



**Universidad EAFIT
Medellin - Antioquia**

**Maestria en Matemática Aplicada
Informe final del Proyecto
Bifurcaciones del modelo Lotka-Volterra difusivo**

**Presentado por: Leonardo Favio Trujillo Diaz
Director: Mauro Montealegre Cárdenas
Grupo de Investigación Dinusco
Universidad Surcolombiana**

**Neiva-Colombia
Mayo de 2017**

Sumário

INTRODUCCIÓN	5
1 PRELIMINARES	7
1.1 Historia evolución de Modelos Poblacionales	7
1.2 Conceptos básicos y espacios de Banach	9
1.2.1 Espacios normados	9
1.2.2 Espacios L^p	11
1.2.3 Producto interior y espacios de Hilbert	12
1.2.4 Espacio de Sovolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$	12
1.3 Radio espectral	13
1.4 Teoria de existencia de soluciones locales para ecuaciones difusivas	18
1.5 Teoría de grado e índice de campos vectorial	21
1.5.1 Grado de Brouwer	22
1.5.2 Grado de mapeo de S^1 en sí mismo.	23
1.5.3 Índice de un campo vectorial: Teorema de Hopf – Poincaré	24
1.6 Teoria de Bifurcación con enfoque Liapunov-Schmidt para espacios de Banach.	25
2 BIFURCACIONES DEL MODELO DIFUSIVO DE LOTKA-VOLTERRA	29
2.1 Formulación del problema central	30
2.2 Linealización del modelo difusión de Lotka-Volterra	33
2.3 Soluciones no triviales al problema en estado estacionario	34
2.3.1 Teorema sobre estimación del radio funcional espectral	35
2.3.2 Teorema condiciones necesarias para existencia de soluciones	36
2.3.3 Condiciones de suficiencia para la existencia de soluciones	37
2.3.4 Existencia de soluciones aproximadas, (u_n, v_n)	38
2.4 Estudio de las bifurcaciones del problema	41
2.5 Modelo Lotka-Volterra caso no homogéneo	44
3 ATRACTORES GLOBALES	52
3.1 Atractor global en una ecuación logística	53
3.2 Existencia de atractor global	54

4	CONCLUSIONES	57
5.	BIBLIOGRAFÍA	59

Lista de Figuras

1.1	Disco de radio $r = \frac{1}{\ R_{\delta_n}\ }$ en δ - plano complejo.	16
1.2	Representación de $C_\pi(a)$	20
2.1	Diagramas de bifurcación del modelo Lotka-Volterra difusivo para estados estacionarios	32
2.2	Isoclinas para las soluciones según distintas condiciones de los parametros, de $w_t = di\Delta w - kiw$	34
2.3	Interpretación gráfica de radio espectral mayor a 1, el cual garantiza soluciones no triviales	37
2.4	Si $\tau > \tau^*$ o $\tau = \tau_1$ existen soluciones y si $\tau_1 < \tau < \tau^*$ existen soluciones	43
2.5	Si $\tau = \tau_1$, existe solución y si $\tau > \tau_1$ existe solución	44
2.6	diagramas de bifurcación de las soluciones de estado estacionario positivos de (2.20) .	50
3.1	El operador $A + \Phi \in L^2(\Omega)$ contractivo hace que el flujo de funciones convergan a la solución, es decir el atractor	56

INTRODUCCIÓN

Los modelos poblacionales, desde los unidimensionales que son los más simples, hasta los más complejos, ayudan a clarificar las descripciones observables en la naturaleza representados en sus parámetros, y contribuyen a identificar las características particulares de la población. Debido a que los modelos son herramientas científicas que permiten validar y modificar teorías, hacen que ninguno de ellos sean enteramente reales y por lo tanto históricamente sus modificaciones y evolución son muy notables.

La motivación a este proyecto tiene su origen en los trabajos realizados por el doctor Mauro Montealegre y su grupo de investigación DINUSCO de la universidad surcolombiana y la revisión en detalle del artículo “Some recent results on diffusive predator–prey models in spatially heterogeneous environment” [8] de Yihong Du and Junping Shi, en los cuales se presenta el problema a estudiar, Bifurcaciones del modelo Lotka-Volterra difusivo, las demás referencias aportan a su solución, destacando en especial las de E. N. Dancer [4] y [5]

El modelo poblacional Lotka-Volterra ha sido ampliamente estudiado con ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden incluir diferentes funciones de densidad convirtiendolo en el modelo de Holling. Todos estos modelos se caracterizan porque su estudio se centra principalmente en las interacciones entre las especies para un tiempo determinado. Cuando involucramos condiciones del medio, este modelo requiere para su modelación de las ecuaciones diferenciales parciales, en este sentido el modelo ha sido estudiado un poco menos y sobre todo teniendo en cuenta que pueden ser en ambientes homogéneos y heterogéneos. El estudio del proyecto se centra en el análisis de las bifurcaciones.

El estudio realizado para el desarrollo del proyecto conduce a una organización en cuatro capítulos que se describen a continuación:

En el primer capítulo se tratan todas las bases teóricas que permite el estudio del problema, se inicia con una breve reseña histórica de los modelos poblacionales, se reafirman unos conceptos básicos de los espacios de Banach, el cual representa el medio donde sobreviven las especies, de igual manera se hace un estudio detallado del espectro de los operadores diferenciales para posteriormente tratar lo relacionado con el radio espectral, la teoría de índice y finalizar con la explicación de la teoría de las bifurcaciones.

En el segundo capítulo se presenta el problema y se aborda el procedimiento apropiado para su solución no trivial. Se inicia con el método de linealización, posteriormente el análisis funcional nos permite reescribir el problema y con la aplicación del radio espectral encontrar la curva de bifurcación en donde sobreviven, en este caso, las dos especies. Por último se determina con especial atención el intervalo de parámetros que dependen del valor propio de control.

Es importante resaltar la importancia del modelo logístico generalizado que aparece durante todo el estudio del proyecto, este análisis básicamente se realiza para ambientes inicialmente homogéneos y posteriormente heterogéneos, en ambos casos para estados estacionarios.

En el tercer capítulo se presenta el estudio de los atractores globales inicialmente para modelo logístico, porque siempre resulta en el estudio y análisis del modelo Lotka – Volterra, posteriormente se generaliza y se justifica su existencia. Con lo anterior se examinan las soluciones espacio-temporales que determinan el flujo para que todas ellas converjan hacia el atractor global, con él se determina la solución de estado estacionario.

Para finalizar en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones del proyecto en donde quedan abiertas las posibilidades para estudios futuros como complemento a lo realizado.

El autor

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Historia evolución de Modelos Poblacionales

A continuación se muestra la evolución de los modelos poblacionales descritos en [8] centrándonos en diferentes variaciones del modelo Lotka Volterra, el modelo Holling y finalizando con los modelos difusivos. La primera ecuación diferencial depredador-presa, se remonta a los estudios del Químico y Biólogo estadounidense, Alfred James Lotka en 1920 y el matemático Italiano Vito Volterra en 1926

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u - buv, \\ \frac{dv}{dt} = \mu v - cuv, \end{cases} \quad (1.1)$$

con λ, μ, b, c , constantes reales se aplicó para el estudio de poblaciones de varias especies de peces. Posteriormente este modelo fué generalizado por el biólogo Italiano Humberto d'Ancona

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u - au^2 - buv, \\ \frac{dv}{dt} = \mu v - dv^2 + cuv, \end{cases} \quad (1.2)$$

$\lambda, a, b, c > 0, \mu \in \mathbb{R}$.

Los biólogos observaron que si bien algunas interacciones depredador-presa conducían a un sistema con equilibrios estables, algunas otros no lo hacían y por lo tanto debía existir un proceso ecológico que lo desestabilizaba, esto corresponde a la capacidad limitada de un depredador para consumir su presa. Se representa mediante la función $\Phi(u)$ y se denomina respuesta funcional general del depredador, concepto introducido por Salomon y Holling, entonces el modelo Lotka-Volterra clásico es modificado a

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u - au^2 - b\Phi(u)v, \\ \frac{dv}{dt} = \mu v - dv^2 + c\Phi(u)v, \end{cases}, \quad (1.3)$$

con $\Phi(u)$ función positiva y no decreciente (densidad de presa) $\Phi(u)$, respuesta funcional tipo Holling II se utiliza en ecología como:

$$\Phi(u) = \frac{u}{1 + mu}, \quad (1.4)$$

donde m es una constante positiva, $m = bT_h$ y T_h tiempo de manipulación para un depredador genérico matar y consumir su presa genérica.

Luego el modelo realista Holling tipo II depredador-presa toma la forma:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u - au^2 - \frac{bu^2v}{1 + mu^2}, \\ \frac{dv}{dt} = \mu v - dv^2 + \frac{cu^2v}{1 + mu^2}. \end{cases} \quad (1.5)$$

El comportamiento dinámico de los modelos depredador-presa es muy sensible a los cambios de las funciones de reacción y la modificación de $\Phi(u)$ ha dado origen a múltiples estudios.

Los modelos anteriores se caracterizan por centrarse en las interacciones entre las especies en el tiempo; pero existe evidencia biológica considerable que el espacio o medio en donde conviven las especies afecta la dinámica de las poblaciones, es así como en 1937 Fisher y Kolmogoroff, utilizan una ecuación de reacción-difusión para estudiar la propagación de un solo gen en una población de individuos diploides.

En 1950 Kierstead y Slobodkin estudiaron los modelos de difusión en poblaciones cuando la dispersión espacial está involucrada. Turing estudia modelos de reacción-difusión en patrones de morfogénesis y en 1970 los correspondientes modelos de población de depredador presa de la forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = g(u, v), \end{cases}$$

Pasan a reescribirse como modelos de reacción-difusión de la forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - d_1 \Delta u = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} - d_2 \Delta v = g(u, v), \end{cases},$$

junto con condiciones iniciales, condiciones de frontera adecuadas y los límites del dominio espacial se estudia el comportamiento dinámico de las especies en todo el dominio espacial $\Omega \in \mathbb{R}^n$, o \mathbb{C}^n con el fin de encontrar específicamente soluciones de estados estacionarios con sus patrones espaciales.

1.2 Conceptos básicos y espacios de Banach

1.2.1 Espacios normados

En un espacio vectorial X , es de gran importancia las métricas, ya que permiten determinar completamente mediante la norma distancia entre dos elementos.

Definición 1 *Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, con las siguientes propiedades*

- i) $\|x\| \geq 0$
- ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Si no se exige la propiedad (II), la aplicación $\|\cdot\|$ se denomina seminorma

Definición 2 *Sea X un espacio vectorial normado en el que se define la métrica*

$d(x, y) = \|x - y\|$. *Si $(X; d)$ es completo, X se dice espacio de Banach*

Algunos ejemplos de Espacios normados que podemos encontrar

1. $X = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} con la norma del valor absoluto son espacios de Banach.
2. $X = \mathbb{R}^n$ ó \mathbb{C}^n con la norma $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$ ($p \geq 1$) es de Banach.
3. Sea $\mathcal{P} = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ($p \leq 1$) y definimos $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p)^{1/p}$

4. $X = C[a, b]$ (funciones continuas en $[a, b]$), con la norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ es de Banach
5. EL mismo espacio anterior $C[a, b]$ con la norma $\|f\| = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ no es completo, sin embargo, este espacio puede completarse como veremos despues y su complección es precisamente el espacio $L^2[a, b]$
6. Si $X = B(A)$ el espacio de las funciones acotadas en A , la norma $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$ tambien da lugar a un espacio de Banach.
7. Sea $VA[a, b]$ la clase de funciones de variación acotada en $[a, b]$. En un espacio vectorial con las operaciones usuales se define la norma $\|f\| = |f(a)| + V(f)$ donde $V(f)$ representa la variación total f que convierte al espacio $VA[a, b]$, en un espacio de Banach.

Los siguientes teoremas no demostrados ilustran algunas propiedades de los espacios normados.

Teorema 1 *Sea X un espacio vectorial normado, entonces:*

i) X es de Banach

ii) Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge en X

Teorema 2 *En un espacio vectorial normado X donde $B(x_0, r) = \{X : \|X\| < r\}$. Son equivalentes:*

a) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \forall x, y \in X$

b) $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r), \forall x_0 \in X, r > 0$

Como consecuencia de este teorema resultan las equivalencias de las siguientes proposiciones

Proposición 1 *Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo E . Si definimos en $X \times X$ ó $E \times X$ la métrica producto $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$, entonces los mapeos $(x, y) \rightarrow x + y$, y , $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$, definidas en $X \times X$ y $E \times X$, respectivamente, son continuas. Además la norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Proposición 2 *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y solo si Y es cerrado en X .*

Teorema 3 (complección) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Existe un espacio de Banach X^* y una isometría $A : X \rightarrow W$ donde W es un subespacio denso de X^* . Dicho espacio X^* es único salvo isometrías.*

1.2.2 Espacios L^p

Los espacios L^p corresponden a los ejemplos más útiles de los espacios normados y dieron el desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert.

X es un espacio de medida y μ una medida positiva. En el espacio representado por:

$$L^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \text{medible y } \int_X |f| d\mu < \infty\}$$

Si ahora hacemos $1 \leq p < \infty$, definimos análogamente el espacio de funciones de potencia p -ésima integrable, como

$$L^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \text{medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

Si definimos la aplicación $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$, es evidente que $L^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \text{medible y } \|f\|_p < \infty\}$

En el caso de $p = \infty$ procedemos de una forma diferente:

Si $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, también es medible $|g|$; sabemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |g|^{-1}(\alpha, \infty]$ es medible y podemos definir el conjunto

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(|g|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0\}$$

Observación 1 *Si el espacio normado es de dimensión finita da lugar a algunas características especiales, entre ellas el teorema de Bolzano-Weierstrass demuestra que, en un espacio de dimensión finita, cualquier bola cerrada $\overline{B}(z, r)$ es compacta. Se menciona el siguiente teorema*

Teorema 4 (F. Riesz) *En un espacio normado X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) La bola unidad $\overline{B}(0, 1)$ es compacta*
- ii) X tiene dimensión finita*

Aquí son importantes los siguientes resultados.

Lema 1 *Dados un espacio normado X (de cualquier dimensión) y una familia $\{x_1, \dots, x_n\}$ linealmente independiente, existe $c > 0 : \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in E : \|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$*

Teorema 5 (Completitud) *Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado X es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.*

1.2.3 Producto interior y espacios de Hilbert

A fin de dotar a los espacios normados de una geometría, debemos definir un producto interior o escalar. Es importante conocer sus propiedades, aprovecharlas para aplicarlas tanto al estudio de las series de Fourier, los polinomios ortogonales y la teoría básica de operadores.

Definición 3 *Un espacio con producto interno o pre Hilbert es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow E$ con las siguientes propiedades.*

1. (Aditiva) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. (Homogénea) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. (Hermítica) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4. (definida positiva) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Definición 4 *Decimos que X es espacio de Hilbert si es un espacio vectorial con producto interno completo. Es decir, si d es la métrica inducida por la norma en X , ella es a su vez por el producto interno, entonces (X, d) es completo.*

1.2.4 Espacio de Sovolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq +\infty$

Definición 5 *Sean $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Si m es un número entero no negativo, $u \in L^p$ y existe la derivada distribucional $D^\alpha u$ para cualquier α , con $|\alpha| \leq m$ tal que*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall |\alpha| \leq m$$

Entonces se dice $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado espacio de Sovolev sobre Ω

Este subespacio $W^{m,p}(\Omega)$ está dotado de la norma: $\|u\|_{m,p} = (\sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$, si $1 \leq p \leq \infty$.

El caso $p = 2$ juega un papel muy importante, estos espacios denotados por $H^m(\Omega)$ así

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$$

y para $u \in H^m(\Omega)$, nosotros denotamos por $\|u\|_{m,p} = \|u\|_{m,2}$. El espacio $H^m(\Omega)$ tiene un producto interno natural definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Observación 2 *El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert debido a que $L^2(\Omega)$ también lo es.*

1.3 Radio espectral

Sea X un espacio de Banach (completo, espacio vectorial normal) y $A : D(A) \rightarrow X$ un operador lineal con dominio $D(A) \subseteq X$ para cualquier número complejo δ , formamos el operador

$$A_\delta = A - \delta I \quad \text{donde } I \text{ es el operador identidad en } X \quad (1.6)$$

Si A_δ tiene inversa, la denotamos por:

$$R_\delta(A) = A_\delta^{-1}, \quad (1.7)$$

calculamos el $\det(A_\delta)$, $\delta \in \mathbb{C}$ tales que $\det(A_\delta) \neq 0$. Ahora δ es un punto regular para A_δ si:

- (i) $R_\delta(A)$ existe
- (ii) $R_\delta(A)$ es acotada (Limitado)
- (iii) $R_\delta(A)$ está definida en un subconjunto denso de X .

Los puntos del espectro incluye valores de δ para los cuales $R_\delta(A)$ no existen, encontramos la siguiente clasificación

- i) El espectro continuo es el conjunto de valores de δ para los cuales $R_\delta(A)$ existe pero no acotado (ilimitado)

ii) El espectro residual es el conjunto de valores de δ para los cuales $R_\delta(A)$ existe, es acotado pero no está definido en subconjunto denso de X .

iii) $\delta \in \mathbb{C}$ denotamos $\sigma(A)$ el espectro de A (todos los puntos no regulares), decimos que el espectro esencial de A es cualquier punto en $\sigma(A)$ que no es un valor propio aislado de multiplicidad finita (tales valores propios son redondeados por una vecindad de puntos regulares tales que la dimensión de espacio nulo A_δ es finita).

Definición 6 Una función h es analítica (holomorfa) en el punto $\delta_0 \in \mathbb{C}$ si h es homomorfa si h esta definida y es diferenciables en δ_0 y en alguna vecindad de radio ε de δ_0 , o simplemete h es analítico en G si solo si para cada $\delta_0 \in G$ se define una serie de potencias representada por

$$h(\delta) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (\delta - \delta_0)^j$$

y con radio de convergencia no cero.

Por un vector evaluado en funciones o un operador funcional se entiende como un mapeo

$$\begin{aligned} S : \Lambda &\longrightarrow B(X, X), \\ \delta &\longrightarrow S_\delta, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde Λ es cualquier subconjunto del δ - plano complejo. S_δ en lugar de $S(\lambda)$, notación similar a R_δ y $\Omega = \rho(A)$. Podemos solucionar cualquier $x \in X$ y S dado, definimos el mapeo

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow X, \\ \delta &\longrightarrow S_\delta x, \end{aligned} \tag{1.9}$$

De igual forma podemos solucionar $x \in X$ y cualquier funcional $f \in X'$ para tomar un mapeo de Λ en el plano complejo, definido

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \delta &\longrightarrow f(S_\delta x), \end{aligned} \tag{1.10}$$

es holomorfa para cada $\delta_0 \in \Lambda$.

El conjunto resolvente $\rho(A_\delta)$ de un operador lineal A es abierto de \mathbb{C} pero no siempre es su dominio, en general es la unión de dominios disyuntos (disyuntos conexos por conjuntos abiertos). El resolvente es holomorfo en cada punto de $\rho(A)$.

Definimos dos clases correspondientes de derivadas S'_δ de S_δ con respecto a δ por las formulas.

$$\left\| \frac{1}{\Delta \delta} [S_{\delta+\Delta\delta} - S_\delta] - S'_\delta x \right\| \longrightarrow 0 \quad (x \in X),$$

$$\left| \frac{1}{\Delta \delta} [f(S_{\delta+\Delta\delta} - S_\delta)] - f(S'_\delta x) \right| \longrightarrow 0 \quad (x \in X, f \in X'),$$

La existencia de la primera derivada implica la existencia de la otra derivada.

Teorema 6 (espectral) Si $X \neq \{0\}$ es un espacio complejo de Banach y $A \in B(X, X)$, entonces $\sigma(A) \neq \emptyset$

Demostración. Suponemos $X \neq \{0\}$. Si $A = 0$, entonces $\sigma(A) = \{0\} \neq \emptyset$ tomamos $A \neq 0$, entonces para $\|A\| \neq 0$,

la serie

$$R_\delta = -\frac{1}{\delta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\delta} A\right)^j \quad (|\delta| > \|A\|)$$

converge para $\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\|A\|}$. La convergencia es absoluta para $\frac{1}{\delta} < \frac{1}{2\|A\|}$, esto es $|\delta| > 2\|A\|$, porque la serie geométrica

$$\|R_\delta\| = \frac{1}{|\delta| - \|A\|} \leq \frac{1}{\|A\|}, \quad |\delta| \geq 2\|A\| \quad (1.11)$$

la serie de potencia puede representar de la siguiente forma,

$$h(\delta) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (\delta - \delta_0)^j \quad C_j = f(R_{\delta_0(A)^{j+1}x}),$$

la cual es absolutamente convergente en el disco (1,11) ■

Teorema 7 El resolvente $R_\delta(A)$ del operador lineal encerrado $T : X \longrightarrow X$ en el espacio complejo de Banach X es holomorfa para cada punto δ_0 del conjunto resolvente $\rho(A)$ de A es decir localmente holomorfa en $\rho(A)$

Teorema 8 Si $A \in B(X, X)$, donde X es un espacio complejo de Banach y $\delta \in \rho(A)$ entonces

$$|R_\delta(A)| > \frac{1}{\omega(\delta)} \quad \text{donde} \quad \omega(\delta) = \lim_{S \in \sigma(A)} |\delta - S| \quad (1.12)$$

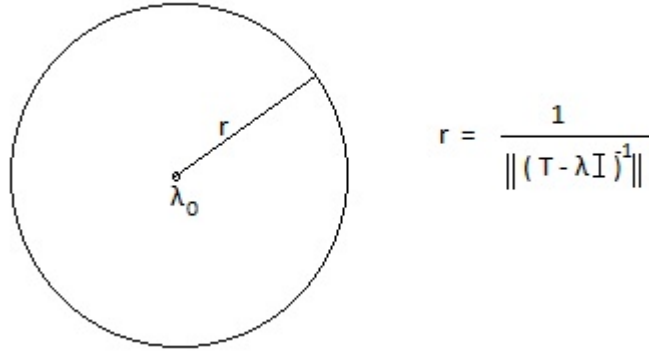


Figura 1.1: Disco de radio $r = \frac{1}{\|R_{\delta_n}\|}$ en δ - plano complejo.

es la distancia de δ al espectro $\sigma(A)$

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} \quad (1.13)$$

haciendo $k = \frac{1}{\delta}$ (1.13) se puede escribir como

$$R_{\delta} = -k \sum_{n=0}^{\infty} A^n k^n$$

entonces, escribimos $|C_n| = \|A^n\|$, obtenemos

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n k^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| |k^n|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |k^n|^n$$

la fórmula muestra que se converge absolutamente para $|k| < r$, por lo tanto

$$|\delta| = \frac{1}{|k|} > \frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Observemos que la serie de potencias tiene centro de convergencia en $k = 0$, por lo tanto se define un radio pequeño con círculo alrededor de $\delta = 0$ en el δ -plano cuyo exterior enteramente en $\rho(A)$. Significa que $\frac{1}{r}$ es el radio espectral de A , luego

$$r_{\sigma}(A) = \frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Teorema 9 (radio espectral) Si A es un operador lineal limitada en un espacio complejo de Banach, entonces el radio espectral $r(A)$ de A está dado por la siguiente expresión,

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \quad (1.14)$$

Tenemos $\sigma(A^n) = [\sigma(A)]^n$ implica $r_\sigma(A^n) = [\sigma(A)]^n$, aplicamos para A^n en lugar de A y obtenemos

$$r_\sigma(A^n) \leq \|A^n\| \quad (1.15)$$

luego

$$r_\sigma(A^n) = \sqrt[n]{r_\sigma(A^n)} \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

para todo n , entonces

$$r_\sigma(A^n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \quad (1.16)$$

Una serie potencias $\sum C_n k^n$ converge absolutamente para $|k| < r$.

A continuación ofrecemos otra forma de expresar a $R_\delta(A)$ es un operador con $A \in B(X, X)$, X espacio de Banach, se puede representar mediante la serie de potencias

$$R_\delta(A) = \sum_{j=0}^{\infty} R_{\delta_0}(A)^{j+1} (\delta - \delta_0)^j, \quad (1.17)$$

la cual converge absolutamente para cada δ en el entorno

$$|\delta - \delta_0| < \frac{1}{\|R_{\delta_0}\|}, \quad (1.18)$$

luego para cualquier $x \in X$ y $f \in X'$ definimos h por

$$h(\delta) = f(R_\delta(A)x),$$

con $\|R_\delta(A)\| \rightarrow \infty$ cuando $\omega(\delta) \rightarrow 0$

Demostración. para cada $\delta_0 \in \rho(A)$ el disco (1.12) es un subgrupo de $\rho(A)$, luego asumimos $\sigma(A) \neq \phi$, y vemos que la distancia δ_0 al espectro debe al menos ser igual al radio del disco, que es $\omega(\delta_0) \geq \frac{1}{\|R_{\delta_0}\|}$ y esto implica (1.13)

Asumimos que $\sigma(A) = \phi$ conducimos a una contradicción. $\sigma(A) = \phi$ implica $\rho(A) = C$, por lo tanto R_δ es holomorfa para todo δ . En consecuencia para $x \in X$ fijo y $f \in X'$ la función h definida por

$$h(\delta) = f(R_\delta x)$$

es holomorfa en C , tal que h es una función entera, ya que la holomorfidad implica continuidad, h es continua y limitada en el disco compacto $|\delta| \leq 2\|A\|$, pero h es también limitada por $|\delta| \geq 2\|A\|$ ya que $\|R_\delta\| < \frac{1}{\|A\|}$

De (1.17) tenemos

$$|h(\delta)| = |f(R_\delta x)| \leq \|f\| \|R_\delta x\| \leq \|f\| \|R_\delta\| \|x\| \leq \|f\| \frac{\|x\|}{\|A\|}$$

luego h es acotado en \mathbb{C} y constante, por el teorema de Liouville, los estados de una función entera están limitadas en el plano complejo y es constante. ■

Luego $x \in X$ y $f \in X'$ en h donde arbitrariamente, h constante implica que R_δ es independiente de δ y así $R_\delta^{-1} = A - \delta I$ pero esto no es posible, y el teorema queda probado.

1.4 Teoría de existencia de soluciones locales para ecuaciones difusivas

Esta sección es un resumen de [9, Cap. III]. La existencia de soluciones locales en $L^\alpha(\Omega)$, significa la existencia de soluciones de problemas de valores iniciales límites para pequeños intervalos de tiempo, el término de existencia global hace referencia a problemas donde existen soluciones para todo tiempo después de las condiciones iniciales.

El punto fundamental es cuando los sistemas de reacción-difusión son vistos como una ecuación de evolución en algunas funciones espaciales (Por cada tiempo t fijo, $u(t)$ es una función espacial dada), la ecuación puede ser pensada como una ecuación diferencial ordinaria.

Como se relaciono en el espectro de operadores diferenciales, definimos nuestro operador diferencial en el espacio funcional de tal manera que incorpore condiciones de contorno.

Consideremos:

$$u_t = \Delta u + f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.19)$$

si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, entonces imponemos algunas condiciones de contorno de la forma:

$$\alpha(x)u + \beta(x)\nabla u \cdot \vec{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (1.20)$$

donde $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son funciones definidas y \vec{n} vector normal exterior a Ω .

Completamos el problema especificando condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.21)$$

vamos a desarrollar una teoría de existencia de soluciones para (1.19), (1.20) y (1.21) en $L^2(\Omega)$, necesariamente implica algún decaimiento si $|x| \rightarrow \infty$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Ahora para funciones suaves en $L^2(\Omega)$ que satisface las condiciones de frontera (1.21), definimos:

$$Au = -\Delta u$$

y extendemos A para lograr un operador cerrado, y definido densamente en $L_2(\Omega)$.

Reescribimos (1.20), (1.21) y (1.22)

$$\begin{cases} U_t + Au &= f, & t > 0 \\ U &= u_0, & t = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

notamos que cualquier condiciones de frontera se encuentra dentro del dominio de A , $D(A)$.

Asumimos que A es operador densamente cerrado en un espacio de Banach X , y las constantes $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 0$ tal que el sector

$$C_\pi(a) = \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \quad \lambda \neq a\}$$

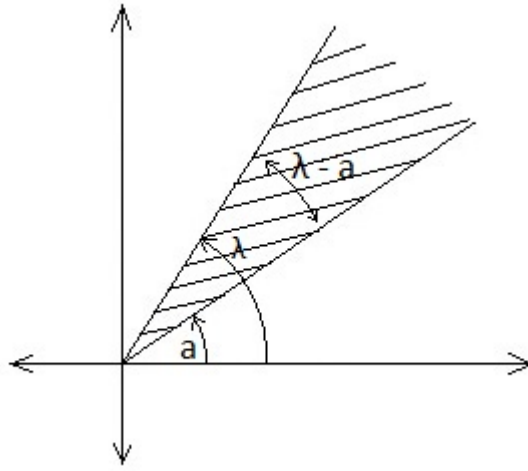


Figura 1.2: Representación de $C_\pi(a)$

no contiene el espectro de A , y por ello calculamos,

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}. \quad (1.23)$$

En este sector, para obtener un operador sectorial de A se obtiene $A_1 = A + aI$, para $\alpha \geq 0$ y definimos el siguiente operador fraccional

$$A_1^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\alpha t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_c (\lambda + A_1)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right) dt \quad (1.24)$$

El siguiente teorema refiere al sector \mathbb{C} representado en la gráfica (1.2)

Teorema 10 sea f una función en

$$\begin{cases} u_t + Au = f, & t > 0 \\ u = u_0, & t = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

denominada función Lipschitz continua de $U = X_\alpha$ en X , para algun $\alpha \in [0, 1]$. Entonces cumple que para cualquier $u_0 \in U$ existe $T = T(u_0)$ talque el problema inicial tiene una solución única en $(0, T)$.

donde C es un contorno a la derecha de $\sigma(-A_1)$ con $\arg \lambda \rightarrow \pm \theta$ cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$ para algun $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Demostración. Se puede mostrar que para $\alpha > 0$, $A_1^{-\alpha}$ es un operador acotado uno a uno en X ; establecemos

$$\begin{aligned} A_1^\alpha &= \text{inversa de } A_1^{-\alpha}, \alpha > 0 \\ A_1^0 &= \text{identidad } X = L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Ahora para $\alpha > 0$, cada A_1^α densamente definido en X y establecemos

$$X_\alpha = D(A_1^\alpha).$$

Para $\alpha \geq \beta \geq 0$, se puede demostrar que $X_\alpha \subseteq X_\beta$

Notamos que $X_0 \equiv X$ y $X_1 \equiv D(A_1) \equiv D(A)$, donde A_1^α es llamado operador fraccional de A_1 .

Una solución de el problema (1.20) y (1.21) en el intervalo $(0, T)$ es una función continua $u : [0, T) \rightarrow X (= L^2(\Omega))$ que satisface

$$u_t + Au = f(u), \quad \text{para } t \in (0, T) \tag{1.26}$$

Como $u(t) \rightarrow u_0$ cuando $t \rightarrow 0$ en X , $u(t) \in D(A)$ para $t \in (0, T)$ para $t > 0$ ■

1.5 Teoría de grado e índice de campos vectorial

En esta sección aplicamos la teoría del grado de acuerdo a [9] para observar cuantas vueltas da una aplicación $f : S^n \rightarrow S^n$. Para definir el índice de un punto singular de una ecuación diferencial (o equivalentemente de un campo vectorial) y el de un camino cerrado en Variable Compleja. tambien estudiamos los ceros de un campo vectorial definido en una variedad.

Definición 7 Sean M y N dos variedades diferenciables, con $M \subset \mathbb{R}^k$, y sean $f, g : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciables. Se dice que f y g son diferenciablemente homótopas si existe una homotopía entre ambas, es decir, una aplicación diferenciable

$$F : M \times [0, 1] \rightarrow N, \tag{1.27}$$

de modo que

$$\begin{cases} F(p, 0) = f(p) \\ F(p, 1) = g(p) \end{cases}, p \in M \quad (1.28)$$

Se dice también que F es una homotopía diferenciable entre f y g . Si en las condiciones anteriores además son f y g difeomorfismos y también lo son, para todo $t \in [0, 1]$ las aplicaciones $F_t : M \rightarrow N$ dadas por $F_t(p) = F(p, t)$, entonces se dice que f y g son diferenciablemente isotopas y que F es una isotopía diferenciable.

Proposición 3 (Lema de homotopía) Sean M y N dos variedades diferenciables de igual dimensión, con M compacta, sean $f, g : M \rightarrow N$ dos aplicaciones diferenciablemente homótopas y $q \in N$ un valor regular para f y g . Entonces

$$f^{-1}(q) = g^{-1}(q) \pmod{2}$$

Teorema 11 Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre una variedad compacta M y una variedad conexa N , con $\dim(M) = \dim(N)$, entonces los puntos regulares tienen el mismo cardinal módulo 2. A ese cardinal se le llama grado módulo 2 de f .

1.5.1 Grado de Brouwer

El grado de Brouwer se define para variedades orientables. Una variedad diferenciable se llama orientable si todos los cambios son de determinante positivo, luego es menos general que la del grado módulo 2.

Se hacen las siguientes observaciones

1. Si V y W son dos espacios vectoriales de igual dimensión y si $\varphi : V \rightarrow W$ es un isomorfismo entonces la matriz tiene determinante no nulo. Si M y N son dos variedades orientadas y de igual dimensión y si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ tiene determinante positivo si f preserva la orientación y negativo si la invierte.
2. Aunque $f : M \rightarrow N$ no sea difeomorfismo, si M y N son dos variedades orientadas y de igual dimensión, entonces para todo valor regular $q \in N$ y todo punto $x \in f^{-1}(q)$, punto regular, resulta que $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es isomorfismo lineal con lo que $(f_*)_p$ tiene determinante positivo si preserva la orientación y negativo si la invierte.

Luego,

(a) $\text{Signo}(f_*)_p = +1$, si $\det(f_*)_p > 0$

(b) $\text{Signo}(f_*)_p = -1$, si $\det(f_*)_p < 0$

Si M y N son dos variedades diferenciables orientadas y de igual dimensión, con M compacta y N conexa, si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable y si $q \in N$ es un valor regular, se llama grado de Brouwer de f en q a

$$\deg(f, g) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{signo}(f_*)_p \quad (1.29)$$

(c) El entero $\deg(f, g)$ no depende de la elección del valor regular q , lo que permite definir el grado de Brouwer de f como $\deg(f) = \deg(f, g)$ cualquiera que sea el valor regular $q \in N$

(d) Si f y g son aplicaciones diferenciablemente homótopas, entonces $\deg(f) = \deg(g)$

1.5.2 Grado de mapeo de S^1 en sí mismo.

Si consideramos las aplicaciones de la circunferencia de unidad en sí misma $f : S^1 \rightarrow S^1$ podemos dar una interpretación geométrica del grado de Brouwer como el número de vueltas (con sentido) que da la imagen de f sobre la circunferencia. En efecto, considerando $S^1 \subset \mathbb{C}$ como el conjunto de puntos complejos de módulo 1, y se tienen las siguientes propiedades

a) Si $f(z) = z$, entonces $\deg(f) = 1$.

b) Si $f(z) = -z$, entonces $\deg(f) = 1$. La aplicación antipodal tiene grado +1.

c) Si f es constante o no suprayectiva, entonces $\deg(f) = 0$.

- Si $f(z) = z^n$, entonces $\deg(f) = n$.

- Si $f(z) = \bar{z}$ entonces $\deg(f) = -1$. La conjugación, que es la reflexión respecto del eje real, tiene grado 1 (como vimos ocurre para toda reflexión respecto de un hiperplano).

d) Si $f(z) = \bar{z}^n$ entonces $\deg(f) = -n$, ya que a la composición de aplicaciones corresponde el producto de los grados.

La noción de grado de Brouwer coincide con la de índice de un camino cerrado estudiada en Variable Compleja, También coincide con la de índice de un cero de un campo vectorial (o punto singular de una ecuación diferencial) sobre una superficie

1.5.3 Índice de un campo vectorial: Teorema de Hopf – Poincaré

Para $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, podemos considerar un campo vectorial en U como una aplicación $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (diferenciable de clase C^∞). Supongamos que $z \in U$ es un cero aislado del campo v . Entonces podemos definir la función

$$\begin{aligned} V : S^{n-1}(z) &\longrightarrow S^{n-1} \\ X &\mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned} \tag{1.30}$$

en la que $S^{n-1}(z)$ es una esfera de dimensión $(n-1)$ centrada en z y de radio suficientemente pequeño para que $v(x) \neq 0, \forall x \in S^{n-1}(z)$ mientras que S^{n-1} denota la esfera unidad de \mathbb{R}^n centrada en el origen de coordenadas. Con toda la notación precedente se tiene:

- a) Se llama índice del campo v en el punto z al grado de la aplicación V .
- b) En el caso de dimensión $n = 2$, el grado de $V : S^1(z) \rightarrow S^1$ indica las veces que el campo gira alrededor del cero aislado z . Visualmente se puede obtener en casos sencillos.
- c) También se generaliza a variedades sin dificultad, porque la noción de índice es local.

Existe una fuerte relación entre la teoría del grado de Brouwer con las ecuaciones diferenciales y campos vectoriales.

Teorema 12 (Hopf-Poincaré) *Sea M una variedad diferenciable compacta y X un campo vectorial sobre M con ceros aislados. Entonces la característica de Euler de M es igual a la suma de los índices en los ceros de X , es decir*

$$k(M) = \sum_{p/X_p=0} \text{índice}(p) \tag{1.31}$$

donde índice p denota el índice de p respecto del campo X .

Se observan distintas nociones del sistema que representa el modelo difusivo de Lotka – Volterra bajo las condiciones de frontera de Dirichlet en estados estacionarios, representada mediante el índice de una ecuación logística difusiva (corresponde a un camino cerrado y de un cero aislado de una ecuación diferencial), se sujeta a la noción de grado topológico de una aplicación entre

esferas. Índice es un punto crítico no degenerado de una función de Morse. Si M una variedad compacta y $M \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

$$k(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k \quad (1.32)$$

Siendo $n = \dim(M)$ y v_k el número de puntos de índice k y $k(M)$ la característica de Euler de la superficie y es igual a la suma de los índices en los ceros. Para establecer el resultado se ha necesitado tomar una métrica auxiliar. Eso no es ninguna restricción, porque toda variedad diferenciable paracompacta admite métricas riemannianas, y porque el resultado establecido no depende de la métrica escogida.

1.6 Teoría de Bifurcación con enfoque Liapunov-Schmidt para espacios de Banach.

Con los conceptos anteriores construimos un modelo para conocer bifurcaciones para este tipo de problema. El resultado es una ecuación escalar de la forma

$$g(\alpha, \lambda) = 0$$

donde las soluciones $\alpha \in \mathbb{R}$ son uno a uno correspondientes con las solución u del problema original λ , es usualmente el parametro de bifurcación,

por ejemplo

$$g(\alpha, \lambda) = \alpha(\lambda - \alpha^2)$$

representa una forma estandar de bifurcación Pitchfork, teniendo tres soluciones cuando $\lambda > 0$, sin embargo la función g es obtenida sólomente de manera implícita cerca a las puntos de bifurcación

$$(\alpha, \lambda) = (0, 0).$$

En general, sean los espacios de Banach $X \rightarrow Y$

$$\phi : X \times \mathbb{C} \rightarrow Y$$

Siendo una función suave talque $\phi(0, 0) = 0$ se quiere solución

$$\phi(u, \lambda) = 0 \quad (1.33)$$

para $u \in X$ como una función de λ ; definimos $(0, 0)$ siendo L el diferencial, o linealización de ϕ con respecto a u

$$Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(hu, 0) - \phi(0, 0)}{h} \quad (1.34)$$

$\phi(u, \lambda)$ es un problema elíptico no lineal (problema de estados de estacionamiento para algunas sistemas de reacción difusión).

Luego $X \rightarrow Y$ son subespacios de $L^2(\Omega)$ para algún dominio Ω en \mathbb{R}^n . $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (un espacio de Banach con norma generada por un producto interno)

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv^* dx \quad (1.35)$$

donde v^* denota el complejo conjunto de v (a pesar que nos interesa funciones de valor real, es convencional realizar el análisis espectral en la complejización de los espacios, por ejemplo las matrices reales pueden tener valores propios complejos).

Un operador $A : X \rightarrow Y$ es Fredholm, si el espacio es nulo, $\text{Ker } A$, es un subespacio dimensional finito de X , y el rango de A es un subespacio cerrado de Y que tiene co-dimensión finita.

Para el operador Fredholm, existe subespacios cerrados M y N de X y Y , respectivamente tal que:

$$\begin{cases} X &= \text{ker } A \oplus M \\ Y &= N \oplus \text{rango } A \end{cases} \quad (1.36)$$

Esto significa que para $u \in X$, existe un único elemento $v \in \text{ker } A$ y $w \in M$ talque $u = v + w$ (y similarmente una única descomposición de Y en N y rango A).

Por definición tenemos la siguiente indice L de Fredholm:

$$L = \dim \text{ker } A - \dim N$$

Asumimos de ahora en adelante que el operador L , es un operador Fredholm de índice cero y en general la descomposición de Y en (1.37), requiere poco esfuerzo, sin embargo, L es un operador diferencial elíptico, donde

$$(\text{range } L)^\perp = \ker L^*, \quad (1.37)$$

donde L^* denota el operador adjunto de L se define por

$$L^* x^* = y^*,$$

x^* satisface $\langle Lx, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle$ para todo $x \in X$, para alguna sustición y^*

También usamos $(\text{range } L)^\perp$ para denotar el complemento ortogonal del rango L , definido por

$$\{y \in Y : \langle y, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \text{rango } L\}$$

La caracterización de $(\text{range } L)^\perp$ es conocida como Fredholm alternativa, hacemos los cambios

$$N = \ker L^*$$

Se requiere que el indice de L sea cero. Y chequear que

$$\dim \ker L = \dim \ker L^*$$

esto es trivial si L es auto-adjunto. se asume que $\dim \ker L = 1$, siendo en caso general, sin embargo la teoria de Liapunov-Schmidt hace una buena estimación de $\dim \ker L > 1$.

Asumimos $E : Y \rightarrow \text{rango } L$ Asociado con la desposición (1.37) y reescribimos $\text{Phi}(u, \lambda) = 0$

$$\begin{cases} E \phi(u, \lambda) = 0 \\ (I - E)\phi = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

usamos la descomposición $u = v + w$ donde $v \in \ker L$ y $w \in M$ y solucionamos (1.39) para w como una función de v y λ tenemos

$$E\phi(v + w; \lambda) = 0 \quad (1.39)$$

De la composición

$$F(v, w, \lambda) = E\phi(v + w, \lambda), \quad (1.40)$$

tomamos $\ker L \times M \times R$ esta en el rango L ; además la diferencial con respecto a w de f original es $EL = L$

Sin embargo cuando el dominio es restringido a M tenemos $L : M \rightarrow \text{rango } L$, lo cual es invertible

Ahora podemos aplicar el teorema la función implícita para concluir que (1.39) se soluciona para w cerca a $(v, \lambda) = (0, 0)$, esto es

$$w = W(v, \lambda) \tag{1.41}$$

Sustituimos en (1.41) y obtenemos

$$(I - E)\phi(v + w(v, \lambda), \lambda) = 0 \tag{1.42}$$

denominada ecuación de bifurcación válida para (v, λ) en el dominio w

Reducimos el problema inicial (1.33), en un espacio de dimensión infinito, a la solución (1.41) para $v \in \ker L$, el cual es de dimensión finita.

Capítulo 2

BIFURCACIONES DEL MODELO DIFUSIVO DE LOTKA-VOLTERRA

En este capítulo se estudia el modelo poblacional Lotka Volterra difusivo, el cual involucra el medio $x \in \Omega$. Se presentan dos casos: el homogéneo con condiciones no cambiantes o estables, los coeficientes son parámetros o constantes. Un segundo caso el no homogéneo, donde las condiciones del medio son cambiantes, y los parámetros de estas ecuaciones son variables, luego lo homogéneo es un caso particular del no homogéneo. El estudio se centra de manera más detallada en caso homogéneo para estados estacionarios, al final se estudia el caso no homogéneo. para ese estudio se analizó en detalle las referencias [3], [4] y [8]

Partimos del modelo poblacional elemental de la forma:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = g(u, v), \quad u(0) = u_0 \text{ y } v(0) = v_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

se observa que el comportamiento poblacional de las especies u y v dependen de las interacciones para un tiempo determinado t .

Si el comportamiento poblacional de las especies depende además del medio $x \in \Omega$, conjunto donde coinciden las especies, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se obtiene un modelo de reacción difusión

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - d_1 \Delta u = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} - d_2 \Delta v = g(u, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $d_1, d_2 > 0$, condiciones iniciales $u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$, $v(x, 0) = v_0(x) \geq 0$, $x \in \Omega$ y condiciones de frontera $B_1 u = B_2 v = 0$; $x \in \partial\Omega$, $t > 0$

2.1 Formulación del problema central

El planteamiento de los siguientes problemas se ilustran pero no se solucionan en [8].

Dado el modelo depredador-presa de difusión-reacción Lotka–Volterra para el caso homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = \lambda u - u^2 - buv & ; \quad x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - d_2 \Delta v = \mu v - v^2 - cuv, & x \in \Omega, t > 0 \\ B_1 u = B_2 v = 0; & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

donde $d_1, d_2, \lambda, \mu, b, c$ son constantes positivas definidas en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y B_1, B_2 son operadores de frontera de la forma

$$\begin{cases} B_1 u(x, t) = \alpha_1 \partial_\nu u(x, t) + \beta_1 u(x, t) \\ B_2 v(x, t) = \alpha_2 \partial_\nu v(x, t) + \beta_2 v(x, t) \end{cases}, \quad (2.4)$$

donde $\partial_\nu u(x, t)$ y $\partial_\nu v(x, t)$ denota componentes normales de $\partial\Omega$ y las constantes no negativas con $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$, por lo tanto B_1 y B_2 operadores de frontera de Neumann si $(\alpha_i, \beta_i) = (1, 0)$ y de Dirichlet si $(\alpha_i, \beta_i) = (0, 1)$.

Considerando las condiciones de frontera de Dirichlet y restringiendo el problema (2.3) a estados estacionarios tenemos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv; & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \mu v - v^2 - cuv; & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & \end{cases} \quad (2.5)$$

El sistema (2.3) puede ser explicado mediante la ecuación logística funcional difusiva de la siguiente forma

$$-\Delta W = \lambda W - W^2, \quad x \in \Omega, W = 0, x \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

y para el caso heterogéneo el sistema

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = \lambda a_1(x)u - a(x)u^2 - b(x) & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - d_2 \Delta v = \mu a_2(x)v - d(x)v^2 + c(x) & x \in \Omega, t > 0, \\ u = v = 0 & \\ (x, 0) = u_0(x) \geq 0; v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & \end{cases} \quad (2.7)$$

donde λ, μ son parámetros y a diferencia del modelo homogéneo $d_1(x), d_2(x), a_1(x), a_2(x), a(x), b(x), c(x)$ y $d(x)$ son funciones continuas no negativas en $\bar{\Omega}$

Para el sistema (2.7) suponemos que todas las funciones coeficientes son constantes y la única variable es $a(x)$, lo cual nos conduce en estados estacionarios del sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^2 - b u v; & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \mu v - v^2 + c u v; & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

Donde este sistema puede ser expresado de la forma logística degenerada.

$$-\delta W = \lambda W - a(x)W^2, \quad x \in \Omega, x \in \partial\Omega \text{ y } W = 0 \subseteq \Omega,, \quad (2.9)$$

Los sistemas (2.5) y (2.8) pueden ser expresados mediante operadores funcionales de la forma

$$-\Delta + \phi, \quad (2.10)$$

definidos entre los espacios de Hilbert H_0^1 sobre una región $\Omega_0 \subseteq \Omega$, con $\lambda_1^D(\phi, \Omega_0)$ y $\lambda_2^N(\phi, \Omega_0)$, los primeros valores propios de (2.10) con condiciones de frontera de Dirichlet y Neuman. En [1] se puede observar el procedimiento como se calculan estos valores.

Centrandonos en las condiciones de frontera de Dirichlet se debe demostrar la existencia del parámetro λ con las siguientes propiedades.

- i.) No tiene solución positiva cuando el parametro $\lambda \leq \lambda_1^D \equiv \lambda_1^D(\Omega)$
- ii.) Tiene única solución positiva cuando el parametro $\lambda > \lambda_1^D$

Con las siguientes consideraciones

- a) Si el parametro $\lambda > \lambda_1^D$ entonces (2.5) y (2.8) tiene soluciones semitriviales de la forma $(u, 0)$ denominada $(\theta_\lambda, 0)$
- b) Si el parametro $\mu > \lambda_1^D$ (2.5) y (2.8) tienen soluciones de la forma $(0, v)$ denominada $(0, \theta_\mu)$.
- c) $(0, 0)$ siempre es solución trivial

Por el principio de máximo fuerte se mostrara que cualquier otra solución (u, v) de (2.5) y (2.8) debe ser positiva ($u > 0, v > 0$) en Ω si solo si

$$\lambda > \lambda_1^D(c\theta\mu) \quad \text{y} \quad \lambda > \lambda_1^D(-d\theta\lambda) \quad (2.11)$$

fijando $c, d > 0$ y $\lambda > \lambda_1^D$ y tomando μ como un parametro de bifurcación se tiene por monotonicidad de $\lambda_1^D(c\theta\mu)$ en μ , que existe un único $\mu^0 > \lambda_1^D$ tal que

$$\lambda = \lambda_1^D(c\theta\mu^0),$$

y si denotamos $\mu_0 = \lambda_1^D(-d\theta\lambda)$ de (2.11) se obtiene la siguiente equivalencia

$$\mu_0 < \mu < \mu^0,$$

empleando argumentos se mostrará que la rama de soluciones positivas $\Gamma = \{\mu, u, v\}$ bifurca a la rama solución semitrivial

$$\Gamma_u := \{(\mu, \theta_\lambda, 0) : -\infty < \mu < \infty\} \text{ en } \mu = \mu_0$$

y luego Γ se une a la otra rama solución semitrivial

$$\Gamma_v := \{(\mu, 0, \theta_\mu) : \mu > \lambda_1^D\} \text{ que bifurca en } \mu = \mu^0$$

La explicación del procedimiento se analizará de manera detallada tomando como referencia [5], ver figura (2.1)

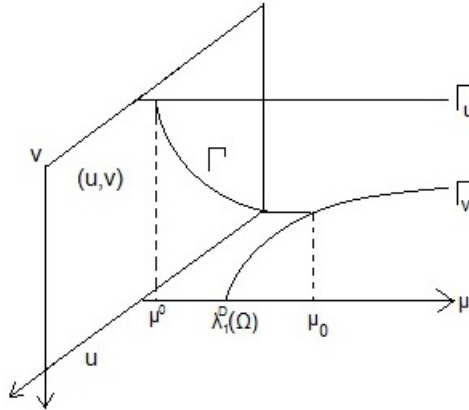


Figura 2.1: Diagramas de bifurcación del modelo Lotka-Volterra difusivo para estados estacionarios

Existen diferentes métodos para solucionar este problema, la mayoría de ellos con técnicas de integración o los llamados métodos fuertes como las transformadas de Fourier, aproximación de Galerkin, ondas viajeras entre otros y los métodos de aproximación o métodos numéricos. Recientemente se han realizado simulaciones numéricas al modelo Lotka-Volterra difusivo que han sido estudiadas en [13].

2.2 Linealización del modelo difusión de Lotka-Volterra

La primera aproximación a la solución del sistema (2.3) se realiza mediante el método de linealización, en donde se establece una relación entre los parámetros y diversos ajustes que permiten mediante representaciones gráficas de las isoclinas del sistema (2.3), se escribe de la siguiente manera

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(\lambda - u - bv), \\ v_t = d_2 \Delta v + v(\mu + cu - v), \end{cases}$$

asumiendo los siguientes valores particulares $A_1 = \lambda$; $B_1 = 1$; $C_1 = B$, $A_2 = \mu$; $B_2 = -1$; $C_2 = 1$. Se obtiene,

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(A_1 - B_1 u - c_1 v) \\ v_t = d_2 \Delta v + v(A_2 - B_2 u + c_2 v) \end{cases},$$

con A_i , B_i y C_i constantes positivas, aunque los coeficientes de difusión d_i y d_2 sean no negativos, dependiendo de la selección de A_i , B_i y C_i se pueden obtener tener tres o cuatro puntos de equilibrio.

$$B = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \frac{A_1}{B_1} + \varepsilon, \quad 0 \leq v \leq \frac{A_2}{C_2} + \varepsilon\},$$

se estima

$$\begin{cases} u_t \geq d_1 \Delta u - k_1 u \\ v_t \geq d_2 \Delta v - k_2 v, \end{cases}$$

con $K_i = \max_B(-A_i + B_i u + C_i v)$

Finalmente el sistema (2.3) se resume a:

$$w_t = d_i \Delta w - k_i w \tag{2.12}$$

Lo cual se ilustra en la siguiente figura 2.2.

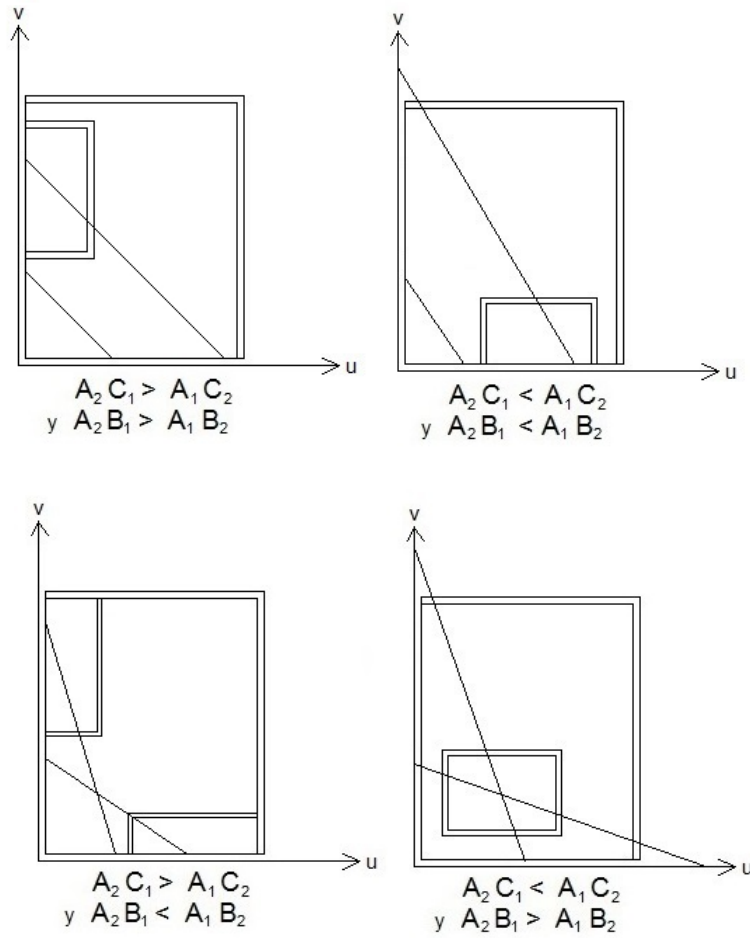


Figura 2.2: Isoclinas para las soluciones según distintas condiciones de los parametros, de $w_t = di\Delta w - kiw$

2.3 Soluciones no triviales al problema en estado estacionario

Inicialmente debemos garantizar que el sistema (2.5) además de las soluciones triviales y semi-triviales tiene soluciones estrictamente positivas, para esto utilizaremos los conceptos previos vistos en los preliminares como el radio espectral de un campo vectorial con los que se determina la región solución. Finalmente la teoría del índice de un campo vectorial con el cual se determina la convergencia de la serie $\{u_n, v_n\}$ que se construye para determinar la solución, este procedimiento se obtuvo de [4] y [5] para el respectivo análisis que se realiza a continuación

Sea el sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a - bu - cv) \\ -\Delta v = v(e - fu + gv) \end{cases}$$

En un dominio cerrado suave Ω con condiciones de frontera de Dirichlet donde $a, b, c, e, f, g > 0$. Se requiere obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones estrictamente positivas, entonces si (u, v) son soluciones se tiene que $u(x) > 0$ y $v(x) > 0$ en Ω .

Sea \bar{u} la máxima solución no negativa de la primera ecuación cuando $v \equiv 0$, $u \equiv 0$ si $a > \lambda_1$ en Ω , λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta + \phi$ en Ω , análogamente \bar{v} es la máxima solución no negativa de segunda ecuación.

Denotamos $r(-\Delta^{-1}(a - c\bar{v})I) > 1$ el radio espectral de $(-\Delta + KI)^{-1}(a - c\bar{v} + k)I$ para determinado K positivo tal que $a - c\bar{v}(x) + k \geq 0$ en Ω , $(-\Delta + kI)^{-1}$ significa el inverso bajo las condiciones de frontera de Dirichlet independiente de K . Lo relacionado con el radio espectral se encuentra aclarado en la sección (1.4) de los preliminares

Si $\lambda_1 \geq a$, y definimos $u_a = 0$, se tiene para este caso $r(L_A) = 0$

A continuación se presentan algunos resultados sobre el radio espectral relacionado en [5] y explicados en la sección 1.3, se demuestran y analizan, porque garantizan la existencia de soluciones no triviales al sistema (2.5)

2.3.1 Teorema sobre estimación del radio funcional espectral

- i) Si $r(L_a) \leq 1$, las únicas soluciones no negativas (u, v) de (2.5) se tienen para $v(x) = 0$ en Ω .
- ii) Si $r(A_\lambda) > 1$ hay soluciones estrictamente positivas (u^*, v^*) de (2.5).

$r(A_\lambda)$ se puede calcular en el subespacio $C_0(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) \text{ tal que } u|_{\partial\Omega} = 0\}$ ya que la evalúa $C(\bar{\Omega})$ dentro $C_0(\bar{\Omega})$. El conjunto k de funciones no negativos en $C_0(\bar{\Omega})$ es un cono cerrado en $C_0(\bar{\Omega})$ y siendo A_λ positivo, en terminología $A_\lambda(k) \subseteq k$, por el principio del máximo, A_λ evalúa elementos no negativos de k de $C_0(\bar{\Omega})$ los cuales son positivos en Ω . Entonces un elemento x en un cono C del espacio de Banach E se dice semiinterior de C si $A(x) > 0$ para cada $a \in C^* \setminus \{0\}$ donde $C^* = \{A \in E^* : A(x) \geq 0, \text{ en } C\}$.

Si (u, v) es solución de (2.5) estrictamente positivo entonces, de la primera ecuación (2.5) resulta

$$-\Delta u < u(a - bu)$$

como \bar{u} es la máxima solución se justifica $\bar{u} > u$ y $v(x) > 0$ en Ω la segunda ecuación implica el análisis de los siguientes resultados

2.3.2 Teorema condiciones necesarias para existencia de soluciones

i) Asumimos que $\bar{v} \equiv 0$ entonces (2.5) tiene solución estrictamente positiva si y solo si

a) $\bar{u} \neq 0$ (esto es $a > \lambda_1$) y

b) $r(-\Delta^{-1}(e + f\bar{u})I) > 1$.

ii) Asumimos que $\bar{v} \neq 0$ entonces (2.5) tiene solución estrictamente positiva si solo si

a) $\bar{u} \neq 0$ y

b) $r(-\Delta^{-1}(a - c\bar{v})I) > 1$.

Para el problema tratado en este estudio definimos el operador compacto en $C(\bar{\Omega})$,

$$L_{a,t} = (-\Delta + (mrd^{-1} + t)I)^{-1}(d^{-1}mu_a + t)I \quad \text{para todo } t > 0. \quad (2.13)$$

Luego

$$L_a = (-\Delta + mrd^{-1}I)^{-1}d^{-1}mu_aI$$

Luego escribimos $(-\Delta + \alpha I)^{-1}$, asumiendo condiciones de frontera de Dirichlet y usamos $r((-\Delta + \alpha I)^{-1})$ para denotar el radio espectral.

De manera similar de la segunda ecuación de (2.5) tenemos

$$-\Delta v < v(e + f\tilde{u}) \quad \text{con } \tilde{u} \neq 0,$$

y ahora se debe argumentar que $r(\Delta^{-1}(e + f\tilde{u})) > 1$ es condición necesaria

Un radio espectral mayor a 1 garantiza soluciones no negativas.

Asumimos que $\tilde{v} \neq 0$ para la segunda ecuación de (2.5) y tenemos

$$-\Delta v > v(e - gv), \quad (2.14)$$

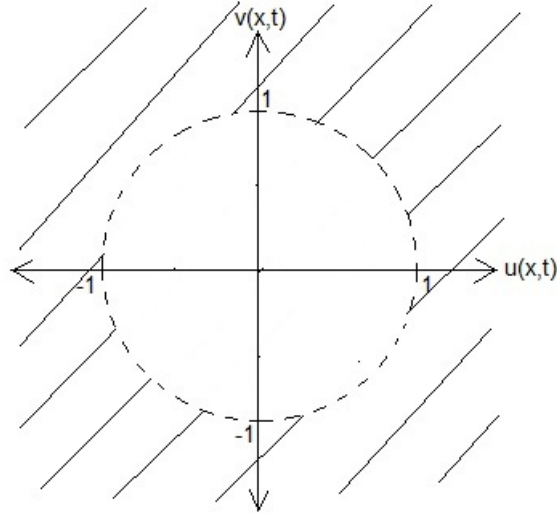


Figura 2.3: Interpretación gráfica de radio espectral mayor a 1, el cual garantiza soluciones no triviales

Se tiene que v es una supersolución cuando $u \equiv 0$, se deduce que $v \geq \tilde{v}$. Para la secuencia V_n obtenemos

$$-\Delta v_n + kv_n = v_{n-1}(e - gv_{n-1} + k) \quad (2.15)$$

k grande conduce a una solución no negativa \tilde{v} con $u \equiv 0$, bajo la condición $e > \lambda_1$ se puede asegurar que $\tilde{V} \neq 0$. Aplicando el producto escalar tenemos

$$v_{n-1}(e - gv_{n-1} + k) - (k + \lambda_1)v_n \geq v_n(e - gv_{n-1} + k) - (k + \lambda_1)v_n > 0$$

en Ω para n grande y $\tilde{v} = 0$, por singularidad $\tilde{v} = \bar{v}$. Por lo tanto ya que $v \geq \tilde{v}$, para la desigualdad (2.14) se tiene que $v \neq \bar{v}$ y por lo tanto $v > \bar{v}$, de manera similar se tiene para la primera ecuación

$$-\Delta u < u(a - c\bar{v}).$$

entonces se deduce que para $r(-\Delta^{-1}(a - c\bar{v})I) > 1$ es necesario $\tilde{v} \neq 0$ entonces,

2.3.3 Condiciones de suficiencia para la existencia de soluciones

La suficiencia está relacionado con los resultados de la teoría de grado con respecto al conjunto C de funciones no negativas en $E = C_0(\bar{\Omega}) \oplus C_0(\bar{\Omega})$. Considerando la primera ecuación de (2.5) que u tiene un máximo, $u(x) \leq ab^{-1}$ en Ω . Y de forma similar en la segunda ecuación se

encontra que $v(x) \leq g^{-1}(e + fab^{-1})$ en Ω . Se puede determinar que la suma de los índices de la solución en C es 1

Como $r(-\Delta^{-1}(e + f\tilde{u})I) > 1$, se observa que $(\tilde{u}, 0)$ es una solución aislado con índice cero.

Notemos que $(-\Delta^{-1})(e + f\tilde{u})I \geq (-\Delta^{-1})eI$ en sentido del operador positivo y por lo tanto

$$r((-\Delta^{-1})(e + f\tilde{u})I) \geq r((-\Delta^{-1})eI) > 1 \quad \text{si } e > \lambda_1$$

Similarmente si $\bar{v} \neq 0$, muestra condición que

$$r(-\Delta^{-1})(a + c\bar{v})I > 1 \quad \text{asegura que } (0, \bar{v}) \text{ tiene índice cero.}$$

Con la suposición que $a < \lambda_1$ se asegura que $r(A'(0, 0)) > 1$; por lo tanto siempre que la ecuación $X = A'(0, 0)x$ no tiene solución en C , $(0, 0)$ es una solución aislada en C con índice 0. Finalmente si todas estas soluciones, $(0, 0)$, $(\bar{u}, 0)$ y $(0, \bar{v})$ existen cuando $e \neq \lambda_1$. Como la suma de los índices de las soluciones es 1 en C , entonces debe existir otra solución.

Si removemos la condición que $e \neq \lambda_1$ y asumimos que $e = \lambda_1$, entonces $\bar{v} \equiv 0$, y remplazamos e por $e - \frac{1}{n}$ las condiciones necesarias para la existencia se mantienen, teniendo en cuenta que v es todavía cero y que el radio espectral de un operador lineal compacto cambia continuamente bajo pequeños perturbaciones, entonces se tiene una solución estrictamente positivo (u_n, v_n) , luego el límite de $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado en $C_0(\bar{\Omega}) \oplus (C_0\bar{\Omega})$ y debe converger a una solución (\bar{u}, \bar{v}) .

2.3.4 Existencia de soluciones aproximadas, (u_n, v_n) .

Si $(u_n, v_n) \rightarrow (0, 0)$ en E (más estrictamente una subsucesión) entonces la primera ecuación del sistema implica que $r(-\Delta^{-1}(a - bu_n - cv_n)I) = 1$ (porque u_n es una eigen-función positiva de $(-\Delta + kI)^{-1}(a - bu_n - cv_n + k)I$). Al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ y mediante el uso de la continuidad del radio espectral vemos que $r(-\Delta^{-1}a) = 1$ y esto no es posible.

Si $(u_n, v_n) \rightarrow (\bar{u}, 0)$ aplicamos un argumento similar se deduce que $r(-\Delta^{-1}(e + f\bar{u})) = 1$

Supongamos que remplazamos $0 - bu - cv$ por $M(u, v)$ y $e + fu - gv$ por $N(u, v)$ y asumimos que M, N son c^{-1} , $M'_1(u, v) < 0$, $M'_2(u, v) < 0$, $N'_2(u, v) < 0$ y $N'_1(u, v) < 0$ para $u, v > 0$, entonces $M(u, v) < 0$ si $u \geq u_0$, $v > 0$ y $N(u, v) < 0$ si $0 < u \leq u_0$ y v grande.

La condición que $r(-\Delta^{-1}(e + f\bar{u})I) > 1$ se remplaza por $r(-\Delta^{-1}N(\bar{u}, 0)I) > 1$ y las otras condiciones son modificados similarmente.

Podemos sustituir el supuesto $M'_g(u, v) < 0$ por $M(u, v) < M(0, v)$ y eliminamos la suposición que $M'_1(u, v) < 0$ siempre que \bar{u} sea la máxima solución no negativa de la primera ecuación

cuando $v \equiv 0$ (\bar{u} se obtiene una iteración adecuada a partir de $\tilde{u}(x) = u_0$ en Ω).

Veamos como se obtiene por la sucesión (u_n, v_n) cuyo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (\bar{u}, \bar{v}),$$

converge a la solución estrictamente positiva del sistema

Asumimos que (\bar{u}, \bar{v}) son soluciones estrictamente positiva del sistema,

de la primera ecuación del sistema (2.5) se tiene

$$-\Delta \tilde{u} < \tilde{u}(a - b\tilde{u}),$$

seguimos que $\tilde{u} < \bar{u}$. similarmente $\tilde{u} < \bar{v}$ donde \bar{u} y \bar{v} son las máximas soluciones no negativas

Nuevamente por la primera ecuación

$$-\Delta \tilde{u} > \tilde{u}(a - b\tilde{u} - c\tilde{v}),$$

y como \tilde{u} es una supersolución para la ecuación, entonces se tiene que

$$-\Delta u = u(a - bu - cv),$$

esto con las condiciones de frontera de Dirichlet. Debido a que $r(-\Delta^{-1}(a - c\bar{v})I) > 1$ tiene una única solución no negativa y no trivial $u_1 < \tilde{u}$. (\tilde{u} supersolución) como $\tilde{v}(x) > 0$ en Ω y $\tilde{u} > 1$, la segunda ecuación del sistema implica que

$$-\Delta \tilde{v} < \tilde{v}(e - fu_1),$$

sigue que $r(-\Delta^{-1}(e - fu_1)I) > 1$ lo cual justifica una solución estrictamente positiva ya que $\tilde{u} > u_1$. La segunda ecuación implica

$$-\Delta \tilde{v} < \tilde{v}(e - fu_1 - g\tilde{v}),$$

como \tilde{v} es una subsolución de la ecuación, obtenemos

$$-\Delta v < v(e - fu_1 - gv).$$

Luego $\tilde{v} < v_1$ donde v_1 es única solución no trivial no negativa. Por argumento similares $v_1 < \bar{v}$, tenemos

$$(-\Delta + kI)^{-1}(a + k - cv_1)I \geq (-\Delta + kI)^{-1}(a + k - c\bar{v})I.$$

Para k grande resulta el siguiente operador r lineal compacto,

$$r((-\Delta + kI)^{-1}(a + k - cv_1)I) \geq (-\Delta + kI)^{-1}(a + k - c\tilde{v})I > 1.$$

En resumen obtenemos que,

$$-\Delta u = u(a - bu - cv_1),$$

tiene una única solución no negativa y no trivial u_1

$$-\Delta u_1 = u_1(a - bu_1 - c\tilde{v}) < (a - bu_1 - cv_1)$$

Lo que es valido para u_2 con $u_1 < u_2$. Similarmente, \tilde{u} es supersolución y por lo tanto $u_2 < \tilde{u}$. luego

$$-\Delta \tilde{v} < \tilde{v}(e - fu_2),$$

como $r(-\Delta^{-1}(e - fu_2)I) > 1$, condición para solución estrictamente positiva.

Definimos v_2 como única solución no negativo no trivial de

$$-\Delta v = v(e - fu_2 - gv),$$

Ya que \tilde{v} es una subsolución y \tilde{v}_1 una supersolución, entonces v_2 satisface la solución $\tilde{v} < v_2 < v_1$.

Continuamos la inducción hasta obtener la solución u_n como única solución no negativa no trivial de

$$-\Delta u = u(a - bu - cv_{n-1}),$$

con $u_{n-1} \leq u_n \leq \tilde{u}$ y satisface la siguiente desigualdad,

$$r(-\Delta^{-1}(e - fu_n)I) > 1.$$

Ahora definimos v_n como única solución no negativa no trivial de

$$-\Delta v = v(e - fu_n - gv)$$

encontramos que $\tilde{v} \leq v_n < v_{n-1}$

Continuando con el proceso encontramos la secuencia $u_1 < u_2 < u_3 \dots < u_n \dots < \tilde{u}$ y $v_1 > v_2 \dots > u_n > \dots > \tilde{v}$ tal que $r(-\Delta^{-1}(e - fu_n)I) > 1$ para todo n es una condición necesaria para que la sucesión tenga solución estrictamente positiva.

Ahora la construcción de la sucesión (u_n, v_n) es independiente de la existencia de (\tilde{u}, \tilde{v}) .

La sucesión (u_n, v_n) se construye de tal forma que $0 < u_n < u_{n+1} < \bar{u}$ y $\bar{v} > v_n > v_{n+1} > 0$ para todo n por lo tanto $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es cerrado en $C(\bar{\Omega}) \oplus C(\bar{\Omega})$ y en general la sucesión (u_n, v_n) es cerrada en $W^{2,p}(\Omega)$ para todo P (espacios de Sobolev, clase 2 funciones derivables de orden 2 y norma elevada a la P para integrarse)

Encontramos que $u_n \rightarrow \bar{u}$ y $v_n \rightarrow \bar{v}$ en $C(\bar{\Omega})$ de manera fuerte y en $W^{2,p}(\Omega)$ de manera debil, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (\tilde{u}, \tilde{v})$

2.4 Estudio de las bifurcaciones del problema

Consideremos el siguiente sistema sobre el estado de reposo,

$$\begin{cases} -\Delta u = u(a - bu - cv), \\ -\Delta v = d^{-1}v(e - fu - gv), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $d > 0$ y Ω, a, b, c, e, f, g y las condiciones de frontera son como el sistema inicial, es decir e, f, g son remplazadas por $d^{-1}e, d^{-1}f, d^{-1}g$ respectivamente. Estudiamos el comportamiento del límite cuando $d \rightarrow 0$. Con iguales argumentos, $\tilde{u}(x) \leq d^{-1}a$ y $\tilde{v}(x) \leq d^{-1}e$ para cualquier solución no negativa (\tilde{u}, \tilde{v}) de (2.5).

Consideremos en el límite de la siguiente ecuación

$$-\Delta u = uk(u), \quad (2.17)$$

con las condiciones de frontera de Dirichlet, la cual se obtiene mediante las siguientes sustituciones:

i)

$$-\Delta v = 0 \implies d^{-1}v(e - fu - gv) = 0$$

ii) Luego

$$\begin{aligned} e - fu - gv &= 0, \\ e - fu &= gv, \\ (e - fu)g^{-1} &= v, \end{aligned}$$

iii) Sustituimos en la primera ecuación del sistema entendiendo que

$$-\Delta u = u(a - bu - cg^{-1}(e - fu)),$$

de lo cual se deduce que

$$k(y) = a - by - cg^{-1}(e - fy)^+ = \begin{cases} (a - cg^{-1}e) - (b - cg^{-1}f)y & \text{si } y \leq ef^{-1} \\ a - by & \text{si } y \geq ef^{-1}, \end{cases} \quad (2.18)$$

lo que conduce a

$$h(y) = yk(y). \quad (2.19)$$

Observemos que (u_n, v_n) son soluciones estrictamente positivos de (2.16) para $d = d_n$, si $d_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y si $p < \infty$, entonces $\{(u_n, v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es precompacto en $C_0(\bar{\Omega}) \oplus L^p(\Omega)$ y el conjunto de puntos límites, cuando $n \rightarrow \infty$ están contenidos en

$$\{(w, g^{-1}(e - fw)^+ : w \text{ es solución no negativa de (2.16)} \}.$$

Si $a - ceg^{-1} \neq \lambda_1$ para cualquier punto límite se tiene que $w \neq 0$, observamos que si $(u_n, v_n) \rightarrow (0, g^{-1}e)$ en $C_0(\bar{\Omega}) \oplus L^p(\Omega)$, entonces por la primera ecuación de (2.16), $r(-\Delta^{-1}(a - bu_n - cv_n)I) = 1$, por lo tanto por la continuidad del radio espectral, entonces el límite de $r(-\Delta^{-1}(a - cg^{-1}e)I) = 1$ y esto contradice la suposición que $a - cg^{-1}e \neq \lambda_1$ v_n solamente converge a $g^{-1}e$ en $L^p(\Omega)$ para todo $O < \infty$. $-\Delta^{-1}$ es un mapeo continuo de $L^p(\Omega)$ en $C(\bar{\Omega})$ si $P > \frac{1}{2}n$, esto prueba que $w \neq 0$ si $a - cg^{-1}e \neq \lambda_1$.

Observemos que $v_n = 0$ en $\partial\Omega$ muestra que $g^{-1}(e - fw) = g^{-1}e > 0$ en $\partial\Omega$

A partir de estas soluciones se obtiene la convergencia uniforme en subconjuntos compactos en Ω , específicamente una convergencia uniforme superior, esto es $v_n \leq g^{-1} \cdot (e - fW)^+ + \varepsilon$ para n grande.

Es importante el estudio de soluciones estrictamente positivos para d pequeña, teniendo en cuenta que $k(y) < 0$ si $y > b^{-1}a$ y por lo tanto cualquier solución no negativo u de (2.5) satisface que $u(x) \leq b^{-1}a$ en Ω y no presenta solución no trivial y no negativa si $k(0) \leq \lambda_1$ y presenta única solución no trivial no negativa si $k(0) > \lambda_1$.

Multiplicamos cada uno de los coeficientes a, b, c, e, f, g por τ , en (2.17) nos permite obtener,

$$-\Delta u = \tau h(u) \quad (2.20)$$

en Ω , con condiciones de frontera de Dirichlet; resultando los dos casos siguientes:

- a) Primero suponemos que $k(0) > 0$, por el teorema estandar de bifurcaciones, una rama τ de soluciones positivos de (2.16) se ramifican en $(0, \tau^*)$ donde $\tau^* = \lambda_1(k(0))^{-1}$ y \tilde{c} es limitada

en $C_0(\Omega) \times [0, x)$, \tilde{C} debe ser ilimitada por τ . Como k es mayor para Y pequeño, esta rama se mueve hacia la izquierda (τ disminuye en un primer momento) por lo tanto $\tau_1 \equiv \inf \{ \tau > 0 : -\Delta u = \tau h(u) \text{ tiene solución no negativa no trivial} \}$, entonces $\tau_1 < \tau^*$, lo que prueba que $\tau_1 > 0$. Por superposición probamos que (2.16) tiene al menos 2 soluciones no negativas no triviales para $\tau \in (\tau_1, \tau^*)$ y al menos una de las soluciones para $\tau \geq \tau^*$.

La existencia de la segunda soluciones se prueba utilizando la teoría de grado en el cono. Este método tiene la ventaja de aplicarse si Δ es remplazado por un operador no autoadjunto o si Ω no tiene un límite suave. Si $n = 1$ se puede obtener un resultado mayor, existe exactamente una solución no negativa y no trivial si $\tau = \tau_1$ o $\tau \geq \tau_*$ mientras hay exactamente 2 para $\tau_1 < \tau < \tau^*$. Lo cual se ilustra en la figura (2,4)

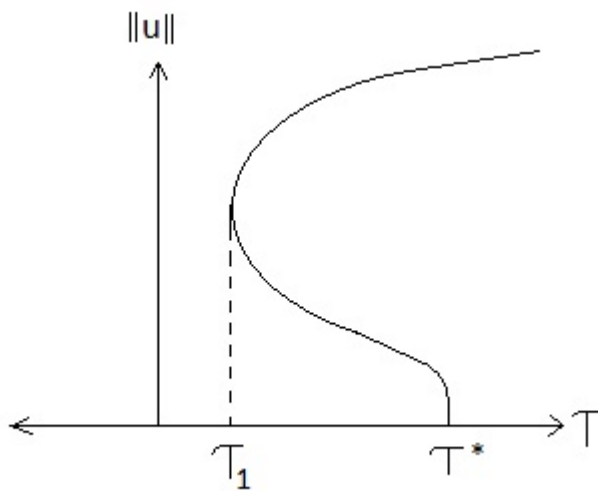


Figura 2.4: Si $\tau > \tau^*$ o $\tau = \tau_1$ existen soluciones y si $\tau_1 < \tau < \tau^*$ existen soluciones

Además, todas estas soluciones no trivial, son no degeneradas (es decir la forma de linealización es invertible) para $\tau_1 < \tau$.

- b) Consideramos el caso $k(0) \leq 0$ (n más general). Si $k(y) \leq 0$ para todo $y > 0$, esto es, $a \leq be f^{-1}$, existen soluciones no triviales y no negativas para cualquier $\tau > 0$.

Si $a > be f^{-1}$, $\int_0^{ab^{-1}} h(y) dy \leq 0$ y Ω es forma ramificada, por la identidad de Pokozhaev's implica que existe una solución no trivial no negativa.

De otro lado si $a > be f^{-1}$ y $\int_0^{ab^{-1}} h(y) dy > 0$, es posible aplicar el teorema de Hess para deducir que existe soluciones no triviales no negativas para τ suficientemente grande.

En particular, si Ω se ramifica implica que existe $\tau_1 > 0$, luego resulta uno de los siguientes tres casos

- i) No hay soluciones no negativas y no trivial para $\tau < \tau_1$
- ii) Al menos una solución si $\tau = \tau_1$, y
- iii) Al menos dos soluciones para $\tau > \tau_1$

Las soluciones de (2.16) se esbozan en la siguiente figura 2.5

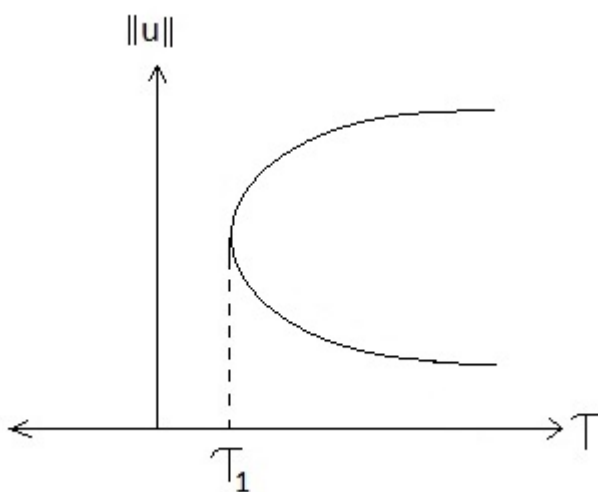


Figura 2.5: Si $\tau = \tau_1$, existe solución y si $\tau > \tau_1$ existe solución

Observemos que si $-\Delta u = uk(u)$ no tiene soluciones no trivial no negativas y si $a - cg^{-1}e \neq \lambda_1$, entonces el sistema inicial (2.16) no tiene soluciones estrictamente positiva para d pequeña y positiva.

2.5 Modelo Lotka-Volterra caso no homogéneo

Las relaciones espaciales del modelo homogéneo, (2.3) con condiciones de contorno de Dirichlet, pueden ser modificados de manera que se aproximen más a la realidad y así obtener el siguiente modelo,

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(d_1(x) \nabla u) = \lambda a_1(x)u - a(x)u^2 - b(x)uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - \operatorname{div}(d_2(x) \nabla v) = \mu a_2(x)v - d(x)v^2 + c(x)uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde λ, μ son parámetros y $d_1(x), d_2(x), a_1(x), a_2(x), a(x), b(x), c(x), d(x)$, son funciones continuas no negativas en $\bar{\Omega}$

Si todas las funciones coeficientes son estrictamente positivas en Ω el modelo (2.21) se denomina modelo clásico de Depredador-Presa y se comporta de forma similar al caso homogéneo (2.3). Para determinar la influencia de la heterogeneidad del medio ambiente consideramos el caso límite donde algunas funciones coeficientes de (2.21) se anulan parcialmente en Ω o lo que se denominará una degeneración que produce cambios drásticos en el modelo clásico.

Examinamos los efectos del ambiente espacial heterogéneo en el conjunto de soluciones de estado estacionario de (2.21) de manera específica la desaparición parcial de $a(x)$ implica que en ausencia de v , el crecimiento de u se rige por una ley logística degenerada o más precisamente una mezcla de logística y malthusiana sobre Ω .

En el siguiente sistema suponemos que todas las funciones coeficiente son constantes y la única variable es $a(x)$ que actúa sobre u^2 implicando que el ambiente afecta directamente en la confrontación entre la misma especie.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)u^2 - buv, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = \mu v - v^2 + cuv, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde b, c son constantes positivas. Suponemos que $a(x) \equiv 0$ en algún dominio cerrado $\bar{\Omega}_0$ satisface que $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ y $a(x) > 0$ sobre $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0$.

Se debe mostrar la existencia de un valor crítico $\lambda^* > 0$ tal que (2.22) se comporta como un caso homogéneo $a(x) \equiv 1$ cuando $\lambda < \lambda^*$. Los cambios fundamentales ocurren a partir de $\lambda \geq \lambda^*$. Ahora fijamos b, c y consideramos λ y μ como parámetros variables.

Si $v \equiv 0$ para el caso de u satisface la denominada ecuación logística degenerada

$$-\Delta u = \lambda u - a(x)u^2, \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (2.23)$$

de igual forma se satisface para la ecuación (2) de 2.22

Si $a(x)$ es idénticamente cero (2.23) se reduce al modelo malthusiano, cuando $a(x)$ es estrictamente positiva, es un modelo logístico para la simple especie u y si $a(x)$ desaparece en un

subdominio no trivial Ω_0 de Ω y es positivo en otro subdominio de Ω , el comportamiento está dado por un modelo mixto de logístico y mathusiano que se denomina logística degenerada. Las recientes investigaciones en especial Yihong Du, muestran que la dinámica de (2.23) presenta cambios significativos. En particular si λ_1 es un valor propio del sistema

$$-\Delta u = \lambda u, u|_{\partial\Omega} = 0,$$

Se tiene que:

- Si $\lambda \leq \lambda_1$ entonces para cualquier valor inicial no trivial $u(\cdot, 0)$, la solución $u(t, x)$ de (2.23) converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$.
- Si $\lambda \geq \lambda_1$ entonces cualquier solución converge a un único estado estacionario.

En particular la población de u tiene un límite superior en Ω/Ω_0 pero puede tender a infinito en Ω_0 cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$, además el atractor global de (2.23) es determinado por dos clases de soluciones para estados estacionarios; infinitas funciones sobre Ω_0 y finitas funciones sobre el resto de Ω , dicho comportamiento lo rige el problema límite de blow-up.

La explicación biológica a (2.21) pueden ser descritas por una situación hipotética con un ambiente Ω en donde existe una especie u cuya crecimiento lo rige una ecuación logística degenerada que podría estar fuera del control en términos de una población blow-up en la región Ω_0 debido a la degenerancia y la ausencia del depredador o competidor v .

$$\begin{cases} u_t(x, t) - d_1 \Delta u(x, t) = \lambda u - [a(x) + \varepsilon]u^2 - buv \\ v_t(x, t) - d_2 \Delta v(x, t) = \mu v - v^2 - cuv \end{cases} \quad (2.24)$$

Es una perturbación del modelo degenerado (2.22) . Para cualquier número finito de subdominios cerrados disjuntos del dominio Ω , en especial Ω_0 , se puede probar que si $a(x)$ es idénticamente cero en Ω_0 y positiva en el resto de Ω , para cualquier λ, μ y $\varepsilon > 0$, el problema perturbado tiene una solución positiva estable $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ con patron de la razón $(u_\varepsilon/v_\varepsilon)$ sobre Ω_0 que es mucho más grane que en el resto de Ω

como en el caso homogéneo se probó que tiene la solución trivial no negativa $u \equiv 0$ cuando $\lambda \notin (\lambda_1^D(\Omega), \lambda_1^D(\Omega_0))$ y tiene u_λ única solución positiva cuando λ pertenece a este intervalo abierto. Se observa que $u_\lambda \rightarrow 0$ en $L^\infty(\Omega)$ cuando $\lambda \rightarrow (\lambda_1^D(\Omega))^+$. Por otra parte, cuando $\lambda \rightarrow (\lambda_1^D(\Omega))^-$

$$\begin{aligned} u_\lambda &\rightarrow \infty \text{ uniformemente en } \bar{\Omega}_0 \\ u_\lambda &\rightarrow U_{\lambda_1^D(\Omega_0)} \text{ Localmente uniforme en } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0. \end{aligned}$$

donde U_λ denota la solución positiva mínima para los límites del problema de blow-up siguiente

$$-\Delta U = \lambda U - a(x)U^2, \quad x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0; \quad U|_{\partial\Omega} = 0, \quad U|_{\partial\Omega_0} = \infty \quad (2.25)$$

Aquí $U|_{\partial\Omega_0} = \infty$ significa $\lim_{d(x, \partial\Omega_0) \rightarrow 0} U(x) = \infty$. (2.22) tiene una mínima y una máxima solución positiva para cada $x \in (-\infty, \infty)$.

En resumen para cada $\lambda \in (\lambda_1^D(\Omega), \lambda_1^D(\Omega_0))$ tiene una única solución semitrivial de la forma $(u, 0)$ con $u > 0$, a saber, $(u_\lambda, 0)$; no hay tal solución semitrivial para otros valores λ . Similarmenete al caso homogéneo de la sección (2.3) tiene una única solución semitrivial $(0, \theta_u)$ de la forma $(0, v)$ si $\mu > \lambda_1^D(\Omega)$ y sin otra solución semitrivial para otros valores μ . Desde luego existe la solución obvia, triviales $(u, v) = (0, 0)$.

Para continuar con el análisis es importante tener en cuenta estos resultados, en [7] se realiza su prueba detallada, y es importante porque permite vincular las dos especies, despues de analizar por separado aplicando el principio de comparación.

Teorema 13 *Dada una constante M positiva arbitraria podemos encontrar otro constante C positiva, dependiendo sólo de M y $a(x), b, c, \Omega$ en (2.22), de modo que si (u, v) es una solución positiva con $|\lambda| + |\mu| \leq M$, entonces*

$$\|u\|_\infty + \|v\|_\infty \leq C$$

Aquí $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$

Lema 2 *Supongamos $\{u_n\} \subset C^2(\bar{\Omega})$ satisfice*

$$-\Delta u_n \leq \lambda u_n, \quad u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_n \geq 0, \quad \|u_n\|_\infty = 1,$$

donde λ es una constante positiva. Entonces existe $u_\infty \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ talque la subsecuencia $u_n \rightarrow u_\infty$, débilmente en $H_0^1(\Omega)$, fuertemente en $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$ y $\|u_\infty\|_\infty = 1$.

Para el estudio de soluciones positivas de (2.22), hacemos uso de los principios de comparación y adaptamos el enfoque utilizado por la bifurcación Blat y Brown [1] fijando λ y utilizando μ como parámetro de bifurcación. consideramos los casos siguientes:

(i) $\lambda_1^D(\Omega) < \lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$

(ii) $\lambda \geq \lambda_1^D(\Omega_0)$

Prueba de i) se puede analizar como el modelo (2.3), se tiene una solución semitrivial de la forma $(u, 0)$. Si (u, v) es una solución positiva de (2.22), suponemos que \bar{u} satisface $\bar{u} : \Omega \setminus \Omega_0 \rightarrow L^\alpha(\Omega)$ y

$$-\Delta \bar{u} \leq \lambda \bar{u} - a(x) \bar{u}^2, \quad \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Decimos que \underline{u} es una super solución. Si \underline{u} satisface $\underline{u} : \Omega \times \Omega \rightarrow L^\alpha(\Omega)$ y

$$-\Delta \underline{u} \leq \lambda \underline{u} - a(x) \underline{u}^2, \quad \underline{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Por principio de comparación se comprueba que

$$0 < u \leq u_\lambda, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.26)$$

Similarmente v se procede de forma similar y se obtiene que

$$-\Delta v > uv - v^2, \quad v|_{\partial\Omega} = 0,$$

lo cual implica que

$$v \geq \theta_\lambda, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.27)$$

donde se ha utilizado la convención de que $\theta_\mu \equiv 0$ cuando $\mu \leq \lambda_1^D(\Omega)$ siguiendo con el principio de comparación para v se obtiene

$$\mu = \lambda_1^D(v - cu) \equiv \lambda_1^D(v - cu, \Omega).$$

Por lo tanto, de (2.25) y la propiedad de monotonicidad de $\lambda_1^D(\phi)$, se deduce que

$$\mu > \lambda_1^D(-cu\lambda), \quad (2.28)$$

Por la ecuación para u (2.24), deducimos que

$$\lambda = \lambda_1^D(au + bv) > \lambda_1^D(bv) \geq \lambda_1^D(b\theta_\mu),$$

y de esta forma se obtiene el resultado

$$\lambda > \lambda_1^D(b\theta_\mu). \quad (2.29)$$

En resumen se tiene, el siguiente teorema ilustrado y aplicado de manera similar en la sección (2.3)

Teorema 14 *En el caso de que $\lambda_1^D(\Omega) < \lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$ sea una condición necesaria para que (2.22) posea una solución positiva es válida también para que (2.27) y (2.28) también la mantenga.*

En el (μ, u, v) espacio $X := R \times C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$, Tenemos dos curvas solución semitrivial

$$\begin{cases} \Gamma_u := \{(\mu, u_\lambda, 0) : \mu \in (-\infty, \infty)\} \\ \Gamma_v := \{(\mu, 0, \theta_0) : \lambda_1^D < \mu < \infty\}. \end{cases}$$

Un análisis de bifurcación local a lo largo Γ_u muestra que a partir de $(\lambda_1^D(-cu_\lambda), u_\lambda, 0)$ bifurca una curva suave de soluciones positivas $\Gamma' = \{(\mu, u, v)\}$. Una bifurcación global, junto con una aplicación del principio del máximo, muestra que Γ' está contenida en una rama global (es decir, conjunto conectado) de soluciones positivas $\Gamma = \{(\mu, u, v)\}$ que son o no acotados o se une la curva de semitrivial Γ_v exactamente en $(\mu_0, 0, \theta_{\mu_0})$, donde $\mu_1 > \lambda_1^D(\Omega)$ se determina de forma única por

$$\lambda = \lambda_1^D(b\theta_{\mu_0}) \quad (2.30)$$

Se sigue de (2.28) que $\mu < \mu_0$ siempre que $(\mu, u, v) \in \Gamma$. Por lo tanto, nos encontramos con que $(\mu, u, v) \in \Gamma$ implica

$$\lambda_1^D(-cu_\lambda) < \mu < \mu_0 \quad (2.31)$$

A partir de este resultado, y aplicando el teorema 13, concluimos que Γ está delimitada en el espacio $R \times L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. Por la teoría de L^p estándar para los operadores elípticos, concluimos que Γ es también delimitada en X , por lo tanto Γ se deben unir a Γ_v . Un análisis de bifurcación local cerca $(\mu_0, 0, \theta_{\mu_0})$ muestra que cerca de este punto, Γ consiste en una curva suave. (Ver figura 2.6)

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 15 *Cuando $\lambda_1^D(\Omega) < \lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$ hay un conjunto limitado de soluciones positivas conectadas $\Gamma = \{(\mu, u, v)\}$ en el espacio X que une las soluciones semitrivial ramas Γ_u y Γ_v al $\lambda_1^D(-cu_\lambda), u_\lambda, 0$ y $(\mu_0, 0, \theta_{\mu_0})$, respectivamente; Por otra parte, cerca de estos dos puntos, Γ consta de curvas suaves. (Ver Figura 2.6)*

$\Gamma_u = \{(\theta_\lambda, 0) : \mu \in R\}$; $\Gamma_v = \{(0, \theta_\mu) : \mu \geq 0\}$. La rama Γ conecta Γ_u y Γ_v consiste en estados de convivencia. (Izquierda): $\lambda_1^D(\Omega) < \lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$; (A la derecha): $\lambda \geq \lambda_1^D(\Omega_0)$.

Claramente, (2.30) es equivalente a (2.27) y (2.28) en combinación.

Corolario 1 *Cuando $\lambda_1^D(\Omega) < \lambda < \lambda_1^D(\Omega_0)$, (2.22) tiene una solución positiva si y sólo si (2.30) se cumple.*

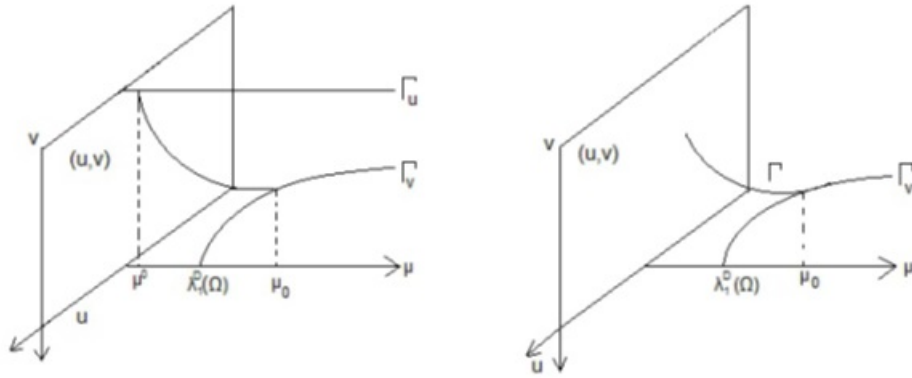


Figura 2.6: diagramas de bifurcación de las soluciones de estado estacionario positivos de (2.20) .

ii) Consideremos ahora el segundo caso, donde $\lambda \geq \lambda_1^D(\Omega_0)$. Una diferencia fundamental con el primer caso es que ahora ya no tenemos una solución semitrivial de la forma $(u, 0)$. Sin embargo, la curva semitrivial solución Γ_v no presenta cambios. De nuevo, un análisis de bifurcación local muestra que una curva suave de soluciones positivas $\Gamma' = \{(\mu, u, v)\}$ se bifurca a partir de $(\mu_0, 0, \theta_{\mu_0})$ donde μ_0 es determinado por (2.29) .Un análisis de bifurcación global, junto con una aplicación del principio del máximo, muestra que Γ' está contenido en una rama global de soluciones positivas Γ sin límites en X o se une a una solución semitrivial de la forma $(u, 0)$. Ya sabemos que no hay una solución semitrivial de la forma $(u, 0)$. Por lo tanto, Γ debe ser limitado.

Los argumentos que conducen a (2.28) todavía se aplica para nuestra situación actual. Por lo tanto $(\mu < \mu_0)$ siempre que (2.22) tenga solución positiva. Ahora aplicamos el **Teorema 13** para concluir que

$$proj_{\mu}\Gamma = (-\infty, \mu_0). \quad (2.32)$$

Resumiendo la discusión anterior, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 16 *Cuando $\lambda \geq \lambda_1^D(\Omega_0)$, (2.22) tiene una solución positiva si y sólo si $\mu < \mu_0$. Por otra parte, hay un conjunto de soluciones conectadas sin límites positivos $\Gamma = \{(\mu, u, v)\}$ en X , que se une a la rama solución semitrivial Γ_v al $(\mu_0, 0, \theta_{\mu_0})$ y satisface (2.31). (Véase la figura 2.6)*

El hecho de que (2.22) tenga una solución positiva para μ arbitrariamente grande y negativa es notablemente diferente al caso clásico. Biológicamente, esto implica que las especies de presa pueden contribuir a que la especie depredadora tenga tasa negativa arbitraria. Esto es debido al hecho de que la población de la presa, crecerían en la región Ω_0 en ausencia del depredador

y por lo tanto se podría pensar Ω_0 como una región donde la comida es abundante para el depredador. Por otro lado, nuestro resultado anterior indica que el blow-up de la población presa puede evitarse mediante la introducción de un depredador con la tasa de crecimiento arbitrario.

Ahora consideramos el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (2.22) como $\mu \rightarrow -\infty$. Con este fin, consideramos una secuencia decreciente para μ_n que converge cuando $\mu \rightarrow -\infty$, y (u_n, v_n) es una solución positiva arbitraria de (2.22) con $\mu = \mu_n$. Finalmente se ilustran a manera de conclusión los resultados en el siguiente teorema

Teorema 17 *Sea (μ_n, u_n, v_n) , las siguientes conclusiones son válidas:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_\infty}{|\mu_n|} = \frac{1}{d}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|v_n\|_\infty}{|\mu_n|} = 0$;
- (ii) $\frac{u_n}{\mu_n} \rightarrow 0$ y $v_n \rightarrow 0$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0$;
- (iii) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_{L^1(\Omega)}}{|\mu_n|} > 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^1(\Omega)} < \infty$, y cuando $\lambda > \lambda_1^D(\Omega_0)$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^1(\Omega)} > 0$;
- (iv) $\frac{u_n}{\|u_n\|_\infty} \rightarrow \hat{u}$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, v_n débil * converge en $C(\Omega)^*$ para $(\frac{\lambda}{c})\chi_{\{\hat{u}=1\}}$. donde $\hat{u} = 0$ en $\frac{\Omega}{\Omega_0}$ y $\hat{u}|_{\Omega_0}$ es la única solución positiva

$$-\Delta u = \lambda \chi_{\{u < 1\}} u, \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \|u\|_\infty = 1. \quad (2.33)$$

Capítulo 3

ATRACTORES GLOBALES

En este capítulo se tendrá en cuenta la evolución espacio-temporal en las soluciones, para el cual estudiamos el atractor global del sistema (2.3) - (2.4).

Definición 8 (semigrupo de operadores) Sea Ω un espacio de Banach y $L^2(\Omega)$ una colección de operadores lineales acotados en Ω , $T(t)$ se dice semigrupo de operadores si $T(t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ y

i) $T(0) = I$ (operador identidad)

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$; $s, t \in \mathbb{R}^+$

Definición 9 (semigrupo analítico) Un semigrupo $T(t) : S_{a,\varphi} \cup \{0\} \rightarrow L(\Omega)$ se dice semigrupo analítico si:

i) $T(t)w \rightarrow w$ cuando $t \rightarrow 0$, $\forall w \in \Omega$

ii) $t \rightarrow T(t)w$ es analítica, $\forall w \in \Omega$

Teorema 18 (operador sectorial) Si A es un operador sectorial entonces $-A$ genera un semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$

Definición 10 Si A es sectorial, definida en la sección 1.3 de este trabajo, en un espacio de Banach Ω , se define para cada $\alpha \geq 0$

$$\Omega^\alpha = D(A^\alpha)$$

$\| \cdot \|_\alpha = \| A^\alpha \cdot \|$, $x \in \Omega^\alpha$ y $(\Omega^\alpha, \| \cdot \|_\alpha)$ es un espacio de Banach

3.1 Atractor global en una ecuación logística

Dado que las secciones (2.7) y (2.14) corresponden a modelos logísticos estudiamos su atractor global

Partimos de la ecuación Lotka-Volterra defusiva homogénea

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = \lambda u = u^2 - buv & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - d_2 \Delta v = \mu v = v^2 - cuv & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

y se considera los efectos del ambiente espacial heterogéneo tenemos

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = \lambda a_1(x)u - u^2 \\ v_t - d_2 \Delta v = \mu a_2(x)v - v^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u(t, x) = u_0; \quad v(t, x) = v_0 \quad u(0, x) = u_0; \quad v(0, x) = v_0 \quad B_1 u = B_2 v = 0 \\ x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \end{aligned}$$

donde (u, v) son las densidades poblacionales d_1, d_2 positivos corresponden a las tasas de difusión poblacionales, los terminos $.u^2$ y $-v^2$ en cada ecuaciones corresponde al hecho de que la población se autolimita y las funciones $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son las tasas de natalidad. No consideramos la interacciones entre las dos especies.

Se considera la primera ecuación del sistema y sean $A = d_1 \Delta u$, $L^2(\Omega)$ el espacio fase y $g \in L^\infty(\Omega)$.

$A : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\omega)$ es un operador sectorial, entonces $-A = d_1 \Delta u$ genera un semigrupo analítico en $L^2(\Omega)$, entonces podemos definir las potencias fraccionarias X^α con $0 < \alpha < 1$, donde $X^0 = L^2$ y $X^1 = D(A)$. $X^\alpha = D(A^\alpha)$ es un espacio de Hilbert con norma $\| u \|_\alpha = \| A^\alpha u \|_x$.

La ecuación de evaluación asociada a la primera ecuación del sistema (3.1) es:

$$\begin{cases} u' + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $F : X^\alpha \longrightarrow X$ es dada por $F(u)(x) = g(x)u(x) - u^2(x)$

La ecuación uno del sistema (3.1) define un sistema dinámico en $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$. Siendo $H_0^1(\Omega)$ subgrupo de Sobolev que es un subespacio de $L^2(\Omega)$.

1) Si $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ F es Lipschitz continua en subconjuntos limitados de X^α pues

$$\|F(u) - F(v)\|_2 = \|g(x)u - u^2 - g(x)v - v^2\|_2 \leq c(\|g\|_\infty + \|u + v\|_2)\|u - v\|_\alpha$$

Los siguientes resultados se deben a Cholewa y Dlotko

2) Sea $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ y $T(t)$ el semiflujo local generado por A^α , donde A tiene resolvente compacto. Existe un atractor global restringido para $T(t)$ en X^∞ si tenemos

$$\exists c > 0 \forall u_0 \in V, \forall t \in (0, t_{\max}(u_0)) \quad \|T(t)\| \leq c \quad (3.3)$$

y

$$\exists \theta \in [0, 1) \forall u_0 \in V, \forall t \in (0, t_{\max}(u_0)) \quad (3.4)$$

$$\|F(T(t)u_0)\| \leq g(\|T(t)u_0\|_v)(1 + \|T(t)u_0\|_{X^\alpha}^\theta)$$

donde $V \subseteq X^\alpha$ es cerrado, no vacío y positivamente invariante, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es no decreciente.

Finalmente relacionamos el concepto de atractor global para el modelo difusivo en general

3.2 Existencia de atractor global

De (3.2) tenemos que

$$\|F(u)\|_2 = \|g(x)u - u^2\|_2 \leq c_1\|g\|_\infty\|u\|_2 + c_2\|u\|_2^2 \leq c_1\|g\|_\infty\|u\|_{1/2} + c_2\|u\|_{1/2}^{3/2}\|u\|_{1/2}^{1/2}, \quad (3.5)$$

con $\theta = \frac{1}{2}$, $Y = X^{1/2}$ y $D(A) \subseteq Y$

Ahora necesitamos una estimación en $X^{\frac{1}{2}}$, norma del semiflujo aplicado a u_0 $T(t)u_0$ esto es:

$$\|T(t)u_0\| \leq R \quad u_0 \in B_{X^{1/2}}(0, \eta).$$

Por la forma de variación de parámetros, se obtiene la solución mild de (3.4)

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(u(s))ds, \quad (3.6)$$

donde $T(t)$ es semigrupo de λ_1 el primer autovalor de $-\Delta u$, entonces aplicando la $X^{\frac{1}{2}}$ norma a (3.6) y usando el teorema 18 de Dan Henry tenemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1/2} &\leq \|e^{-At}u_0\|_{1/2} + \int_0^t \|e^{-(t-s)A}F(u(s))\| ds, \\
&\leq e^{-\delta\lambda_1 t}\|u_0\|_{1/2} + c \int_0^t (t-s)^{1/2} e^{-\delta\lambda_1(t-s)} \|F(u(s))\|_2 ds.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ahora, usando la desigualdad de Young tenemos:

$$\|F(u)\| \leq \frac{M^2}{2\varepsilon} \|g\|_\infty + m(2\varepsilon + M) \|u\|_{1/2}^2$$

Así, de (3.6),

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{1/2}^2 \|u_0\|_{1/2} + c \frac{M^2}{2\varepsilon} \|g\|_\infty + cm(2\varepsilon + M) \|u\|_{1/2}^2 \int_0^t w^{-1/2} e^{-\delta\lambda_1 w} ds \leq \\
&\|u\|_{1/2} + c \frac{M^2}{2\varepsilon} \|g\|_\infty + cm(2\varepsilon + M) \|u\|_{1/2}^2 (\delta\lambda_1)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

llamando $r = \|u(t)\|_{1/2}$ tenemos:

$$r \leq Ar^2 + \|u_0\|_{1/2} + B. \tag{3.8}$$

El discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser positiva, así

$$\|u_0\|_{1/2} < \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{4cm(2\varepsilon + M)\Gamma(1/2)} - \frac{-cM^2\|g\|_\infty}{2\varepsilon}$$

Esta cantidad es positiva si la norma de g cumple la siguiente condición

$$\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon(\delta\lambda_1)^{1/2}}{2c^2mM^2(2\varepsilon + M)\Gamma(1/2)}$$

entonces, el radio η es dado por

$$\eta = \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{4cm(2\varepsilon + M)\Gamma(1/2)} - \frac{-cM^2\|g\|_\infty}{2\varepsilon}$$

Por lo tanto, si u_0 es tomado en la bola $B_{X^{1/2}}(0, \eta)$ y por la continuidad de $T(t)u_0$ en $X^{1/2}$ la norma $\|T(t)u_0\|_{1/2}$ nunca es mayor que la menor raíz de la ecuación dada es (3.7). Así

$$\|T(t)u_0\|_{1/2} \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4A(\|u_0\|_{1/2} + B)}}{2A} \leq \frac{(\delta\lambda_1)^{1/2}}{2cm(2\varepsilon + M)\Gamma(1/2)} = R$$

Así, por el resultado de Cholewa y Dlotko, existe un atractor global restringido A en $X^{1/2}$.

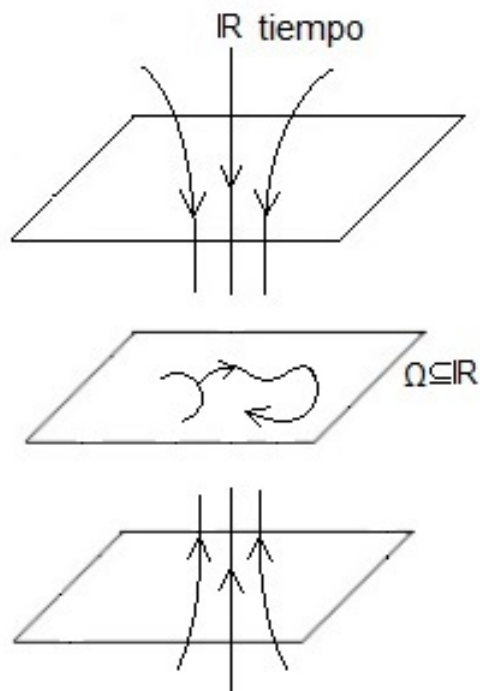


Figura 3.1: El operador $A + \Phi \in L^2(\Omega)$ contractivo hace que el flujo de funciones convergan a la solución, es decir el atractor

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Se consideran como resultados importantes de este trabajo la identificación del problema “encontrar la curva de bifurcación para la supervivencia de las dos especies en el modelo Lotka - Volterra difusivo”, con los siguientes aspectos relevantes:

- A) El sistema (2.5) que representa el modelo difusivo de Lotka - Volterra, caso homogéneo, bajo las condiciones de frontera de Dirichlet en estados estacionarios puede ser representado mediante la ecuación logística difusiva (2.6)

$$-\Delta w = \lambda w - w^2, x \in \Omega, x \in \partial\Omega \text{ y } w = 0 \subseteq \Omega,$$

Y el sistema (2.8) que representa el modelo caso no homogéneo, legalmente con condiciones de frontera de Dirichlet en estados estacionarios, queda representada mediante la ecuación logística difusiva degenerada (2,9)

$$-\Delta w = \lambda w - a(x)w^2, x \in \Omega, x \in \partial\Omega \text{ y } w = 0 \subseteq \Omega,$$

cuyo análisis asociado con los valores propios del funcional del sistema de estado estacionario representado en la ecuación (2.10) determinan las condiciones bajo las cuales se obtiene el intervalo para la existencia de soluciones no triviales dependientes del parámetro de control simultáneamente para las dos especies

- B) Con respecto al problema central, modelo difusivo de Lotka-Volterra tanto para ambientes homogéneos y no homogéneos, se probó la existencia de soluciones semitriviales que bifuran a la curva de soluciones no triviales lo cual se analiza en la sección 2.4. El método para obtener este resultado se soporta en la estimación de el radio espectral del operador que describe la evolución del sistema

- C) Finalmente el sistema representado en las ecuaciones (2.3) y (2.4) se reduce a la ecuación (2.14) que corresponde a un modelo logístico funcional en $H_0^1(\Omega)$ espacio de Banach con norma generada por un producto interno, donde la región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y que se expresa mediante la ecuación,

$$-\Delta u = uk(u),$$

que depende de parámetros singulares, se estudia la convergencia hacia un atractor global de este sistema Lotka-Volterra difusivo, con condiciones de frontera de Dirichlech. En el capítulo tercero estudiamos el atractor global asociado a (2.14)

- D) En futuros estudios me propongo realizar un estudio al modelo logístico difusivo tanto para ambientes homogéneos y no homogéneos considerando las condiciones de frontera de Newman, este estudio es muy similar a lo realizado en este trabajo el cual se realizó para condiciones de frontera de Dirichlet.

Referências Bibliográficas

- [1] BLAT, J., BROWN, K. J. (1986). Global bifurcation of positive solutions in some systems of elliptic equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 17(6), 1339-1353.
- [2] CARABALLO, T., KLOEDEN, P. E., LANGA, J. A. (2003). Atractores globales para sistemas diferenciales no autonomos. *Cubo Matematica Educacional*, 5(2), 305-329.
- [3] CARMEN, CHICONE. (2000). Ordinary differential equations with applications..
- [4] DANCER, E. N. (1984). On positive solutions of some pairs of differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284(2), 729-743.
- [5] DANCER, E. N. (1985). On positive solutions of some pairs of differential equations, II. *Journal of Differential Equations*, 60(2), 236-258.
- [6] DANCER, E. N., DU, Y. H. (1994). Competing species equations with diffusion, large interactions, and jumping nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, 114(2), 434-475.
- [7] DANCER, E. N., DU, Y. (2002). Effects of certain degeneracies in the predator-prey model. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 34(2), 292-314.
- [8] DU, Y., SHI, J. (2006). Some recent results on diffusive predator-prey models in spatially heterogeneous environment. *Nonlinear Dynamics and Evolution Equations*, in: *Fields Inst. Commun*, 48, 95-135.
- [9] GRINDROD, P. (1996). The theory and applications of reaction-diffusion equations: patterns and waves. Clarendon Press.
- [10] GORDEJUELA, F. E. (2010). Topología diferencial [apuntes para Asignatura Optativa de Segundo Ciclo].
- [11] HADELER, K. P., LEWIS, M. A. (2002). Spatial dynamics of the diffusive logistic equation with a sedentary compartment. *Canadian Appl. Math. Quart*, 10, 473-499.
- [12] KREYSZIG, E. (1989). Introductory functional analysis with applications (Vol. 81). New York: wiley.

- [13] MEDVINSKY, A. B., PETROVSKII, S. V., TIKHONOVA, I. A., MALCHOW, H., Y LI, B. L. (2002). Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics. SIAM review, 44(3), 311-370.
- [14] MONTEALEGRE, MAURO (2011). Métodos de homogeneización y bifurcaciones en modelos sobre dispersión ecológica, Grupo de investigación Dinusco. Universidad Surcolombiana
- [15] ROJAS, R. M., TORRES, F. J.(2010) Atractor global en una ecuación logística. Revista de la facultad de Ingenierías. Departamento de Matemáticas–Universidad de Atacama .