Sobre simetrías de Lie para las ecuaciones de Emden-Fowler y Chazy

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Yeisson Alexis Acevedo Agudelo

Director: Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Codirector: Oscar Mario Londoño Duque

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

2020

Introducción

Como es conocido, no existe una teoría global con la que se resuelva cualquier Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) no lineal. En los esfuerzos por encontrar un método global, Sophus Lie, usando una idea propia de la teoría de Galois para polinomios, construyó una teoría para resolver ecuaciones diferenciales, con un procedimiento de integración general basado en la varianza de la ecuación diferencial bajo un grupo continuo de simetrías. Esta idea se fundamenta en construir transformaciones de una ecuación diferencial en otra de la misma clase. Dichas transformaciones forman un grupo continuo y en muchos casos, tienen la ventaja de conducir a soluciones exactas.

En general, el objetivo del presente trabajo es implementar la teoría de Lie en cuatro EDO no lineales, que sean conocidas por sus aplicaciones, para obtener nuevos resultados respecto a soluciones invariantes o clasificación de simetrías.

Tal como se referenciará en el desarrollo del trabajo, las EDO elegidas para dicho propósito tienen aplicaciones, por ejemplo, a problemas de: física, matemática, astrofísica, química, biología, hidrodinámica y teoría de fluidos. A continuación se enumeran las EDO que se estudiarán:

1. $y''(x) = Ax^n y^m$, con A, n, m parámetros reales, que es llamada ecuación estándar de Emden-Fowler.

2. $y''(x) = Ax^n y^m (y')^l$, con A, n, m, l parámetros reales, que es llamada ecuación de Emden-Fowler generalizada.

3. $y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2$, que es llamada la ecuación de Chazy.

4. $y_{xxx} - f(y)y_{xx} + 3y_x^2 = 0$, donde f tiene por lo menos segunda derivada. Esta es una generalización de la ecuación de Chazy.

En primer lugar, para cada una de las ecuaciones mencionadas, se calculan los operadores que generan al respectivo grupo de simetrías de Lie y se usan para obtener soluciones invariantes. El método más usual para obtener soluciones a partir de simetrías, es la reducción canónica de variables. Pero en las ecuaciones tratadas en este trabajo, dicho método conduce a cálculos muy complejos. Es por ello que se usará un método alternativo, basado en una condición de curva invariante.

De otro lado, se usa el mismo método para hallar las soluciones invariantes mediante los operadores que generen el álgebra óptima respecto al grupo de

Lie de la ecuación de Chazy. En este caso, al usar el álgebra óptima, se tiene la ventaja de poder caracterizar a todas la soluciones invariantes de dicha EDO.

Trabajando en lo anterior, surgió la inquietud de conocer todos los posibles grupos de simetrias de Lie no triviales al considerar un coeficiente como una función arbitraria en la ecuación de Chazy. Para abordar el asunto, se hizo una clasificación completa de la ecuación diferencial de Chazy generalizada y también se recurrió a la teoría de Ovsiannikov, sobre grupo de equivalencia, para conseguir el álgebra principal.

El desarrollo de este trabajo se presenta dividido en tres artículos, que serán sometidos a evaluación para publicación y por tanto, cada artículo se presenta en formato autocontenido. De tal forma, los artículos traen sus propios objetivos, sus propias conclusiones y las respectivas bibliografías. Teniendo en cuenta el idioma de las revistas a las cuales se pretenden someter los artículos, aparecerán dos de ellos en español y uno en inglés. Los tres artículos que conforman el cuerpo del trabajo son:

1. Simetrías de Lie y soluciones invariantes para las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada.

2. Álgebra óptima y soluciones invariantes para la ecuación de Chazy.

3. Complete classification of the Lie symmetry group, equivalence group and invariant solutions for a generalization of Chazy equation.

Simetrías de Lie y soluciones invariantes para las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa[1], Yeisson Alexis Acevedo Agudelo[2], Oscar Mario Londoño Duque[3]

Abstract

En términos de los parámetros de las ecuaciones de Emden-Fowler estándar y Emden-Fowler generalizada, se establecen condiciones adecuadas que permitan determinar los respectivos grupos de simetrías de Lie y, a partir de ellos, obtener respectivas soluciones invariantes para dichas ecuaciones.

Keywords: Ecuación estándar Emden-Fowler; Ecuación generalizada de Emden-Fowler; Ecuación estándar de Lane-Emden; Ecuación generalizada de Thomas-Fermi; Grupo continuo de simetrías de Lie; Solución invariante.

[1] *email:* gloaiza@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[2] *email:* yaceved2@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[3] *email:* o154278@dac.unicamp.br, IMECC-UNICAMP, Brasil.

1. Introducción

Varios problemas en física, matemática, astrofísica y química [1, 2, 3, 4] pueden ser modelados por la ecuación Emden-Fowler

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + f(x)y^m = 0, \tag{1}$$

con f y a_1 funciones reales continuas de variable real y $m \neq 1, 0$ constante. Cuando $a_1(x) = \frac{b}{x}$, b constante y $f(x) = 1$, la expresión (1) es llamada ecuación estándar de Lane-Emden, que es usada para modelar el comportamiento térmico de las nubes de gas esféricas actuando bajo atracciones mutuas entre sus moléculas [5]. Si en (1), $a_1(x) = \frac{b}{x}$, $f(x) = -A_0x^w$ con b, A_0 constantes y w número real se tiene la famosa ecuación generalizada de Thomas−Fermi [6, 7], que puede ser reducida a la forma

$$y''(x) - A_0(b-1)x^{\frac{(w+2b)-(w+2b)}{1-b}}y^m = 0. \tag{2}$$

Según [8, 9], la expresión (1) siempre puede ser reducida a la forma

$$y''(x) = Ag(x)y^m, \tag{3}$$

usando la transformación de Kummer-Liouville, con g función continua y A constante. La ecuación (3) es llamada ecuación canónica generalizada de Emden-Fowler.

Nótese que las soluciones para ecuaciones del tipo estándar de Lane-Emden (1), casi siempre son bastante problemáticas por el comportamiento de la singularidad en el origen, con respecto a f y a_1. Para ecuaciones de ese tipo, en [10] se presentan soluciones analíticas aproximadas y en [11] se obtienen soluciones usando el Método Analítico de Descomposición (MAD) [12]. También en [13, 14] se encuentran soluciones de (1) usando el método de perturbación homotópica y, en [15], se obtienen soluciones usando el Método Varacional Iterado (MVI). Otro método presentado en [14, 16] que es bastante potente para resolver ecuaciones del tipo (3) y (2), es el principio variacional invariante, el cual hace uso de las simetrías variacionales del sistema, o bien, del grupo de simetrías de Noether o de Lie.

Se considerará en el presente artículo la ecuación (3), cuando $g(x) = x^n$, que es presentada en [4], [17]-[18] y es llamada ecuación estándar de Emden-Fowler o ecuación de Bellman como la denominan otros autores. Así, la

ecuación a considerar es

$$y''(x) = Ax^n y^m, \quad \text{con } A, m, n \text{ constantes reales.} \tag{4}$$

También será de interés la ecuación de Emden-Fowler generalizada presentada en [17]

$$y''(x) = Ax^n y^m (y')^l, \quad \text{con } A, m, n, l \text{ constantes reales.} \tag{5}$$

En [19] se presenta solo una simetría de Lie para (4) en el caso $3+m+n \neq 0$ y para la ecuación de Thomas-Fermi: dos simetrías de Lie en el caso $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ y otras dos simetrías de Lie para el caso $m = -(3+n)$.
En [4], [17]-[18], se proponen soluciones de (4) para diferentes valores particulares de n y m. En [17] se propone una solución de forma paramétrica cuando $m \neq 1$ y $n = -3 - m$. Dicha solución es

$$\begin{aligned} x &= aC_1^{m-1}\left(\int (1 \pm \tau^{m+1})^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2\right)^{-1}, \\ y &= bC_1^{m-1}\tau\left(\int (1 \pm \tau^{m+1})^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

con $A = \pm\frac{m+1}{2}a^{m+1}b^{1-m}$. Para (5), en [17] y [20], se proponen bastantes soluciones en casos particulares para combinaciones de n, m y l. Ahora, pretendiendo condiciones generales sobre n, m y l, bajo la condición $m + l \neq 1$, en [17] se presenta la siguiente solución:

$$y(x) = \left(\left(\frac{n+2-l}{1-m-l}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{n+2-l}{1-m-l}}. \tag{7}$$

El propósito del presente artículo es establecer condiciones adecuadas sobre los parámetros que definen a las ecuaciones (4) y (5), para obtener los respectivos grupos de simetrías de Lie; de manera que los operadores generadores de dichos grupos conduzcan a soluciones invariantes para las respectivas ecuaciones.

Los textos clásicos, sobre la forma como se utilizan los operadores para el cálculo del grupo de simetrías de Lie y se presentan aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, son [21, 22, 23, 24]. También destacamos las aplicaciones presentadas en [25, 26].

2. Ecuación estándar de Emden-Fowler

En esta sección se establecen condiciones sobre los parámetros m y n de (4), que permitan calcular los operadores generadores del grupo de simetrías de Lie para (4). A partir de dichos operadores, se establecen respectivas soluciones invariantes para dicha ecuación, mediante el uso de la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [26], ya que al aplicar el método basado en la reduccion canónica de variables, aparecen cálculos mucho más complejos. Respecto a las simetrías se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1. *El grupo de simetrías de Lie para la ecuación estándar Emden-Fowler (4), donde* $3+m+n=0$, $3+m+2n\neq 0$ *y* $m\neq 0,1$, *es generado por:*

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \left[x\left(\frac{1-m}{3+m+2n}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}+\left[y\left(\frac{2+n}{3+m+2n}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y},\\ \Pi_2 &= \left[x^2\right]\frac{\partial}{\partial x}+\left[xy\right]\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned} \tag{8}$$

Prueba. La forma general de un grupo de Lie de un parámetro que se admite para (4) está dado por:

$$x\to x+\epsilon X(x,y)+O\left(\epsilon^2\right) \qquad \text{y} \qquad \text{y}\to \text{y}+\epsilon\text{Y(x,y)}+\text{O}\left(\epsilon^2\right),$$

donde ϵ es el parámetro del grupo. El campo vectorial asociado con el grupo de transformaciones anterior se describe por $\Gamma=X(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ con X,Y funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar los infinitesimales $X(x,y)$ y $Y(x,y)$, se aplica el operador segunda prolongación,

$$\Gamma^{(2)}=\Gamma+Y_{[x]}\frac{\partial}{\partial y_x}+Y_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y_{xx}}, \tag{9}$$

a la ecuación (4), se obtiene la siguiente condición de simetría

$$Y_{[xx]}-Anx^{n-1}y^mX-Amx^ny^{m-1}Y=0, \tag{10}$$

donde $Y_{[x]},Y_{[xx]}$ son coeficientes en $\Gamma^{(2)}$ dados por:

$$\begin{aligned}Y_{[x]} &= D_x(Y)-y_xD_x(X)=Y_x+(Y_y-X_x)y_x-X_yy_x^2\,,\\ Y_{[xx]} &= D_x(Y_{[x]})-y_{xx}D_x(X),\\ &= Y_{xx}+(2Y_{xy}-X_{xx})y_x+(Y_{yy}-2X_{xy})y_x^2-X_{yy}y_x^3\\ &\quad +(Y_y-2X_x)y_{xx}-3X_yy_xy_{xx},\end{aligned} \tag{11}$$

donde D_x es el operador de derivada total: $D_x = \partial_x + y_x\partial_y + y_{xx}\partial_{y_x} + \cdots$. Sustituyendo (11) en (10) se obtiene

$$\begin{aligned} Y_{xx} &+ (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)y_{xx} \\ &- 3X_y y_x y_{xx} - Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1}Y = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Al sustituir $y_{xx} = Ax^n y^m$ en la expresion anterior se obtiene

$$\begin{aligned} Y_{xx} &+ (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)(Ax^n y^m) \\ &- 3X_y y_x(Ax^n y^m) - Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1}Y = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Al agrupar con respecto a $1, y_x, y_x^2$ y y_x^3 en (13) se tiene

$$\begin{aligned} Y_{xx} + (Y_y - 2X_x)(Ax^n y^m) &- Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1}Y \\ + (2Y_{xy} - X_{xx} - 3AX_y x^n y^m)y_x &+ (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Luego analizando los coeficientes respecto a $1, y_x, y_x^2$ y y_x^3 en (14), se obtienen las ecuaciones determinantes:

$$X_{yy} = 0, \tag{15a}$$

$$Y_{yy} - 2X_{xy} = 0, \tag{15b}$$

$$-3Ay^m x^n X_y + 2Y_{xy} - X_{xx} = 0, \tag{15c}$$

$$Ay^{m+1}x^{n+1}Y_y - Amy^m x^{n+1}Y - 2Ay^{m+1}x^{n+1}X_x - Any^{m+1}x^n X + xyY_{xx} = 0. \tag{15d}$$

Resolviendo en (15a), se tiene

$$X = yc_1(x) + c_2(x), \tag{16}$$

con c_1, c_2 funciones arbitrarias. Reemplazando (16) en (15b) resulta $Y_{yy} = 2c_1'(x)$ e integrando se sigue que

$$Y = y^2 c_1'(x) + yc_3(x) + c_4(x), \tag{17}$$

con c_3, c_4 funciones arbitrarias. Al sustituir (16) y (17) en (15c) se obtiene

$$-3Ay^m x^n[c_1(x)] + 2[2yc_1''(x) + c_3'(x)] - [yc_1''(x) + c_2''(x)] = 0, \tag{18}$$

y al derivar en (18) dos veces con respecto a y, se llega a la expresión $-3Am(m-1)y^{m-2}x^n[c_1(x)] = 0$. Ahora, como $A \neq 0$ y $m \neq 0, 1$, entonces $c_1(x) = 0$ y por (18) se tiene que $2c_3'(x) - c_2''(x) = 0$; por tanto,

$$2c_3(x) - c_2'(x) = k_1, \text{ con } k_1 \text{ constante.} \tag{19}$$

Reescribiendo (16),(17) y (19), se tiene:

$$X = c_2(x), \quad Y = yc_3(x) + c_4(x), \quad 2c_3(x) - c_2'(x) = k_1. \tag{20}$$

Sustituyendo (20) en (15d) y dividiendo por xy en ambos lados de la expresión obtenida, se llega a la expresión

$$\begin{aligned} Ay^m x^n[c_3(x)] \quad &- \quad Amy^{m-1}x^n[yc_3(x) + c_4(x)] - 2Ay^m x^n[c_2'(x)] \\ &- \quad Any^m x^{n-1}[c_2(x)] + [yc_3''(x) + c_4''(x)] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Al organizar con respecto a $1, y, y^{m-1}, y^m$ en (21) se tiene:

$$\begin{aligned} & Ay^m[x^n c_3(x)(1-m) - x^n(2c_2'(x) + nx^{-1}c_2(x))] - Amy^{m-1}x^n c_4(x) \\ + \quad & yc_3''(x) + c_4''(x) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Al analizar los coeficientes $1, y, y^{m-1}, y^m$ en (22) obtenemos

$$c_4(x) = c_4''(x) = 0, \quad c_3''(x) = 0, \quad c_3(x)(1-m) - (2c_2'(x) + nx^{-1}c_2(x)) = 0. \tag{23}$$

Usando (20) y (23) obtenemos:

$$c_3(x) = xk_2 + k_3 \qquad c_2(x) = k_2x^2 + x(2k_3 - k_1) + k_4 \tag{24}$$

con k_2, k_3, k_4 constantes arbitrarias y tambien se tiene

$$x(k_2(-3-m-n)) + k_3(-3-m-2n) + k_1(2+n) - nx^{-1}k_4 = 0. \tag{25}$$

Al analizar los coeficientes con respecto a $1, x, x^{-1}$ en (25) obtenemos:

$$k_2(-3-m-n) = 0, \quad k_3(-3-m-2n) + k_1(2+n) = 0, \quad nk_4 = 0. \tag{26}$$

Luego suponiendo en (26) que $3+m+n = 0$, $3+m+2n \neq 0$ y $k_4 = 0$, se obtiene, de (24), que

$$c_3(x) = xk_2 + \frac{k_1(2+n)}{3+m+2n} \qquad \text{y} \qquad c_2(x) = k_2x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n}. \tag{27}$$

Usando (27) en (20) tenemos los generadores infinitesimales

$$X = k_2x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n} \quad Y = y\left(xk_2 + \frac{k_1(2+n)}{3+m+2n}\right), \tag{28}$$

donde k_1, k_2 son constantes arbitrarias, con $3+m+n=0$, y $3+m+2n \neq 0$. Las dos expresiones anteriores para $X(x,y)$ y $Y(x,y)$, permiten determinar el grupo de simetrías, ya que el generador infinitesimal es

$$\begin{aligned}
\Gamma &= X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(k_2x^2 + x\frac{k_1(1-m)}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(xyk_2 + y\frac{k_1(2+n)}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= k_1\left[x\left(\frac{1-m}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\left(\frac{2+n}{3+m+2n}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&\quad +k_2\left[x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&= k_1\Pi_1 + k_2\Pi_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los generadores del grupo de simetrías de (4) son los operadores Π_1 y Π_2 descritos en el enunciado de la Proposición (1); logrando así el resultado propuesto. □

Del resultado anterior, el espacio vectorial generado por Π_1, Π_2 es un álgebra de Lie 2-dimensional. Se procederá a construir una solución invariante para (4) aplicando la condición de curva invariante [26], sobre cada uno de los generadores del grupo de simetrías.

Acorde a [26] y teniendo en cuenta las condiciones de la Proposición (1), la condición de curva invariante respecto al operador Π_1 adquiere la forma

$$Q(x,y,y_x) = Y_1 - y_xX_1 = 0, \text{ con } X_1 = \frac{(1-m)x}{-(3+m)} \text{ y } Y_1 = \frac{(1+m)y}{(3+m)}.$$

Denotando las constantes $A_1 := \frac{(1+m)}{(3+m)}$ y $B_1 := \frac{1-m}{-(3+m)}$, la condición anterior se expresa mediante la ecuación diferencial $A_1y - B_1y_xx = 0$, cuya solución es

$$y(x) = Cx^{\frac{A_1}{B_1}} = Cx^{-\frac{1+m}{1-m}}, \quad \text{con } m \neq 1\ , x, y > 0 \ \text{ y } \ C \text{ constante.} \tag{29}$$

Al sustituir (29) en (4), obtenemos una solución invariante para $y(x)$, cuando $C = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}}$, dada por $y(x) = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{(1+m)}{m-1}}$.

De manera análoga, a partir de Π_2 se obtiene la solución trivial $y(x) = 0$.

Todo lo anterior se puede resumir en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Una solución invariante de la ecuación estándar de Emden-Fowler (4), con $A \neq 0$, $m \neq 0, 1$, $n + m + 3 = 0$ y $3 + m + 2n \neq 0$, es:*

$$y(x) = \left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}} x^{\frac{(1+m)}{m-1}},$$

siempre que $\left(\frac{2(1+m)}{A(1-m)^2}\right)^{\frac{1}{1-m}}$ esté bien definido.

3. Ecuación de Emden-Fowler generalizada

Con resultados y procedimientos análogos a los de la sección anterior, en esta sección se presentan resultados sobre el grupo de simetrías de Lie y una solución invariante para la ecuación de Emden-Fowler generalizada (5). En tanto al grupo de simetrías de Lie para (5) se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3. *El grupo de simetrías de Lie para la ecuación Emdem-Fowler generalizada (5), con $n, m \neq 0, l \neq 0, 3$ y $l + m - 1 \neq 0$, es generado por el operador*

$$\Pi_1 = (x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{l-n-2}{l+m-1}y\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Prueba. Aplicando el operador de segunda prolongación (9) en (5) se tiene

$$Y_{[xx]} - Anx^{n-1}y^m y_x^l X - Amx^n y^{m-1} y_x^l Y - lAx^n y^m y_x^{(l-1)} Y_{[x]} = 0$$

y sustituyendo (11) en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} & Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 + (Y_y - 2X_x)y_{xx} \\ - \; & 3X_y y_x y_{xx} - Anx^{n-1}y^m y_x^l X - Amx^n y^{m-1} y_x^l Y \\ - \; & lAx^n y^m y_x^{(l-1)}[Y_x + (Y_y - X_x)y_x - X_y y_x^2] = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Al agrupar en (30) con respecto $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1}, y_x^{l+1}, y_{xx}$ y $y_x y_{xx}$ se tiene

$$\begin{aligned} & (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 + y_x^3(-X_{yy}) + y_x^{(l-1)}(-lAx^n y^m Y_x) \\ + \quad & y_x^l(-Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1} Y - lAx^n y^m (Y_y - X_x)) \\ + \quad & y_x^{(l+1)}(lAx^n y^m X_y) + (Y_y - 2X_x)y_{xx} - 3X_y y_x y_{xx} + Y_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Al sustituir $y_{xx} = Ax^n y^m y_x^l$ en (31) y agrupar con respecto a $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1}$ y y_x^{l+1} obtenemos

$$\begin{aligned} & (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 + y_x^3(-X_{yy}) + y_x^{(l-1)}(-lAx^n y^m Y_x) \\ + \quad & y_x^l(-Anx^{n-1}y^m X - Amx^n y^{m-1} Y - lAx^n y^m (Y_y - X_x) + Ax^n y^m (Y_y - 2X_x)) \\ + \quad & y_x^{(l+1)}(lAx^n y^m X_y - 3Ax^n y^m X_y) + Y_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Luego analizando los coeficientes para $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^l, y_x^{l-1}$ y y_x^{l+1} se tienen las siguientes ecuaciones determinantes con $A \neq 0$ y $l \neq 0, 3$:

$$Y_x = X_y = 0, \tag{33a}$$

$$Y_{yy} = X_{xx} = 0, \tag{33b}$$

$$-my^{-1}Y - nx^{-1}X + (1-l)Y_y + (l-2)X_x = 0. \tag{33c}$$

Las soluciones de (33a) son $Y = c_1(y)$ y $X = c_2(x)$, que remplazadas en (33b), implican:

$$Y = a_1 y + a_2 \quad \text{y} \quad X = a_3 x + a_4, \tag{34}$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 constantes arbitrarias. Sustituyendo (34) en (33c) se tiene

$$-my^{-1}[a_1 y + a_2] - nx^{-1}[a_3 x + a_4] + (1-l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0. \tag{35}$$

Derivando con respecto a y en (35) y tomando $m \neq 0$ se sigue que $a_2 = 0$ y por tanto, reescribiendo X, Y en (34) se tiene:

$$Y = a_1 y \ \text{ y } \ X = a_3 x + a_4. \tag{36}$$

Además, (35) queda

$$-my^{-1}[a_1 y] - nx^{-1}[a_3 x + a_4] + (1-l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0. \tag{37}$$

Derivando con respecto a x en (37), $nx^{-2}[a_4] = 0$ y suponiendo $n \neq 0$ se llega a $a_4 = 0$. Por tanto en (36) actualizando X, Y se tiene:

$$Y = a_1 y \ \text{ y } \ X = a_3 x. \tag{38}$$

Sustituyendo $a_4 = 0$ en (37) y organizando, se obtiene $-m[a_1] - n[a_3] + (1 - l)[a_1] + (l-2)[a_3] = 0$, que es equivalente a:

$$a_1 = a_3 \frac{l-n-2}{l+m-1}.$$

con $l + m - 1 \neq 0$. Por tanto, los generadores infinitesimales son:

$$X = a_3 x \quad \text{y} \quad Y = a_3 \left(\frac{l-n-2}{l+m-1} \right) y,$$

con a_3 constante arbitraria. De tal forma, el generador infinitesimal es

$$\begin{aligned} \Gamma &= X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = (a_3 x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(a_3 \frac{l-n-2}{l+m-1} y \right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ &= a_3 \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{l-n-2}{l+m-1} \frac{\partial}{\partial y} \right] = a_3 \Pi_1. \end{aligned}$$

En consecuencia, el grupo de simetrías de Lie para la ecuación de Emdem-Fowler generalizada, es generado por el operador Π_1 que aparece en el enunciado de la proposición. □

La simetría hallada no se encuentra en la literatura, se procede ahora a construir una solución invariante usando, el operador Π_1 de la Proposición (3) que se acabó de probar.

Según [26] y la Proposición (3), la condición de curva invariante en el operador Π_1, tiene la forma:

$$Q(x, y, y_x) = Y_1 - y_x X_1 = 0, \quad \text{con } X_1 = x \ \text{ y } \ Y_1 = \frac{l-n-2}{l+m-1} y,$$

que plantea una ecuación cuya solución para y es

$$y(x) = C x^{A_1} \quad \text{con } C \text{ y } A_1 = \tfrac{(l-n-2)}{l+m-1} \text{ constantes y } x, y > 0. \tag{39}$$

Sustituyendo (39) en (5) se obtiene

$$A_1(A_1 - 1) C x^{A_1 - 2} - A C^{m+l} A_1^l x^{l(A_1-1)+A_1 m+n} = 0. \tag{40}$$

Nótese que los exponentes de x en (40) son $A_1 - 2 = -\frac{l+2m+n}{l+m-1} = -p$ y $l(A_1 - 1) + mA_1 + n = -\frac{l+2m+n}{l+m-1} = -p$, asi tenemos que (40) es de la forma:

$$x^{-p} \left[A_1(A_1 - 1)C - A C^{m+l} A_1^l \right] = 0. \tag{41}$$

Multiplicando en (41) por x^p se tiene

$$A_1(A_1-1)C - AC^{m+l}A_1^l = 0. \tag{42}$$

Luego, considerando que $l+m-1 \neq 0$ podemos despejar C en (42):

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{A_1^{1-l}(A_1-1)}{A}\right)^{\frac{1}{m+l-1}} = \left(\frac{A_1^{2-l}-A_1^{1-l}}{A}\right)^{\frac{1}{m+l-1}} \\ &= \sqrt[m+l-1]{-\frac{\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{l+m-1}\right)}{A}}, \end{aligned}$$

siempre y cuando el radical quede bien definido.
De lo anterior y (39), se consigue una solución invariante para (5), en términos de n, m, l, dada por

$$y(x) = \left(\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{l-n-2}{m+l-l}}.$$

Se puede resumir todo el proceso en el siguiente resultado.

Proposición 4. *La ecuación Emden-Fowler generalizada (5) tiene la solución invariante*

$$y(x) = \left(\left(\frac{l-n-2}{l+m-1}\right)^{1-l}\left(\frac{m+n+1}{A(1-m-l)}\right)\right)^{\frac{1}{m+l-1}} x^{\frac{l-n-2}{m+l-l}}, \tag{43}$$

con $n, m \neq 0,\ l \neq 0, 3,\quad x, y > 0$, *satisfaciendo* $l-n-2 \neq 0$ *y* $l+m-1 \neq 0$, *siempre y cuando la expresión quede bien definida por los parámetros* m, n *y* l.

Observaciones: La solución invariante de la Proposición 4 que es calculada con el uso de la simetría Π_1 es exactamente la solución presentada por [17] y aparece en (7), con la salvedad de que en [17] no se presentan ninguna de las restricciones que se hacen necesarias.

4. Conclusiones

En la discusión anterior, mediante las Proposiciones 1 y 3, se han determinado los respectivos grupos de simetrías de Lie para las ecuaciones (4) y (5);

además de especificar las condiciones necesarias para que los generadores de los respectivos grupos de simetrías, conduzcan a respectivas soluciones invariantes. Las soluciones invariantes se presentan en las Proposiciones 2 y 4. Así, el objetivo propuesto se ha logrado y además, la simetría presentada para la Ecuación de Emdem-Fowler generalizada (5), no se encuentra en la literatura, a pesar que permite establecer la misma solución presentada en [17], que corresponde la expresión (7). El paso natural para abordar en trabajos futuros, es el cálculo de las respectivas leyes de conservación para ambas ecuaciones, usando las simetrías ya calculadas y el cálculo de los respectivos grupos de equivalencia de dichas ecuaciones. Lo anterior, permitiría hacer una clasificacion preliminar para cada uno de los respectivos grupo de simetrías y así poder comparar con las simetrías obtenidas.

5. Referencias

[1] S. Chandrasekhar, An introduction to the study of stellar structure, Dover Publications, (1967).

[2] S. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies, London, New York Longmans, Green and Co, (1921).

[3] B. Mehta, R. Aris, A note on a form of the Emden-Fowler equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications 36 (3) (1971) 611 – 621.

[4] A. Rosa, Modelagem matemática e simulacao do núcleo morto en catalisadores porosos para reacoes de ordens fracionárias, Dissertacao de mestrado, Faculdade de engenharia química de Lorena (2005).

[5] H. Davis, Introduction to nonlinear differential and integral equations, Dover, New York, (1962).

[6] C. Chan, Y. Hon, A constructive solution for a generalised Thomas-Fermi theory of ionised atoms, Quart. J. Appl. Math 45 (1987) 591–599.

[7] E. Kamke, Differential Gleichungen Losungs method en und losungen, Chelsa Publishing Company, (1948).

[8] L. Berkovich, The generalized Emden-Fowler equation, Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics 1 (1997) 155 – 163.

[9] G. Murphy, Ordinary differential equations and their solutions, D. Van Nostrand Company Inc., (1960).

[10] N. Shawagfeh, Non perturbative approximate solution for Lane–Emden equation, Journal of Mathematical Physics 34 (1993) 4364–4369.

[11] A.M.Wazwaz, Analytical solution for the time-dependent Emden–Fowler type of equations by Adomian decomposition method, Comput. Math. Appl. 166 (2005) 638–651.

[12] G. Adomian, Solution of physical problems by decomposition, Comput. Math. Appl. 27 (1994) 145–154.

[13] M. S. Chowdhury, I. Hashim, Solutions of Emden–Fowler equations by homotopy-perturbation method, Nonlinear Analysis: Real World Applications 10 (1) (2009) 104 – 115.

[14] M. S. Chowdhury, I. Hashim, Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy-perturbation method, Phys. Lett. A 166 (2007) 305–313.

[15] X. Shang, P. Wu, X. Shao, An efficient method for solving Emden–Fowler equations, Journal of the Franklin Institute 346 (9) (2009) 889 – 897.

[16] J. D. Logan, Invariant variational principles, Academic Press, (1977).

[17] A. D. Polyanin, Exact solutions for ordinary differential equations, Chapman and Hall/CRC, 2002.

[18] J. Knezevic-Miljanovic, Vertical asymptotes of solutions of the Emden–Fowler equation, Differential Equations 43 (2007) 1753–1755.

[19] M. S. Chowdhury, I. Hashim, Lie symmetries, Lagrangians and Hamiltonian framework of a class of nonlinear nonautonomous equations, Chaos 75 (2007) 204–211.

[20] A. Ebadian, P. Darania, Study of exact solutions of nonlinear heat equations, Comp. Appl. Math. 27 (2008) 107–121.

[21] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, (1986).

[22] G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Springer Science and Business Media, (2008).

[23] N. H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, (1996).

[24] G. W. Bluman, J. D. Cole, Asimilarity methods for differential equations, Springer-Verlag, (1974).

[25] L. Ovsyannikov, Group analysis of differential equations, Academic Press 75 (1982) 204–211.

[26] P. Hydon, D. Crighton, Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2000).

Álgebra óptima y soluciones invariantes para la ecuación de Chazy

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa[1], Yeisson Alexis Acevedo Agudelo[2], Oscar Mario Londoño Duque[3]

Abstract

Se caracterizan todas las soluciones invariantes para la ecuación de Chazy, a partir de los operadores generadores del álgebra óptima, construida mediante el grupo de simetrías de Lie correspondiente a dicha ecuación.

Keywords: Ecuación de Chazy; Grupo de simetrías de Lie; Sistema de álgebra óptima; Soluciones invariantes.

[1] *email:* gloaiza@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[2] *email:* yaceved2@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[3] *email:* o154278@dac.unicamp.br, IMECC-UNICAMP, Brasil.

1. Introducción

En 1963, Rosenhead [1], presenta la ecuación de capa límite de Prandtl para un fluido bidimensional y radial, con velocidad principal de corriente uniforme dada por

$$\nu u_{yyy} = u_y u_{xy} - u_x u_{yy}, \tag{1}$$

donde ν es un número real que representa la viscosidad cinemática. Luego en [2], Olver usando el método clásico de Lie de transformaciones infinitesimales, consigue la siguiente transformación:

$$u(x,y) = x^{1-\alpha} g(\omega), \quad \omega = \frac{y}{x^{\alpha}}. \tag{2}$$

Con $g(\omega)$ función real y al menos $C^{(3)}$. Sustituyendo (2) en (1), se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden:

$$\nu g_{\omega\omega\omega} + D g g_{\omega} + A(g_{\omega})^2 = 0, \tag{3}$$

donde α es un real y $D = 1 - \alpha$ es para la forma bidimensional, $D = 2 - \alpha$ para la forma radial, y $A = 2 - \alpha$ en ambos casos.

En [3, 4, 5, 6, 7, 8] se presentan soluciones de la ec.(3) para diversos valores de α usando diversos métodos. En [2, 9, 10], mediante el método de simetrías de Lie, se logra una reducción de la ec.(3), para los casos cuando $\alpha = -1$ (bidimensional) y $\alpha = -4$ (forma radial). En [11, 12, 13, 14], Chazy y Olver muestran que el grupo de simetrías de Lie de la ec.(3) es una álgebra no soluble de dicha ecuación y consiguen reducciones. Posteriormente, tanto Nucci e Ibragimov en [9] como Mahomed en [15], presentan nuevas reducciones de la ec.(3), usando el método simetrías de Lie con variables semi-canónicas.

En el presente trabajo se considera la ecuación de Chazy [11, 12, 13, 14, 16], dada por

$$y_{xxx} = 2 y y_{xx} - 3 y_x^2, \tag{4}$$

con $x \neq 0, 1$; la cual es un caso particular de (3) cuando $\alpha = -1$. Mahomed [15], usando el grupo de simetrías de Lie y considerando $\alpha = -1$ (2-dimensional) y $\alpha = -4$ (radial), encuentra una familia de soluciones para (4) dada por

$$y(x) = \frac{k - 6c_3 x}{c_1 + c_2 x + c_3 x^2} \ \text{ con } k = 3\left[-c_2 \pm (c_2^2 - 4c_1 c_3)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Dado al gran número de subgrupos del grupo de simetrías de una ecuación diferencial, por lo general no es fácil caracterizar todas las soluciones invariantes. Por ello es pertinente usar un método eficaz para clasificar estas soluciones, lo que conduce a un sistema óptimo de soluciones invariantes, a partir de las cuales se puede derivar cualquier otra solución invariante.

El propósito del presente trabajo es usar el grupo de simetrías de Lie de la ec.(4), para construir el álgebra óptima y, mediante ésta, caracterizar las soluciones invariantes para dicha ecuación.

La forma como se utilizan los operadores para el cálculo del grupo de simetrías de Lie y se dan aplicaciones a las ecuaciones diferenciales se pueden revisar en los textos clásicos [17, 18, 19, 20].

2. Grupo continuo de simetrías de Lie.

En [15], sin detallar el proceso, aparece la forma de los operadores que generan el grupo de Lie para la ec.(4). En esta sección se muestran los detalles de dichos cálculos.

Proposición 1. *El grupo de simetrías de Lie para la ecuación de Chazy (4) es generado por los siguientes campos vectoriales:*

$$\Pi_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \qquad \Pi_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \Pi_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - (2xy+6)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

Prueba. La forma general para los operadores generadores de un grupo de Lie de un parámetro admitido por (4) es:

$$x \to x + \epsilon X(x,y) + O\left(\epsilon^2\right), \qquad \text{y} \qquad y \to y + \epsilon Y(x,y) + O\left(\epsilon^2\right),$$

donde ϵ es el parámetro del grupo. El campo vectorial asociado con dicho grupo de transformaciones es $\Gamma = X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, con X, Y funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Para encontrar los infinitesimales $X(x,y)$ y $Y(x,y)$, se aplica el operador de tercera prolongación,

$$\Gamma^{(3)} \quad = \quad \Gamma + Y_{[x]}\frac{\partial}{\partial y_x} + Y_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y_{xx}} + Y_{[xxx]}\frac{\partial}{\partial y_{xxx}}, \tag{7}$$

a la ec.(4), obteniendo la siguiente condición de simetría

$$Y_{[xxx]} - 2yY_{[xx]} - 2y_{xx}Y + 6y_xY_{[x]} = 0, \tag{8}$$

donde $Y_{[x]}, Y_{[xx]}, Y_{[xxx]}$ son los coeficientes en $\Gamma^{(3)}$ dados por:

$$\begin{aligned}
Y_{[x]} &= D_x[Y] - (D_x[X])y_x = Y_x + (Y_y - X_x)y_x - X_y y_x^2. \\
Y_{[xx]} &= D_x[Y_{[x]}] - (D_x[X])y_{xx}, \\
&= Y_{xx} + (2Y_{xy} - X_{xx})y_x + (Y_{yy} - 2X_{xy})y_x^2 - X_{yy}y_x^3 \\
&\quad +(Y_y - 2X_x)y_{xx} - 3X_y y_x y_{xx}. \\
Y_{[xxx]} &= D_x[Y_{[xx]}] - (D_x[X])y_{xxx}, \\
&= Y_{xxx} + (3Y_{xxy} - X_{xxx})y_x + 3(Y_{xyy} - X_{xxy})y_x^2 \\
&\quad + (Y_{yyy} - 3X_{xyy})\, y_x^3 - X_{yyy}y_x^4 + 3\,(Y_{xy} - X_{xx})\, y_{xx} \\
&\quad +3\,(Y_{yy} - 3X_{xy})\, y_x y_{xx} - 6X_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3X_y y_{xx}^2 \\
&\quad + (Y_y - 3X_x)\, y_{xxx} - 4X_y y_x y_{xxx},
\end{aligned} \tag{9}$$

siendo D_x el operador de la derivada total: $D_x = \partial_x + y_x\partial_y + y_{xx}\partial_{y_x} + y_{xxx}\partial_{y_{xx}} + \cdots$. Luego de aplicar (9) en (8) se tiene:

$$\begin{aligned}
& Y_{xxx} + (3Y_{xxy} - X_{xxx})y_x + 3(Y_{xyy} - X_{xxy})y_x^2 + (Y_{yyy} - 3X_{xyy})y_x^3 - X_{yyy}y_x^4 \\
+ \;& 3(Y_{xy} - X_{xx})y_{xx} + 3(Y_{yy} - 3X_{xy})y_x y_{xx} - 6X_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3X_y y_{xx}^2 \\
+ \;& (Y_y - 3X_x)y_{xxx} - 4X_y y_x y_{xxx} - 2yY_{xx} - 2(2Y_{xy} - X_{xx})yy_x \\
- \;& 2(Y_{yy} - 2X_{xy})yy_x^2 + 2X_{yy}yy_x^3 - 2(Y_y - 2X_x)yy_{xx} + 6X_y yy_x y_{xx} \\
- \;& 2Yy_{xx} + 6Y_x y_x + 6(Y_y - X_x)y_x^2 - 6X_y y_x^3 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Sustiyendo $y_{xxx} = 2yy_{xx} - 3y_x^2$ en (10) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& Y_{xxx} + (3Y_{xxy} - X_{xxx})y_x + 3(Y_{xyy} - X_{xxy})y_x^2 + (Y_{yyy} - 3X_{xyy})y_x^3 - X_{yyy}y_x^4 \\
+ \;& 3(Y_{xy} - X_{xx})y_{xx} + 3(Y_{yy} - 3X_{xy})y_x y_{xx} - 6X_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3X_y y_{xx}^2 \\
+ \;& (Y_y - 3X_x)(2yy_{xx} - 3y_x^2) - 4X_y(2yy_{xx} - 3y_x^2)y_x - 2yY_{xx} - 2(2Y_{xy} - X_{xx})yy_x \\
- \;& 2(Y_{yy} - 2X_{xy})yy_x^2 + 2X_{yy}yy_x^3 - 2(Y_y - 2X_x)yy_{xx} + 6X_y yy_x y_{xx} \\
- \;& 2Yy_{xx} + 6Y_x y_x + 6(Y_y - X_x)y_x^2 - 6X_y y_x^3 = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Al agrupar con respecto a $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^4, y_{xx}, y_{xx}^2, y_x y_{xx}$ y $y_x^2 y_{xx}$ en (10) obtenemos

$$
\begin{aligned}
& Y_{xxx} - 2yY_{xx} + [3Y_{xxy} - X_{xxx} - 2y(2Y_{xy} - X_{xx}) + 6Y_x]y_x \\
+ \quad & [3(Y_{xyy} - X_{xxy} - Y_y + 3X_x) - 2y(Y_{yy} - 2X_{xy}) + 6(Y_y - X_x)]y_x^2 \\
+ \quad & (Y_{yyy} - 3X_{xyy} + 2yX_{yy} + 12X_y - 6X_y)y_x^3 - X_{yyy}y_x^4 \\
+ \quad & [3(Y_{xy} - X_{xx}) + 2y(Y_y - 3X_x) - 2y(Y_y - 2X_x) - 2Y]y_{xx} - 3X_y y_{xx}^2 \\
+ \quad & [3(Y_{yy} - 3X_{xy} + 2yX_y) - 8yX_y]y_x y_{xx} - 6X_{yy}y_x^2 y_{xx} = 0. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Analizando los coeficientes asociados a $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^4, y_{xx}, y_{xx}^2, y_x y_{xx}, y_x^2 y_{xx}$ en (12), se obtienen las ecuaciones determinantes:

$$X_y = Y_{yy} = 0, \qquad (13a)$$

$$3Y_y + 3X_x = 0, \qquad (13b)$$

$$Y_{xxx} - 2yY_{xx} = 0, \qquad (13c)$$

$$3Y_{xy} - 2Y - 2yX_x - 3X_{xx} = 0, \qquad (13d)$$

$$6Y_x - 4yY_{xy} + 3Y_{xxy} + 2yX_{xx} - X_{xxx} = 0. \qquad (13e)$$

Al solucionar en (13a) se tiene: $X = c_1(x)$ y $Y = c_2(x)y + c_3(x)$, por lo tanto de (13b) se sigue que $3c_2(x) + 3c_1'(x) = 0$ y por tanto, $c_2(x) = -c_1'(x)$. en consecuencia se tiene que

$$X = c_1(x), \qquad Y = -c_1'(x)y + c_3(x). \qquad (14)$$

Sustituyendo (14) en (13d) se tiene $-3c_1''(x) + 2yc_1'(x) - 2c_3(x) - 2yc_1'(x) - 3c_1''(x) = 0$, esto es, $-3c_1''(x) = c_3(x)$ y por tanto de (14), se obtiene

$$X = c_1(x) \quad ; \quad Y = -c_1'(x)y - 3c_1''(x). \qquad (15)$$

Utilizando (15) en (13e), se sigue que

$$y(-6c_1''(x) + 4c_1''(x) + 2c_1''(x)) - 22c_1'''(x) = 0,$$

de lo cual $-22c_1'''(x) = 0$ y por tanto,$c_1(x) = c_3x^2 + c_2x + c_1$, con c_1, c_2, c_3 constantes. En consecuencia, reescribiendo la expresión (15) se obtiene que $X = c_3x^2 + c_2x + c_1$ y $Y = (-2c_3x - c_2)y - 3(2c_3)$, por lo que generadores infinitesimales son:

$$X = c_3x^2 + c_2x + c_1 \qquad Y = -c_2y - c_3(2xy + 6), \qquad (16)$$

con c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias. De tal forma se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma &= X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} = (c_3x^2 + c_2x + c_1)\frac{\partial}{\partial x} + (-c_2y - c_3(2xy+6))\frac{\partial}{\partial y}, \\
&= c_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + c_2\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) + c_3\left(x^2\frac{\partial}{\partial x} - (2xy+6)\frac{\partial}{\partial y}\right), \\
&= c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + c_3\Pi_3.
\end{aligned}$$

Por tanto, el grupo continuo de simetrías es generado por los operadores que aparecen en el enunciado propuesto. □

3. Cálculo del álgebra óptima y soluciones invariantes.

En esta sección se calcula el álgebra óptima [17, 21, 22, 23] a partir del grupo de simetrías de Lie generado por los operadores (6), que corresponde a la ecuación (4). Posteriormente se presentarán las soluciones invariantes correspondientes a los operadores que generan al álgebra óptima. Esto último se hará mediante el uso de la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [21], ya que al aplicar el método basado en la reducción canónica de variables, aparecen cálculos mucho más complejos.

De acuerdo a (6), el espacio vectorial generado por los operadores Π_1, Π_2, Π_3 es un álgebra de Lie 3-dimensional. A continuación se usará dicha álgebra para determinar el sistema óptimo, mediante la aplicación ordenada de la acción de los mapas conmutadores y adjuntos, tal como se describe en [23]. Para cada Π_α, Π_β con $i = 1, 2$ y $\alpha, \beta = 1, 2, 3.$ se considera

$$[\Pi_\alpha, \Pi_\beta] = \Pi_\alpha\Pi_\beta - \Pi_\beta\Pi_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(\Pi_\alpha(\xi^i_\beta) - \Pi_\beta(\xi^i_\alpha)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{17}$$

donde ξ^i_α son los respectivos coeficientes infinitesimales de los operadores Π_α. Así por ejemplo, en la ecuación (6), tenemos que $\xi^1_1 = 1$, $\xi^1_3 = x^2$, $\xi^2_1 = 0$ y $\xi^2_3 = -(2xy+6)$. A continuación se presenta, a manera de ejemplo, el cálculo de $[\Pi_1, \Pi_3]$ para ilustrar la aplicación de (17) en (6):

$$
\begin{aligned}
[\Pi_1, \Pi_3] &= \left(\Pi_1(\xi_3^1) - \Pi_3(\xi_1^1)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\Pi_1(\xi_3^2) - \Pi_3(\xi_1^2)\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(\Pi_1(x^2) - \Pi_3(1)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\Pi_1(-(2xy+6)) - \Pi_3(0)\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left[2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}\right] = 2\Pi_2.
\end{aligned}
$$

De manera análoga, se calculan los conmutadores para el resto de las simetrías descritas en (6). La Tabla (1) representa los resultados obtenidos.

$[\,,]$	Π_1	Π_2	Π_3
Π_1	0	Π_1	$2\Pi_2$
Π_2	$-\Pi_1$	0	Π_3
Π_3	$-2\Pi_2$	$-\Pi_3$	0

Tabla 1: Conmutadores del grupo de simetrías.

Nótese que el álgebra generada por (6) es un álgebra no soluble [9], pues observando la Tabla (1) se tiene

$$\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle = \Pi_1, \qquad \langle \Pi_1, \Pi_3 \rangle = 2\Pi_2, \qquad \langle \Pi_2, \Pi_3 \rangle = \Pi_3.$$

Por otra parte, usando nuevamente la Tabla (1), se puede calcular el operador adjunto para (6) que a su vez, permite construir el sistema óptimo de (6). Se usará el operador adjunto presentado en [23] y definido como:

$$Ad(\exp(\lambda\Pi))H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}(ad(\Pi))^n G, \quad \text{para simetrías } \Pi \text{ y } G. \tag{18}$$

En la Tabla (2) se resume el resultado de aplicar el operador (18) al grupo de generadores de simetrías (6).

$Adj[\,]$	Π_1	Π_2	Π_3
Π_1	Π_1	$\Pi_2 - \lambda\Pi_1$	$\Pi_3 - 2\lambda\Pi_2 + \lambda^2\Pi_1$
Π_2	$e^{\lambda}\Pi_1$	Π_2	$e^{-\lambda}\Pi_3$
Π_3	$\Pi_1 + 2\lambda\Pi_2 + \lambda^2\Pi_3$	$\Pi_2 + \lambda\Pi_3$	Π_3

Tabla 2: Representación adjunta del grupo de simetrías.

Para calcular el sistema del álgebra óptima, se inicia con los generadores de las simetrías (6) y un vector genérico distinto de cero. Sea

$$G = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + a_3\Pi_3. \tag{19}$$

El objetivo es simplificar tantos coeficientes a_i como sea posible, a través de mapas adjuntos a G, mediante la Tabla (2).

1. Suponiendo $a_3 = 1$ en (19) tenemos que $G = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + \Pi_3$. La simplificación se hace aplicando el operador estratégicamente para cada Π_i $(i = 1, 2)$. Utilizando la Tabla (2) se tiene

   $$G_1 = Ad(\exp(\lambda_1\Pi_1))G = a_1\Pi_1 + a_2(\Pi_2 - \lambda_1\Pi_1) + \Pi_3 - 2\lambda_1\Pi_2 + \lambda_1^2\Pi_1,$$

   así, organizando se obtiene

   $$G_1 = b_1\Pi_1 + (a_2 - 2\lambda_1)\Pi_2 + \Pi_3, \tag{20}$$

   con $b_1 = a_1 - a_2\lambda_1 + \lambda_1^2$. Tomando $\lambda_1 = \frac{a_2}{2}$ en (20), se elimina Π_2, por tanto $G_1 = b_1\Pi_1 + \Pi_3$. Ahora se procede aplicar el adjunto para Π_3, obteniendo

   $$G_2 = Ad(\exp(\lambda_2\Pi_3))G_1 = b_1\Pi_1 + 2b_1\lambda_2\Pi_2 + \left(b_1\lambda_2^2 + 1\right)\Pi_3. \tag{21}$$

   Al simplificar la expresión cuadrática, surgen los siguientes casos:

   (a) Caso $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{-1}{b_1}}$ con $b_1 < 0$. Tomando $\lambda_2 = \pm\sqrt{\frac{-1}{b_1}}$, con $b_1 < 0$, en (21) se elimina Π_3, luego $G_2 = b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2$, con $2\lambda_2 b_1 = b_2$. Finalmente, aplicando el adjunto para Π_2 se tiene que

   $$G_3 = Ad(\exp(\lambda_3\Pi_2))G_2 = b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2 \text{ con } b_3 = e^{-\lambda_3}b_1.$$

   Es claro que esta acción no reduce los coeficientes, por lo tanto un elemento del álgebra óptima es $b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2$, con $b_3 = e^{-\lambda_3}b_1 < 0$.

   (b) Caso $b_1 = 0$. En (21) se elimina Π_1 y Π_2, entonces $G_2 = \Pi_3$. Aplicando el adjunto para Π_2 se tiene

   $$G_3 = Ad(\exp(\lambda_5\Pi_2))G_2 = e^{-\lambda_5}\Pi_3.$$

   Esta acción no reduce más los coeficientes y, por ende, otro elemento del álgebra óptima es: Π_3.

2. Suponiendo $a_3 = 0$ y $a_2 = 1$ en (19) tenemos que $G = a_1\Pi_1 + \Pi_2$. Al aplicar Π_1 utilizando la tabla (2) se obtiene

$$G_1 = Ad(\exp(\lambda_6\Pi_1))G = (a_1 - \lambda_6)\Pi_1 + \Pi_2.$$

Así, tomando $\lambda_6 = a_1$ se elimina Π_1, luego $G_1 = \Pi_2$. Procedemos a aplicar el adjunto para Π_3, obteniendo

$$G_2 = Ad(\exp(\lambda_7\Pi_3))G_1 = \Pi_2 + \lambda_7\Pi_3.$$

Dado que esta acción no reduce coeficientes, tenemos que $G_2 = \Pi_2 + b_4\Pi_3$. Por tanto, un elemento más del álgebra óptima es $\Pi_2 + b_4\Pi_3$.

3. Finalmente, suponiendo $a_3 = 0, a_2 = 0$ y $a_1 = 1$ se tiene $G = \Pi_1$. Al aplicar el adjunto para Π_1, se obtiene

$$G_1 = Ad(\exp(\lambda_9\Pi_1))G = \Pi_1.$$

Esta acción no permite reducir coeficientes y por ende tenemos que $G_1 = \Pi_1$. Por tanto, tenemos que otro elemento del álgebra óptima es Π_1.

En resumen, se tiene el siguiente sistema óptimo, o álgebra optima, para las simetrías de (6):

$$\{\, b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2, \quad \Pi_2 + b_4\Pi_3, \quad \Pi_1, \quad \Pi_3 \,\}, \tag{22}$$

con $b_2, b_3, b_4 \,\epsilon\, \mathbb{R}$. con $b_3 < 0$. Este proceso puede ser resumido en el siguiente resultado.

Proposición 2. *El grupo de álgebra óptima para la ec.(4) es generado por los siguientes campos vectoriales:*

$$b_3\Pi_1 + b_2\Pi_2\,, \quad \Pi_2 + b_4\Pi_3\,, \quad \Pi_1\,, \quad \Pi_3\,, \tag{23}$$

con $b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$. con $b_3 < 0$.

A continuación se caracterizan las soluciones invariantes a partir de los operadores que generan al álgebra óptima.

El álgebra óptima asociada a una ecuación diferencial, es el menor álgebra que contiene al respectivo grupo de Lie y que es generada por el máximo

número posible de operadores que dejan la ecuación diferencial invariante. Por lo anterior, todas las posibles reducciones que dejan a la ecuación diferencial invariante, se pueden obtener de los operadores que generan al álgebra óptima. En particular, todas aquellas reducciones que correspondan a soluciones invariantes de la ecuación diferencial, se pueden obtener de los elementos generadores del álgebra óptima. Por lo anterior, el álgebra óptima caracteriza a todas las posibles soluciones invariantes de la ecuación diferencial. En este sentido, a continuación se procederá a caracterizar todas las posibles soluciones invariantes de la ec.(4), mediante el sistema óptimo (22).

Usando elementos del sistema óptimo (22) se reduce la ec.(4) mediante la condición de curva invariante presentada en la sección 4.3 de [21], que en este caso se expresa en términos de los infinitesimales por

$$Q(x, y, y_x) = Y - y_x X = 0. \tag{24}$$

Se calcula la solución invariante de la ec.(4) usando el elemento Π_1 del grupo óptimo (22), bajo la condición (24). De tal forma se tiene $Q = Y_1 - y_x X_1 = -y_x = 0$ y así, $y(x) = c$, con c constante. Pero para que la solución $y(x) = c$ sea solución invariante de (4), es necesario que $c = 0$ y así, $y(x) = 0$.

Se calcula a continuación otra de las soluciones invariantes de la ec.(4), usando el elemento $-\Pi_1+\Pi_2$ del grupo óptimo (22). Nuevamente con la condición (24) se tiene $Q = Y_{1,2} - y_x X_{1,2} = -y - y_x(x-1) = 0$, de donde $y(x) = \frac{c}{1-x}$, con c constante. Para que esta solución de (4) sea invariante, es necesario que $c \in \{0, 6\}$. Por tanto otra solución invariante es $y(x) = \frac{6}{1-x}$.

Al calcular otra solución invariante de la ec.(4) usando el elemento Π_3 del grupo óptimo (22), con la condición de invarianza (24), se obtiene $Q = Y_3 - y_x X_3 = -(2xy+6) - y_x x^2 = 0$, de donde $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}$, con c constante y para que sea solución invariante se requiere que $y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}$.

Finalmente, la última solución invariante de (4) corresponde al elemento $\Pi_2+\Pi_3$ del grupo óptimo (22). De la condición (24), se sigue $Q = Y_{2,3} - y_x X_{2,3} = -(y+2xy+6) - y_x(x+x^2) = 0$, cuya solución para y es $y(x) = \frac{c}{x(x+1)} - \frac{6}{x+1}$, con c constante. Para que dicha solución sea solución invariante de la ec.(4) es necesario que $c \in \{0, -6\}$ y asi otra solución invariante de la ec.(4) es

$y(x) = \frac{-6}{x(x+1)} - \frac{6}{x+1}$, así que es equivalente a $y(x) = \frac{-6}{x}$.

Se resume el proceso anterior en el siguiente resultado.

Proposición 3. *Las soluciones invariantes de la ecuación de Chazy (4), que se obtienen al reducir la ecuación a partir de los elementos generadores del álgebra óptima (23), son:*

$$1)\ y(x) = 0, \quad 2)\ y(x) = \frac{6}{1-x}, \quad 3)\ y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}, \quad 4)\ y(x) = \frac{-6}{x},$$

con c constante arbitraria.

Observaciones:
Las soluciones invariantes presentadas en la Proposición 3, caracterizan a todas las soluciones invariantes de (4), además son diferentes de las soluciones presentadas en [11, 14, 9]. En particular, se puede comprobar que tanto la solución invariante 2), como la familia de soluciones invariantes 3), no se pueden obtener a partir de (5) y por tanto son diferentes a las soluciones presentadas en [15].

4. Conclusión

Mediante el grupo de simetrías de Lie de (4), se calcula el álgebra óptima, como se presenta en la Proposición 2. Al usar los elementos de álgebra óptima, se pudo caracterizar todas las soluciones invariantes; como se presenta en la Proposición 3. Tanto la solución invariante del numeral 2), como la familia de soluciones invariantes correspondientes al numeral 3) de la Proposición 3, no aparecen hasta la fecha en la literatura, por ende el objetivo propuesto fue logrado. Para futuros trabajos, se podría retomar el grupo de simetrías de Lie para calcular las leyes de conservación de (4) y también usar la teoría de grupo de equivalencia [24], para conseguir ordenaciones preliminares para una clasificación completa de (4).

5. Referencias

[1] L. Rosenhead, Laminar Boundary Layers, Clarendon Press, (1963).

[2] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Graduate texts in Mathematics 107 (1993).

[3] H. Schlichting, Laminare strahlausbreitung, Z. Angew. Math. Mech. 13 (1933) 260–263.

[4] W. G. Bickley, The plane jet, Phil. Mag. 23 (1937) 727–721.

[5] H. B. Squire, 50 fahre grenzschichtforschung, edited by Gorter H and Tollmien W, Braunschweig: Vieweg (1955).

[6] M. B. Glauert, The wall jet, J. Fluid Mech. 1 (1956) 625–643.

[7] N. Riley, Asymptotic expansions in radial jets, J.Math. and Phys. 41 (1962) 132–146.

[8] L. J. Crane, Flow past a stretching plate, Z. Angew. Math. Mech. 21 (1970) 645–647.

[9] N. H. Ibragimov, M. C. Nucci, Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: Equations admitting three-dimensional Lie algebras, Lie Groups and their applications 1 (1994) 49–64.

[10] F. M. Mahomed, Symmetry group classification of ordinary differential equations: Survey of some results, Mathematical Methods in the Applied Sciences 30 (2007) 1995–2012.

[11] J. Chazy, Sur les equations differentielles dont l'integrale generale est uniforme et admet des singelarities essentielles mobiles, C. R. Acad. Sc. Paris 149 (1909) 563–565.

[12] J. Chazy, Sur les equations differentielles dont l'integrale generale possede une coupure essentielle mobile, C. R. Acad. Sc. Paris 150 (1910) 456–458.

[13] J. Chazy, Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes, Acta Math. 34 (1911) 317–385.

[14] P. A. Clarkson, P. J. Olver, Symmetry and the Chazy equation, J. Diff. Eq. 124 (1996) 225–246.

[15] R. Naz, F. M. Mahomed, D. P. Mason, Symmetry solutions of a third-order ordinary differential equation which arises from Prandtl boundary layer equations, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 15 (2008) 179–191.

[16] D. J. Arrigo, Symmetry analysis of differential equations, Wiley, (2014).

[17] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, (1986).

[18] G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Springer Science and Business Media, (2008).

[19] N. H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, (1996).

[20] G. W. Bluman, J. D. Cole, Asimilarity methods for differential equations, Springer-Verlag, (1974).

[21] P. Hydon, D. Crighton, Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2000).

[22] Z. Hussain, Optimal system of subalgebras and invariant solutions for the Black-Scholes equation, Blekinge Institute of Technology, (2009).

[23] G. Zewdie, Lie simmetries of junction conditions for radianting stars, University of KwaZulu-Natal, (2011).

[24] L. Ovsyannikov, Group analysis of differential equations, Academic Press 75 (1982) 204–211.

Complete classification of the Lie symmetry group, equivalence group and invariant solutions for a generalization of Chazy equation

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa[1], Yeisson Alexis Acevedo Agudelo[2], Oscar Mario Londoño Duque[3]

Abstract

In this work, the complete classification of the symmetry group for a generalization of Chazy equation was carried out. In the case of the standard Chazy equation, invariant solutions are obtained using the optimal algebra. Finally, the equivalence group for the generalized Chazy equation is calculated and used to present the principal algebra of the equation.

Keywords: Lie group symmetries; Complete classification of the symmetry group; Equivalence groups; Optimal algebra; Invariant solutions; Principal algebra; Generalized Chazy equation.

[1] *email:* gloaiza@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[2] *email:* yaceved2@eafit.edu.co, Universidad EAFIT, Colombia.
[3] *email:* o154278@dac.unicamp.br, IMECC-UNICAMP, Brasil.

1. Introduction

In [1], Rosenhead introduces Prandtl's boundary layer equation for the stream function for an incompressible, steady two-dimensional flow with uniform or vanishing mainstream velocity as

$$\nu u_{yyy} = u_y u_{xy} - u_x u_{yy}, \tag{1}$$

where ν is a real number and represent the kinematic viscosity. Using the classical Lie method of infinitesimal transformations [2], the similarity solution for (1) is found to be

$$u(x,y) = x^{1-\alpha} g(\omega), \quad \omega = \frac{y}{x^{\alpha}}\,. \tag{2}$$

Where $g(\omega)$ is a real function and at least $C^{(3)}$. The substitution of (2) in (1) yields a third-order ordinary differential equation in $g(\omega)$, having the form

$$\nu g_{\omega\omega\omega} + D g g_{\omega} + A(g_{\omega})^2 = 0, \tag{3}$$

where α is a real number and $D = 1-\alpha$ (2-dimensional form) or $D = 2-\alpha$ (radial form), with $A = 2-\alpha$ in both cases. In [3], Schlichting proposes a numerical solution for a free 2-dimensional jet in which $\alpha = 2/3$ and later an analytic solution was derived by Bickley [4]. In [5], Squire obtained the solution for the free radial jet for which $\alpha = 1$. In [6], Glauert presents solutions in parametric form when $\alpha = \frac{5}{4}$ (2-dimensional) and $\alpha = \frac{3}{4}$ (radial), and in [7], Riley presents a solution with $\alpha = 2$ (radial).

The case with $\alpha = -1$ (2-dimensional), $\alpha = -4$ (radial) and $\nu = 1$ has been the most studied equation using the theory of symmetries. In this case (3) becomes

$$y_{xxx} - 2y y_{xx} + 3y_x^2 = 0\,. \tag{4}$$

This equation, known as Chazy equation, was introduced by the same author in [8]. In [8, 9, 10] Chazy established that the group of symmetries of (4) is a non-solvable group, and determined a reduction of this equation. In [11] Clarkson and Olver also established that the group of symmetries of (4) is a non-solvable algebra, and expressed the general solution of (4) as the ratio of two solutions of a hypergeometric equation. In [12], Ibragimov and Nucci, using the theory of Lie symmetries, were able to reduce (4) by the method of semi-canonical variables. In [13] the theory of non-local Lie symmetries was

used to reduce (4), and later in [14] an improvement of [13] is presented. In [15], Arrigo calculated the group of symmetries and the invariant transformation of this group using canonical variables.

In this work, we considered the following generalization of (4)

$$y_{xxx} - f(y)y_{xx} + 3y_x^2 = 0, \tag{5}$$

where the function f is arbitrary with at least two derivatives. Our objective: i) to provide a complete classification of Lie symmetries group for (5); ii) to calculate and use the optimal algebra to determine invariant solutions of (4); and iii) to determine the equivalence group of (5) and use it to obtain the principal algebra of (5). Literature [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] are classical references in this area.

2. Lie Point Symmetries.

In this section, we study the Lie point symmetries of (5). Following the classical Lie technique for calculating the symmetries of differential equations [16, 17, 18, 19, 21, 22], we carried out the complete group classification for (5). The corresponding result can be stated as follows.

Proposition 1. *The Lie point symmetry group of the generalized Chazy equation (5) with arbitrary f, is generated by*

$$X_1 = \partial_x. \quad \textit{Principal algebra}, \tag{6}$$

for the special choices of f listed below, we write only the vectors fields additional to (6). Further alternative generating vector fields can be determined.

(i) If $f(y) = yk_1 + k_2$, where $k_1, k_2 \neq 0$ are constants, then

$$X_2 = -x\partial_x + \left(y + \frac{k_2}{k_1}\right)\partial_y.$$

(ii) If $f(y) = 2y + k_2$, where $k_2 \neq 0$ are constants, then

$$X_2 = -x\partial_x + \left(y + \frac{k_2}{2}\right)\partial_y, \qquad X_3 = -\frac{x^2}{2}\partial_x + \left(yx + \frac{k_2}{2} + 3\right)\partial_y.$$

(iii) If $f(y) = 2y$, then, the infinitesimal generators of the group are:

$$X_2 = -x\partial_x + y\partial_y, \qquad X_3 = -\frac{x^2}{2}\partial_x + (yx+3)\partial_y.$$

(iv) If $f(y) = k_2$ where $k_2 \neq 0$, then, the infinitesimal generators of the group are:

$$X_2 = \partial_y.$$

(v) If $f(y) = yk_1$ where $k_1 \neq 0, 2$, then, the infinitesimal generators of the group are:

$$X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

Proof. A general form of the one-parameter Lie group admitted by (5) is given by

$$x \to x + \epsilon\xi(x,y) + \cdots \quad \textit{and} \quad y \to y + \epsilon\eta(x,y) + \cdots ,$$

where ϵ is the group parameter. The vector field associated with the group of transformations shown above can be written as $\Gamma = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$. Applying its third prolongation

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma + \eta_{[x]}\frac{\partial}{\partial y_x} + \eta_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y_{xx}} + \eta_{[xxx]}\frac{\partial}{\partial y_{xxx}}$$

to (5), we must find the infinitesimals $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, satisfying the symmetry condition

$$\eta(-f_y(y)y_{xx}) + \eta_{[x]}(6y_x) + \eta_{[xx]}(-f(y)) + \eta_{[xxx]} = 0, \tag{7}$$

associated with (5). Here, $\eta_{[x]}, \eta_{[xx]}$ and $\eta_{[xxx]}$ are the coefficients in $\Gamma^{(3)}$ given by

$$\begin{aligned}
\eta_{[x]} &= D_x[\eta] - (D_x[\xi])y_x = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y y_x^2 \\
\eta_{[xx]} &= D_x[\eta_{[x]}] - (D_x[\xi])y_{xx} \\
&= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 \\
&\quad +(\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx}. \\
\eta_{[xxx]} &= D_x[\eta_{[xx]}] - (D_x[\xi])y_{xxx}, \\
&= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y_x^2 \\
&\quad + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})\, y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 + 3\,(\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y_{xx} \\
&\quad +3\,(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})\, y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3\xi_y y_{xx}^2 \\
&\quad + (\eta_y - 3\xi_x)\, y_{xxx} - 4\xi_y y_x y_{xxx}
\end{aligned} \tag{8}$$

and D_x is the total derivative operator: $D_x = \partial_x + y_x\partial_y + y_{xx}\partial_{y_x} + y_{xxx}\partial_{y_{xx}} \cdots$. Replacing (8) into (7) we obtain:

$$\begin{aligned}
&\eta(-f_y(y)y_{xx}) + (6y_x)(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y y_x^2) \\
&-(f(y))(\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3) \\
&-(f(y))((\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx}) \\
&+\eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y_x^2 \\
&+ (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})\, y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 + 3\,(\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y_{xx} \\
&+3\,(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})\, y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3\xi_y y_{xx}^2 \\
&+ (\eta_y - 3\xi_x)\, y_{xxx} - 4\xi_y y_x y_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Denoting $f \cong f(y)$, with $y_{xxx} = fy_{xx} - 3y_x^2$ and reorganizing with respect to $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^4, y_x y_{xx}, y_x^2 y_{xx}, y_{xx}$ and y_{xx}^2

$$\begin{aligned}
&\eta_{xxx} - f\eta_x + (6\eta_x - f(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + 3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x \\
&(6\eta_y - 6\xi_x - f(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) + 3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} - 3(\eta_y - 3\xi_x))y_x^2 \\
&+(-6\xi_y + f\xi_{yy} + \eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} + 12\xi_y)y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\
&+(3f\xi_y + 3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} - 4f\xi_y)y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} \\
&+(-f_y\eta - f(\eta_y - 2\xi_x) + 3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + f(\eta_y - 3\xi_x))y_{xx} \\
&-3\xi_y y_{xx}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

From (10), canceling the coefficients of the monomials variables in derivatives $1, y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^4, y_x y_{xx}, y_x^2 y_{xx}, y_{xx}$ and y_{xx}^2 we obtain the determining equations for the symmetry group of (5). That is:

$$\xi_y = \eta_{yy} = 0, \tag{11a}$$
$$\eta_y + \xi_x = 0, \tag{11b}$$
$$-f\eta_{xx} + \eta_{xxx} = 0, \tag{11c}$$
$$f(-2\eta_{xy} + \xi_{xx}) + 6\eta_x + 3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} = 0, \tag{11d}$$
$$-f_y\eta - f\xi_x + 3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} = 0. \tag{11e}$$

Solving in (11a) we have $\xi = c_1(x)$ and $\eta = yc_2(x) + c_3(x)$, with c_1, c_2, c_3 as arbitrary functions. From the expressions for ξ and η into (11b), (11c), (11d)

and (11e), we obtain respectively:

$$c_2(x) + c_1'(x) = 0, \tag{12a}$$
$$-(yc_2''(x) + c_3''(x))f + yc_2'''(x) + c_3'''(x) = 0, \tag{12b}$$
$$[-2c_2'(x) + c_1''(x)]f + 6[yc_2'(x) + c_3'(x)] + 3c_2''(x) - c_1'''(x) = 0, \tag{12c}$$
$$-[yc_2(x) + c_3(x)]f_y - c_1'(x)f + 3c_2'(x) - 3c_1''(x) = 0. \tag{12d}$$

Using (12a) and differentiating (12c) with respect to y we obtain $-3c_2'(x)f_y + 6c_2'(x) = 0$, whose derivative with respect to y yields

$$-3c_2'(x)f_{yy} = 0. \tag{13}$$

For (13), we consider two cases: $f_{yy} \neq 0$ or $f_{yy} = 0$.

First, we consider the case $f_{yy} \neq 0$. According to (13), we can assert that $-3c_2'(x) = 0$, hence $c_2(x) = k_1$, with k_1 an arbitrary constant. Then from (12a), we obtain:

$$c_2(x) = k_1, \qquad c_1(x) = -xk_1 + k_2, \tag{14}$$

with k_2 an arbitrary constant. By replacing (14) into (12c), we get $c_3'(x) = 0$, so that $c_3(x) = k_3$. From the above and (14) into (12d), it follows that $-(yk_1 + k_3)f_y + f(k_1) = 0$. By differentiating in the previous expression with respect to y, we have $(yk_1 + k_3)f_{yy} = 0$. But we know that $f_{yy} \neq 0$, therefore $k_1 = 0$ and $k_3 = 0$. Consecuently, from $c_3(x) = k_3$ and (14), we obtain the infinitesimal generators of the group, $\xi = c_1(x) = k_2$ and $\eta = k_1 y + k_3 = 0$, which is equivalent to $X_1 = \partial_x$. The above constitutes the principal algebra presented in (6), whenever $f_{yy} \neq 0$.
We consider now the case $f_{yy} = 0$, and proceed to use (13) to establish (6). First, from $f_{yy} = 0$, we have

$$f(y) = yk_1 + k_2 \tag{15}$$

with k_1, k_2 as arbitrary constants. Then, from (15) we see that there are two cases to be considered regarding $k_1 \neq 0$ or $k_1 = 0$.

1. Case $k_1 \neq 0$. For (15) consider two cases: $k_2 \neq 0$ or $k_2 = 0$.

(a) Case $k_1 \neq 0$ and $k_2 \neq 0$. From (15) and (12b) we get $-(yk_1 + k_2)(yc_2''(x) + c_3''(x)) + yc_2'''(x) + c_3'''(x) = 0$. By differentiating the last expression with respect to y, we obtain

$$-k_2 c_2''(x) - 2k_1 y c_2''(x) - k_1 c_3''(x) + c_2'''(x) = 0. \tag{16}$$

Now, by differentiating (16) with respect to y, we find $-2k_1 c_2''(x) = 0$, that implies $c_2'(x) = k_3$, and thus, $c_2(x) = xk_3 + k_4$, where k_3, k_4 are arbitrary constants. From (12a) we have

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{2}k_3 - xk_4 + k_5. \tag{17}$$

By substitution of $c_2(x) = xk_3 + k_4$ into (16), we get $c_3''(x) = 0$, so

$$c_3(x) = xk_6 + k_7. \tag{18}$$

From (15), $c_2(x) = xk_3 + k_4$, (17) and (18) into (12c), we obtain

$$(yk_1 + k_2)(-3k_3) + 6(yk_3 + k_6) = 0, \tag{19}$$

and by differentiating this expression with respect to y, we find

$$k_3(-k_1 + 2) = 0. \tag{20}$$

From (20) we see that there are two cases to be considered: $k_3 = 0$ or $k_3 \neq 0$.

i. Case $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, and $k_3 = 0$. From (19) we have $k_6 = 0$. From $c_2(x) = k_4$, (17) and (18), we have:

$$c_1(x) = -xk_4 + k_5, \quad c_2(x) = k_4, \quad c_3(x) = k_7. \tag{21}$$

From (21) and (15) into (12d), we find $-k_1 k_7 + k_2 k_4 = 0$, implies $k_7 = \frac{k_2 k_4}{k_1}$. Then, we can rewrite (21) as :

$$c_1(x) = -xk_4 + k_5, \quad c_2(x) = k_4, \quad c_3(x) = \frac{k_2 k_4}{k_1}. \tag{22}$$

Summarizing, the infinitesimal generators of the group are:

$$\eta = yk_4 + \frac{k_2 k_4}{k_1}, \qquad \xi = -xk_4 + k_5,$$

which is equivalent to:

$$X_1 = \partial x \quad \text{and} \quad X_2 = -x\partial_x + \left(y + \frac{k_2}{k_1}\right)\partial_y. \tag{23}$$

ii. Case $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ and $k_3 \neq 0$. From (20), we have $k_1 = 2$. From (19), $(2y + k_2)(-3k_3) + 6(yk_3 + k_6) = 0$, which implies $k_6 = \frac{k_3 k_2}{2}$. Pluggin this into $c_2(x) = xk_3 + k_4$, (17) and (18), we obtain

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{2}k_3 - xk_4 + k_5, \qquad c_2(x) = xk_3 + k_4,$$
$$c_3(x) = x\frac{k_3 k_2}{2} + k_7. \tag{24}$$

Inserting (15) and (24) into (12d), we find $-2[y(xk_3 + k_4) + (x\frac{k_3 k_2}{2} + k_7)] - (2y + k_2)[-(xk_3 + k_4)] + 6k_3 = 0$, hence $k_7 = \frac{k_2 k_4}{2} + 3k_3$. From this into (24) it follows that

$$c_1(x) = -\frac{x^2}{2}k_3 - xk_4 + k_5, \qquad c_2(x) = xk_3 + k_4,$$
$$c_3(x) = x\frac{k_3 k_2}{2} + \frac{k_2 k_4}{2} + 3k_3. \tag{25}$$

Summarizing, the infinitesimal generators of the group are:

$$\eta = yxk_3 + yk_4 + x\frac{k_3 k_2}{2} + \frac{k_2 k_4}{2} + 3k_3, \quad \xi = -\frac{x^2}{2}k_3 - xk_4 + k_5,$$

which is equivalent to $X_1 = \partial_x$, $X_2 = -x\partial_x + (y + \frac{k_2}{2})\partial_y$, and

$$X_3 = -\frac{x^2}{2}\partial_x + (yx + \frac{k_2}{2} + 3)\partial_y.$$

(b) Case $k_1 \neq 0$ and $k_2 = 0$. From (15) we have $f(y) = yk_1$, then using (12b), we have $-y^2(k_1 c_2''(x)) - y(k_1 c_3''(x)) - c_2''(x)) + c_3'''(x) = 0$. By differentiating this with respect to y, it follows

$$-2yk_1(c_2''(x)) - k_1 c_3''(x) + c_2'''(x) = 0. \tag{26}$$

From this, we conclude that $c_2''(x) = 0$, thus $c_2(x) = xk_3 + k_4$, with k_3, k_4 as arbitrary constants. When replacing $c_2(x) = xk_3 + k_4$ into (26), we obtain $c_3''(x) = 0$, hence $c_3(x) = xk_6 + k_7$, with k_6, k_7 as arbitrary constants. From $c_2(x) = xk_3 + k_4$ into (12a), we find $c_1'(x) = -xk_3 - k_4$, hence $c_1(x) = -\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5$. Now, from $f(y) = yk_1$, $c_2(x) = xk_3 + k_4$, $c_3(x) = xk_6 + k_7$ and $c_1(x) =$

$-\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5$ into (12c), we obtain $yk_3(-k_1+2) + 2k_6 = 0$, which implies that

$$k_6 = 0 \qquad \text{and} \qquad k_3(-k_1+2) = 0. \tag{27}$$

Then, from (27) consider two cases: $k_3 = 0$ or $k_3 \neq 0$.

i. Case $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ and $k_3 = 0$. From $c_2(x) = xk_3 + k_4$, $c_3(x) = xk_6 + k_7$, and $c_1(x) = -\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5$, we have

$$c_1(x) = -xk_4 + k_5 \quad , \quad c_2(x) = k_4 \quad , \quad c_3(x) = k_7. \tag{28}$$

From (28) into (12d) we obtain $k_7 = 0$. Then, we get:

$$c_1(x) = -xk_4 + k_5 \quad , \quad c_2(x) = k_4 \quad , \quad c_3(x) = 0. \tag{29}$$

Summarizing, the infinitesimal generators of the group are:

$$\eta = yk_4 \qquad , \qquad \xi = -xk_4 + k_5,$$

which is equivalent to:

$$X_1 = \partial_x \qquad , \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

ii. Case $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ and $k_3 \neq 0$. From (27), we have $k_1 = 2$. Then, from $c_2(x) = xk_3 + k_4$, $c_3(x) = xk_6 + k_7$, and $c_1(x) = -\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5$, we find:

$$c_1(x) = -\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5, \quad c_2(x) = xk_3 + k_4, \quad c_3(x) = k_7, \tag{30}$$

Summarizing, the infinitesimal generators of the group are:

$$\eta = yxk_3 + yk_4 + k_7, \qquad \xi = -\frac{k_3}{2}x^2 - xk_4 + k_5,$$

with $k_7 = 3k_3$, which is equivalent to:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = -x\partial_x + y\partial_y, \quad X_3 = -\frac{x^2}{2}\partial_x + (yx+3)\partial_y \ .$$

2. From (15), suppose that $k_1 = 0$. Then, we have $f(y) = k_2$ and consequently, from (12b) we obtain:

$$y[-k_2 c_2''(x) + c_2'''(x)] - k_2 c_3''(x) + c_3'''(x) = 0. \tag{31}$$

Using (12a) in the expression above we can conclude:

$$c_1(x) = \frac{-a_1}{k_2^3} e^{xk_2} - \frac{a_3}{2} x^2 - x a_2 + a_4, \quad c_2(x) = \frac{a_1}{k_2^2} e^{xk_2} + x a_3 + a_2,$$

$$c_3(x) = \frac{a_5}{k_2^2} e^{xk_2} + x a_6 + a_7, \tag{32}$$

with $a_1, \cdots, a_7$ arbitrary constants. Using (32) into (12c) we get:

$$e^{xk_2} \left[y \left(\frac{6a_1}{k_2} \right) + a_1 + \frac{6a_5}{k_2} \right] + 6a_6 - 3a_3 k_2 + y(6a_3) = 0, \tag{33}$$

which implies that $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$. From (32),

$$c_1(x) = -x a_2 + a_4, \qquad c_2(x) = a_2, \qquad c_3(x) = a_7. \tag{34}$$

From (34) into (12d), we have $k_2 a_2 = 0$, hence $a_2 = 0$. Then, $c_1(x) = a_4$, $c_2(x) = 0$, and $c_3(x) = a_7$. Thus, the infinitesimal generators of the group are $\eta = a_7$ and $\xi = a_4$, which is equivalent to

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y.$$

□

Remark 1. *By part (iii) of Proposition 1, and organizing the arbitrary constants, we get: the generators of the symmetry group of Equation (4), presented in [8, 11, 12, 13, 15] are:*

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = x\partial_x - y\partial_y, \qquad X_3 = x^2\partial_x - (2yx + 6)\partial_y. \tag{35}$$

3. Optimal algebra and invariant solutions of the Chazy equation

We know that [8, 11, 12, 13, 15], and [14] propose reductions and solutions of (4), using several methods that need the group of symmetries (35). We

will present different solutions using the optimal algebra. Initially let's build the commutators table of (35), in Table 1,

$[\,,]$	X_1	X_2	X_3
X_1	0	X_1	$2X_2$
X_2	$-X_1$	0	X_3
X_3	$-2X_2$	$-X_3$	0

Tabla 1: Commutators.

which was built using [23]. To build the optimal algebra we follow what is presented in [24], therefore we have the optimal algebra:

$$b_3X_1 + b_2X_2, \quad X_2 + b_4X_3, \quad X_1, \quad X_3, \tag{36}$$

with $b_2, b_4 \in \mathbb{R}$ y $b_3 < 0$. From (36) and the invariance condition

$$Q = Y - y_x X = 0,$$

presented in [22], in each element of the algebra, we have the following invariant solutions for (4):

$$1)\ y(x) = 0, \quad 2)\ y(x) = \frac{6}{1-x}, \quad 3)\ y(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{6}{x}, \quad 4)\ y(x) = -\frac{6}{x},$$

with c arbitrary constant. These solutions are different from those presented in [8, 11, 12, 13] and in particular solutions 2) and 3) are not presented in [14].

4. The equivalence group

An equivalence transformation for (5) is a change of variables $(x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$, where the structure of (5) is conserved. The infinitesimal generators of the continuous group of equivalence transformations have the form

$$\Gamma \;=\; \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \mu(x,y,f)\partial_f. \tag{37}$$

From (see [21],[25],[26],[27]) that the operator (37) generates the continuous equivalence group if it is admitted by the extended system:

$$\begin{cases} y_{xxx} - f y_{xx} + 3y_x^2 = 0, \\ f_x = 0. \end{cases} \tag{38}$$

The infinitesimal invariance test for the preceding extended system (38) requires the following prolongation of the operator (37):

$$\begin{aligned}\Gamma^{(3)} &= \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \mu(x,y,f)\partial_f \\ &\quad +\eta_{[x]}\partial_{y_x} + \eta_{[xx]}\partial_{y_{xx}} + \eta_{[xxx]}\partial_{y_{xxx}} + \omega\partial_{f_x},\end{aligned} \tag{39}$$

with $\eta_{[x]}, \eta_{[xx]}$ and $\eta_{[xxx]}$ given in (8) and $\omega = \widetilde{D}_x[\mu] - f_x\widetilde{D}_x[\xi] - f_y\widetilde{D}_x[\eta]$, where $\widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial f} + f_{xx}\frac{\partial}{\partial f_x}$. Applying $\Gamma^{(3)}$ given in (39) to the extended system (38), we obtain that the invariance test:

$$\begin{cases}\mu(-y_{xx}) + \eta_{[x]}(6y_x) + \eta_{[xx]}(-f) + \eta_{[xxx]} = 0, \\ \omega = 0,\end{cases} \tag{40}$$

Plugging (38) in (40) we have that $\omega = \mu_x - f_y(\eta_x) = 0$. Since the constant 1 and f_y are algebraically independent, the first equation above implies $\mu_x = 0$ and $\eta_x = 0$. Thus $\mu = \mu(y,f)$, $\eta = \eta(y)$, and $\xi = \xi(x,y)$. With these in hand, we substitute (8) into (40) and get

$$\begin{aligned}&\mu(-y_{xx}) + (6y_x)((\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y y_x^2) \\ -\ &(f)((-\xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx}) \\ -\ &(\xi_{xxx})y_x + 3(-\xi_{xxy})y_x^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})\,y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 + 3\,(-\xi_{xx})\,y_{xx} \\ &+3\,(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})\,y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3\xi_y y_{xx}^2 \\ &+(\eta_y - 3\xi_x)\,y_{xxx} - 4\xi_y y_x y_{xxx} = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

Then we replace $y_{xxx} = y_{xx}f - 3y_x^2$ in (41) and equalize to zero the coefficients of the various monomials involving derivatives of $y_x, y_x^2, y_x^3, y_x^4, y_x y_{xx}, y_x^2 y_{xx}, y_{xx}$ and y_{xx}^2. In this way, we obtain the following system of deterministic equations:

$$\xi_y = \eta_{yy} = \mu_x = 0, \tag{42a}$$

$$\eta_y + \xi_x = 0, \tag{42b}$$

$$f\xi_{xx} - \xi_{xxx} = 0, \tag{42c}$$

$$\mu + f\xi_x + 3\xi_{xx} = 0. \tag{42d}$$

From (42a):

$$\xi = c_1(x), \qquad \eta = yc_2(x) + c_3(x), \qquad \mu = \mu(y,f), \tag{43}$$

where c_1, c_2, c_3 are arbitrary functions. From (43) into (42b) we get

$$c_2(x) + c_1'(x) = 0. \tag{44}$$

From (43) and (44) into (42c) we have $c_1'' = 0$ implying $c_1(x) = xk_1 + k_2$ and $c_2(x) = -k_1$ with k_1, k_2 arbitrary constants. Since (43), we obtain

$$\xi = xk_1 + k_2, \qquad \eta = -k_1 y + c_3(x), \qquad \mu = \mu(y, f), \tag{45}$$

From (45) intro (42d):

$$\mu = -fk_1, \tag{46}$$

then the infinitesimal generators of the equivalence group of the (5) are $\eta = -k_1 y + c_3(x)$, $\xi = xk_1 + k_2$, and $\mu = -fk_1$ which is equivalent to $X_1 = x\partial_x - y\partial_y - f\partial_f$, $X_2 = \partial_x$ and $X_3 = c_3(x)\partial_y$. We summarize the above considerations as follows.

Proposition 2. *The Lie algebra for the continuous equivalence group of Equation (5), is generated by the following vector fields:*

$$X_1 = x\partial_x - y\partial_y - f\partial_f, \qquad X_2 = \partial_x, \qquad X_3 = c_3(x)\partial_y. \tag{47}$$

5. Principal algebra using the equivalence group

The most general symmetry algebra of Equation (5), for an arbitrary function f is called the Principal Lie Algebra $L_{\mathfrak{p}}$ [27]. This algebra can be obtained from equivalence algebra $L_{\mathfrak{e}}$ (47). Let us denote by $\mathbf{x} = (x)$ and $\mathbf{y} = (y)$ the independent and dependent variables, respectively, and by $\mathbf{f} \cong \{f\}$ the arbitrary elements in the system (5). Consider the projection $X = pr_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(Y)$ of the equivalence generator (47) to the space $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ of the independent and dependent variables, and the projection $Z = pr_{(\mathbf{y},\mathbf{f})}(Y)$ to the space $(\mathbf{y}, \mathbf{f})$ involved in the arbitrary elements:

$$X = pr_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(Y) = \xi\partial x + \eta\partial y \tag{48}$$

$$Z = pr_{(\mathbf{y},\mathbf{f})}(Y) = \eta\partial y + \mu\partial f. \tag{49}$$

From the above, it is clear that operators X and Y are well defined. That is, their coordinates involve only the respective variables, $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ and $(\mathbf{y}, \mathbf{f})$. In our specific case the proposition on projections is formulated as follows.

Proposition 3. *An operator X belongs to the principal Lie algebra $L_{\mathfrak{p}}$, for the (5) if and only if $X = pr_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(Y)$, where Y is an equivalence generator such that $Z = pr_{(\mathbf{y},\mathbf{f})}(Y) \cong 0$.*

Our goal is to apply Proposition 3 to find the principal Lie algebra $L_{\mathfrak{p}}$ of (5). Let's consider the equivalence generator $Y = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3$, which is a linear combination of the operators (47). The above is equivalent to

$$Y = k_1[x\partial x - y\partial y - f\partial f] + k_2[\partial_x] + k_3[c_3(x)\partial_y], \tag{50}$$

with projections (48) and (49) as

$$X = [xk_1 + k_2]\partial x + [-yk_1 + c_3(x)]\partial y, \tag{51}$$

$$Z = [-yk_1 + c_3(x)]\partial y + \partial f[-fk_1]. \tag{52}$$

Now we know that $Z \cong 0$ if and only if $k_1 = c_3(x) = 0$, thus applying Proposition 3, we can conclude that $Y = k_2X_2$. So, the principal Lie algebra $L_{\mathfrak{p}}$ of (5) is spanned by the operator $\{X_2\}$ presented in the Proposition 2, and also coincides with (6) of the Proposition 1.

6. Conclusions

In this work, the complete classification of the symmetry group of the generalized Chazy equation (5) was carried out (Proposition 1). Invariant solutions of equation (4) are different from those presented in [8, 11, 12, 13, 15] and [14], also were obtained using the optimal algebra. Finally, the group of equivalence for the generalized Chazy equation (5) was calculated and it provided another way to calculate the principal algebra. It is possible to continue this work, by calculating the conservation laws for (4) using the symmetries presented in Proposition 1, and making an analysis as proposed in [27], using the equivalence group (47).

7. References

[1] L. Rosenhead, Laminar Boundary Layers, Clarendon Press, (1963).

[2] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Graduate texts in Mathematics 107 (1993).

[3] H. Schlichting, Laminare strahlausbreitung, Z. Angew. Math. Mech. 13 (1933) 260–263.

[4] W. G. Bickley, The plane jet, Phil. Mag. 23 (1937) 727–721.

[5] H. B. Squire, 50 fahre grenzschichtforschung, edited by Gorter H and Tollmien W, Braunschweig: Vieweg (1955).

[6] M. B. Glauert, The wall jet, J. Fluid Mech. 1 (1956) 625–643.

[7] N. Riley, Asymptotic expansions in radial jets, J.Math. and Phys. 41 (1962) 132–146.

[8] J. Chazy, Sur les equations differentielles dont l'integrale generale est uniforme et admet des singelarities essentielles mobiles, C. R. Acad. Sc. Paris 149 (1909) 563–565.

[9] J. Chazy, Sur les equations differentielles dont l'integrale generale possede une coupure essentielle mobile, C. R. Acad. Sc. Paris 150 (1910) 456–458.

[10] J. Chazy, Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur dont l'integrale generale a ses points critiques fixes, Acta Math. 34 (1911) 317–385.

[11] P. A. Clarkson, P. J. Olver, Symmetry and the Chazy equation, J. Diff. Eq. 124 (1996) 225–246.

[12] N. H. Ibragimov, M. C. Nucci, Integration of third order ordinary differential equations by Lie's method: Equations admitting three-dimensional Lie algebras, Lie Groups and their applications 1 (1994) 49–64.

[13] A. A. Adam, F. M. Mahomed, Integration of ordinary differential equations via nonlocal symmetries, Mathematical Methods in the Applied Sciences 30 (2002) 267–275.

[14] R. Naz, F. M. Mahomed, D. P. Mason, Symmetry solutions of a third-order ordinary differential equation which arises from Prandtl boundary layer equations, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 15 (2008) 179–191.

[15] D. J. Arrigo, Symmetry analysis of differential equations, Wiley, (2014).

[16] G. Bluman, S. Anco, Symmetry and integration methods for differential equations, Springer, New York, (2002).

[17] G. Bluman, A. Cheviakov, Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer, New York, (2010).

[18] G. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences (81), Springer, New York, (1989).

[19] N. H. Ibragimov, Transformation groups applied to mathematical physics, Nauka, Moscow. English transl.: D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, (1985).

[20] N. H. Ibragimov, CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, CRC Press, Boca Raton Fl., 1994 – 1996, (1993).

[21] L. Ovsyannikov, Group analysis of differential equations, Nauka, Moscow, 1978. English transl., Academic Press, New York, (1982).

[22] P. Hydon, D. Crighton, Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2000).

[23] G. Zewdie, Lie simmetries of junction conditions for radianting stars, University of KwaZulu-Natal, (2011).

[24] Z. Hussain, Optimal system of subalgebras and invariant solutions for the Black-Scholes equation, Blekinge Institute of Technology, (2009).

[25] N. H. Ibragimov, The equivalence group and invariant solutions of a tumour growth model, communications in nonlinear sciences and numerical simulation 9(1) (2014) 61–68.

[26] N. H. Ibragimov, Equivalence groups and invariants of linear and nonlinear equations, Archives of ALGA 1 (2004) 9–69.

[27] A. V. N. H. Ibragimov, M. Torrisi, Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$, J. Math. Phys. 32,11 (1991) 2988–2995.