

ANÁLISIS DEL INDICE GENERAL DE LAS BOLSAS DE VALORES DE COLOMBIA (IGBC), CHILE (IPSA) Y PERÚ (IGBVL), Y SUS RENDIMIENTOS DESDE LA TEORÍA DEL CAOS 2001-2011

Jorge Humberto Restrepo Restrepo*
Hermilson Velásquez Ceballos, PhD**

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es examinar si existe persistencia y estructuras caóticas en las series de tiempo de los índices las Bolsas de Valores de Colombia (IGBC), Chile (IPSA) y Perú (IGBVL) y sus rendimientos, en el período comprendido entre Julio de 2001 y Mayo de 2011. Para cumplir este objetivo se prueba la no-linealidad de las series por medio de la prueba BDS, la memoria de las series por medio del Exponente de Hurst; la dinámica caótica por medio del Exponente de Lyapunov; la auto similitud por medio de la dimensión fractal y de correlación; y los ciclos de las series como componentes de su estructura. El análisis fractal de los mercados, fue introducido por Edgar Peters a comienzos de la década de los 90's; se fundamenta en la Teoría del Caos y la Geometría Fractal, y se constituyen en una alternativa de investigación para el estudio de en los mercados financieros, y requiere de menos supuestos estadísticos que el estudio bajo otras teorías como la Hipótesis de Mercados Eficientes. Esta investigación encontró evidencia de persistencia y sistemas caóticos en las series de tiempo de los mercados financieros analizados, lo cual permite considerar otras estrategias en procesos de transacciones en las Bolsas de Valores.

Palabras clave: Mercados fractales, Teoría del Caos, Exponente de Hurst, Exponente de Lyapunov, Dimensión Fractal.

Clasificación JEL: G14

ABSTRACT

The purpose of this paper is to examine if exist persistence and chaotic structures in the time series of the Colombian (IGBC), Chile (IPSA) and Peru (IGBVL) stock Exchange Index and their returns, during the period between July 2001 and May 2011. To achieve this goal, the series are tested for non-linearity using the BDS Test, the series memory using the Hurst Exponent, the chaotic dynamics using the Lyapunov Exponent, the self-similarity using the fractal dimension, and the cycles as part of their structure components. The Market Fractal Analysis of the markets was introduced by Edgar Peters in the beginnings 90's and is based in the Chaos Theory and Fractal Geometry, and it have been an alternative to investigate and analyze financial markets and need less statistical assumptions that other theories like the Efficient Market Hypothesis. This investigation found evidence of persistence and chaotic dynamics systems in the analyzed financial market time series, which suggest that other strategies that could be considered in stock exchange transactions process.

Key Words: Fractal Markets, Chaos Theory, Hurst Exponent, Lyapunov Exponent, Fractal Dimension.

JEL Classification: G14

* Economista, Universidad de Cartagena. Candidato a Maegister en Finanzas, Universidad EAFIT; correo-e: jrestr86@eafit.edu.co

** Licenciado en Matemáticas, Universidad del Quindío, Magister en Matemáticas Aplicadas Universidad EAFIT, Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad Politécnica de Valencia. Docente e investigador, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT; correo-e: evelas@eafit.edu.co

1. INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de los índices de los mercados de valores y de sus rendimientos resulta fundamental para la comprensión del desempeño de los mercados financieros. La mayoría de los modelos para el análisis del comportamiento de estos mercados y los precios de las acciones se basan en la Hipótesis de los Mercados Eficientes¹ (HME) introducida por Fama en los años 60's y asume que los precios de equilibrio del mercado reflejan toda la información nueva e histórica de forma inmediata y los agentes del mercado se comportan de manera racional y con aversión al riesgo. Desde entonces ha sido el paradigma.

En los años recientes se ha propuesto una alternativa de investigación fundamentada en la Hipótesis de los Mercados Fractales² (HMF), introducida por Edgar E. Peters en 1991; que utiliza Geometría Fractal y Teoría del Caos, para describir formas y procesos complejos por medio de reglas y algoritmos simples, que mediante su iteración se tornan complejos pero manteniendo su relación con el todo³; y combinados con métodos cuantitativos tradicionales permiten hacer una aproximación a la explicación de la dinámica del mercado, en el que se tienen en cuenta los movimientos diarios y eventos, como los desplomes de precios y el retiro del mercado de un número importante de la cantidad de agentes que transan en él.

Bajo la HMF, el precio de transacción es siempre justo porque todos los agentes del mercado llegan a él con toda la información disponible, y reaccionan de modo homogéneo ante la información recibida; pero la dinámica interna se establece por las interacciones de los agentes, que pueden clasificarse en diferentes grupos de acuerdo a la forma como incorporan y evalúan la información en sus decisiones. Esto hace que los grupos de agentes del mercado no sean estables (Mantilla, 2008). Ante un mismo estímulo externo, los agentes pueden reaccionar de manera distinta, y una de las razones son sus diferentes horizontes de inversión (Bahalová y Greguš, 2010).

Los supuestos de la HMF son:

- El mercado es estable cuando los agentes tienen numerosos horizontes de inversión.
- En el corto plazo la información está más relacionada con los sentimientos y factores técnicos, que en el largo plazo. En la medida que el horizonte de inversión se incrementa, domina la información fundamental de largo plazo.
- Los precios reflejan una combinación de las transacciones de corto plazo y la valoración de los fundamentales de largo plazo.
- Si ocurre un evento que cuestione la información fundamental, los agentes con horizontes de inversión de largo plazo se retiran del mercado o comienzan a transar basándose en la información de corto plazo. Cuando los horizontes de inversión en el mercado son uniformes, el mercado se torna inestable.
- Si un activo no tiene relación con el ciclo económico, entonces no tendrá tendencia de largo plazo. La posibilidad de transarlo la definirá su liquidez y la información de corto plazo.

¹ En lo sucesivo HME.

² En lo sucesivo HMF.

³ Propiedad de los Fractales conocida como Auto-similitud.

La utilización de los procesos fractales permite realizar un análisis de los mercados con menos supuestos teóricos que otros modelos, y por lo tanto sus resultados bajo estos supuestos se pueden considerar más robustos (Casparri y Moreno, 2008).

En la literatura existen estudios sobre mercados bursátiles desde la perspectiva de la Teoría del Caos y los Fractales. En cuatro mercados Latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile y México), los retornos de los índices bursátiles siguen una dinámica caótica (Espinosa, 2008); similares comportamientos siguen los mercados bursátiles de Grecia y Turquía (Özer y Ertokatlí, 2010; Ozun, et al; 2010). Los estudios con la metodología de los fractales sobre varios índices bursátiles de los principales mercados de capitales del mundo, comportamiento de acciones, tasas de interés y tasas de cambio, entre otras, han mostrado que en las series temporales existen estructuras fractales, persistencia y memoria de largo plazo (Bartolozzi, et al, 2005; Nawrocki, 1995).

Este estudio comienza desde la fusión de las tres bolsas de valores que existían en Colombia en el año 2001 (Bolsa de Valores de Bogotá, Bolsa de Valores de Medellín y Bolsa de Valores de Occidente) cuando se crea el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia - IGBC. Y concluye al momento de la creación de lo que se ha denominado MERCADO INTEGRADO LATINOAMERICANO - MILA en junio de 2011 que consiste en la integración de los mercados bursátiles de Colombia, Chile y Perú.

La Teoría del Caos estudia los sistemas dinámicos sensibles a las variaciones de las condiciones iniciales. Este tipo de sistemas son determinísticos y pueden clasificarse como Estables, Inestables y Caóticos. Los sistemas estables a lo largo del tiempo tienden a un punto u órbita de acuerdo a los atractores que los rigen; los sistemas inestables escapan a los atractores⁴; y los sistemas caóticos, por la acción de estos, en unos momentos del tiempo son atraídos y en otros momentos son alejados de la trayectoria original, generando una dinámica que puede ser determinada.

El término fractal que proviene del latín “fractus”, significa fragmentado, fue acuñado por Benoit Mandelbrot, y se aplica a las formas geométricas generadas por procesos de repetición o iteración, Los fractales se pueden clasificar en tres grupos: Lineales, Complejos, Caóticos. Sus principales características son: a) tener el mismo aspecto en a cualquier escala de observación; b) Tener longitud infinita; c) No ser diferenciables; d) tener auto similitud, que puede ser completa o estadística; la primera, es que todas sus partes tienen las mismas características del objeto completo, y la segunda es que cada región del objeto conserva, de manera estadísticamente similar, sus características globales (González y Guerrero, 2001).

En la Figura N° 1 se muestran cuatro fractales, el Conjunto de Cantor y el Triángulo de Sierpinsky son fractales de auto similitud completa, y el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, son fractales con auto similitud estadística.

⁴ Se define como un atractor al conjunto hacia donde evoluciona un sistema dinámico después de un período de tiempo suficientemente largo, y que puede ser un punto, una curva o un conjunto complejo, como una estructura fractal. Para que un conjunto sea considerado atractor, las trayectorias deben mantenerse próximas, aun si el sistema es perturbado; no es necesario que satisfagan ninguna propiedad, solo que permanezcan en el sistema. Los atractores se clasifican en dos grupos: los clásicos, que puede ser un punto de equilibrio, un ciclo límite o un toro límite; y los extraños, que puede tener cualquier tipo de estructura, uno de este tipo es el atractor de Lorentz, que es un atractor determinístico tridimensional no lineal derivado de las ecuaciones diferenciales de dinámicas de la atmósfera terrestre.

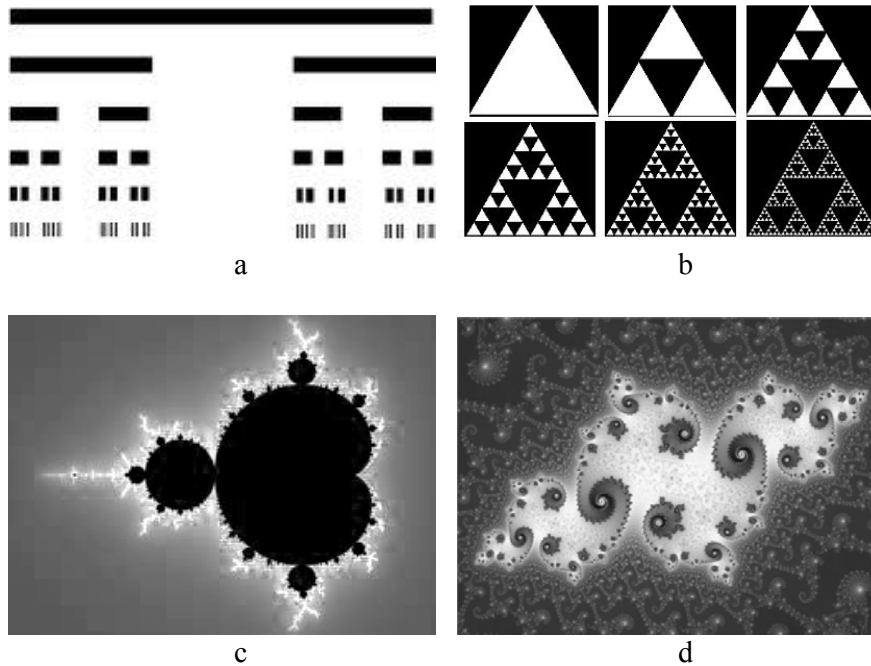


Figura N° 1. a) Conjunto de Cantor. b) Triángulo de Sierpinsky. c) Conjunto de Mandelbrot. d) Conjunto de Julia.

Otra característica es la dimensión fractal, permite medir qué tan rugosa es la curva o el objeto de estudio y que tanto llena el espacio que lo contiene.

En síntesis, un fractal es una estructura que está compuesta por pequeñas partes que son similares entre sí y a su vez se parecen a la estructura completa. Las series de tiempo financieras se consideran fractales complejos.

Este trabajo comprueba que las series de tiempo de los Índices de los Mercados de Capitales Colombia, Chile y Perú son sistemas caóticos, por tanto de acuerdo con la Teoría del Caos y la HMF, las series de tiempo pueden modelarse con técnicas no-lineales. La aplicación de una de las propiedades de los fractales, como es la Dimensión Fractal, se constituye en una alternativa para la medición del riesgo, dado que permite comparar activos aunque las series de tipo de los precios de estos tengan diferentes formas de distribución.

La investigación desde la Teoría del Caos y los Fractales en Finanzas pretende constituirse en un complemento y junto con las metodologías tradicionales, avanzar en la investigación, pero desde otras perspectivas. Estas metodologías, que originalmente se han aplicado en otras ciencias, están aportando nuevas líneas de investigación en las Finanzas y el estudio de los mercados; como nuevas formas de mediciones de riesgo y la modelación de series de tiempo y su implementación en redes neuronales artificiales, que ayudan a la toma de decisiones financieras en forma rápida y con menores niveles de incertidumbre.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: En la segunda parte se expone la metodología utilizada, en la parte tres se describen los datos de las series analizadas, en la parte cuatro, se exponen los resultados de la investigación, en la parte cinco, se expone una aplicación de la Dimensión Fractal para la estimación del Riesgo Financiero, en la parte seis, las conclusiones, y en la parte siete, las referencias bibliográficas.

2. METODOLOGÍA

La metodología utilizada en este trabajo se compone de los siguientes pasos:

2.1. Normalidad

El punto de partida para afirmar que un sistema es caótico, es determinar si la distribución de su serie de datos no se distribuye en forma normal. Esto es importante porque ningún proceso caótico sigue este tipo de distribución. Para contrastar la normalidad de las series de tiempo se pueden utilizar diferentes pruebas, en este caso se utiliza la prueba la prueba tradicional de normalidad de Jarque-Bera,

En este trabajo se hará la prueba de Jarque-Bera a cada una de las series analizadas con el software econométrico Eviews.

2.2. Linealidad

Para detectar la no linealidad de las series de datos se utiliza la prueba BDS, propuesta por Brock, Dechert y Scheinkmann (1987) que contrasta la hipótesis de independencia e idéntica distribución; solamente rechaza la hipótesis nula de ruido blanco o de errores no correlacionados, por lo que solo detecta la presencia o no de estructura, sea esta lineal o no-lineal. La prueba se aplica en forma indirecta, primero se filtra cada una de las series analizadas con un modelo ARMA, que remueve las estructuras lineales y se corre la prueba sobre los residuos del modelo, que tiene en cuenta consideraciones fundamentadas en el comportamiento de los índices, que se consideran explicados por la historia y choques aleatorios. Si se rechaza la hipótesis de ruido blanco, se deduce que la estructura remanente es no lineal, bajo el supuesto que toda la estructura lineal fue previamente removida (Casparri, 2009). La prueba BDS no detecta caos en las series de tiempo, detecta si la serie es lineal o no-lineal, y la no-linealidad es uno de los indicadores de la posible existencia de sistemas caóticos (Chu, 2001).

En este trabajo la prueba BDS se hará en cada una de las series de tiempo analizadas con el software econométrico Eviews.

2.3. Persistencia

La persistencia de una serie es su capacidad de memoria y hace que siga tendencias a lo largo del tiempo. Se dice que una serie es persistente o tiene memoria de largo plazo cuando un evento ocurrido en un instante del tiempo, tiene la capacidad de influir en los valores futuros de la serie, En las series de tiempo persistentes, existe una correlación de largo plazo entre los eventos del presente u los eventos del futuro (Peters, 1991).

El análisis de persistencia de las series se hace por medio del Exponente de Hurst; que permite distinguir sistemas estocásticos de no-estocásticos y la persistencia o anti-persistencia de las tendencias de las series. Existen varios métodos de calcular este exponente⁵, aquí se emplea el método de Re-Escalonamiento (R/S), desarrollado por Edwin Hurst que permite determinar la dependencia de largo plazo de la serie. Para el cálculo del exponente⁶, la serie se dividen segmentos y a cada uno de ellos calcular su media y el rango, que se normaliza por medio de la desviación estándar de los datos del segmento. Este procedimiento se hace para segmentos con diferente número de datos, sobre los que se aplica una regresión lineal,

$$\text{Log}((R/S)_N) = H \text{Log}(N) + \text{Log}(c)$$

Donde, H es el exponente de Hurst, N es el número de datos de los segmentos, y c es una constante. Los valores de H pueden ser:

$$\text{Valores de H} \begin{cases} 0 \leq H < 0,5 \\ H = 0,5 \\ 0,5 < H \leq 1 \end{cases}$$

Cuando el valor de H igual o mayor que 0 y menor que 0,5, indica que la serie es anti-persistente o ergódica (mientras más cerca esté H de 0, el comportamiento de la serie será un proceso de reversión a la media y con correlación negativa). Cuando el valor de H es igual 0,5 implica que la serie es aleatoria y la ausencia de dependencia estadística de largo plazo, es decir, ruido blanco. Y un valor de H mayor de 0,5 y menor o igual a 1, el proceso reforzará las tendencias (si hay un movimiento en un sentido durante un período, hay una alta probabilidad que el siguiente período el movimiento sea en el mismo sentido) y tendrá correlación positiva (Gálvez, 2005).

En este trabajo se calculará el Exponente de Hurst por el método del Rango Re-escalonado implementando el algoritmo descrito por León y Reveíz (2010) y Casparri, et al (2009) en el software Matlab y el software Autosignal V 1.7..

2.4. Dimensión Fractal

La dimensión fractal expresa la forma como un objeto llena el espacio que lo contiene. Esta medida siempre es positiva y para los objetos sólidos es un número entero; así, para un punto, es 0, para una línea es 1, para un plano completamente acotado es 2, y para una esfera es 3. Dado que los fractales no alcanzan a llenar todo el espacio que los contiene su dimensión fractal es menor que la del espacio. Las series de tiempo no llenan completamente el plano que las contiene, por lo que su dimensión fractal está entre 1 y 2.

⁵ Aparte del método R/S están, Método del Espectro de Potencia, Método de Rugosidad-Longitud, Método del Variograma, y Método de Ondulaciones.

⁶ Este procedimiento se describe con detalle en múltiples publicaciones para citar sólo algunas, véase León y Reveíz (2010); Gálvez (2005), Peters (1991), etc.

La dimensión fractal de una serie financiera brinda una visión más realista del riesgo que la varianza del activo (Casparri y Moreno, 2008), porque la distribución de los activos financieros usualmente no es normal (Peters, 1991).

En este trabajo se calculará la Dimensión Fractal por el método del conteo de cajas utilizando el algoritmo desarrollado por Omar S. Al-Kadi, University of Sussex, Brighton, UK, implementado en el software Matlab.

2.5. Dimensión de Lagunaridad

Para el cálculo de la dimensión de Dimensión de Lagunaridad⁷, término acuñado por Benoit Mandelbrot en 1983, como medida cuantitativa de la distribución de los espacios vacíos en un fractal con determinada textura, y que en la Geometría Fractal también se emplea para definir como un objeto fractal llena un espacio (Arizabalo, et al, 2010). Este término es usado para clasificar los fractales que comparten la misma dimensión fractal, pero que tienen una apariencia visual diferente.

Los fractales más densos tienen un valor de lagunaridad bajo, y en la medida que la densidad disminuye, la lagunaridad aumenta. Este parámetro se estima por medio del método del conteo de cajas⁸, utilizando la fórmula,

$$\mathcal{L}(r) = \frac{\sum_{i=1}^{r^2} S^2 Q(S_i, r)}{\left(\sum_{i=1}^{r^2} S^2 Q(S_i, r)\right)^2}$$

Donde, S_i es el número de puntos con información que llenan la caja i y $Q(S_i, r)$ es la distribución de frecuencia normalizada de S_i para los diferentes tamaños de las cajas.

Para los cálculos de la dimensión fractal y la dimensión de lagunaridad, se utilizará el método del conteo de cajas; que consiste en trazar una cuadrícula, que se denomina conjunto U , donde cada recuadro tiene una longitud ℓ , que contenga la curva que se le desea analizar, y se cuenta la cantidad de cajas (C) a las que la curva intercepta; este procedimiento se repite n veces variando la longitud de cada recuadro. La Dimensión Fractal está dada por la pendiente de la recta que forman los puntos $(\ln(2^n), \ln(C_n(U)))$.

En este trabajo se calculará la Dimensión de Lagunaridad por el método del conteo de cajas utilizando el algoritmo desarrollado por Omar S. Al-Kadi, University of Sussex, Brighton, UK, implementado en el software Matlab.

⁷ La palabra original proviene del latín lacuna, que significa vacío. En algunos textos en castellano se ha traducido como Lagunaridad y en otros como Lacunaridad.

⁸ En Inglés, Box-Counting.

2.6. Exponente de Lyapunov

El Exponente de Lyapunov es un número real asociado a la divergencia o separación de las trayectorias del sistema en el transcurso del tiempo en un proceso caótico (Paissan, 2005); y representa la separación exponencial entre dos trayectorias, inicialmente próximas al cabo de determinados pasos o iteraciones (Espinosa, et al. 2009) y cuán rápidamente se difunden los efectos de una pequeña perturbación (Montealegre, et al., 2002).

Dado un sistema dinámico continuo en un espacio n-dimensional, se hace seguimiento en las condiciones iniciales de un período largo a una esfera infinitesimal y n-dimensional; la que por el flujo se convierte en una n-elipse. El exponente de Lyapunov en la dimensión P para el momento i, es definido en términos del eje principal del elipsoide como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{P_i(t)}{P_i(0)}$$

donde, λ se ordena de mayor a menor.

De esta forma, el Exponente de Lyapunov está relacionado con la contracción o expansión del espacio fase en diferentes direcciones. El número de Exponentes de Lyapunov está determinado por la dimensión del mapa en la que está el sistema. En los mapas de una dimensión, un exponente positivo es caos, un exponente cero es un sistema de órbita marginalmente estable, y un exponente negativo es un sistema de órbita periódica.

La extensión lineal de la elipse crece de forma $2^{\lambda_1 t}$, el área definida por los dos ejes principales crece de forma $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$, y el volumen de la forma $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$, y así sucesivamente.

Si se conocen las ecuaciones que definen el sistema, el Exponente de Lyapunov puede calcularse de forma directa; esto no es aplicable a las series de tiempo financieras, por lo que es necesario utilizar otros algoritmos, como el desarrollado por Rosentain, Collins y De Luca (1993)⁹.

En la Figura N° 2 es una representación esquemática del proceso de evolución y reemplazo utilizado para estimar los Exponentes de Lyapunov con datos experimentales. En la Sección a) el mayor Exponente de Lyapunov es calculado a partir de expansión de los elementos. Cuando la longitud del vector entre dos puntos se hace grande, se selecciona un nuevo punto cercano a la trayectoria de referencia, minimizando la longitud reemplazada L y el cambio en la orientación θ . En la Sección b) se sigue un procedimiento similar para el cálculo de la suma de los dos mayores Exponentes de Lyapunov en el área acotada por los puntos que se apartan. Cuando el área acotada por estos puntos se hace muy grande o muy sesgada, se toman dos nuevos puntos cercanos a la trayectoria de referencia, minimizando el área A por la generada por los nuevos puntos y el cambio en la orientación del espacio-fase entre los elementos del área original y el área nueva (Wolf et al, 1985).

⁹ Para el cálculo del exponente de Lyapunov en series de tiempo financieras, existen en la literatura otros algoritmos como el propuesto por Wolf, et al. (1985).

Un sistema con uno o más Exponentes de Lyapunov positivos se define como un sistema caótico, y la magnitud del exponente determina la escala de tiempo en la que el sistema es impredecible. Un sistema dinámico dependiente del tiempo sin un punto fijo, tiene al menos un exponente con valor cero, que corresponde a los pequeños cambios de magnitud del eje principal tangente al flujo. Los ejes que en promedio se están expandiendo corresponden a exponentes positivos, y viceversa. La existencia de exponentes positivos es incompatible con movimientos sujetos a atractores, a menos que emerjan trayectorias ampliamente separadas. Se define un atractor como extraño o caótico cuando un sistema se disipa con uno o más Exponentes de Lyapunov positivos.

El número de Exponentes de Lyapunov está determinado por la dimensión del mapa¹⁰ en la que está el sistema. En los mapas de una dimensión, un exponente positivo es caos, un exponente cero es un sistema de órbita marginalmente estable¹¹, y un exponente negativo es un sistema de órbita periódica.

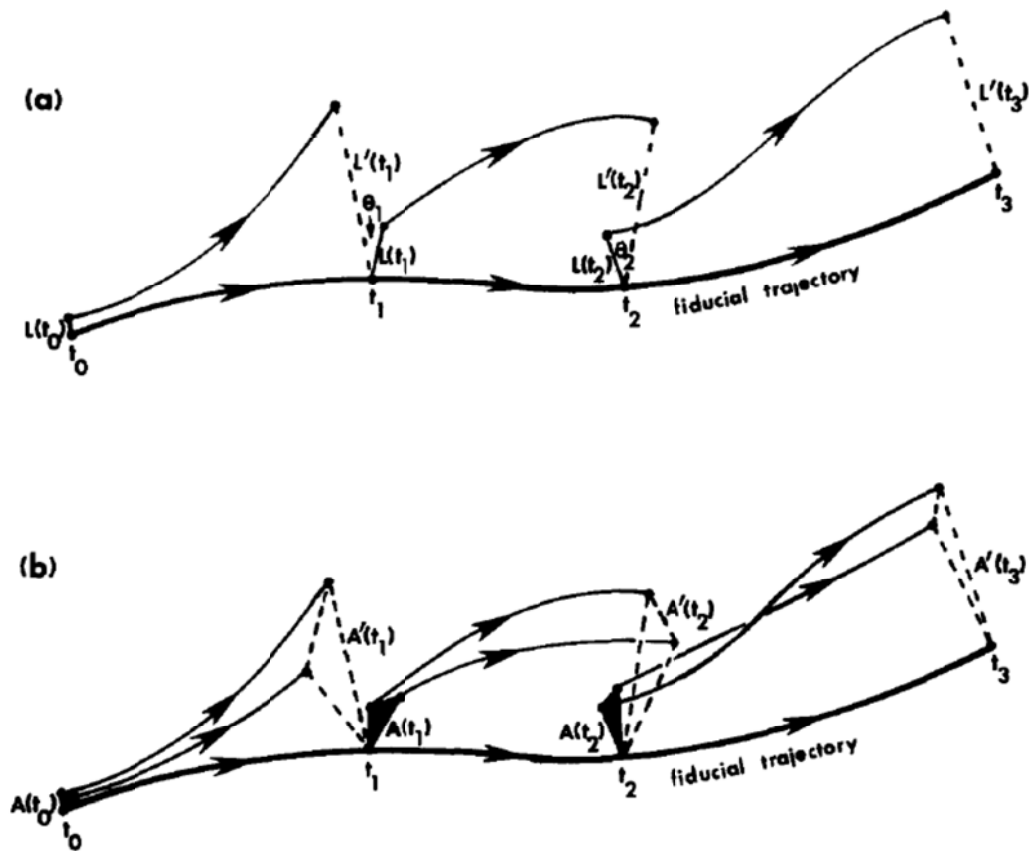


Figura N° 2 representación esquemática del proceso de evolución y reemplazo utilizado para estimar los Exponentes de Lyapunov con datos experimentales. Fuente: Wolf et al, 1985

¹⁰ Se define como mapa de un sistema la gráfica que este describe en función del tiempo. Uno de los más estudiados en los sistemas dinámicos es el Mapa de Henón, que se construye en tiempo discreto a partir de dos ecuaciones, una cuadrática y otra lineal, y dos parámetros constantes, a y b.

¹¹ En un sistema dinámico, se considera una órbita marginalmente estable en el sentido de Lyapunov, si la órbita siguiente a cualquier punto está en un pequeño vecindario. Se han desarrollado varios criterios para determinar si una órbita es estable, los métodos generales se formulan en las Funciones de Lyapunov.

En este trabajo el cálculo de los Exponentes de Lyapunov para cada una de las series analizadas se hará con el software MTRCHAOS 1.0, que utiliza el algoritmo desarrollado por Rosentain et al (1993).

2.7. Estimación del Riesgo utilizando la Dimensión Fractal

La volatilidad es el parámetro más utilizado para la medición del riesgo financiero de un activo; fue propuesto por Markowitz en la década de los 50's, y es medido por la desviación estándar de los rendimientos del activo, dicho de otra forma, es la dispersión que tienen los rendimientos a través del tiempo. Una dispersión amplia significaría que la probabilidad de variación en los retornos es grande. A mayor dispersión, hay mayor riesgo. Esto es válido siempre y cuando se cumpla que el sistema sea aleatorio, que los rendimientos se distribuyan en forma normal y que su varianza sea finita (Peters, 1991). Adicionalmente, si las observaciones se encuentran correlacionadas o presentan correlación serial, el uso de la desviación estándar para estimar el riesgo se debilita ampliamente.

La Dimensión Fractal puede usarse para comparar el riesgo entre activos. Como se describió antes, la Dimensión Fractal expresa la forma como un objeto llena el espacio que lo contiene y describe que tan rugoso es este. Si al comparar dos activos, los rendimientos del primero tienen mayores variaciones que el segundo, el primero será más riesgoso y “llenará” más el plano que lo contiene y por lo tanto su Dimensión Fractal será mayor.

2.8. Ciclos de las series

En términos generales, los ciclos bursátiles son las variaciones de largo plazo que presentan las cotizaciones de precios de las bolsas de valores, y usualmente están adelantados en promedio nueve meses a los ciclos económicos.

La estimación de los ciclos de las series se hace siguiendo la metodología propuesta por Peters (1991); que sugiere dividir la serie en grupos de igual número de datos, a cada uno de ellos calcularle el Exponente de Hurst y obtener su promedio. El número mínimo de grupos no debe ser menor que diez. El valor del ciclo está determinado por el período donde se ubica el mayor valor del Exponente de Hurst. Para estimar el exponente en estas series se utiliza el mismo algoritmo utilizado para el cálculo de la serie original de 2400 datos para el IGBC y 2460 datos para el IPSA y el IGBVL.

3. DATOS

Los datos utilizados son los valores del Índice de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), el Índice de la Bolsa de valores de Chile (IPSA), y el Índice de la Bolsa de Valores del Perú (IGBVL) al cierre de las operaciones bursátiles del día; y los rendimientos logarítmicos de cada índice.

La series se tomaron de las bases de datos de Bloomberg, comenzando el 30 de Julio de 2001 hasta es el 31 de Mayo de 2011. No se tuvieron en cuenta los días Sábado, Domingo o festivos. La serie original para Colombia tiene 2400 datos, y para las series de Chile y Perú, 2460 datos.

Los rendimientos de los índices se calcularon en forma continua, así, el logaritmo natural del cociente entre el valor del índice para el día y el valor del índice para el día anterior. Para los análisis de Rangos Re-Escalonados es más apropiado utilizar los rendimientos logarítmicos que los rendimientos porcentuales, porque los primeros hacen una acumulación de la suma de los retornos (Peter, 1991).

Con los valores diarios originales de cada una de las series se estimaron los promedios mensuales, trimestrales, semestrales, y anuales; y se construyeron nuevas series de datos para el período analizado con estos valores.

En las Gráficas N° 3 a 8 muestran cada una de las series analizadas y las de sus rendimientos.

4. RESULTADOS

4.3. Normalidad

En la Tabla N° 1. se muestran los resultados de la prueba de normalidad de Jarque-Bera para las series objeto de estudio, y se puede afirmar que las series no cumplen con la hipótesis de normalidad.

Tabla N° 1 - Prueba de Normalidad

	Jarque-Bera	Prob
IGBC	163,5823	0,0000
Rend-IGBC	15222,69	0,0000
IPSA	170,4136	0,0000
Rend-IPSA	9405,481	0,0000
IGBVL	233,5366	0,0000
Rend-IGBVL	8878,54	0,0000

Fuente: Elaboración Propia

4.4. No-Linealidad

Para probar la no-linealidad de las series objeto de estudio, se aplica la prueba BDS. Los filtros ARIMA (p,d,q) considerados para las diferentes series y sus rendimientos eliminan la

estructura lineal y el test BDS aplicado sobre los residuos permite afirmar que las series de los residuos son no-lineales, como se muestra en las Tablas N° 2 y 3.

Dado que las series de tiempo no tiene una distribución normal y que los procesos son no-lineales puede esperarse que exista una dinámica caótica en ellas.

Tabla N° 2 - Estadístico BDS para las series de los tres índices

Indice	ε/σ	Dim=2		Dim=3		Dim=4	
		z-Statistic	Prob.	z-Statistic	Prob.	z-Statistic	Prob.
IGBC	0,5/ σ	30,7654	0,000	45,9167	0,000	66,5540	0,000
	1/ σ	25,9871	0,000	30,6257	0,000	34,1183	0,000
	1,5/ σ	23,1605	0,000	25,1182	0,000	25,8952	0,000
	2/ σ	21,7200	0,000	22,5134	0,000	22,3886	0,000
IPSA	0,5/ σ	25,0630	0,000	36,1352	0,000	48,7407	0,000
	1/ σ	24,0532	0,000	30,2096	0,000	35,5004	0,000
	1,5/ σ	22,8299	0,000	26,6349	0,000	28,9910	0,000
	2/ σ	21,3934	0,000	24,0191	0,000	24,8127	0,000
IGBVL	0,5/ σ	32,9722	0,000	47,5848	0,000	65,7668	0,000
	1/ σ	24,1849	0,000	31,3617	0,000	36,5401	0,000
	1,5/ σ	21,5955	0,000	26,0259	0,000	28,0482	0,000
	2/ σ	20,2861	0,000	23,4803	0,000	24,5548	0,000

Fuente: Elaboración Propia

Tabla N° 3 - Estadístico BDS para las series de los rendimientos de los tres índices

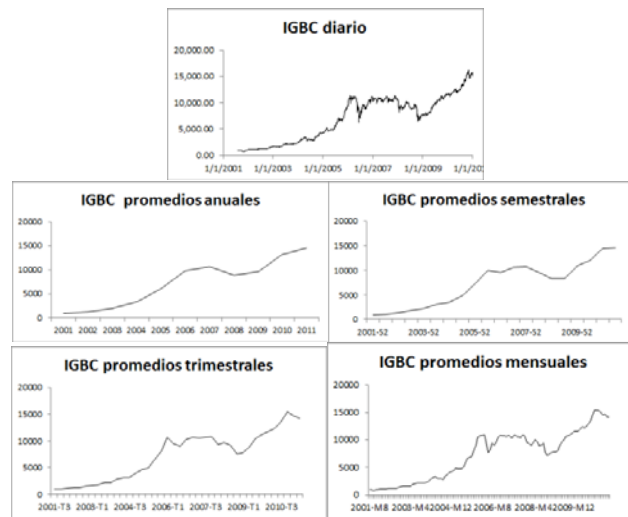
Indice	ε/σ	Dim=2		Dim=3		Dim=4	
		z-Statistic	Prob.	z-Statistic	Prob.	z-Statistic	Prob.
Rend-IGBC	0,5/ σ	15,9749	0,000	19,6936	0,000	22,7084	0,000
	1/ σ	21,8150	0,000	23,2317	0,000	23,2162	0,000
	1,5/ σ	19,5107	0,000	21,4614	0,000	22,1460	0,000
	2/ σ	21,8150	0,000	23,2317	0,000	23,2162	0,000
Rend-IPSA	0,5/ σ	11,8639	0,000	14,4299	0,000	16,7832	0,000
	1/ σ	13,0714	0,000	15,7138	0,000	17,5779	0,000
	1,5/ σ	14,3813	0,000	17,1664	0,000	18,7613	0,000
	2/ σ	14,8090	0,000	17,9691	0,000	19,3153	0,000
Rend-IGBVL	0,5/ σ	17,5126	0,000	23,8230	0,000	29,6757	0,000
	1/ σ	19,9174	0,000	25,3103	0,000	29,6115	0,000
	1,5/ σ	20,7943	0,000	24,5317	0,000	26,9605	0,000
	2/ σ	21,0054	0,000	24,0832	0,000	25,6410	0,000

Fuente: Elaboración Propia

4.5. Análisis Gráfico

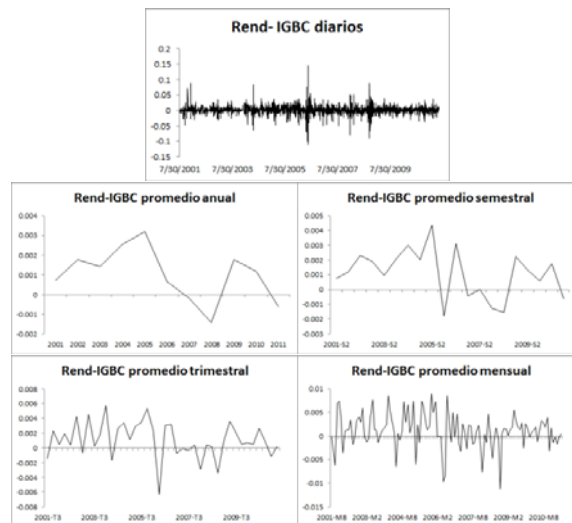
Para el análisis gráfico se calcularon los promedios mensuales, trimestrales, semestrales y anuales de las series de datos; y sus gráficas para las series analizadas, se presentan en las Figuras N°s 1 a 6. Para todas las series de los índices analizados, las gráficas de cada uno de estos períodos siguen patrones y tendencias similares a la gráfica de la serie diaria; esta similitud es propiedad de los fractales en la que cada una de las partes tiene similitud con el todo. Para este tipo de fractales se define como auto similitud estadística, y se comprueba por medio de la Dimensión Fractal y la Dimensión de la Lagunaridad, que se desarrollarán más adelante

Figura N° 3 – IGBC en las diferentes escalas de tiempo



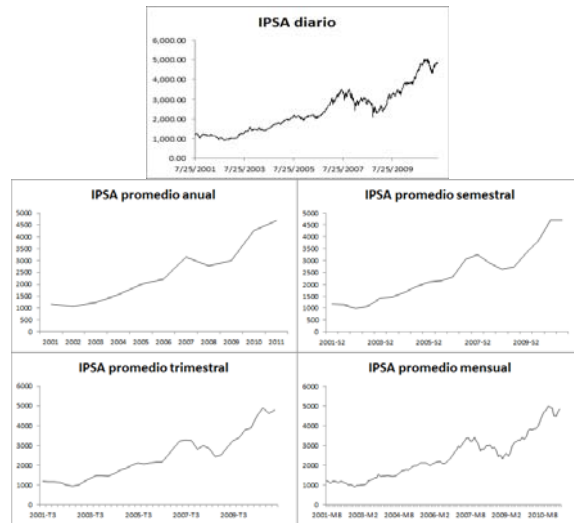
Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 4 – Rendimientos del IGBC en las diferentes escalas de tiempo



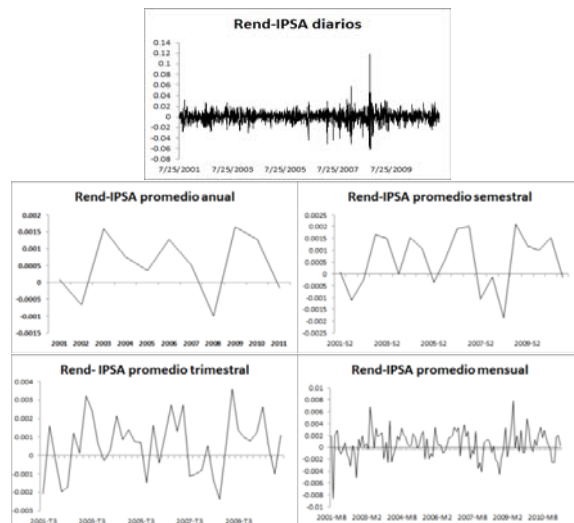
Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 5 – IPSA en las diferentes escalas de tiempo



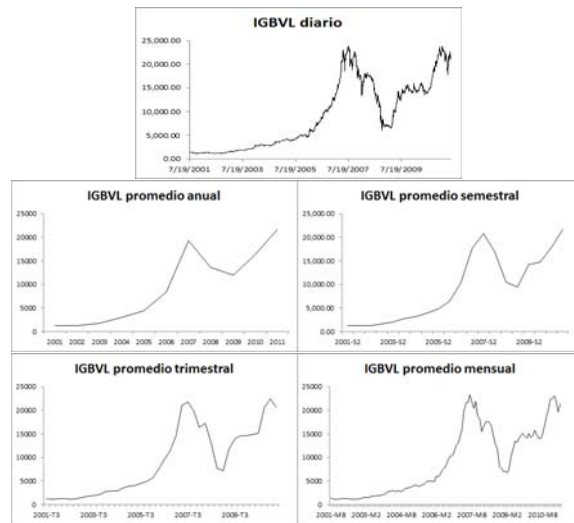
Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 6 – Rendimientos del IPSA en las diferentes escalas de tiempo



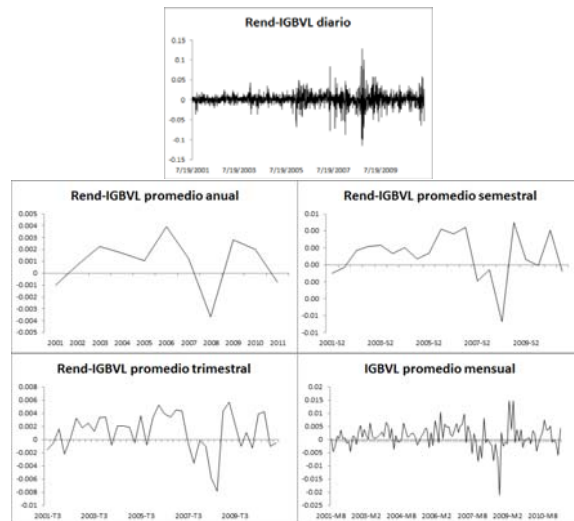
Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 7 – IGBVL en las diferentes escalas de tiempo



Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 8 – Rendimientos del IGBVL en las diferentes escalas de tiempo



Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

4.6. Exponente de Hurst

Los resultados asociados con el cálculo del Exponente de Hurts para las series originales y las series calculadas en las diferentes escalas de tiempo (mensual, trimestral, semestral y anual) aparecen en la Tabla N° 4. Para las series semestrales y anuales no se calcula el exponente de Hurst por la poca cantidad de datos que hay disponibles.

Tabla N° 4 - Exponente de Hurst para las series de los índices y sus rendimientos

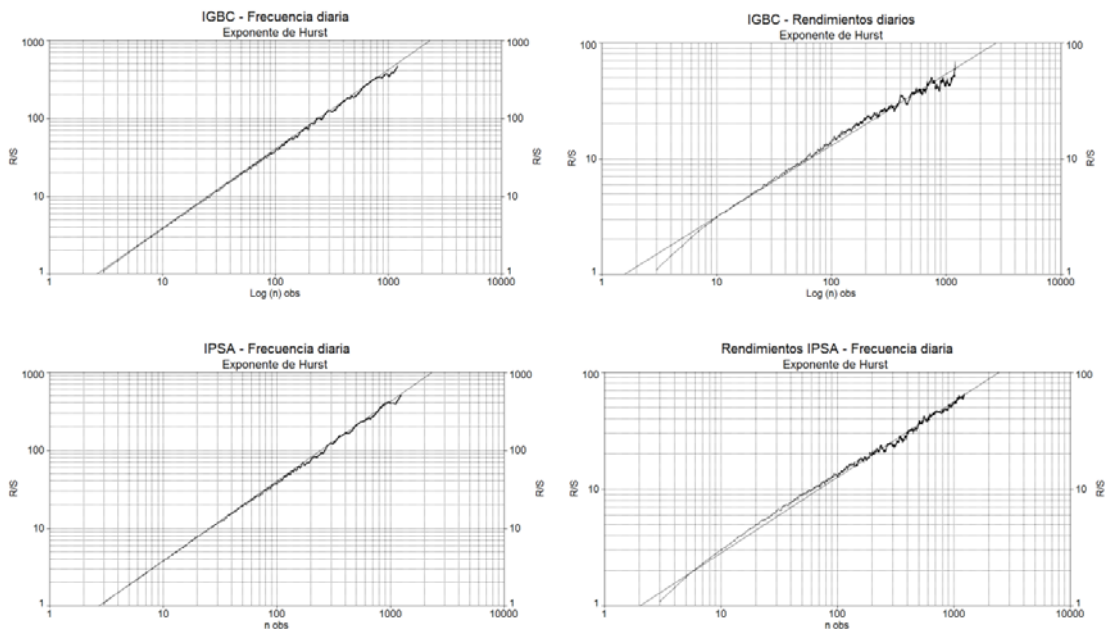
Serie	Exp. Hurst	Datos	Serie	Exp. Hurst	Datos
IGBC-D	1,0	2400	Rend-IGBC-D	0,60	2400
IGBC-M	1,0	118	Rend-IGBC-M	0,70	118
IGBC-T	1,0	40	Rend-IGBC-T	0,70	40
IGBC-S	N/D	20	Rend-IGBC-S	N/D	20
IGBC-A	N/D	11	Rend-IGBC-A	N/D	11
IPSA-D	1,0	2400	Rend-IPSA-D	0,60	2400
IPSA-M	1,0	118	Rend-IPSA-M	0,80	118
IPSA-T	1,0	40	Rend-IPSA-T	0,86	40
IPSA-S	N/D	20	Rend-IPSA-S	N/D	20
IPSA-A	N/D	11	Rend-IPSA-A	N/D	11
IGBVL-D	1,0	2400	Rend-IGBVL-D	0,63	2400
IGBVL-M	1,0	118	Rend-IGBVL-M	0,71	118
IGBVL-T	1,0	40	Rend-IGBVL-T	0,71	40
IGBVL-S	N/D	20	Rend-IGBVL-S	N/D	20
IGBVL-A	N/D	11	Rend-IGBVL-A	N/D	11

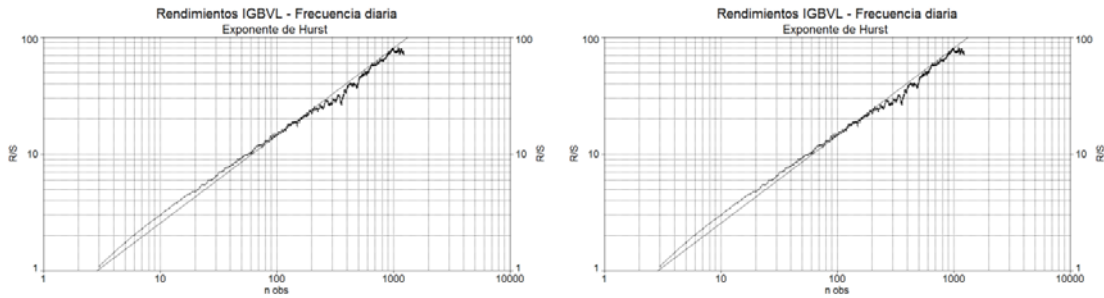
Fuente: Elaboración Propia

Todos los valores del Exponente de Hurst son mayores de 0,5; entonces se puede afirmar que las series son persistentes, es decir, que tienen memoria. Las series de los tres índices tienen comportamientos de caminata aleatoria; y las series de los rendimientos de los índices presentan el valor más bajo de este parámetro en la medida que la escala tiempo tiene el mayor valor.

En la Fig. N° 9 se muestra en forma gráfica el Exponente de Hurst por el método de Re-escalonamiento para cada una de las series analizadas en su frecuencia diaria.

Figura N° 9 – Exponente de Hurst para el IGBC, IPSA, IGBVL, y sus rendimientos





Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales procesadas en el software AUTOSIGNAL V 1.7

4.7. Memoria de las series

Para una serie que tiene memoria, donde el valor del exponente de Hurst es mayor que 0,5; si los datos se organizan en forma aleatoria la serie que se obtiene pierde la memoria, aunque los datos de la serie original siguen estando presentes en la nueva serie; esto muestra lo importante del orden de los datos (Peters, 1991). Para probar esta propiedad se organizan los datos de cada una de las series en forma aleatoria cinco veces y luego se calcula nuevamente el exponente de Hurst; los resultados obtenidos se muestran en la Tabla N° 5.

Para la serie del IGBC el valor del exponente de Hurst obtenido es 0,5; que indica que esa serie es aleatoria; para la serie del IPSA se obtiene el valor de 0,5 después de reorganizar la serie en forma aleatoria dos veces; y para la serie del IGBVL se obtiene valor de 0,5 después de re-organizarla tres veces.

Para las series de los rendimientos, el valor del Exponente de Hurst es igual a 0,5 en los rendimientos del IGBC después de reorganizar la serie cinco veces; para la serie de los rendimientos del IPSA Este valor se obtiene después de reorganizar la serie cuatro veces; y para la serie de los rendimientos del IGBVL se obtiene después de reorganizar la serie tres veces.

Tabla N° 5 - Exponente de Hurst para las series del IGBC y sus rendimientos después de ordenarlas aleatoriamente.

Serie	Datos	Exp. Hurst	Organización aleatoria				
			1	2	3	4	5
IGBC	2400	1,0	0,50	0,50	0,57	0,51	0,63
Rend-IGBC	2400	0,60	0,64	0,58	0,53	0,54	0,50
IPSA	2460	1,0	0,56	0,50	0,58	0,60	0,50
Rend-IPSA	2460	0,60	0,56	0,52	0,56	0,50	0,55
IGBVL	2460	1,0	0,63	0,52	0,50	0,59	0,50
Rend-IGBVL	2460	0,63	0,56	0,57	0,50	0,57	0,50

Fuente: Elaboración Propia

4.8. Dimensión Fractal

La información relacionada con la Dimensión Fractal de la series del IGBC, IPSA, IGBVL y de las series de sus rendimientos en las frecuencias diaria (D), mensual (M), trimestrales (T), semestral (S) y anual (A) calculada por medio de la metodología de Conteo de Cajas se muestra en la Tabla N° 6. Puede notarse que todas las series de los índices son más rugosas que las series de sus rendimientos, porque su dimensión fractal es mayor.

La propiedad de auto similitud estadística para cada una de las series analizadas se cumple porque que los valores de la dimensión fractal en las diferentes frecuencias son muy similares.

Para la serie de los rendimientos de las tres series en las diferentes escalas analizadas, la Dimensión Fractal tiene pequeñas variaciones que no exceden las dos décimas; esto no impide afirmar las series de los Rendimientos de las tres series tienen auto similitud estadística.

Tabla N° 6 – Dimensión Fractal para las series analizadas en forma fraccionada

Serie	DF Prom	DF desv	DF Lac	Serie	DF Prom	DF desv	DF Lac
IGBC-D	1,78	0,6196	0,1206	Rend-IGBC-D	1,60	0,8987	0,3167
IGBC-M	1,80	0,5874	0,1071	Rend-IGBC-M	1,60	0,9708	0,4096
IGBC-T	1,81	0,5484	0,0916	Rend-IGBC-T	1,70	0,8192	0,2440
IGBC-S	1,82	0,5329	0,0859	Rend-IGBC-S	1,72	0,7176	0,1730
IGBC-A	1,82	0,5097	0,0778	Rend-IGBC-A	1,72	0,7143	0,1710
IPSA-D	1,80	0,5875	0,1066	Rend-IPSA-D	1,55	0,9495	0,3739
IPSA-M	1,83	0,5159	0,7898	Rend-IPSA-M	1,63	0,8760	0,2698
IPSA-T	1,84	0,4814	0,0685	Rend-IPSA-T	1,62	0,8630	0,2822
IPSA-S	1,84	0,4719	0,0657	Rend-IPSA-S	1,72	0,7256	0,1777
IPSA-A	1,84	0,4596	0,0620	Rend-IPSA-A	1,76	0,6457	0,1336
IGBVL-D	1,75	0,6974	0,1595	Rend-IGBVL-D	1,55	0,9594	0,3820
IGBVL-M	1,79	0,6011	0,1129	Rend-IGBVL-M	1,70	0,7827	0,2173
IGBVL-T	1,80	0,5606	0,0963	Rend-IGBVL-T	1,72	0,7235	0,1763
IGBVL-S	1,82	0,5249	0,0830	Rend-IGBVL-S	1,76	0,6389	0,1303
IGBVL-A	1,83	0,4973	0,0737	Rend-IGBVL-A	1,79	0,5855	0,1363

Fuente: Elaboración Propia

4.9. Dimensión de Lagunaridad

Los valores para la Dimensión de Lagunaridad se muestran en la columna derecha de cada parte de la Tabla N° 6. Para las tres series de índices y sus rendimientos, se observa que en las diferentes escalas de tiempo analizadas la Dimensión fractal tiene valores que solo difieren algunas centésimas, por lo que se pueden considerar similares; en todas la escala diaria tiene el mayor valor para la Dimensión de Lagunaridad, lo que indica que la serie en esta escala es la menos densa, y este parámetro aumenta a medida que disminuye la longitud del intervalo

de tiempo. Las tres series de índices bursátiles analizados tienen menor valor de lagunaridad en todas las escalas de tiempo que las series de los rendimientos, y esto indica que las series de los índices son más densas.

4.10. Exponente de Lyapunov

La información relacionada con el Exponente de Lyapunov para las series del IGBC, IPSA e IGBVL y las de sus rendimientos aparece en la Tabla N° 7, estos cálculos se obtienen utilizando el software MTRCHAOS, desarrollado por Michael Rosentain, basándose en el fundamento formal publicado por Rosentain, et al (1993). Todos los valores del Exponente de Lyapunov son positivos en las tres dimensiones analizadas, esto permite concluir que las series de los índices tienen un comportamiento caótico. Un resultado similar tiene la serie de los rendimientos del IGBVL, pero para las series de los rendimientos del IGBC y del IPSA, aunque existe algunos exponentes con valores negativos, puede afirmarse que las series siguen una dinámica caótica, porque el máximo exponente es positivo, condición necesaria y suficiente.

Tabla N° 7 - Exponente de Lyapunov de los Rendimientos del IGBC para las dimensiones 2, 3 y 4

	Posición	Índice			Rendimientos		
		Dim=2	Dim=3	Dim=4	Dim=2	Dim=3	Dim=4
IGBC	0	0,15310	0,13350	0,12510	0,12060	0,09868	0,03207
	1	0,10610	0,10430	0,10350	0,02577	0,03905	0,30400
	2	0,08087	0,08188	0,08787	0,00226	0,01398	0,21490
	3	0,07079	0,06643	0,07338	0,00167	0,00198	0,21520
	4	0,06545	0,05809	0,06258	0,00262	0,00052	-0,05450
	5	0,06184	0,05280	0,05606	0,00348	-0,00016	-0,13570
IPSA	0	0,16110	0,14510	0,13640	0,12210	0,09934	0,09083
	1	0,11160	0,11500	0,11620	0,02451	0,03991	0,05004
	2	0,08607	0,09218	0,09760	0,00248	0,01409	0,02677
	3	0,07518	0,07719	0,08217	0,00282	0,00136	0,01209
	4	0,06763	0,06864	0,07029	0,00250	-0,00108	0,00356
	5	0,06169	0,06220	0,06322	0,00427	-0,00158	0,00339
IGBVL	0	0,15410	0,13700	0,20010	0,12440	0,99440	0,09354
	1	0,11250	0,11120	0,17610	0,02793	0,03962	0,05379
	2	0,08837	0,08912	0,14880	0,00470	0,01460	0,03042
	3	0,07686	0,07345	0,12340	0,00475	0,00341	0,01533
	4	0,06979	0,06425	0,10180	0,00504	0,00308	0,00635
	5	0,06490	0,05767	0,08929	0,00372	0,00324	0,00506

Fuente: Elaboración Propia

4.11. Ciclos de las series

El cálculo de los ciclos de las series analizadas se hizo con base en la metodología propuesta por Peters (1991). Cada una de las series originales¹² de 2.400 datos se fraccionó en segmentos de N datos, comenzando con 80 datos e incrementando en 20 observaciones en cada una de las muestras hasta llegar a 240. A cada sub-muestra de la serie fraccionada se le calculó el exponente de Hurst y sobre estos se obtuvo un promedio para las diferentes series de N datos. Un procedimiento similar se realizó con la serie de los rendimientos de cada serie. Los resultados se muestran en la Tabla N° 8.

El ciclo de la serie se determina donde el valor del exponente de Hurst es mayor; lo que para la serie del IGBC y el IGBVL corresponde a 180 días bursátiles, para el IPSA a 140 días bursátiles. Para la serie de los rendimientos, el IGBC y el IPSA corresponde a 80 días bursátiles; y los rendimientos del IGBVL a 140 días bursátiles.

Tabla N° 8 – Valores promedio del Exponente de Hurst para las series Fragmentadas del IGBC y sus Rendimientos. N = # de datos.

<i>N</i>	<i>IGBC</i>	<i>Rend-IGBC</i>	<i>IPSA</i>	<i>Rend-IPSA</i>	<i>IGBVL</i>	<i>Rend-IGBVL</i>
80	1,0104	0,7219	1,0239	0,7138	0,9925	0,7166
100	1,0179	0,6970	1,0203	0,7120	1,0169	0,7161
120	1,0020	0,6885	1,0092	0,7106	1,0223	0,7159
140	1,0207	0,6884	1,0247	0,7106	1,0106	0,7210
160	1,0133	0,6816	1,0126	0,6894	1,0254	0,7034
180	1,0307	0,6754	1,0084	0,6736	1,0260	0,6938
200	1,0156	0,6705	1,0082	0,6782	1,0235	0,6972
220	1,0147	0,6407	1,0003	0,6716	1,0213	0,6970
240	1,0097	0,6534	1,0118	0,6438	1,0150	0,6960

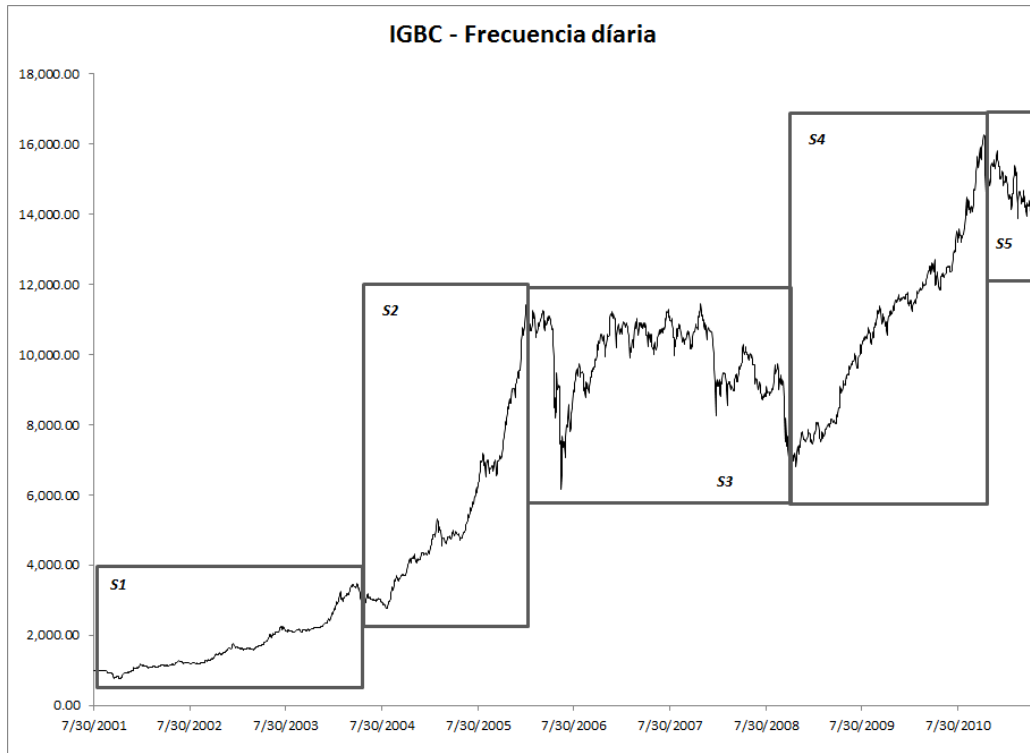
Fuente: Elaboración Propia

4.12. Tendencias

Las diferentes series analizadas tienen tendencias plenamente marcadas en algunos períodos. Cada una de las series se dividió en cinco segmentos considerando la tendencia observada; los segmentos son diferentes en tamaño, medidos en días bursátiles. En las Fig. N°s 8, 9 y 10 se muestra cada una de las series iniciales y los segmentos en los que se divide; y en la Tabla N° 9 se describen las fechas de inicio y fin de cada segmento y la dirección de la tendencia.

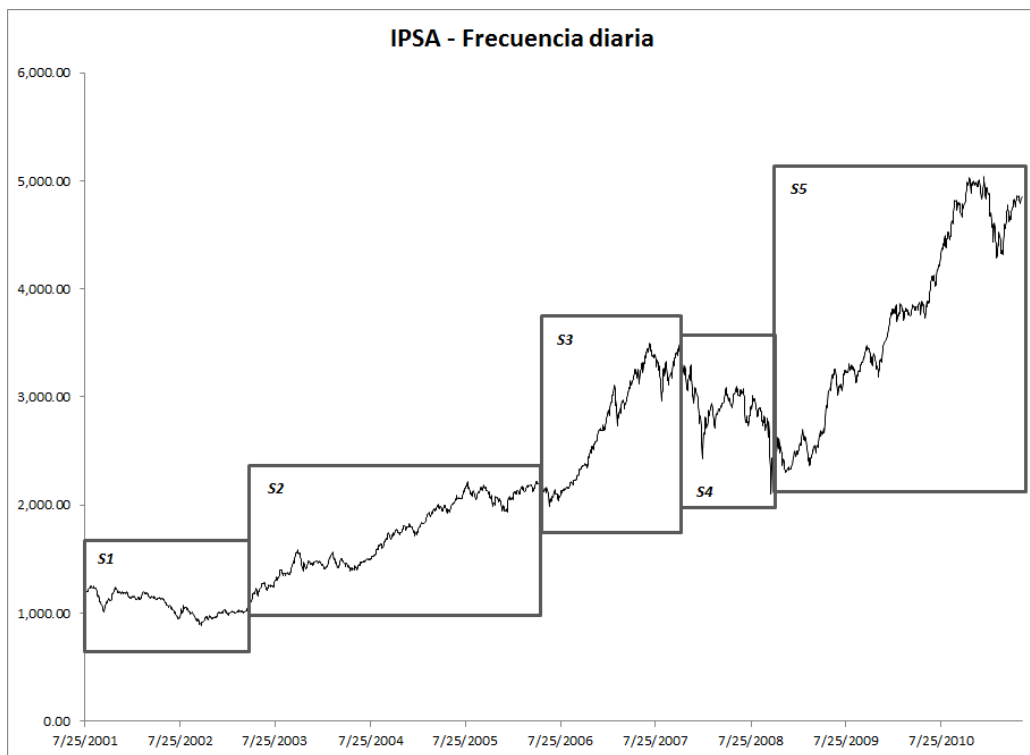
¹² Las series originales de los índices del IPSA e IGBVL para el período de análisis son de 2460 datos, pero para dar un manejo más uniforme a las series en el cálculo de los ciclos, se eliminaron los 60 datos más antiguos de estas dos series.

Figura N° 10 – Segmentos para la serie del IGBC



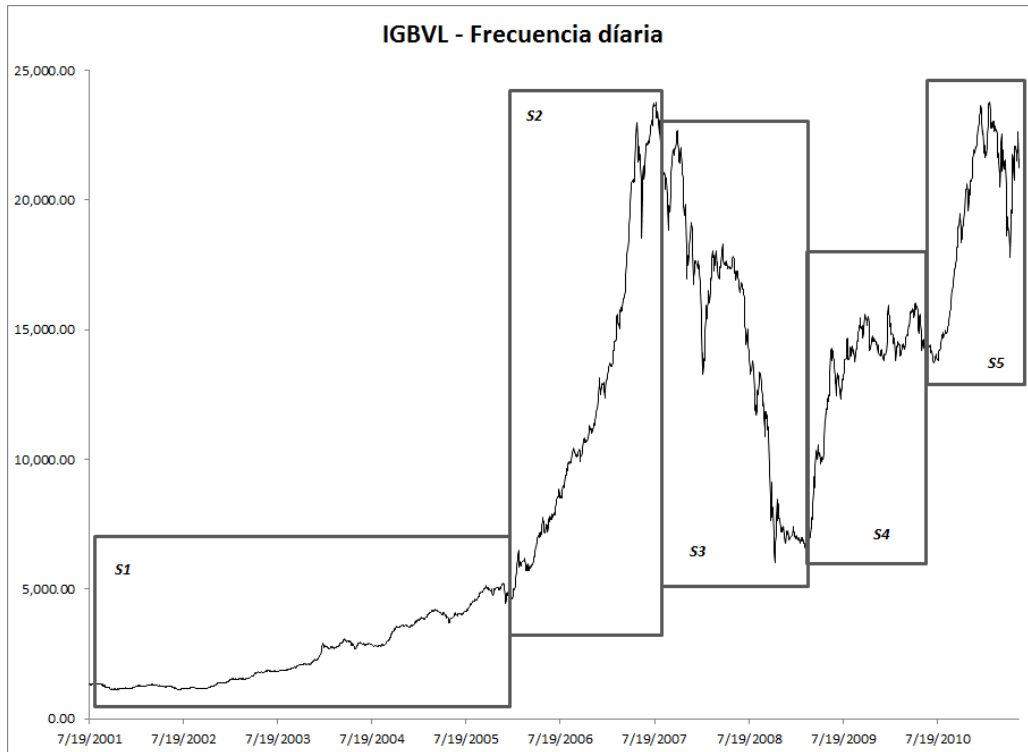
Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 11 – Segmentos para la serie del IPSA



Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Figura N° 12 – Segmentos IGBVL



Fuente: Elaboración Propia con base en las series iniciales

Tabla N° 9 – Períodos de tendencia de las series del IGBC, IPSA e IGBVL, y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados.

Serie	Segmento	Inicio	Termino	Días	Tendencia
IGBC	S1	7/30/2001	3/26/2004	650	Ascendente
IGBC	S2	4/1/2004	1/27/2006	450	Ascendente
IGBC	S3	1/30/2006	10/29/2008	670	No definida
IGBC	S4	10/30/2008	11/5/2010	490	Ascendente
IGBC	S5	11/8/2010	5/31/2011	140	Ascendente
IPSA	S1	7/25/2001	3/5/2003	400	Descendente
IPSA	S2	3/6/2003	5/11/2006	800	Ascendente
IPSA	S3	5/12/2006	10/10/2007	350	Ascendente
IPSA	S4	10/11/2007	10/13/2008	500	Descendente
IPSA	S5	10/14/2009	5/31/2011	410	Ascendente
IGBVL	S1	7/19/2001	12/22/2005	1100	Ascendente
IGBVL	S2	12/23/2005	7/25/2007	400	Ascendente
IGBVL	S3	7/26/2007	2/20/2009	390	Descendente
IGBVL	S4	2/23/2009	5/19/2010	310	Ascendente
IGBVL	S5	5/20/2010	5/31/2011	260	Ascendente

Fuente: Elaboración Propia

Para cada uno de estos períodos se calculó el Exponente de Hurst, la Dimensión Fractal y de Lagunaridad, y el Exponente de Lyapunov, para determinar si las propiedades que tiene la serie en todo el período de análisis se repiten en cada uno de los segmentos en los que se divide la serie.

En la Tabla N° 10 se muestran los resultados del Exponente de Hurst para cada uno de los segmentos de las tres series y sus rendimientos. En todas las series correspondientes a los índices los valores encontrados son cercanos a 1,0, lo que indica que las series son muy persistentes y siguen una caminata aleatoria; similar a lo que ocurre con este parámetro en la serie completa, como se presenta en la Tabla N°4. Para las series de los rendimientos todos los valores del Exponente de Hurst son mayores que 0,5, pero en unos segmentos la persistencia es mayor que en otros.

En la Tabla N° 11 se muestran los resultados de la Dimensión Fractal y la Dimensión de Lagunaridad. Los valores de la Dimensión Fractal de cada uno de los segmentos de las series, son similares a los valores de la serie completa. Para cada segmento se calculó la diferencia porcentual entre el valor de la Dimensión Fractal obtenido y el valor de este mismo parámetro para la serie completa; todas las diferencias están por debajo del 7%, lo que permite afirmar el comportamiento fractal de la serie, y muestra que cada parte tiene auto-similitud estadística con la serie completa.

Tabla N° 10 – Exponente de Hurst para las series del IGBC, IPSA e IGBVL, y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados

Serie	Exp. Hurst	Serie	Exp. Hurst
IGBC-S1	1,0	Rend-IGBC-S1	0,75
IGBC-S2	1,0	Rend-IGBC-S2	0,72
IGBC-S3	0,93	Rend-IGBC-S3	0,56
IGBC-S4	1,0	Rend-IGBC-S4	0,51
IGBC-S5	0,84	Rend-IGBC-S5	0,70
IPSA-S1	1,0	Rend-IPSA-S1	0,71
IPSA-S2	0,98	Rend-IPSA-S2	0,58
IPSA-S3	1,0	Rend-IPSA-S3	0,63
IPSA-S4	1,0	Rend-IPSA-S4	0,64
IPSA-S5	1,0	Rend-IPSA-S5	0,62
IGBVL-S1	0,99	Rend-IGBVL-S1	0,68
IGBVL-S2	1,0	Rend-IGBVL-S2	0,59
IGBVL-S3	1,0	Rend-IGBVL-S3	0,66
IGBVL-S4	0,99	Rend-IGBVL-S4	0,64
IGBVL-S5	0,99	Rend-IGBVL-S5	0,63

Fuente: Elaboración Propia

Tabla N° 11 – Dimensión Fractal y Dimensión de Lagunaridad para las series del IGBC, IPSA e IGBVL, y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados

Serie	DF Prom	DF desv	DF Lac	Dif. %	Serie	DF Prom	DF desv	DF Lac	Dif. %
IGBC-S1	1,81	0,5577	0,0948	1, 49	Ren-IGBC-S1	1,60	0,8653	0,2923	0, 22
IGBC-S2	1,81	0,5530	0,0933	1, 47	Ren-IGBC-S2	1,60	0,8550	0,2859	0, 14
IGBC-S3	1,79	0,5980	0,1114	0, 41	Ren-IGBC-S3	1,64	0,8097	0,2419	2, 96
IGBC-S4	1,79	0,5988	0,1118	0, 37	Ren-IGBC-S4	1,60	0,8889	0,3267	-2, 62
IGBC-S5	1,77	0,6323	0,1272	-0,63	Ren-IGBC-S5	1,60	0,8842	0,3064	0, 03
IPSA-S1	1,75	0,6545	0,1384	-2, 23	Ren-IPSA-S1	1,50	0,9625	0,4293	-5, 40
IPSA-S2	1,78	0,6214	0,1218	-1, 04	Ren-IPSA-S2	1,50	0,9627	0,4211	-4, 46
IPSA-S3	1,78	0,606	0,1153	-0, 84	Ren-IPSA-S3	1,51	0,9358	0,3804	-2, 28
IPSA-S4	1,72	0,7092	0,1681	-3, 90	Ren-IPSA-S4	1,61	0,8334	0,2651	4, 23
IPSA-S5	1,77	0,6275	0,1251	-1, 41	Ren-IPSA-S5	1,50	0,9597	0,4171	-4, 31
IGBVL-S1	1,81	0,5594	0,0954	-3, 74	Rend-IGBVL-S1	1,60	0,8794	0,3062	2, 81
IGBVL-S2	1,81	0,5412	0,0888	-4, 00	Ren-IGBVL-S2	1,64	0,7989	0,2358	6, 42
IGBVL-S3	1,80	0,5739	0,1016	-3, 13	Ren-IGBVL-S3	1,65	0,7891	0,2282	6, 85
IGBVL-S4	1,79	0,5866	0,1065	-2, 92	Ren-IGBVL-S4	1,60	0,8548	0,2861	3, 38
IGBVL-S5	1,78	0,6095	0,1168	-2, 14	Ren-IGBVL-S5	1,61	0,8428	0,2709	4, 75

Fuente: Elaboración Propia

Para cada uno de los segmentos antes descritos, se calculó el Exponente de Lyapunov en las dimensiones 2, 3, y 4; y los resultados se muestran en las Tablas N°s 12, 13 y 14. Para las series de los índices analizados, todos los valores de los exponentes en cada una de las dimensiones, son positivos. Los resultados para las series de los rendimientos muestran que los valores del máximo exponente en cada una de las dimensiones es positivo. Esto permite afirmar que todos los segmentos siguen comportamiento caótico, similar al que sigue la serie completa.

Tabla N° 12 – Exponente de Lyapunov para la serie del IGBC y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados.

	Posición	IGBC			Rend- IGBC		
		Dim=2	Dim=3	Dim=4	Dim=2	Dim=3	Dim=4
S1	0	0,14020	0,12660	0,11870	0,09976	0,08913	0,08226
	1	0,10500	0,10360	0,10210	0,02321	0,04040	0,04901
	2	0,08286	0,08395	0,08609	0,00095	0,01685	0,02689
	3	0,07306	0,06976	0,07345	0,00060	0,00581	0,01212
	4	0,06813	0,06307	0,06346	-0,00241	0,00440	0,00259
	5	0,06640	0,06061	0,05722	-0,00438	0,00315	0,00112
S2	0	0,14520	0,12530	0,11440	0,10620	0,08635	0,07890
	1	0,11130	0,10200	0,09779	0,03618	0,04341	0,04951
	2	0,08755	0,08186	0,08219	0,01352	0,02237	0,02888
	3	0,07890	0,06859	0,06907	0,01446	0,01207	0,01355
	4	0,07457	0,06041	0,05869	0,01665	0,01171	0,00572
	5	0,06812	0,05288	0,05103	0,01654	0,01145	0,00678
S3	0	0,15490	0,12880	0,12430	0,09804	0,08263	0,08080
	1	0,09588	0,09213	0,10060	0,02205	0,03378	0,04939
	2	0,06868	0,06726	0,08025	-0,00012	0,01072	0,02915
	3	0,05655	0,50260	0,06323	-0,00227	0,01072	0,01573
	4	0,04863	0,04222	0,04970	-0,00311	-0,00103	0,00751
	5	0,04235	0,03646	0,04150	-0,00358	0,00051	0,00772
S4	0	0,12890	0,11790	0,10540	0,09351	0,07495	0,06825
	1	0,09186	0,09429	0,08845	0,01761	0,02860	0,03621
	2	0,07068	0,07457	0,07246	-0,00267	0,00524	0,01506
	3	0,06177	0,06120	0,05944	-0,00330	-0,00577	0,00147
	4	0,05672	0,05423	0,04972	-0,00517	-0,00535	-0,00550
	5	0,05109	0,04921	0,04539	-0,00655	-0,00316	-0,00395
S5	0	0,14040	0,13090	0,11440	0,06417	0,05409	0,05418
	1	0,09516	0,09927	0,09379	0,00836	0,02373	0,03271
	2	0,06262	0,07315	0,07313	-0,01284	0,00372	0,01626
	3	0,04366	0,05479	0,05160	-0,01736	-0,01166	0,00162
	4	0,03058	0,04657	0,04169	-0,02007	-0,01835	-0,00883
	5	0,02494	0,04212	0,03390	-0,02119	-0,02263	-0,01359

Fuente: Elaboración Propia

Tabla N° 13 – Exponente de Lyapunov para la serie del IPSA y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados

	Posición	IPSA			Rend-IPSA		
		Dim=2	Dim=3	Dim=4	Dim=2	Dim=3	Dim=4
S1	0	0,17580	0,15590	0,14730	0,09677	0,08292	0,07594
	1	0,12520	0,12820	0,12860	0,02056	0,03772	0,04501
	2	0,09827	0,10660	0,11130	0,00023	0,01430	0,02469
	3	0,08588	0,09260	0,09651	-0,00004	0,00252	0,01166
	4	0,07871	0,08556	0,85160	-0,00162	0,00094	0,00458
	5	0,07251	0,08104	0,07739	-0,00064	0,00004	0,00605
S2	0	0,14760	0,13230	0,12210	0,10600	0,08552	0,08174
	1	0,10510	0,10560	0,01430	0,02235	0,03327	0,04732
	2	0,08097	0,08360	0,08637	0,00091	0,00966	0,02551
	3	0,07010	0,08080	0,07089	0,00049	-0,00097	0,01097
	4	0,06000	0,05721	0,05869	-0,00137	-0,00178	0,00260
	5	0,05015	0,04727	0,05187	-0,00119	-0,00291	0,00207
S3	0	0,11600	0,09721	0,09338	0,09370	0,07622	0,06920
	1	0,07918	0,07717	0,08128	0,02391	0,03129	0,03942
	2	0,06117	0,06049	0,06918	0,00331	0,00870	0,02055
	3	0,05576	0,05002	0,05754	0,00261	-0,00180	0,00733
	4	0,05475	0,04508	0,04816	-0,00066	-0,00272	-0,00032
	5	0,05279	0,04134	0,04238	-0,00200	-0,00248	0,00108
S4	0	0,15940	0,19510	0,14300	0,99740	0,07781	0,07382
	1	0,11100	0,11640	0,12520	0,02754	0,03317	0,04353
	2	0,08509	0,09523	0,10800	0,00578	0,01347	0,02537
	3	0,07252	0,07897	0,09222	0,00606	0,00494	0,01183
	4	0,06189	0,06696	0,07890	0,00674	0,00554	0,00404
	5	0,05264	0,05563	0,06917	0,00693	0,00477	0,00270
S5	0	0,11970	0,10710	0,09281	0,09246	0,07405	0,07249
	1	0,07821	0,08163	0,07232	0,01902	0,02789	0,04267
	2	0,05631	0,06157	0,05307	-0,00309	0,00459	0,02110
	3	0,04776	0,04642	0,03691	-0,00478	-0,00673	0,00482
	4	0,04205	0,03700	0,02376	-0,00531	-0,00923	-0,00435
	5	0,03649	0,02951	0,01422	-0,00698	-0,00928	-0,00517

Fuente: Elaboración Propia

Tabla N° 14 – Exponente de Lyapunov para la serie del IGBVL y sus rendimientos en los diferentes segmentos de tendencia analizados

Posición	IGBVL			Rend- IGBVL			
	Dim=2	Dim=3	Dim=4	Dim=2	Dim=3	Dim=4	
S1	0	0,14370	0,13010	0,12110	0,11280	0,09721	0,08397
	1	0,10610	0,10690	0,10510	0,02556	0,04423	0,04843
	2	0,08487	0,08678	0,08880	0,00401	0,02132	0,02796
	3	0,07599	0,07241	0,07441	0,00434	0,01110	0,01445
	4	0,07089	0,06377	0,06309	0,00346	0,01054	0,00744
	5	0,06785	0,05750	0,05587	0,00223	0,00995	0,00831
S2	0	0,12230	0,10420	0,09128	0,09947	0,03280	0,09947
	1	0,09433	0,08540	0,07934	0,02700	0,04189	0,02700
	2	0,07604	0,06870	0,06687	0,00537	0,01997	0,00537
	3	0,06866	0,05601	0,05646	0,00480	0,00761	0,00480
	4	0,06266	0,04861	0,04801	0,00497	0,00449	0,00497
	5	0,05355	0,04274	0,04329	-0,00127	-0,00051	-0,00127
S3	0	0,15050	0,14180	0,12690	0,10140	0,08447	0,07817
	1	0,10770	0,11450	0,10640	0,03066	0,04155	0,04884
	2	0,08053	0,08897	0,08528	0,01241	0,01758	0,02912
	3	0,06478	0,06929	0,06622	0,01281	0,00635	0,01751
	4	0,05291	0,05579	0,04985	0,01144	0,00617	0,01143
	5	0,04421	0,04527	0,03731	0,01511	0,00654	0,01251
S4	0	0,11910	0,11760	0,11260	0,08532	0,07792	0,07109
	1	0,07434	0,08958	0,09482	0,01551	0,03803	0,04373
	2	0,05028	0,06708	0,07882	-0,00083	0,01589	0,02424
	3	0,04011	0,05137	0,06498	0,00038	0,00020	0,01089
	4	0,03422	0,04054	0,05467	-0,00041	-0,00209	0,00262
	5	0,02724	0,03083	0,04792	0,00036	-0,00500	0,00057
S5	0	0,12970	0,12290	0,11330	0,08585	0,08257	0,07288
	1	0,09031	0,09891	0,09802	0,02118	0,04368	0,04633
	2	0,06895	0,07632	0,08130	0,00416	0,02699	0,02779
	3	0,05799	0,05749	0,06693	0,00866	0,02042	0,01628
	4	0,04732	0,04476	0,05432	0,01347	0,02469	0,01028
	5	0,03661	0,03467	0,04374	0,01473	0,02704	0,01277

Fuente: Elaboración Propia

5. ESTIMACION DEL RIESGO FINANCIERO MEDIANTE LA DIMENSION FRACTAL EN LOS MERCADOS DE COLOMBIA, CHILE Y PERÚ

En esta investigación se ha demostrado que los rendimientos de los índices de los mercados analizados no cumplen con la condición que la distribución de las series de datos de los rendimientos sea normal¹³, por lo que aplicar la metodología utilizando la desviación estándar como medición del riesgo en este tipo de activos financieros riesgo viola dos supuestos importantes, y hace que los resultados obtenidos puedan no ser consistentes

Aplicando esta metodología de medición del riesgo por medio de la Dimensión Fractal a los rendimientos de los tres mercados analizados, los valores encontrados para este parámetro están en una misma vecindad, y por tanto se puede afirmar que el nivel de riesgo es similar.

6. CONCLUSIONES

El análisis de las series del IGBC, IPSA e IGBVL y las series de sus rendimientos por medio del Exponente de Hurst, el Exponente de Lyapunov, Dimensión Fractal y de Lagunaridad, indican que tienen propiedades fractales, auto similitud, auto afinidad y persistencia; y siguen una dinámica caótica.

Estas propiedades se presentan para los tres mercados financieros, tanto en las series de los índices y las de sus rendimientos con frecuencia diaria, como en sus promedios mensuales, trimestrales, semestrales y anuales; y en cada uno de los cinco fragmentos en los que se dividieron las series de acuerdo a la tendencia que siguen.

La combinación de propiedades fractales, de sistemas caóticos y caminatas aleatorias muestra que la dinámica de estos mercados de capitales es compleja, dado que se mezclan estructuras estocásticas, no lineales, heterocedásticas, etc. Los hallazgos encontrados en esta investigación, se suman a otros resultados similares en series de índices financieros que demuestran que éstas siguen comportamientos caóticos, y no comportamientos aleatorios como lo sugieren otras teorías.

Estos resultados plantean nuevos retos en la búsqueda de la explicación de la dinámica de estos mercados, de nuevas técnicas y estrategias de negociación. La comprobación que el mercado sigue una dinámica caótica plantea la posibilidad de la elaboración de técnicas de predicción, al menos, en el corto plazo; basadas en técnicas no-lineales, como redes neuronales.

Dada la integración de los tres mercados analizados en lo que se ha denominado MILA (Mercado Integrado Latino-Americano) una futura investigación debería contrastar de manera formal la cointegración de estas series.

¹³ Otras investigaciones en otros mercados llegan a conclusiones similares.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIZABALO, Rubén Darío; OLESCHKO, Klavdia; KORBIN, Gabor; LOZADA, Manuel, CASTREJÓN, Ricardo, RONQUILLO, Gerardo. (2006). Lacunarity of geophysical well logs in the Cantarell oil field, Gulf of Mexico. *Geofísica Internacional*. Vol. 45 N° 2. pp 99-113.

BAHALOVÁ, Mária. GREGUŠ, Michal. (2010). Comenius University, Slovak Republic. Ponencia presentada en la conferencia E-Leader Budapest 2010. <http://www.g-casa.com/conferences/budapest/papers/Bohdalova.pdf>. Fecha de consulta: 07.01.2011.

BARTOLOZZI, M.; DROZDZ, S.; LEINWEBER, D. B.; SPETH, J.; THOMAS, A. W. (2005). Self-Similar Log-Periodic Structures in Western Stock Markets from 2000. *International Journal of Modern Physics C*, Volume 16, N° 9, pp. 1347-1361.

BERAN, Jan. (1992). Statistical Methods for Data with Long-Range Dependence. *Statistical Science*, Vol. 7, No. 4 (Nov., 1992), pp. 404-416

CASPARRI, Maria Teresa; MORENO, Alejandro. (2008). Geometría Fractal y Mercados Financieros. Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión. Universidad de Buenos Aires. http://www.econ.uba.ar/www/institutos/epistemologia/marco_archivos/ponencias/Actas%20XIII/Trabajos%20Episte/Casparri-Moreno_trabajo.pdf. Fecha de consulta: 01.07.2011.

CASPARRI, Maria Teresa; GARNICA HERVAS, J. R.; THOMASZ, E. O. (2009). Turbulencia, No-Linealidad y Caos. Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión. Universidad de Buenos Aires. http://gandalf.fcee.urv.es/sigef/english/congressos/congres15/006_Casparri_Garnica_Thomasz.pdf. Fecha de consulta: 01.07.2011.

CHU, Patrick Kuoc Kun. (2001). Using BDS statistics to detect nonlinearity in time series. University of Macao. <http://isi.cbs.nl/iamamember/CD2/pdf/98.pdf>. Fecha de consulta: 15.07.2011.

ESPINOSA MÉNDEZ, Christian. (2009). Comportamiento Caótico en los Mercados Bursátiles Latinoamericanos Utilizando Visual Recurrence Analysis. *Análisis Económico*, Vol. XXIII, N° 52 (Enero – Abril 2008), pp. 159-183.

ESPINOSA MÉNDEZ, Christian; RAMOS MEZA, Enrique. (2009). Relación de largo plazo entre el mercado accionario Mexicano y Estadounidense. *Panorama Socioeconómico*. Año 27, N° 39 (Diciembre 2009). pp. 124-136.

GÁLVEZ MEDINA, Ernesto Teobaldo. (2005). Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004). Tesis Doctoral. Escuela Superior de Comercio y Administración, Sección de Estudio de Postgrado e Investigación, Unidad Santo Tomás, Instituto Politécnico Nacional. México D. F. <http://www.colpamex.org/Tesis/EGM.pdf>. Fecha de Consulta: 01.02.2011.

GNEITING, Tilmann; SCHLATHER, Martin. (2004). Stochastic Models That Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *SIAM Review*, Vol. 46, No. 2 (Jun., 2004), pp. 269-282.

GONZÁLEZ G., Virgilio A.; GUERRERO, Carlos. (2001). Fractales: Fundamentos y Aplicaciones. *Revista Ingenierías*. Enero-Marzo 2001, Vol. IV, N° 10. pp 53-59.

LEÓN RINCON, Carlos Eduardo; REVEÍZ HERAULT, Alejandro. (2010). Portafolio Organization and Long-Term Dependence. Borradores de Economía Banco de la República. N° 622. <http://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra622.pdf>. Fecha de consulta: 21.01.2011.

MONTEALEGRE CÁRDENAS, Mauro; LONDOÑO BETANCOURTH, Gustavo; POLANÍA QUIZA, Luis Arturo. (2002). Fundamentos de los Sistemas Dinámicos, La Interdisciplinariedad desde los Sistemas No-Lineales. ISBN: 958-8154-05-7 Neiva. Editora Guadalupe. 257 pags.

NAWROCKI, David. (1995). R/S Analysis and Long Term Dependence in Stock Market Indices. *Managerial Finance*, Vol. 21, N° 7. pp 78-91

ÖZER, Göklan; ERTOKATLI, Cengiz. (2010). Chaotic Processes of Common Stock Index Returns: An Empirical Examination of Istanbul Stock Exchange (ISE) Market. *African Journal of Business Management*. Vol. N° 46, pp. 1140-1148.

OZUN, Alper; HANIAS, Mike P.; CURTIS, Panayoitis G. (2010). *A Chaos Analysis for Greek and Turkish Equity Markets*. *EuroMed Journal of Business*, Vol. 5 N° 1, pp. 101 – 118.

PAISSAN, Gabriel. (2005). Métodos de Análisis de Datos Caóticos. Laboratorio de Plasma, Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires. http://focuslab.lfp.uba.ar/public/CursoTErrores2k4/Monografias2005/Gabriel_Paissan.pdf. Fecha de consulta: 31.01.2011

PETERS, Edgar E. (1989). Fractal Structure in the Capital Markets. *Financial Analysts Journal*, Vol. 45, No. 4 (Jul. - Aug., 1989), pp. 32-37.

----- (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices and Markey Volatility*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

ROSENSTEIN, Michael. COLLINS, J. James. DE LUCA, Carlo. (1993). A practical method for calculating largest Lyapunov Exponents from small data sets. *Physica D*. Vol. 65. pp. 117-134.

WOLF, Alan; SWIFT, Jack B.; SWINEY, Harry L.; VASTANO, John A. (1985). Determining Lyapunov Exponents from a Times Series. *Physica 16D*. (1985). pp 285-317.