicamente diferencias finitas como operador, el esquema tendría problemas de estabilidad, cabe tener en cuenta que el esquema de las diferencias finitas se puede utilizar para aproximar los flujos en la frontera de los volúmenes de control.

Respecto al método de los elementos finitos, dicho método está basado en una formulación variacional obtenida al multiplicar la ecuación original por una función test, donde las incógnitas continuas son aproximadas por una combinación lineal de funciones test y la ecuación resultante es integrada bajo cada dominio. El método de elementos finitos puede ser más preciso que volúmenes finitos cuando se usan polinomios de grado superior [8], pero para realizar estas construcciones se requieren esquemas adecuados que no siempre son compatibles con los problemas planteados, además el esfuerzo computacional en un esquema de volúmenes finitos es menor bajo ciertas condiciones, respecto al realizado por elementos finitos, sin importar que los volúmenes sean discretizados en sus pasos temporales de forma explícita.

Tomando algunas características el método de volúmenes finitos se puede convertir en una discretización por elementos finitos y estas características están asociadas a la geometría de la malla y a las funciones test.

Se pueden notar como características propias del método de volúmenes finitos que:

- a) La coordenada del nodo j que es la precisa ubicación de la variable u en la celda k_j no aparece explícitamente luego u_j se asocia al valor promedio de u en la celda.
- b) Las coordenadas de la celda solo son necesarias a la hora de definir el volumen de la celda o la medida de las aristas.
- c) Este método permite una fácil introducción a los problemas de contorno, especialmente en aquellos que las condiciones vienen planteados en términos del flujo los cuales pueden ser impuestos directamente sobre los respectivos términos.

Capítulo 5

Conclusiones

La discretización realizada por un esquema explícito es estable, en el mejor de los casos de forma condicional y presenta una limitación importante con el máximo paso del tiempo Δt .

El gasto computacional es muy grande en el modelo del bidominio, ya que es necesario resolver un sistema de $n^2 \times n^2$ donde n es el número de celdas.

Se podrían realizar otras simulaciones con mallas no estructuradas o con otra geometría, como el caso de la discretización de Voronói y también en este caso la estabilidad está garantizada.

Una ventaja definitiva del modelo de volúmenes finitos sobre otras técnicas numéricas es la forma como discretiza el flujo desde su forma integral garantizando que este sea conservativo.

Al usar el modelo de corriente iónica de Nagumo se garantiza una simplificación en los cálculos sin perder la veracidad del modelo.

La forma de mejorar la aproximación del modelo es reduciendo el paso del tiempo y el tamaño de la celda, estas condiciones además son necesarias en el momento de probar la convergencia del método.

Aunque no se demostró la convergencia para el modelo monodominio esta surge como consecuencia de la realizada para el bidominio, además cualquier discretización realizada usando volúmenes finitos podría ser convergente siempre que se usen adecuados pasos de tiempo y un número considerable de particiones.

Capítulo 6

Anexo - Códigos en Matlab

```
%Ecuaciones Modelo Monodominio

%Elaborado por
%Andrei Gonzalez
%Javier Hernan Gil Gomez
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa para generar la malla y realizar los cálculos iniciales en t=0
% clear;
xmin=0;%input('digite el valor mínimo de x xmin=');
xmax=5;%input('digite el valor máximo de x xmax=');
ymin=0;%input('digite el valor mínimo de x ymin=');
ymax=5;%input('digite el valor máximo de x ymax=');
n=5;%input('digite el número de intervalos n=');

%vectores de coordenadas de los puntos de la malla
deltax=(xmax-xmin)/n;deltay=(ymax-ymin)/n;
coordenadasx=linspace(xmin,xmax,n+1);coordenadasy=linspace(ymin,ymax,n+1);

%coordenadas de los puntos medios de las celdas
pm(1,:)=linspace(deltax/2,xmax-deltax/2,n);
pm(2,:)=linspace(deltay/2,ymax-deltay/2,n);

%condiciones iniciales
w=0;
t=0;
%constantes
a=0.16875;b=1.0;cm=1.0;B=1.0;
dt=2e-3;% cambio en el tiempo

ka=deltax*deltay;%area de celda
```

```

for i=1:n
    for j=1:n
        x=linspace(coordenadasx(i),coordenadasx(i+1),20);
        y=linspace(coordenadasy(i),coordenadasx(i+1),20);
        vf=1 - 1./(1+exp(-50*sqrt(x.^2+y.^2)- 0.1));%Funcion de potencial v inicial
        v=trapz(y,vf);v=v*ones(1,20);
        v(i,j,1)=trapz(x,v)/ka;
        Hf=a*v(i,j,1)-b*w;Hf=Hf*ones(1,20);%Funcion de H inicial
        H=trapz(y,Hf);H=H*ones(1,20);
        Hk(i,j)=trapz(x,H)/ka;
        wk(i,j)=w*(coordenadasx(i+1)- coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))/ka;
        Iion=-gamma*(wk(i,j)-v(i,j)*(1-v(i,j))*(v(i,j)-teta));
        Ion(i,j)=Iion*((coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j)))/ka;
    end
end
}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Calculo de Me de cada celda

int=Mi*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mkl=norm(int);
int=Mi*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mlk=norm(int);
d=Mkl*Mlk*deltax/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calculo de la Suma de Datos de celdas vecinas

lamnda=-0.99;%Valor de la conductividad extracelular
Mi=[1,0;0,1]*lamnda; Tensor de conductividad extracelular

%vectores normales

%celdas      1    2    3
%%%%%%%%%    8    X    4
%%%%%%%%%    7    6    5

%n1=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 1
n2=[0 1];
%n3=[1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 3
n4=[1 0];
%n5=[1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 5
n6=[0 -1];
%n7=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 8
n8=[-1 0];

suma=0;
    if i==1 && j==1% esta en la esquina superior izquierda (suma 2)
        normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
    end
end
end

```

```

        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
        normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
elseif i==1 && j==n % esta en la esquina superior derecha (suma 2)
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i,j));
        normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
elseif i==1 % esta en los bordes superiores (suma 3)
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i,j));
        normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
        normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
elseif i==n && j==1 %esta en la esquina inferior izquierda (suma 2)
        normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i-1,j)-v(i,j));
        normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
elseif j==1 % esta en los bordes laterales izquierdos (suma 3)
        normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i-1,j)-v(i,j));
        normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
        normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
elseif i==n % esta en el borde inferior (suma 3)
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i,j));
        normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
        normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i-1,j)-v(i,j));
elseif i==n && j==n %esta en la esquina inferior derecha (suma 2)
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i-1,j));
        normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));
elseif j==n % esta en el borde lateral derecho (suma 3)
        normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i-1,j)-v(i,j));
        normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i,j));
else % esta en las celdas centrales (suma 4)
        normal=n8'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;
        suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j-1)-v(i,j));

```

```
normal=n4'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;  
suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i,j+1)-v(i,j));  
normal=n2'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;  
suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i-1,j)-v(i,j));  
normal=n6'; calculoM;d=(Mkl+Mlk)/(deltax/2*Mkl+deltax/2*Mlk)*deltax;  
suma =suma+1/(1+gamma)*d*deltax/deltax+(v(i+1,j)-v(i,j));
```

```
\end
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa principal

clear;clc

% 1-datos y calculos iniciales t=0
% 2-calcular potenciales
% 3-iterar t y recalculer todo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%calcular el w inicial
%Calcular H,inicial integre para calcular H en cada celda
%Con H calcular v inicial
%con v y w calcular Iion e Iapp
%empezar a iterar en tiempo
%calcular los nuevos v, w, H, Iion e Iapp

gamma=-100; %dato inicial para ingresar
teta=0.25; %dato inicial para ingresar
x0=2.5; %dato inicial para ingresar
y0=2.5; %dato inicial para ingresar

%producto=gamma/(1+gamma)*Iapp

% 1: Programa malla
malla;% calcula v, H, Hk y w

for k=2:20
    t=t+dt;
    for i=1:n
        for j= 1:n

            if t>4e-3 && (coordenadasx(i)-x0)^2+(coordenadasy(j)-y0)^2<0.04;
                producto=1; %disp('ya')
            else
                producto=0;%es (gamma/(gamma+1)*Iapp)
            end

            %Calculo de v
            sumatoria;

            v(i,j,k)=(dt/(B*cm*ka))*(producto*ka-B*ka*Iion(i,j)+(B*cm*ka*v(i,j,k-1))/dt - suma);

            %Calculo de w
            wk(i,j)=dt*Hk(i,j)+wk(i,j);

```

```

%Calculo de Hk

H=a*v(i,j)- b*wk(i,j);
Hk(i,j)=H*((coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j)))/ka;

%Calculo Iion

Iion=-gamma*(wk(i,j)-v(i,j)*(1-v(i,j))*(v(i,j)-teta));
Ion(i,j)=Iion*((coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j)))/ka;
    end
end
end

%Condicion de frontera en los bordes externos, es decir el flujo es cero.
    for i=1:n
        v(1,i,k)=0;
        v(n,i,k)=0;
        v(i,1,k)=0;
        v(i,n,k)=0;
    end

\newpage
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa que realiza las graficas

xg=linspace(0,5,n);yg=xg;[xg,yg]=meshgrid(xg,yg);

for z=1:20

    subplot(1,2,1)
    contourf(xg,yg,v(1:n,1:n,z)),%view(60,30) %Crea las curvas de nivel

    subplot(1,2,2)
    surf(xg,yg,v(1:n,1:n,z)),view(60,30)    %Crea la superficie V
    title(z)
    pause(0.3) %velocidad de transicion de las graficas.
end

```

```

%Ecuaciones Modelo Bidodominio

%Elaborado por
%Andrei Gonzalez
%Javier Hernan Gil Gomez

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Programa para generar la malla
% clear;

xmin=0;%input('digite el valor mínimo de x xmin=');
xmax=5;%input('digite el valor máximo de x xmax=');
ymin=0;%input('digite el valor mínimo de x ymin=');
ymax=5;%input('digite el valor máximo de x ymax=');

n=20;%input('digite el número de intervalos n=');

%vectores de coordenadas de los puntos de la malla

deltax=(xmax-xmin)/n;deltay=(ymax-ymin)/n;
coordenadasx=linspace(xmin,xmax,n+1);coordenadasy=linspace(ymin,ymax,n+1);

%coordenadas de los puntos medios de las celdas

pm(1,:)=linspace(deltax/2,xmax-deltax/2,n);
pm(2,:)=linspace(deltay/2,ymax-deltay/2,n);

%condiciones iniciales

w=0; a1=0.16875;b=1.0;

%constantes

cm=1;B=1/2000;
t=0;
dt=1e-3;Paso en el tiempo

ka=deltax*deltay;%area de celda

for i=1:n
    for j=1:n
        x=linspace(coordenadasx(i),coordenadasx(i+1),20);
        y=linspace(coordenadasy(i),coordenadasy(i+1),20);
        vf=1 - 1./(1+exp(-50*sqrt(x.^2+y.^2)- 0.1));%Funcion de potencial inicial
        vf=trapz(y,vf);vf=vf*ones(1,20);
        v(i,j,1)=trapz(x,vf)/ka;
        u(i,j,1)=0.0;%Funcion potencial u_e inicial
    end
end

```

```

Hf=a1*v(i,j,1)-b*w;Hf=Hf*ones(1,20);
H=trapz(y,Hf);H=H*ones(1,20);
Hk(i,j)=trapz(x,H)/ka;
wk(i,j)=w*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))/ka;
Iion=-gamma*(wk(i,j)-v(i,j)*(1-v(i,j))*(v(i,j)-teta));
Ion(i,j)=Iion*((coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j)))/ka;
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%calculo de las Mi de cada celda
Me=[1/6,0;0,10/6]; Tensor Inicial
Mi=[1/24,0;0,1/12];Tensor Inicial

int=Mi*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mkli=norm(int);
int=Mi*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mlki=norm(int);
di=Mkli*Mlki*deltax/(deltax/2*Mkli+deltax/2*Mlki);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%calculo de Mi y Me en cada celda

int=Me*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mkle=norm(int);
int=Me*(coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j))*normal/ka;
Mlke=norm(int);
de=Mkle*Mlke*deltax/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%suma de valores de celdas vecinas para u_e

%Me=[0.1,0;0,0.1];
%Mi=[0.2,0;0,0.2];

%vectores normales
%celdas      1    2    3
%%%%%%%%%    8    X    4
%%%%%%%%%    7    6    5

%n1=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 1
n2=[0 1];
%n3=[1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 3
n4=[1 0];
%n5=[1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 5
n6=[0 -1];
%n7=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 8
n8=[-1 0];

```

```

%se debe calcular primero Mi y Me, luego se determina di y de,
finalmente se hace la suma
%se debe iterar para cada celda y determinar: los valores de Mi y Me
%en cada celda con el programa calculoM2

```

```

suma=0;

if i==1 && j==1% esta en la esquina superior izquierda (suma 2)
    normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
elseif i==1 && j==n % esta en la esquina superior derecha (suma 2)
    normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
elseif i==1 % esta en los bordes superiores (suma 3)
    normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
elseif i==n && j==1 %esta en la esquina inferior izquierda (suma 2)
    normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));

elseif i==n && j==n %esta en la esquina inferior derecha (suma 2)
    normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));

elseif j==1 % esta en los bordes laterales izquierdos (suma 3)
    normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));

elseif i==n % esta en el borde inferior (suma 3)
    normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));
    normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
    suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));

```

```

normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));

elseif j==n % esta en el borde lateral derecho (suma 3)
normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));

else % esta en las celdas centrales (suma 4)
normal=n8'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j-1,k-1)-u(i,j,k-1));
normal=n4'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i,j+1,k-1)-u(i,j,k-1));
normal=n2'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i-1,j,k-1)-u(i,j,k-1));
normal=n6'; calculoM2;de=(Mkle+Mlke)/(deltax/2*Mkle+deltax/2*Mlke)*deltax;
suma =suma+de*deltax/deltax+(u(i+1,j,k-1)-u(i,j,k-1));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Construccion de la matrices de coeficientes para resolver el sistema para potencial extracelul

%vectores normales
%celdas      1    2    3
%%%%%%%%%    8    X    4
%%%%%%%%%    7    6    5

%n1=[-1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 1
n2=[0 1];
%n3=[1/sqrt(2) 1/sqrt(2)];%para la celda 3
n4=[1 0];
%n5=[1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 5
n6=[0 -1];
%n7=[-1/sqrt(2) -1/sqrt(2)];%para la celda 8
n8=[-1 0];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=zeros(n^2);
%primera diagonal
cont=0;
for jj=n+1:n^2
    cont=cont+1;
    a(cont,jj)=di+de;
end

```

```

%segunda diagonal
cont=0;
for ii=n+1:n^2
    cont=cont+1;
    a(ii,cont)=di+de;
end

diagonal principal

%bordes superiores
for jj=2:n
    a(jj,jj)=-3*(di+de);a(jj,jj-1)=di+de;a(jj,jj+1)=di+de;
end
%bordes laterales izquierdos
for jj=n+1:n^2-1
    a(jj,jj)=-3*(di+de);a(jj,jj+1)=di+de;
end
%bordes inferiores
for jj=n^2+1-n:n^2-1
    if a(jj,jj)==0
        a(jj,jj)=-3*(di+de);a(jj,jj-1)=di+de;a(jj,jj+1)=di+de;
    end
end
%bordes laterales derechos
for jj=n:n^2-1
    a(jj,jj)=-3*(di+de);a(jj,jj-1)=di+de;
end
%esquinas de 2
a(1,1)=-2*(di+de);a(n^2,n^2)=-2*(di+de);
a(n,n)=-2*(di+de);a(n^2-n+1,n^2-n+1)=-2*(di+de);

%restantes que corresponden a los centrales

for jj=n+1:n^2
    if a(jj,jj)==0
        a(jj,jj)=-4*(di+de);
    end
end

%contiguos a la diagonal principal
for jj=n+1:n^2-1
    if a(jj,jj)==-4*(di+de);% centrales(antes y despues)
        a(jj,jj-1)=di+de;a(jj,jj+1)=di+de;
    end
end

cont=0;
for ii=1:n

```

```

for jj=1:n
    cont=cont+1;
    if ii==1 && jj==1% esta en la esquina superior izquierda (suma 2)

%coeficientes del vector de terminos independientes

b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii,jj+1,k)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif ii==1 && jj==n % esta en la esquina superior derecha (suma 2)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif ii==1 % esta en los bordes superiores (suma 3)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj+1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-
di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif ii==n && jj==1 %esta en la esquina inferior izquierda (suma 2)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj+1,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif ii==n && jj==n %esta en la esquina inferior derecha (suma 2)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif jj==1 % esta en los bordes laterales izquierdos (suma 3)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-
di*(v(ii,jj+1,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif ii==n % esta en el borde inferior (suma 3)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-
di*(v(ii,jj+1,k-1)-v(ii,jj,k-1));
elseif jj==n % esta en el borde lateral derecho (suma 3)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-
di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1));
else % esta en las celdas centrales (suma 4)
b(cont)=ka*Iapp-di*(v(ii-1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj-1,k-1)-v(ii,jj,k-1))-
di*(v(ii+1,jj,k-1)-v(ii,jj,k-1))-di*(v(ii,jj+1,k-1)-v(ii,jj,k-1));
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Se soluciona el sistema de pentadiagonal
bt=b'
x1=pentsolve(a,bt)

cont=0;
for ii=1:n
    for jj=1:n
        cont=cont+1;
        u(ii,jj,k)=x1(cont);
    end
end
end
%Condicion de flujo en la frontera

for ii=1:n
    u(1,ii,k)=0;
    u(n,ii,k)=0;

```

```

    u(ii,1,k)=0;
    u(ii,n,k)=0;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Programa principal

clear;clc
% 1-datos y calculos iniciales t=0
% 2 calcular potenciales v y u
%3-iterar t y recalculer todo
\newpage
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%calcular el u,w,v inicial
%Calcular H,inicial integre para calcular H en cada celda
%Con H calcular
%con v y w calcular Iion e Iapp
%empezar a iterar en tiempo
%calcular los nuevos u,w,v, H, Iion e Iapp

gamma=-100; %dato para ingresar
teta=0.25; %dato para ingresar
x0=0.5; %dato para ingresar
y0=0.5; %dato para ingresar

malla2;% calcula u,v,w, H,e Ion en el tiempo 0

for k=2:5
    t=t+dt;
    if t>1e-3 && (coordenadasx(i)-x0)^2+(coordenadasy(j)-y0)^2<0.04;
        Iapp=1;
    else
        Iapp=0;
    end
    for i=1:n
        for j= 1:n
            H=a1*v(i,j,k-1)- b*wk(i,j);
            w=dt*Hk+w;sumatoria2;
            v(i,j,k)=dt/(B*cm*ka)*(ka*Iapp-B*ka*Ion(i,j)+B*cm*ka/dt*v(i,j,k-1)-suma);
            matrices;%Calcula el valor de u
            Iion=-gamma*(wk(i,j)-v(i,j)*(1-v(i,j))*(v(i,j)-teta));
            Ion(i,j)=Iion*((coordenadasx(i+1)-coordenadasx(i))*(coordenadasy(j+1)-coordenadasy(j)))/ka;

        end
    end
end
end
end

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%Programa que realiza las graficas de V
```

```
xg=linspace(0,5,n);yg=xg;[xg,yg]=meshgrid(xg,yg);  
for z=1:20  
    subplot(1,2,1)  
        contourf(xg,yg,v(1:n,1:n,z)) %Grafica de la superficie para V  
  
    subplot(1,2,2)  
        surf(xg,yg,v(1:n,1:n,z)),view(60,30)%Curvas de nivel para V.  
        title(z)  
        pause(0.1)
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Programa que realiza las graficas de U
```

```
xg=linspace(0,5,n);yg=xg;[xg,yg]=meshgrid(xg,yg);  
for z=1:20  
    subplot(1,2,1)  
        contourf(xg,yg,u(1:n,1:n,z)) %Superficie para u  
  
    subplot(1,2,2)  
        surf(xg,yg,u(1:n,1:n,z)),view(60,30)%Curvas de nivel para u.  
        title(z)  
        pause(0.1)
```

```
end
```


Bibliografía

- [1] BARRIGA, C., CARRILLO H *Análisis y Simulación con INTEGRA del Modelo de FitzHugh-Nagumo para una Neurona.*
- [2] BENDAHMANE, M., BURGUER, R., RUIZ, R. *A Multiresolution Space-Time Adaptive Scheme For The Bidomain Model In Electrocardiology*
- [3] BENDAHMANE, BURGER, R. RUIZ AND K. SCHNEIDER *Adaptive multiresolution schemes with local time stepping for two-dimensional degenerate reaction-difusion systems* Preprint 2007-35, Depto. Ing. Mat., U. de Concepción, submitted.
- [4] BENDAHMANE, M., BURGER, R. , RUIZ, R. *Convergence of a finite volume scheme for the bidomain model of electrocardiology, in preparation*
- [5] BOURGAULT, YVES, PIERRE, CHARLES *Comparing The Bidomain And Monodomain Models In Electro-Cardiology Through Convergence Analysis*
- [6] CAMPBELL, N.A., MITCHELL, L.G., REECE, J.B. *Concepts and Connections* third edition. Addison Wesley, Inc. New York, 2000.
- [7] CLAYTON, R.H., ET AL., *Models of cardiac tissue electrophysiology: Progress, challenges and open questions, Progress in Biophysics and Molecular Biology* (2010), doi:10.1016/j.pbiomolbio.2010.05.008
- [8] EYMARD, R. GALLOUET, TH. AND HERBIN, R. *Finite volume methods. In: Handbook of Numerical Analysis*, vol. VII, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [9] ENGELMAN, ZOAR J. *Arrhythmic Substrates in Structural Heart Disease*, University of Auckland
- [10] FAST, V.G., RHOR, S., GILLIS, A.M., KLEBER, A.G. *Activation of cardiac tissue by extracellular electrical shocks. Res.* **82** (1998), 375-385.
- [11] FERNANDEZ ORO, J. *Técnicas Numéricas en Ingeniería de Fluidos*. Ed Reverte(2012)
- [12] FITZHUGH, R., *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, Biophys. J.* 1 (1961) 445 a 465.
- [13] FOX, S.I. *Physiology*, 10 edition. McGraw-Hill Science. New York, 2007.
- [14] GARRIDO, R., CONCHA, A. *Identificación del modelo de FitzHugh-Nagumo usando integrales del potencial de membrana.*

- [15] GUYTON, A.C., HALL, J.E. *Tratado de Fisiología Médica*. Interamericana. McGraw-Hill. México, 1998.
- [16] HENRIQUEZ, C.S. *Simulating the electrical behavior of cardiac tissue using the bidomain model*. Critical Reviews in Biomedical Engineering. **21** (1993), 1-77.
- [17] KARAMCHETI, S., KRAVITZ, J. *Analyzing Cardiac Action Potentials with the Fitzhugh-Nagumo Model*
- [18] KEENER, J.P., AND SNEYD, J. *Mathematical Physiology*. Springer-Verlag. New York, 1998.
- [19] LODISH, HARVEY, ET.AL *Biología celular y molecular* Ed. Médica A Panamericana(2006)
- [20] MCOWEN, R. C. *Partial Differential Equations: Methods and Applications*. Second Edition. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
- [21] MILLER, C.E., & HENRIQUEZ, C.S. *Finite Element Analysis of Bioelectric Phenomena*. Crit. Rev. Biomed. Eng. **18**(3) (1990), 207-233.
- [22] MOE, G.K., RHEINBOLDT, W.C., ABILDSKOV, J.A. *A computer model of atrial fibrillation*. Am Heart J. **67** (1964), 200-220.
- [23] NAGUMO, J.S., ARIMOTO, S., YOSHIKAWA, S. *An active pulse transmission line simulating nerve axon*, Proc. Inst. Radio Eng. 50 (1962) 2061 2071.
- [24] NEU, J.C., KRASSOWSKA, W. *Homogenization of syncytial tissues*. Crit.Rev. Biomed. Eng. **21** (1993), 137-199.
- [25] MITCHELL, C., SCHAEFFER, D., *A two current model for the dynamic of cardiac membrane*, Bull. Math. Biol. 65 (2001) 767 793.
- [26] NIGRO, N. *Métodos Numéricos en Fenómenos del Transporte*. Centro Internacional de Estudios Computacionales de Ingeniería
- [27] NIÑO, Y. *Método de los Volúmenes Finitos*, U. Chile
- [28] NOBLE, D. *A modification of the Hodgkin-Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pace-maker potentials*. J Physiol. **160** (1962), 317-352.
- [29] ODEN, J.T. *Finite elements: An Introduction in: Handbook of Numerical Analysis II*(North-Holland, Amsterdam) 3-15.
- [30] PANFILOV, A.V. *Spiral breakup as a model of ventricular fibrillation*. Chaos **8** (1998), 57-64.
- [31] PANFILOV, A.V. *Three-dimensional organization of electrical turbulence in the heart*. Phys. Rev. Lett. **59** (1999), R6251-R6254.
- [32] PENNACCHIO, M. *The Mortar Finite Element Method for the Cardiac "Bidomain" Model of Extracellular Potencial*. Journal of Scientific Computing. **20**, N.º 2 (2004), 191-210.
- [33] PENNACCHIO, M.: *The mortar finite element method for cardiac reaction-diffusion models*. In: Computers in Cardiology, vol. 31, pp. 509 a 512. IEEE, New York (2004)
- [34] PORTILLO MÁRQUEZ, M. *Electrocardiografía: Técnica de Interpretación Básica*
- [35] PUMIR, A., ROMÉY, G., KRINSKY, V.I. *Deexcitation of cardiac cells*. Biophys. J. **74** (1998), 2850-2861.
- [36] REDDY, J.N., GARTLING, D.K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. Third Edition. CRC Press. Boca Raton, Fl., 2010.

-
- [37] ROGERS, J.M., McCULLOCH, A.D. *A Collocation-Galerkin Finite Element Model of Cardiac Action Potential Propagation*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. **41** No. 8 (1994), 743-757.
- [38] ROTH, BRADLEY J. *How the anisotropy of the intracellular and extracellular conductivities influences stimulation of cardiac muscle*
- [39] SACHSE, F. *Computational Cardiology: Modeling of Anatomy, Electrophysiology and Mechanics*. LNCS 2966. Springer, Berlin, 2004.
- [40] SEGEL, L. *Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology*. Cambridge-University Press, New York, 1984.
- [41] SEPULVEDA, N.G., WIKSWO, J.P. *Electric and magnetic fields from two-dimensional anisotropic bisyncytia*. Biophys. J. **51** (1987), 557-568.
- [42] SCHAFFER, M. *Computational Engineering Introduction to Numerical Methods*. Springer
- [43] SUNDNES, J., LINES, G.T., CAI, X. NIELSEN, B.F. ,MARDAL, K. A., TVEITO, A., *Computing the Electrical Activity in the Heart*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [44] TORTORA, G.J., DERRICKSON, B.H. *Principles of Anatomy and Physiology*, 11 edition. Wiley. USA, 2005.
- [45] VILLEGAS, J., GIRALDO, A, ET AL. *The Electrical Activity of Cardiac Tissue via Finite Element Method*, Adv. Studies Theor. Phys., Vol. 6, 2012, no. 20, 995 - 1003
- [46] WINFREE, A.T. *Electrical instability in cardiac muscle: phase singularities and rotors*. J. Theor. Biol. **138** (1989), 353-405.
- [47] YING, W. J. *A Multilevel Adaptive Approach for Computational Cardiology*, PhD Thesis, Department of Mathematics, Duke University, 2005.
- [48] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., NITHIARASU, P. *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. 6th Edition. Elsevier. Amsterdam, 2005.