

MODELADO DE PLASMAS ELECTROSTÁTICOS  
UNIDIMENSIONALES POR MEDIO DEL MÉTODO  
*PARTICLE-IN-CELL* Y DESARROLLO DE LA INTERFAZ  
GRÁFICA PLASMAPP

SARA GÓMEZ RAMÍREZ

TRABAJO DE GRADO

ASESOR

PhD. Jaime Humberto Hoyos

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS E INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
MEDELLÍN  
2022

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi papá por darme su apoyo, por confiar en mí y por todo su esfuerzo dado con tanto amor a lo largo de estos años para que yo pudiera seguir adelante. A mi mamá por escucharme, por acompañarme en cada momento en que lo necesité, por comprenderme y ser mi soporte para saber que todo siempre va a estar bien. A mi hermana por darme siempre todo su ánimo, por hacerme reír en cada momento de estrés y por darme la tranquilidad que necesitaba. A mi prometido por ser mi motor de vida, por siempre darme fuerzas para seguir adelante, por escucharme, aconsejarme y enseñarme a ser mejor investigadora, por ser mi inspiración y mi compañero de vida. A mi segunda familia Álvarez Uribe por enseñarme a soñar en grande.

Agradezco a mi asesor Jaime Humberto Hoyos, quien con su vocación de ser un profesor inigualable y dedicado a sus estudiantes, me ha brindado mucho más que conocimiento, me ha inspirado y me ha apoyado en cada momento. Espero que pueda seguir siendo la motivación de muchos más estudiantes que tengan la fortuna de contar con él como profesor.

Agradezco a la Universidad EAFIT por darme el conocimiento y la integridad para ser una excelente profesional.

## CONTENIDO

	pág.
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	10
<b>1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	10
<b>1.2 JUSTIFICACIÓN</b>	11
<b>1.3 OBJETIVOS</b>	11
1.3.1 Objetivo General	11
1.3.2 Objetivos Específicos	12
<b>1.4 ESTADO DEL ARTE</b>	12
<b>2. METODOLOGÍA</b>	13
<b>3. ELEMENTOS DE FÍSICA DEL PLASMA</b>	14
<b>3.1 MATERIA</b>	14
<b>3.2 ESTADOS DE LA MATERIA</b>	14
3.2.1 ¿Qué es el plasma?	15
<b>3.3 PARÁMETROS DEL PLASMA</b>	16
3.3.1 Longitud de Debye	16
3.3.2 Frecuencia del plasma	18
3.3.3 Velocidad térmica	18
3.3.4 Criterios del plasma	19
<b>3.4 DESCRIPCIÓN AUTOCONSISTENTE DEL PLASMA</b>	19
<b>3.5 MODELAMIENTO DEL PLASMA</b>	21
<b>3.6 DESCRIPCIÓN CINÉTICA DEL PLASMA</b>	21

3.6.1	Función de distribución	21
3.6.2	Ecuación de Vlasov	22
3.7	<b>FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS DEL PLASMA</b>	23
3.7.1	Oscilaciones de plasma frío	23
3.7.2	Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón	23
3.7.3	Inestabilidad de Buneman	25
3.7.4	Ondas de Langmuir y ondas ion-acústicas	26
4.	<b>MODELO COMPUTACIONAL</b>	29
4.1	<b>MÉTODO PARTICLE-IN-CELL (PIC)</b>	29
4.1.1	Descripción analítica	31
4.1.2	Aproximación numérica	32
4.1.3	Funciones de forma y función de interpolación	33
4.1.4	Discretización de ecuaciones de movimiento	35
4.1.5	Discretización de ecuaciones de campo	37
4.1.6	Normalización de unidades	38
4.1.6.1	Ejemplo de normalización	38
4.1.7	Condiciones de frontera y estabilidad numérica	39
4.1.8	Ejemplo ilustrativo método PIC	40
5.	<b>DESARROLLO DE PLASMAPP</b>	48
5.1	<b>CÓDIGO 1: Start.mlapp</b>	48
5.2	<b>CÓDIGO 2: Inputs.mlapp</b>	48
5.3	<b>CÓDIGO 3: Main.mlapp</b>	51

<b>6. RESULTADOS</b>	<b>56</b>
<b>6.1 OSCILACIONES DE PLASMA FRÍO</b>	<b>56</b>
<b>6.2 INESTABILIDAD TWO-STREAM ELECTRÓN-ELECTRÓN</b>	<b>59</b>
<b>6.3 INESTABILIDAD DE BUNEMAN</b>	<b>63</b>
<b>6.4 ONDAS DE LANGMUIR Y ONDAS ION-ACÚSTICAS</b>	<b>67</b>
<b>6.5 AMORTIGUAMIENTO DE LANDAU EN LAS ONDAS DE LANGMUIR</b>	<b>69</b>
<b>7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO</b>	<b>71</b>
<b>7.1 CONCLUSIONES</b>	<b>71</b>
<b>7.2 TRABAJO FUTURO</b>	<b>72</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
<b>3.1</b> Modelo del átomo.	14
<b>3.2</b> Estados de la materia.	15
<b>3.3</b> Rango de existencia del plasma con respecto a la temperatura y a la densidad.	16
<b>3.4</b> Esquema de apantallamiento de Debye.	17
<b>3.5</b> Esquemas de (a) plasma colisional y (b) no colisional.	18
<b>3.6</b> Modelo auto-consistente del plasma.	19
<b>3.7</b> Aproximaciones del plasma.	21
<b>3.8</b> Espacio de fase de partículas de especie $\alpha$ tomando un diferencial de volumen $d\vec{v}d\vec{r}$ .	22
<b>3.9</b> Función de distribución para la inestabilidad Two-Stream.	24
<b>3.10</b> Contornos de energía para el espacio de fase de electrones e iones con un pico de potencial positivo [21].	25
<b>3.11</b> Pulsos bipolares del campo eléctrico observados en la magnetósfera terrestre [23].	26
<b>3.12</b> Relación de dispersión teórica para las ondas de Langmuir y las ion-acústicas.	28
<b>4.13</b> Fuerza de Coulomb entre dos partículas puntuales.	30
<b>4.14</b> Fuerza de Coulomb entre dos partículas de tamaño finito.	30
<b>4.15</b> Algoritmo del método PIC.	31
<b>4.16</b> Tipo de interpolación NGP, donde la función de forma $S_x$ está dada por un delta de Dirac y la función de interpolación $W_\alpha$ .	34

4.17	Tipo de interpolación CIC, donde la función de forma $S_x$ está dada por una función b-spline de orden cero llamada flat top y la función de interpolación $W_\alpha$ está dada por una b-spline de primer orden.	34
4.18	Esquema método Leapfrog.	36
4.19	Espacio de fase inicial donde las líneas grises simbolizan la malla.	42
4.20	Espacio de fase en la iteración 1.	44
5.21	Interfaz gráfica de Start.mlapp.	48
5.22	Pestaña <b>System</b> en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.	49
5.23	Pestaña <b>Species</b> en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.	49
5.24	Pestaña <b>Numerical methods</b> en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.	50
5.25	Pestaña <b>Diagnostics</b> en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.	50
5.26	Opción <i>file</i> en el menú. En esta se permite exportar las variables en formato text e importar variables desde el mismo tipo de formato.	51
5.27	Interfaz gráfica del código Main.mlapp en la pestaña <i>Panel 1</i> .	54
5.28	Interfaz gráfica del código Main.mlapp en la pestaña <i>All</i> .	55
6.29	Simulación de oscilaciones de plasma frío con espacio de fase en $t = 4/\omega_{pe}$ , relación de dispersión, momentum en función del tiempo y energía potencial, cinética y total en función del tiempo.	56
6.30	Comparación de porcentaje de error para las ecuaciones de movimiento: Leapfrog, Euler y Runge Kutta de cuarto orden con (a) método de diferencias finitas y (b) método de transformada rápida de Fourier para la ecuación de Poisson.	59
6.31	Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón $it = 1.0$ .	59
6.32	Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón $it = 8 \times 10^4$ .	60
6.33	Formación de pulsos bipolares del campo eléctrico para la inestabilidad Two-Stream electrón-electrón.	61
6.34	Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón $it = 1.44 \times 10^5$ .	61

<b>6.35</b> Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón $it = 80$ .	62
<b>6.36</b> Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón $it = 160$ .	62
<b>6.37</b> Inestabilidad de Buneman $it = 1$ .	63
<b>6.38</b> Inestabilidad de Buneman $it = 3500$ .	64
<b>6.39</b> Inestabilidad de Buneman $it = 5000$ .	65
<b>6.40</b> Formación de pulsos bipolares del campo eléctrico para la inestabilidad Buneman.	65
<b>6.41</b> Primera saturación de la energía para $m_2/m_1 = 1000$ con ( $v_{01} = 1$ y $v_{01} = 0.5$ ).	66
<b>6.42</b> Primera saturación de la energía para $m_2/m_1 = 500$ y $m_2/m_1 = 1000$ con $v_{01} = 0.5$ ).	66
<b>6.43</b> Simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir $it = 1$ .	67
<b>6.44</b> Simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir $it = 8000$ .	67
<b>6.45</b> Energía potencial, cinética y total en función del tiempo para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.	68
<b>6.46</b> Energía potencial, cinética de electrones y de iones en función del tiempo para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.	68
<b>6.47</b> Relación de dispersión para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.	69
<b>6.48</b> Comparación relaciones de dispersión teóricas y simulada para las ondas ion-acústicas y de Langmuir.	70
<b>6.49</b> Gráfica de energía cinética de los electrones y de los iones y energía potencial en función del tiempo para la visualización del amortiguamiento de Landau.	70

## LISTA DE TABLAS

	pág.
<b>4.1</b> Normalización de las unidades.	38
<b>4.2</b> Ejemplo normalización de las unidades.	39
<b>4.3</b> Parámetros iniciales del programa ejemplo.	40
<b>6.4</b> Matriz de experimentos usando el método de diferencias finitas para resolver la ecuación de Poisson.	57
<b>6.5</b> Matriz de experimentos usando el método de transformada rápida de Fourier para resolver la ecuación de Poisson.	58

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hace 15 billones de años ocurrió el Big-Bang, el cual constituye el momento en el surge la materia del universo. Esta se encontraba a muy alta temperatura generando el *primer* estado fundamental de la materia: el plasma [1]. Este es un gas altamente ionizado compuesto por electrones, iones y partículas neutras. Bajo la expansión del universo la materia se enfrió, aunque solo el 1% cambió de estado a sólido, líquido y gas [2].

A pesar de que el plasma fuera el primer estado generado, se le conoce como el *cuarto* debido a que fue descubierto hace aproximadamente un siglo mientras los otros estados ya eran bien conocidos [3]. A pesar de lo común que es el plasma en el espacio, en la tierra es necesario crearlo para estudiar sus propiedades ya que la baja temperatura de este planeta dificulta la existencia de este estado de la materia.

El estudio teórico del plasma mediante métodos exclusivamente analíticos no es eficiente debido a la cantidad de partículas (al menos  $10^{20}$ ) a las que se les debe seguir su trayectoria aplicando las ecuaciones de Newton para mover las partículas y de Maxwell para la dinámica de los campos electromagnéticos [4]. Además, como se mencionó anteriormente, la mayor parte del plasma presente en el universo se encuentra en el espacio, lo que dificulta su estudio a través de la experimentación. En este sentido es necesario utilizar un modelo computacional, el cual se aproxime al original. Se utilizan métodos numéricos para encontrar la solución del modelo por medio de programación [5]. Esto permite el desarrollo de experimentos teóricos mediante la variación de parámetros físicos del método con el fin de alcanzar el objetivo de comprender el comportamiento del fenómeno.

El avance tecnológico de los años 30, permitió que se creara un nuevo campo de investigación: la física computacional. Adicionalmente, 20 años después, fue posible llevar a cabo simulaciones del plasma, las cuales hoy siguen siendo objeto de estudio [6].

Una de las aproximaciones dadas para describir el plasma es la cinética, en donde se da primacía a las interacciones microscópicas de las partículas y los campos [7]. En este trabajo se estudia esta aproximación mediante la implementación computacional del modelo particle-in-cell (PIC). El plasma simulado es Coulombico, es decir que los efectos del campo magnético no son considerados y que solo el campo eléctrico auto-consistente gobierna la dinámica del plasma. Esta aproximación se cumple si la temperatura del plasma es tal que la velocidad térmica de las partículas sea mucho menor que la velocidad de la luz. Además, este trabajo se enfoca en una geometría unidimensional en donde todas las cantidades físicas varían a lo largo de una sola coordenada del plano cartesiano [8].

El objetivo de este trabajo es analizar fenómenos electrostáticos astrofísicos como la inestabilidad Two-Stream, la inestabilidad de Buneman, las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas. Esto se pretende realizar a través de simulaciones implementando el modelo PIC. Para facilitar el desarrollo de estas, se crea una aplicación llamada *PlasmAPP* utilizando MATLAB App-Designer el cual es un módulo de MATLAB que permite el diseño de una interfaz gráfica amigable para el usuario. Esta pretende brindar una forma simple para estudiar distintos fenómenos físicos por medio de la variación de parámetros y así mismo explorar los distintos métodos numéricos disponibles para resolver las ecuaciones del modelo.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El método PIC es una herramienta computacional útil en el modelado de plasmas, ya que simula el comportamiento de este estado de la materia utilizando menos partículas (partículas computacionales) respecto al plasma real, disminuyendo así la carga computacional [9].

Por medio de un modelo electrostático unidimensional del plasma y la implementación computacional del algoritmo PIC, se busca simular distintos fenómenos físicos. Para facilitar el desarrollo de las simulaciones, se implementa la interfaz gráfica PlasmAPP la cual permite que el usuario pueda definir los parámetros del plasma, el método numérico para solucionar las ecuaciones de movimiento (Método de Euler, Leapfrog y Runge Kutta de cuarto orden), el método numérico para resolver la ecuación de Poisson (Diferencias Finitas, Transformada Rápida de Fourier) y los diagnósticos que desea observar. Esta aplicación tiene como objetivo que estudiantes y nuevos investigadores ingresen de manera más amigable en el estudio de fenómenos de física del plasma y en las simulaciones PIC. Usando PlasmAPP, se busca simular y analizar fenómenos electrostáticos de plasma que se dan en ambientes astrofísicos.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo General

Simular distintos fenómenos electrostáticos unidimensionales presentes en plasmas astrofísicos mediante la implementación computacional del modelo PIC y desarrollo de una interfaz gráfica para las simulaciones.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Implementar computacionalmente el modelo PIC que resuelve la ecuación cinética de Vlasov utilizando distintos métodos numéricos para las ecuaciones de movimiento de las partículas (Método de Euler, Leapfrog y Runge Kutta de cuarto orden) y para la ecuación de Poisson (Diferencias finitas y Transformada Rápida de Fourier).
- Construir una interfaz gráfica que le facilite al usuario la simulación de fenómenos electrostáticos del plasma.
- Validar el funcionamiento de la aplicación mediante la simulación de las oscilaciones de plasma frío y comparar la funcionalidad de los métodos numéricos utilizados.
- Simular y analizar el comportamiento de algunos fenómenos astrofísicos como la inestabilidad two-stream, la inestabilidad de Buneman, las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas.

## 1.4 ESTADO DEL ARTE

El método particle-in-cell fue desarrollado por John Dawson en Princeton y Oscar Buneman en Cambridge a finales de los años 50 en donde lograron simular sistemas de entre 100 y 1000 partículas [10]. Posteriormente, en 1983, Dawson publicó el artículo *Particle simulation of plasmas*, en donde establece de forma precisa las bases para las simulaciones utilizando el método PIC [5]. Dos años más tarde Birdsall y Langdon publicaron el libro más reconocido para las simulaciones cinéticas: *Plasma physics via computer simulation*. Aquí los autores desarrollan detalladamente el método y exponen distintas simulaciones y análisis [9].

Los primeros códigos PIC fueron desarrollados en lenguajes de programación Fortran y C, sin embargo, actualmente existen diferentes códigos implementados en Python y en MATLAB como el código Kempo1 [11] en MATLAB o como los códigos desarrollados por Giovanni Lapenta [12], quien es un reconocido autor en esta área. En su trabajo, Lapenta, implementa un programa unidimensional electrostático en MATLAB utilizando un tipo de programación con estructura procedimental. Además, en el código, los iones están fijos en el fondo y los electrones son móviles. El programa resuelve las ecuaciones de movimiento con el método de Euler y la ecuación de Poisson utilizando diferencias finitas. Basándose en el trabajo de Lapenta, en esta tesis se desarrolla un nuevo código utilizando una estructura funcional en la programación y permitiendo que el usuario seleccione los métodos numéricos para las ecuaciones por medio de una interfaz gráfica. Adicionalmente, se busca que el usuario pueda decidir sobre la movilidad de los iones.

## 2. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo este proyecto y cumplir el objetivo general tiene en cuenta la siguiente metodología, la cual se divide en 5 etapas como se muestra a continuación:

- Realizar modelo matemático: Para poder realizar las simulaciones PIC, es de vital importancia tener claridad del modelo cinético. Este modelo busca resolver la ecuación de Vlasov teniendo en cuenta la función de distribución, la cual es una descripción estadística que dice cómo las partículas están distribuidas en el espacio de fase [13]. Posteriormente, se puede realizar el algoritmo PIC, teniendo en cuenta que la función de distribución de una especie (electrones o iones) estará dada por la sumatoria de funciones de distribución de súper partículas, las cuales son elementos computacionales que contienen muchas partículas reales de una sola especie [14].
- Realización código básico electrostático en MATLAB: Para un mayor entendimiento del método PIC y que futuros estudiantes puedan continuar con el tema de investigación, se pretende realizar un código en MATLAB electrostático el cual ejemplifique el método de forma simple y que a su vez este código sea usado como base para el desarrollo de la interfaz.
- Diseño de aplicación en MATLAB App Designer: Para generar la aplicación de PlasmAPP se utiliza MATLAB App Designer, el cual es un módulo de MATLAB que permite la generación de aplicaciones. Adicionalmente, se van a implementar distintos métodos numéricos para la solución de las ecuaciones de movimiento y de la ecuación de Poisson.
- Validación del funcionamiento de la aplicación: Para probar la funcionalidad de la aplicación, se realiza la simulación de las oscilaciones de plasma frío utilizando los distintos métodos numéricos para las ecuaciones de movimiento y para la ecuación de Poisson. Con el fin de saber si el código funciona correctamente, se analiza la conservación de la energía y del momentum. Adicionalmente, se realizan otros diagnósticos como la visualización del espacio de fase, la relación de dispersión y la función de distribución, entre otros.
- Simulación de fenómenos electrostáticos y comparación de resultados con bases teóricas: Se pretende simular la inestabilidad two-stream, la inestabilidad de Buneman, las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas con el objetivo de validar el funcionamiento de la aplicación comparando los datos simulados con los datos teóricos.

### 3. ELEMENTOS DE FÍSICA DEL PLASMA

#### 3.1 MATERIA

Normalmente se define como materia a todo aquello que tenga masa y volumen. Esta se compone de átomos que constan de un núcleo compuesto de protones (carga positiva) y neutrones (carga neutra), el cual se rodea de una nube de electrones (carga negativa), este esquema se observa en la Figura 3.1.

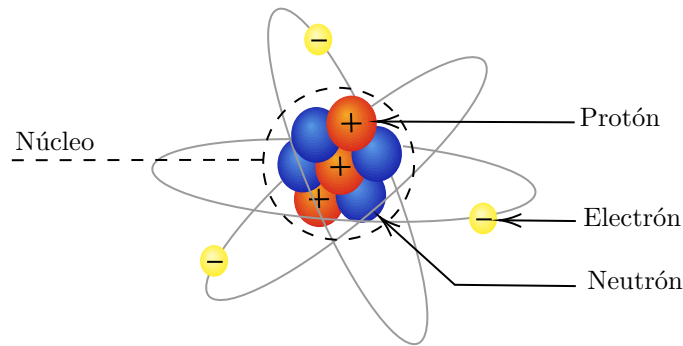


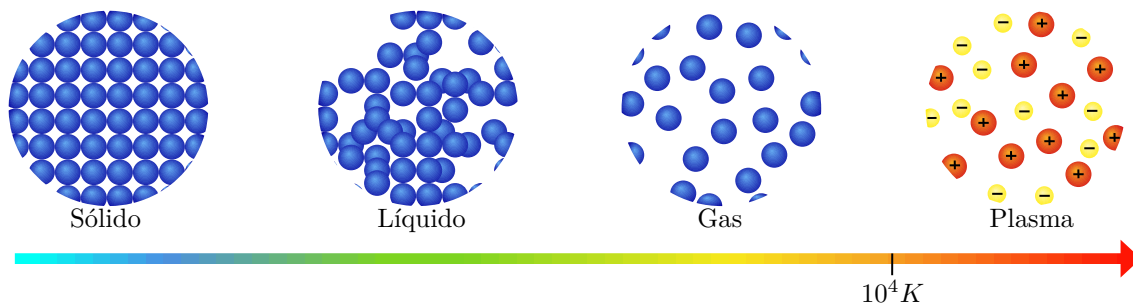
Figura 3.1: Modelo del átomo.

Los electrones y protones se atraen entre sí por la fuerza electromagnética, esta disminuye a medida que el electrón se aleja del núcleo. Cuando un electrón recibe mayor energía que la de enlace, este se libera del pozo de potencial electrostático [15].

Si la cantidad de protones y de electrones en un átomo es diferente, la estructura se conoce como *ion*, este tiene una carga positiva o negativa.

#### 3.2 ESTADOS DE LA MATERIA

Desde un punto de vista científico, la materia se puede clasificar en términos de cuatro estados fundamentales: sólido, líquido, gas y plasma, como se observa en la Figura 3.2. El estado de una sustancia depende de la energía térmica que los átomos o las moléculas tengan. Suponga que se tiene un material en estado sólido con estructura molecular. En este la energía potencial de interacción entre las partículas es mayor que la energía cinética, lo que mantiene las moléculas unidas. Si se incrementa la temperatura del sólido, la energía térmica aumenta a su vez causando vibraciones en el material que hacen que se rompa la estructura rígida, obteniendo el estado líquido. Si se continúa aumentando la temperatura, la energía cinética promedio de las partículas



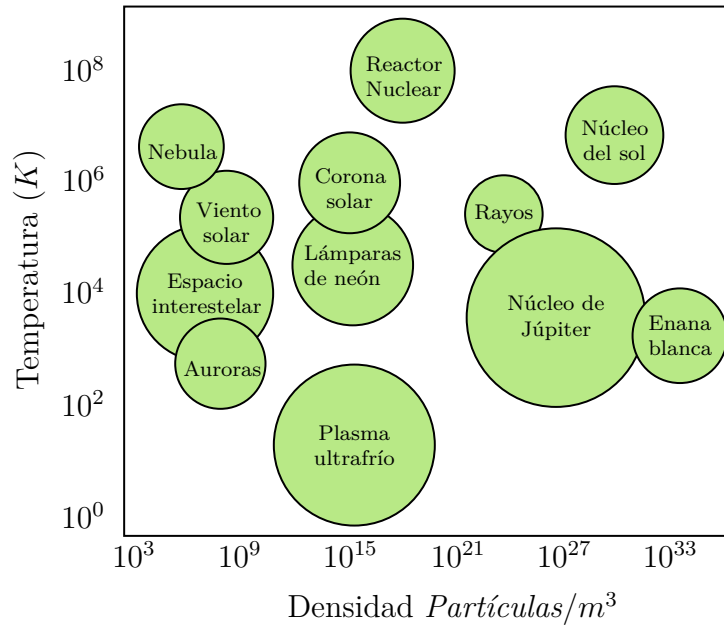
**Figura 3.2:** Estados de la materia.

excede la energía potencial de atracción entre las moléculas haciendo que estas interactúen exclusivamente mediante colisiones, este estado de la materia se conoce como gas. Si se continúa calentando la materia, la energía cinética incrementa de modo que las colisiones entre las moléculas son suficientemente fuertes para formar un gas atómico. Finalmente, cuando la temperatura excede aproximadamente los  $10^4 K$  que corresponde a la temperatura típica de ionización para el átomo de hidrógeno, la energía térmica suministrada al sistema es mayor que la energía que mantiene a los electrones ligados al núcleo en el pozo de potencial. De esta forma, al menos un electrón se separará del átomo, obteniendo un gas de iones, electrones y partículas neutras llamado plasma [16].

### 3.2.1 ¿Qué es el plasma?

Anteriormente, se observó que si a un gas se le adiciona suficiente energía, se genera el plasma, el cual es un estado de la materia conformado por iones cargados positivamente, electrones y algunas partículas neutras que no alcanzaron el estado de ionización. A pesar de estar compuesto por partículas cargadas, visto de forma macroscópica es neutro ya que la carga neta del sistema es ser cero. Por otra parte, visto de forma microscópica, en una escala del orden de la longitud de Debye (ver sección **3.3.1**) la sumatoria de cargas es diferente de cero, por consiguiente, teniendo en cuenta que se tiene neutralidad a nivel macroscópico (escalas largas de longitud) pero que a nivel microscópico (escalas menores a la longitud de Debye) se tienen desbalances de carga neta, se establece que el plasma es **cuasi-neutro**. Adicionalmente, la existencia de concentraciones locales de cargas da a lugar a campos eléctricos, y el movimiento de las partículas puede generar campos magnéticos. Los campos electromagnéticos auto-generados interactúan con las partículas del plasma, de forma que dominan las interacciones de alto alcance (campos eléctricos y magnéticos), sobre las de corto alcance (interacciones uno a uno o colisiones binarias), causando que el plasma tenga un comportamiento **colectivo**. Luego, se puede definir el plasma como: “Gas **cuasi-neutro** compuesto por partículas cargadas y neutras el cual exhibe un comportamiento **colectivo**” [2].

El plasma es el estado fundamental más común del universo y se observa en ambientes naturales como en el sol, las estrellas y la magnetósfera de la tierra. Sin embargo, este también puede ser creado en el laboratorio aplicando grandes cantidades de energía a un gas. En la Figura 3.3 se observa que el estado de plasma cubre un amplio rango de densidad de partículas y temperaturas [17].

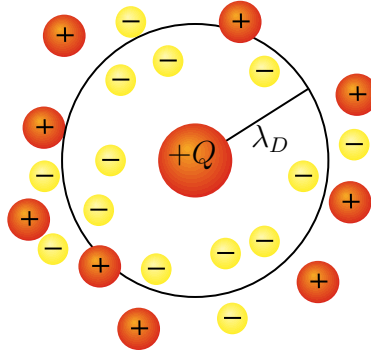


**Figura 3.3:** Rango de existencia del plasma con respecto a la temperatura y a la densidad.

### 3.3 PARÁMETROS DEL PLASMA

#### 3.3.1 Longitud de Debye

Suponga que se tiene una carga de prueba positiva  $+Q$  en un plasma, algunos electrones serán atraídos a esta generando una carga de polarización negativa en una distancia llamada longitud de Debye  $\lambda_D$ . De esta forma, el campo generado por la carga  $+Q$ , será apantallado por el efecto de polarización colectiva. Este esquema se muestra en la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Esquema de apantallamiento de Debye.

La longitud de Debye para plasmas con iones fríos está dada por la ecuación (3.1)

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}, \quad (3.1)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T_e$  es la temperatura de los electrones,  $n_e$  es la densidad de los electrones y  $e$  es la carga del electrón [2].

Si la cantidad de partículas cargadas contenidas en la esfera de Debye es pequeña, el sistema se llama fuertemente acoplado o *colisional*, esto debido a que el campo eléctrico experimentado por una carga es causado por la superposición de los campos generados por pocas partículas haciendo que esta interactúe fuertemente con cargas y que tenga una alta probabilidad de colisionar. Por otra parte, en el régimen de plasma débilmente acoplado o *no colisional*, se tienen múltiples partículas en la esfera de Debye lo que hace que el campo eléctrico total que siente una partícula sea el resultado de la superposición de la contribución de los campos de muchas partículas, de esta forma la dispersión de las trayectorias será pequeña y las probabilidades de que estas colisionen es baja. En los plasmas no colisionales, la energía térmica es mucho mayor que la potencial, de manera que la trayectoria de las partículas será débilmente influenciada por interacciones eléctricas. De esta forma, se establece que los efectos de las singularidades de la fuerza de Coulomb son apantallados por la presencia de muchas partículas dentro de la esfera de Debye, luego el comportamiento colectivo va a dominar sobre las colisiones binarias [13]. Los regímenes mencionados se esquematizan en la Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Esquemas de (a) plasma colisional y (b) no colisional.

### 3.3.2 Frecuencia del plasma

Suponga que se tiene un sistema de plasma cuasi-neutro y en equilibrio térmico, si se le implementa una pequeña perturbación a los electrones presentes, por efectos colectivos, la fuerza de Coulomb tenderá a restaurar el equilibrio. Este movimiento genera una onda que tiene una frecuencia del plasma electrónica  $\omega_{pe}$ . El mismo efecto se obtiene si son los iones los que se desplazan y tendrían una frecuencia del plasma iónica  $\omega_{pi}$  la cual sería menor a la de los electrones debido a su masa [16]. La frecuencia del plasma para la especie  $\alpha$ , si se ignora el movimiento térmico, es:

$$\omega_{p\alpha} = \sqrt{\frac{n_{\alpha}q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\epsilon_0}}. \quad (3.2)$$

Esta frecuencia define una escala de tiempo fundamental en el plasma.

### 3.3.3 Velocidad térmica

La temperatura  $T_{\alpha}$  de la especie  $\alpha$  está relacionada con la energía cinética  $E_{k\alpha}$  promedio de una partícula de la forma:

$$E_{k\alpha} = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{th,\alpha}^2 = \frac{3}{2}k_B T_{\alpha}, \quad (3.3)$$

donde  $v_{th,\alpha}$  es la velocidad térmica de una partícula de especie  $\alpha$ , es decir, la velocidad promedio de una partícula en una dimensión, la cual está dada por:

$$v_{th,\alpha} = \sqrt{\frac{k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}. \quad (3.4)$$

Adicionalmente, es posible relacionar la velocidad térmica con la frecuencia del plasma para los electrones como se observa en la ecuación **3.5**

$$v_{th,e} = \lambda_D \omega_{pe}. \quad (3.5)$$

### 3.3.4 Criterios del plasma

Para que un gas altamente ionizado se comporte como plasma, se deben cumplir los siguientes criterios [2]:

- La longitud del sistema  $L$  debe ser mucho mayor que la longitud de Debye:

$$\lambda_D \ll L. \quad (3.6)$$

- El número de partículas en la esfera de Debye  $N_D$ , definido como:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \quad (3.7)$$

debe cumplir con el criterio:

$$N_D \gg 1. \quad (3.8)$$

- Por último, se debe cumplir que en el plasma deben gobernar las fuerzas de largo alcance sobre las de corto rango, es decir que los campos deben dirigir la dinámica de las partículas por encima de las colisiones, esto se puede expresar como:

$$\omega_p \tau > 1 \quad (3.9)$$

donde  $\tau$  es el período de colisiones.

### 3.4 DESCRIPCIÓN AUTOCONSISTENTE DEL PLASMA

Para describir el movimiento de cada partícula, se puede utilizar el modelo auto-consistente descrito en la Figura 3.6.

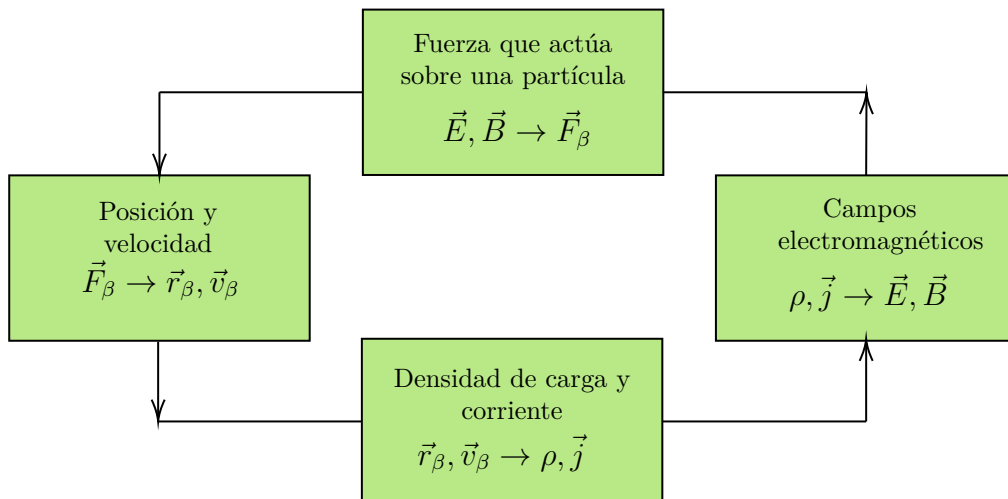


Figura 3.6: Modelo auto-consistente del plasma.

En primer lugar, en cada punto del espacio se calcula la densidad de carga  $\rho$  y de corriente  $\vec{j}$  teniendo en cuenta la posición  $\vec{r}_\beta$  y la velocidad  $\vec{v}_\beta$  de las partículas en términos de la función Delta de Dirac:

$$\rho = \sum_{\beta=1}^N q_\beta \delta(\vec{r} - \vec{r}_\beta), \quad (3.10)$$

$$\vec{J} = \sum_{\beta=1}^N q_\beta \vec{v}_\beta \delta(\vec{r} - \vec{r}_\beta). \quad (3.11)$$

donde  $\beta$  es el índice de cada una de las partículas del sistema.

Las densidades de carga y corriente obtenidas constituyen los términos fuente para la generación de los campos electromagnéticos en el espacio producidos por todas las partículas. Luego, se calculan los campos eléctricos y magnéticos utilizando las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (3.15)$$

Conocidos los campos electromagnéticos, se utiliza la fuerza de Lorentz para calcular la fuerza que actúa sobre una partícula  $\beta$ :

$$\vec{F}_\beta = q_\beta (\vec{E} + \vec{v}_\beta \times \vec{B}). \quad (3.16)$$

Estas fuerzas actualizan las velocidades y las posiciones de cada partícula de acuerdo a las ecuaciones de movimiento:

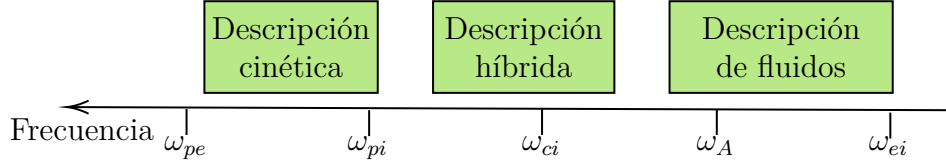
$$\frac{d\vec{r}_\beta}{dt} = \vec{v}_\beta, \quad (3.17)$$

$$m_\beta \frac{d^2 \vec{r}_\beta}{dt^2} = \vec{F}_\beta. \quad (3.18)$$

Las ecuaciones mostradas anteriormente exponen una forma detallada para modelar la dinámica del plasma, sin embargo, esta no es práctica ya que un sistema contiene al menos  $10^{20}$  partículas por lo que es complejo seguir la dinámica de cada una de estas. Por este motivo se debe utilizar una aproximación menos exacta, pero que conserve una descripción adecuada de los fenómenos físicos[2].

### 3.5 MODELAMIENTO DEL PLASMA

En la Figura 3.7 se muestran las distintas formas que se utilizan para describir el plasma.



**Figura 3.7:** Aproximaciones del plasma.

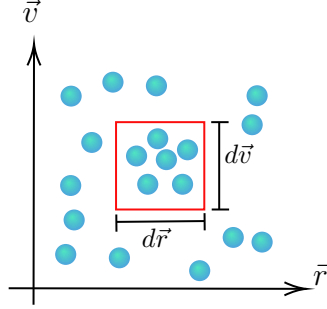
Las descripciones son extensiones de la teoría cinética de gases y de hidrodinámica de fluidos neutrales, sin embargo, las adaptaciones realizadas al plasma son de mayor complejidad debido a los campos eléctricos y magnéticos involucrados en las partículas cargadas [18]. El modelo cinético busca describir de forma microscópica la dinámica del plasma aplicando conceptos de la mecánica estadística. Esto se hace promediando los datos microscópicos del sistema obteniendo ensambles estadísticos. En simulaciones usualmente se utiliza este modelo para obtener fenómenos de alta frecuencia, esto debido a que la amplia gama de escalas temporales del plasma impide que todos los fenómenos puedan ser observados en una misma simulación. Por otra parte en el modelo de fluidos no se requiere tener conocimiento sobre el movimiento individual de las partículas, por el contrario, solo las cantidades macroscópicas se tienen en cuenta como la densidad, la temperatura y la velocidad de fluidos. El modelo puede ser de un solo fluido que describa cada especie o de dos fluidos: uno para los electrones y otro para los iones. Esta descripción se utiliza computacionalmente para fenómenos de baja frecuencia. Un modelo intermedio es el híbrido en donde se describe una especie como partículas (usualmente los iones) y una especie como fluido (usualmente los electrones). Este modelo se utiliza normalmente para observar fenómenos relacionados con los iones ya que son de menor frecuencia. Además, tiene la ventaja de disminuir la carga computacional del cinético para ambas especies (iones y electrones) [9]. Este trabajo se enfoca en el modelo cinético el cual se describirá en detalle a continuación.

### 3.6 DESCRIPCIÓN CINÉTICA DEL PLASMA

#### 3.6.1 Función de distribución

Un plasma es un ensamble de electrones, iones y partículas neutras que cuentan con una posición  $\vec{r}_\alpha$  y una velocidad  $\vec{v}_\alpha$  en un tiempo  $t$ , donde  $\alpha$  denota la especie. Por

aproximación estadística, podemos usar una *función de distribución* la cual nos va a decir como las partículas están distribuidas en el *espacio de fase*, el cual es un diagrama de 6 dimensiones (3 para la posición y 3 para la velocidad) [16]. Debido a la imposibilidad de dibujar este espacio, se realiza una proyección en un plano bidimensional en la Figura 3.8.



**Figura 3.8:** Espacio de fase de partículas de especie  $\alpha$  tomando un diferencial de volumen  $d\vec{v}d\vec{r}$ .

Luego, se puede definir el número de partículas en un diferencial de volumen  $d\vec{v}d\vec{r}$  en un tiempo  $t$  como:

$$f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)d\vec{r}d\vec{v} = dN(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (3.19)$$

donde  $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  es la función de distribución de la especie  $\alpha$  y se define como la densidad de puntos representativos en el espacio de fase [16].

### 3.6.2 Ecuación de Vlasov

El plasma no colisional puede ser descrito por las ecuaciones de Maxwell (3.12)-(3.13)-(3.14)-(3.15) y por la ecuación de Vlasov la cual está dada por:

$$\frac{df_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{dt} = \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = 0. \quad (3.20)$$

Esta ecuación indica que a través de la dinámica, en ausencia de colisiones (lado derecho de la ecuación (3.20)) la función de distribución es constante en el tiempo. Por otra parte, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se determinan a través del comportamiento auto-consistente de las partículas del plasma [16].

## 3.7 FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS DEL PLASMA

### 3.7.1 Oscilaciones de plasma frío

Considere que se tiene un plasma cuasi-neutral en el equilibrio térmico. Se puede asumir que los iones están fijos en el fondo, esto debido a que su gran masa los hace casi inmóviles. Además, suponga que se tiene un haz de electrones que se mueve con una velocidad  $\vec{v}_0$  y que tienen una función de distribución maxwelliana donde la velocidad térmica tiende a cero  $v_{th,e} \rightarrow 0$ . Si se añade una pequeña perturbación a los electrones, teóricamente, la fuerza de Coulomb actuará como una fuerza restauradora y por ende los electrones oscilarán de acuerdo a la frecuencia del plasma  $\omega_{pe}$ . De esta forma, se obtiene la relación de dispersión:

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_0 \pm \omega_{pe}. \quad (3.21)$$

Cabe mencionar que estas ondas no son físicas ya que la mayor parte de los plasmas tienen al menos una componente de la velocidad donde la energía térmica es mayor a  $1eV$  [9].

### 3.7.2 Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón

La inestabilidad Two-Stream electrón-electrón consta de dos haces de electrones que poseen velocidades opuestas en un fondo inmóvil de iones. La función de distribución está dada por la ecuación 3.22 [19], esta puede ser graficada como se muestra en la Figura 3.9

$$f(v_x) = \frac{n_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th,e}} e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2v_{th,e}^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th,e}} e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2v_{th,e}^2}} \right). \quad (3.22)$$

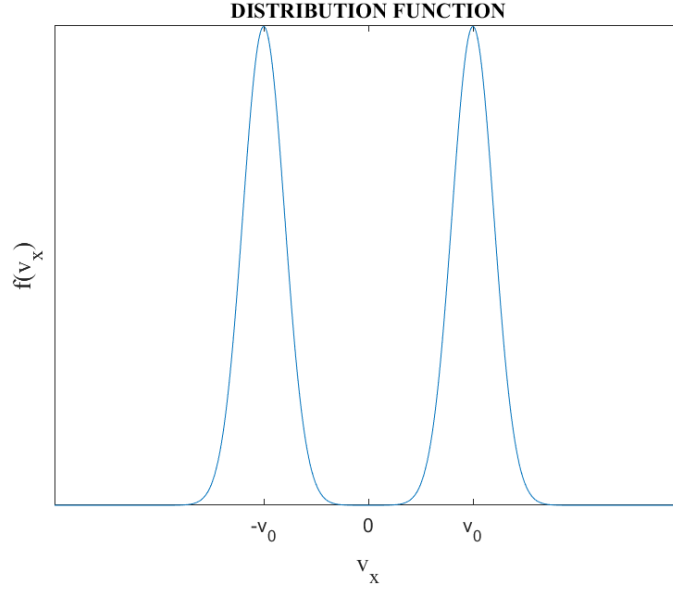
Teniendo en cuenta que los electrones se están moviendo con una velocidad inicial  $v_0$ , la energía cinética inicial de las partículas será una fuente de energía libre que va a generar la inestabilidad. Si el tiempo tiende al infinito, el sistema debe alcanzar el equilibrio térmico [8].

La relación de dispersión para la inestabilidad Two-Stream está dada por la función dieléctrica [9]:

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{ne^2}{2\epsilon_0 m_e} \left[ \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2} \right]. \quad (3.23)$$

Al hacer  $D(\omega, k) = 0$ , se encuentra la ecuación polinómica de cuarto orden:

$$\omega = \pm [k^2 v_0^2 + \omega_{pe}^2 \pm \omega_{pe} (4k^2 v_0^2 + \omega_{pe}^2)^{1/2}]^{1/2}. \quad (3.24)$$



**Figura 3.9:** Función de distribución para la inestabilidad Two-Stream.

De manera que se obtienen dos raíces reales y dos raíces imaginarias si se cumple:

$$0 < \frac{kv_0}{\omega_{pe}} < \sqrt{2}. \quad (3.25)$$

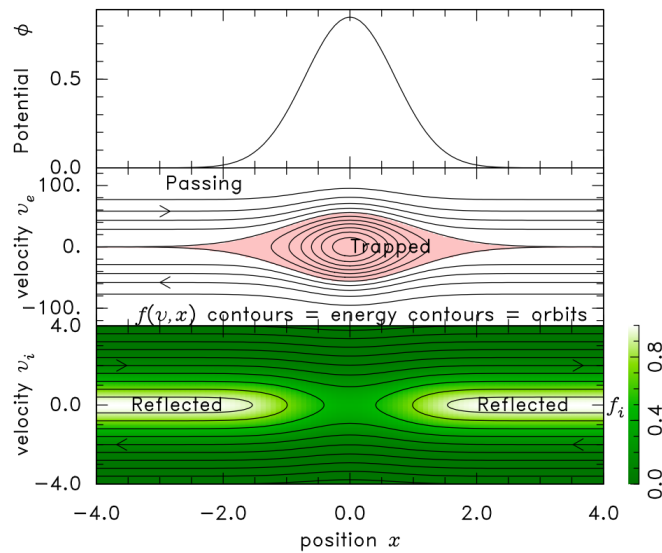
Y se obtienen cuatro raíces reales bajo la condición:

$$\sqrt{2} < \frac{kv_0}{\omega_{pe}}. \quad (3.26)$$

Luego, se obtiene que van a existir modos que restauren el equilibrio térmico si:

$$\frac{\omega_{pe}L}{v_0} < \frac{2\pi}{\sqrt{2}}. \quad (3.27)$$

La inestabilidad Two-Stream genera estructuras en el espacio de fase denominadas como Electron Holes (Agujeros de Electrones). Estos se originan por una disminución local en la densidad de electrones lo que genera a su vez un máximo en la densidad de carga positiva y por tanto se crea un potencial positivo localizado [20]. El máximo del potencial separa las regiones en donde el campo eléctrico cambia de signo, por tanto, la fuerza eléctrica ( $\vec{F} = q\vec{E}$ ) hace que las partículas de carga negativa ubicadas a la izquierda (derecha) del máximo se muevan hacia la derecha (izquierda), formando un agujero de electrones en el espacio de fase (véase Figura 3.10). En esta se aprecia que un pico de potencial positivo conlleva a la generación de vórtices para los contornos de energía en el espacio de fase de los electrones. Si los iones son móviles, se observa que estos sufren una reflexión en el pico del potencial [21].



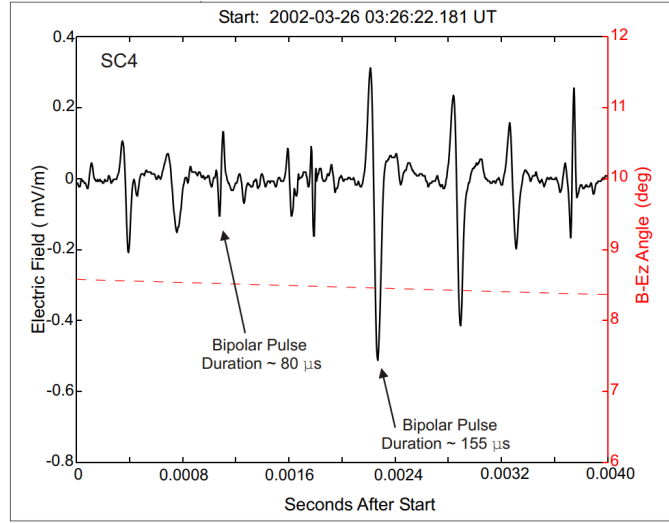
**Figura 3.10:** Contornos de energía para el espacio de fase de electrones e iones con un pico de potencial positivo [21].

Cabe mencionar que debido a la conservación de la energía, los contornos observados son los que definen las trayectorias de las partículas en el espacio de fase.

Los agujeros de electrones son identificados comúnmente en ambientes astrofísicos por la medición de un campo eléctrico bipolar, esto significa que existe un cambio de signo del campo con respecto al tiempo. Este se encuentra paralelo al campo magnético del fondo [22]. Los pulsos de gran amplitud se conocen como ondas solitarias los cuales se pueden producir por distintos tipos de inestabilidades. En el 2002 se observaron ondas solitarias en la magnetósfera. En el artículo publicado por J. S. Pickett como autor principal, se determinó que posiblemente las ondas solitarias se originaron por la inestabilidad Two-Stream [23]. La medición de los pulsos bipolares se observa en la Figura 3.11.

### 3.7.3 Inestabilidad de Buneman

Un caso especial de la inestabilidad Two-Stream se da cuando un haz de electrones ingresa con una alta velocidad a un plasma en equilibrio térmico. Si la velocidad de deriva entre el haz de electrones y los iones supera la velocidad térmica de ambas especies, se crea la inestabilidad de Buneman [24]. Esta genera agujeros de electrones con la característica de que las ondas bipolares del campo eléctrico se propagan más lento que en la inestabilidad Two-Stream electrón-electrón. Esto permite verificar la fuente de las ondas en ambientes astrofísicos como en la ionósfera o en la magnetocola [25, 26].



**Figura 3.11:** Pulsos bipolares del campo eléctrico observados en la magnetósfera terrestre [23].

La inestabilidad de Buneman presenta la relación de dispersión de la ecuación (3.28) mientras los iones estén en reposo y sean fríos ( $v_{0i} = 0$ ,  $v_{th,i} = 0$ ):

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_{0e})^2} = 0. \quad (3.28)$$

En el artículo de Rajawat [27] se analiza la relación de dispersión y demuestran que la frecuencia real y la tasa de crecimiento de la inestabilidad están dadas por:

$$\omega_r = \left( \frac{m_e}{16m_i} \right)^{1/3} \omega_{pe}, \quad (3.29)$$

$$\gamma = \sqrt{3} \left( \frac{m_e}{16m_i} \right)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (3.30)$$

Se observa que la tasa de crecimiento es del orden de la frecuencia del fenómeno, esto indica que este es fuertemente inestable. Adicionalmente, se establece que los modos inestables de este fenómeno deben cumplir con la relación:

$$k^2 v_{0e}^2 < \omega_{pe}^2 \left[ 1 + \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right]^3. \quad (3.31)$$

### 3.7.4 Ondas de Langmuir y ondas ion-acústicas

Cuando los electrones en un plasma poseen temperatura, las oscilaciones de la especie en un medio no magnetizado se conocen como ondas de Langmuir. La relación de

dispersión Bohm-Gross describe estas ondas como [28]:

$$\omega^2 = \pm\omega_{pe} \left( 1 + \frac{3}{2}k^2\lambda_D^2 \right) + i\gamma \quad (3.32)$$

donde la tasa de amortiguamiento  $\gamma$  está dada por:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k^3\lambda_D^3|} e^{-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} - \frac{3}{2}}. \quad (3.33)$$

La parte negativa de la frecuencia imaginaria indica que la onda posee un *amortiguamiento de Landau*. Este fenómeno se debe a que el campo eléctrico autogenerado interactúa con los electrones haciendo que las partículas con velocidades mayores que la velocidad de fase ( $v_{ph} = \omega/k$ ) de la onda disminuyan su energía y aquellas con velocidad menor que la velocidad de fase reciban la energía. Como se tiene una función maxwelliana, la mayor parte de los electrones están fríos de manera que el campo eléctrico se va a amortiguar a lo largo del tiempo.

Por otro lado, las ondas ion-acústicas se generan cuando la relación entre la velocidad inicial del electrón y su velocidad térmica es suficientemente menor que la unidad [29]. La ecuación (3.34) muestra la relación de dispersión del fenómeno:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{k_B T_e}{m_i} \left( \frac{1}{1 + k^2\lambda_D^2} \right) + \frac{3k_B T_i}{m_i}. \quad (3.34)$$

La tasa de amortiguamiento de las ondas ion-acústicas está dada por:

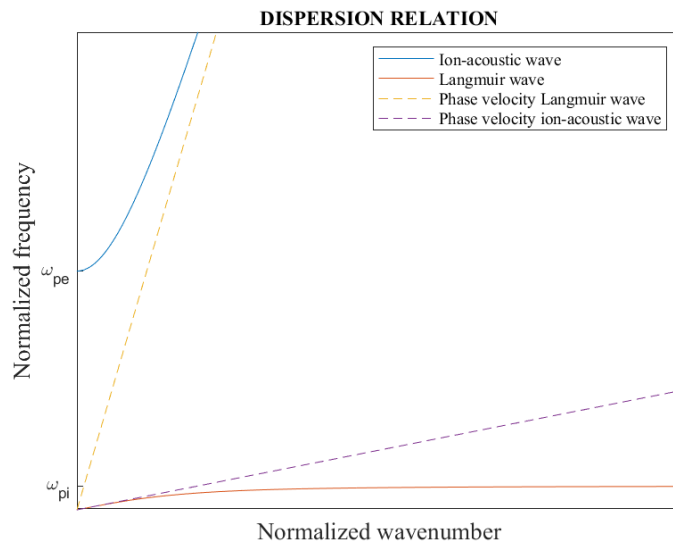
$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \left[ \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{T_e}{2T_i} - \frac{3}{2}} \right] \quad (3.35)$$

El amortiguamiento de Landau es apreciable en estas ondas si no se cumple la condición  $T_i \ll T_e$ .

Teóricamente, las oscilaciones de Langmuir tendrán una frecuencia constante  $\omega_{pe}$  para números pequeños de  $k$  pero se desplazará a una velocidad de fase constante de  $v_{th,e}\sqrt{3}$  para números de onda mayores [3]. Por el contrario, las ondas ion-acústicas viajarán con una velocidad de fase constante  $C_s$  [13]:

$$C_s = v_{th,e} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (3.36)$$

para pequeños números de onda y mostrará una frecuencia constante de  $\omega_{pi}$  para números de onda mayores. La gráfica de las relaciones de dispersión teóricas se observan en la Figura 3.12.



**Figura 3.12:** Relación de dispersión teórica para las ondas de Langmuir y las ion-acústicas.

Las ondas de Langmuir y las ion acústicas se dan por ejemplo en el viento solar. Entre junio y diciembre del 2020 se midió el campo eléctrico en un intervalo de distancia heliocéntricas de  $0.5AU$  y  $1AU$  usando el satélite Solar Orbiter. Los instrumentos de medición cubren frecuencias entre la frecuencia ciclotrónica de los electrones  $f_{ce}$  (frecuencia producida por el campo magnético) y la frecuencia del plasma electrónico  $f_{pe}$ . En este rango solo pueden existir dos modos electrostáticos: las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas. Sin embargo, por el amortiguamiento de Landau, las ondas de Langmuir casi no se identifican, mientras que las ion acústicas fueron las que más se midieron a lo largo del experimento [30].

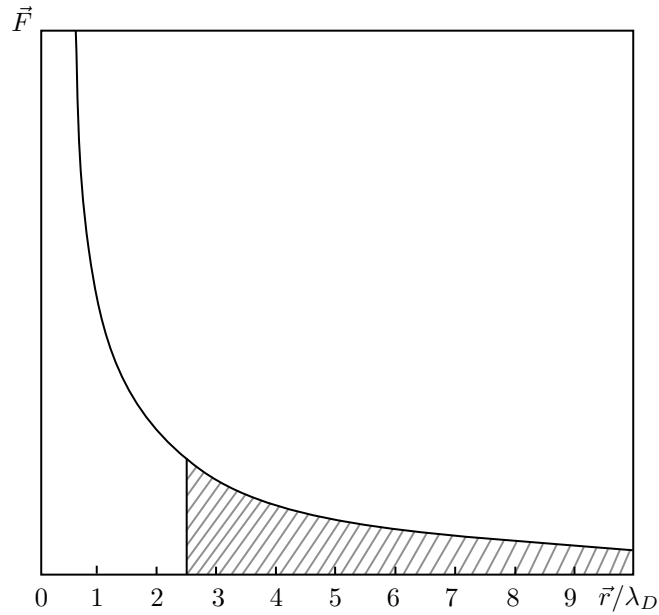
## 4. MODELO COMPUTACIONAL

### 4.1 MÉTODO PARTICLE-IN-CELL (PIC)

Para encontrar la evolución temporal del plasma, se puede utilizar una aproximación que siga la dinámica de cada carga como función de las fuerzas autogeneradas. Esta involucra la solución temporal de las ecuaciones de Newton y de Maxwell para cada una de las  $N$  partículas que componen el sistema. Si se requiere calcular la fuerza experimentada por una sola carga, se deben superponer  $N - 1$  fuerzas. Si este proceso se repite para cada una de las  $N$  partículas y considerando que las interacciones pares solo se cuentan una vez, se tendrían que calcular  $N(N - 1)/2$  fuerzas. Esta aproximación *partícula-partícula* puede ser adecuada para sistemas fuertemente acoplados, sin embargo, la mayor parte de los plasmas son no colisionales por lo que esta descripción no es conveniente ya que se deben hacer múltiples cálculos para la fuerza, lo que implica un alto esfuerzo computacional [9].

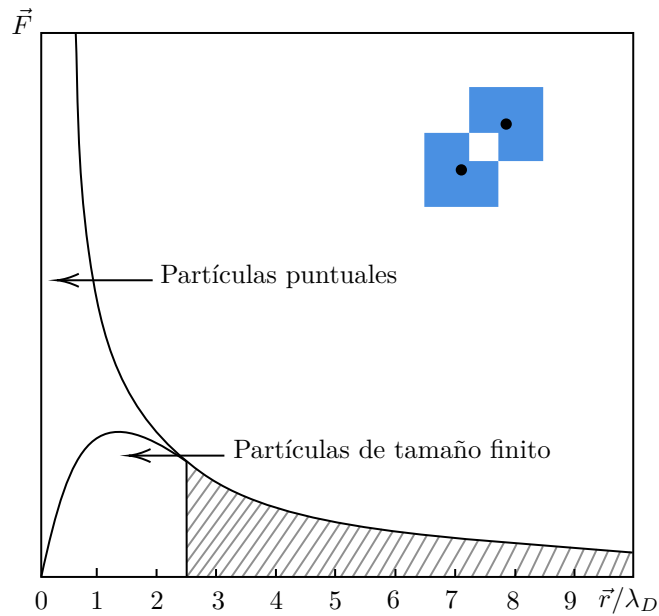
Uno de los métodos más usados para simular plasmas en el régimen no colisional sin la necesidad de simular todas las partículas del sistema, es el método particle-in-cell (PIC) [9, 6, 5]. Este algoritmo usa el hecho de que la aceleración de una partícula depende de la relación carga-masa, permitiendo un reescalamiento de estas cantidades. De esta forma, se considera el plasma como un ensamble de partículas computacionales llamadas *superpartículas* (SP) las cuales se componen de muchas partículas reales. Las SP comparten la misma relación carga masa que las partículas reales, por lo que tendrán la misma trayectoria [14].

Por otra parte, el método PIC debe simular el comportamiento colectivo del plasma, anulando las colisiones. Para esto se debe desprestigiar las interacciones de Coulomb en cortos rangos. Cuando se tienen dos partículas puntuales, la fuerza de atracción entre estas va a variar con respecto a la distancia, como se observa en la gráfica de la Figura 4.13. A medida que las dos partículas se aproximan, la fuerza se incrementa hasta que se alcanza la singularidad cuando la distancia se acerca a cero.



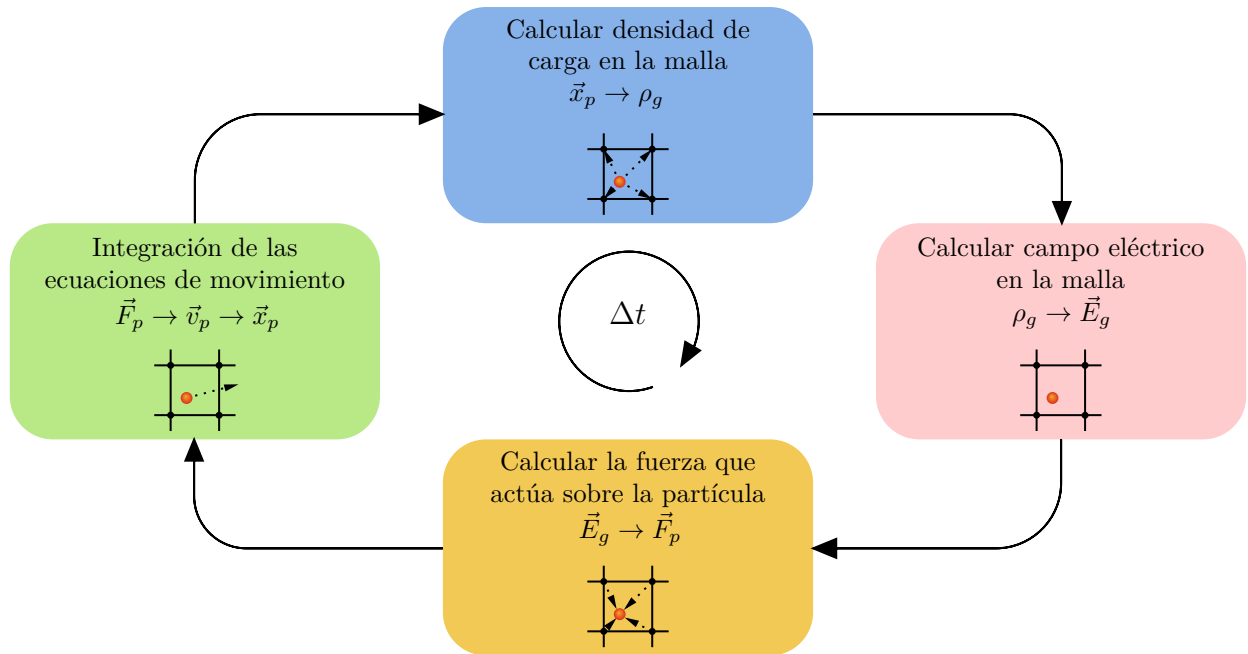
**Figura 4.13:** Fuerza de Coulomb entre dos partículas puntuales.

Al usar SP de tamaño finito, se tiene la ventaja que su interacción es débil, es decir, que a distancias lejanas estas interactúan como partículas puntuales, sin embargo, cuando estas comienzan a superponerse, la fuerza se neutraliza, disminuyendo su interacción. Una vez se superponen completamente, la fuerza entre estas se cancela. Este comportamiento se observa en la Figura 4.14.



**Figura 4.14:** Fuerza de Coulomb entre dos partículas de tamaño finito.

En la Figura 4.15, se observa el algoritmo básico del modelo PIC.



**Figura 4.15:** Algoritmo del método PIC.

En primer lugar, se debe inicializar la distribución del espacio de fase, luego se calcula la densidad de carga en la malla a través de la posición de la partícula implementando un esquema de interpolación. Posteriormente, teniendo en cuenta la densidad de carga se calcula el campo eléctrico en la malla. Luego, se procede a calcular la fuerza que actúa sobre la partícula aplicando un esquema de interpolación. Esto se hace con el fin de poder mover la partícula calculando su velocidad y luego su posición.

#### 4.1.1 Descripción analítica

La descripción analítica del plasma en el límite electrostático ( $B = 0$ ) y unidimensional está dada por la ecuación de Vlasov [12]:

$$\frac{\partial f_\alpha(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f_\alpha(x, v, t)}{\partial x} + \frac{q_\alpha E(x, t)}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(x, v, t)}{\partial v} = 0. \quad (4.1)$$

El campo eléctrico  $E$  es causado por todas las partículas, luego, formalmente el campo eléctrico depende de la función de distribución, por lo que la ecuación de Vlasov es una ecuación diferencial parcial no lineal.

Para este caso, es necesario derivar el campo eléctrico en el límite electrostático, es decir, por medio de la ecuación de Poisson. El movimiento de las partículas cargadas está gobernado por la fuerza de Lorentz, sin embargo, anulando el campo magnético esta se reduce a la expresión de la ecuación (4.2):

$$F(x) = q_\alpha E(x). \quad (4.2)$$

Por otra parte, el campo eléctrico en el límite electrostático está dado por:

$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} \quad (4.3)$$

donde  $\phi$  es el potencial eléctrico. Si el campo eléctrico es estacionario, el movimiento de las partículas cargadas sigue la ley de Gauss para la electricidad:

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}. \quad (4.4)$$

Haciendo la derivada de la ecuación (4.3) y combinando su resultado con la ecuación (4.4) se obtiene la ecuación de Poisson:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}. \quad (4.5)$$

Adicionalmente, la densidad de carga utilizando la función de distribución está dada por:

$$\rho_\alpha(x, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(x, v, t) dv. \quad (4.6)$$

Para cada especie se usa la función de distribución de Klimontovich definida a continuación:

$$f_\alpha(x, v, t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \delta(v - v_i). \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Aproximación numérica

La forma más eficiente de resolver la ecuación de Vlasov es usando el método de elementos finitos, donde en cada paso de tiempo, el espacio de fase ocupado es muestreado por un grupo de elementos de espacio de fase finito  $p$ . De esta forma, la función de distribución para la especie  $\alpha$  está gobernada por la superposición de la función de distribución de las SP  $p$  para la especie  $\alpha$  y se define como:

$$f_\alpha(x, v, t) = \sum_p f_{p\alpha}(x, v, t). \quad (4.8)$$

Si se inyecta esta descomposición, se observa que cada una de las funciones de distribución  $f_{p\alpha}$  satisface a su vez la ecuación de Vlasov [12]:

$$\frac{\partial f_{p\alpha}(x, v, t)}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_{p\alpha}(x, v, t)}{\partial x} + \frac{q_\alpha E(x, t)}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_{p\alpha}(x, v, t)}{\partial v} = 0. \quad (4.9)$$

En esta,  $E(x, t)$  es el mismo campo eléctrico total de la ecuación de Vlasov para la función de distribución  $f_\alpha(x, v, t)$ , luego, el campo eléctrico debe ser obtenido sumando la contribución de todos los elementos del espacio de fase. Además, la ecuación de Vlasov para  $f_{p\alpha}(x, v, t)$  depende de nuevo de la relación  $q_\alpha/m_\alpha$ , esto hace posible el proceso de reescalamiento. Se considera que  $N_{r\alpha}$  es el número de partículas reales  $r$  de la especie  $\alpha$  en una SP, luego se obtiene que la carga y la masa que contiene una súper partícula está dada por  $q_{p\alpha} = N_{r\alpha}q_\alpha$  y  $m_{p\alpha} = N_{r\alpha}m_\alpha$ , luego [14]:

$$\frac{q_\alpha}{m_\alpha} = \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}}. \quad (4.10)$$

Como la relación carga-masa de una partícula real es la misma que la de una SP, ambas van a compartir la misma dinámica con la ventaja computacional de que las SP contienen las partículas reales, reduciendo así la cantidad de elementos simulados.

### 4.1.3 Funciones de forma y función de interpolación

Si se sigue la estructura de la función de distribución de Klimontovich de la ecuación (4.7), la función de distribución para las SP se escoge como el producto de dos funciones de forma  $S_x$  y  $S_v$  en cada una de las dos variables  $x$  y  $v$  como [12]:

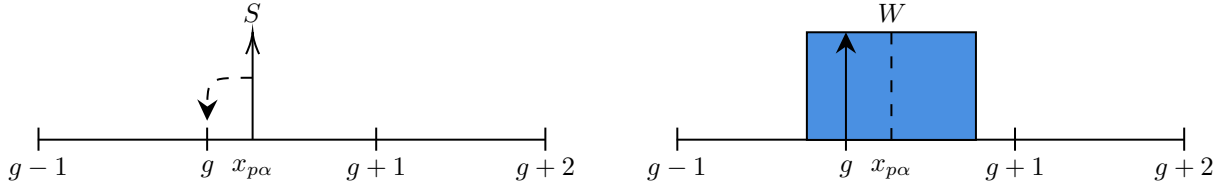
$$f_{p\alpha}(x, v, t) = N_{r\alpha} S_x(x - x_{p\alpha}(t)) S_v(v - v_{p\alpha}(t)). \quad (4.11)$$

En este trabajo se usa la selección estándar para la función de forma en la velocidad dada por:

$$S_v(v - v_{p\alpha}(t)) = \delta(v - v_{p\alpha}(t)), \quad (4.12)$$

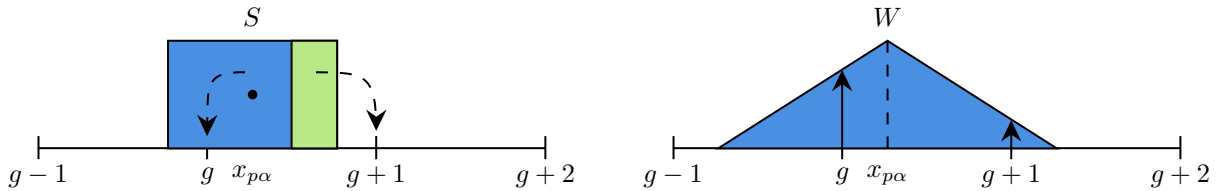
la cual considera que todas las partículas reales contenidas en una SP tienen la misma velocidad.

La función de forma implementada para el espacio depende del tipo de interpolación que se desee realizar para llevar las propiedades de las partículas a los nodos de la malla. Si la función de forma está dada por un delta de Dirac, el tipo de interpolación se llama en inglés *Nearest Grid Point (NGP)*, al cual solo se le asigna la carga al nodo más cercano de la partícula. Este tipo de interpolación es de baja precisión, esto debido a que si la partícula cambia de posición, se pueden dar saltos de densidad de carga, lo que generaría un alto error [6]. El esquema de este tipo de interpolación se observa en la Figura 4.16.



**Figura 4.16:** Tipo de interpolación NGP, donde la función de forma  $S_x$  está dada por un delta de Dirac y la función de interpolación  $W_\alpha$ .

Por otra parte, si se escoge una función de forma para la SP dada por una b-spline tipo flat top, la interpolación se denomina como *Cloud in Cell (CIC)* ya que la SP es una nube cuadrada uniforme en el espacio de fase con tamaño finito. Este esquema se observa en la Figura 4.17.



**Figura 4.17:** Tipo de interpolación CIC, donde la función de forma  $S_x$  está dada por una función b-spline de orden cero llamada flat top y la función de interpolación  $W_\alpha$  está dada por una b-spline de primer orden.

La función de forma para el espacio está dada por:

$$S_x(x - x_{p\alpha}(t)) = \frac{1}{\Delta x} b_0 \left( \frac{x - x_{p\alpha}}{\Delta x} \right) \quad (4.13)$$

donde  $\Delta x$  es el tamaño de la celda que a su vez es el tamaño de la SP y  $b_0$  es la b-spline de orden cero definida como:

$$b_0(\chi) = \begin{cases} 1 & |\chi| < 1/2, \\ 0 & \text{En caso contrario.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Las b-splines de ordenes subsecuentes se definen en la ecuación (4.15)

$$b_l(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} b_0(\chi - \chi') b_{l-1}(\chi') d\chi'. \quad (4.15)$$

A través del método descrito anteriormente, se establece que la densidad de carga neta se define como:

$$\rho_\alpha(x, t) = \sum_p q_\alpha \int f_{p\alpha}(x, v, t) dv. \quad (4.16)$$

Si se reemplaza la ecuación (4.11) en la ecuación (4.16), se obtiene:

$$\rho_\alpha(x, t) = \sum_p q_{p\alpha} S_x(x - x_{p\alpha}). \quad (4.17)$$

Para obtener la densidad de carga en el nodo de la malla  $g$ , se implementa el teorema del valor medio, el cual tiene como fin promediar la densidad de carga:

$$\rho_g = \frac{1}{x_{g+1/2} - x_{g-1/2}} \int_{x_{g-1/2}}^{x_{g+1/2}} \rho(x, t) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{g-1/2}}^{x_{g+1/2}} \rho(x, t) dx. \quad (4.18)$$

A su vez se puede redefinir este promedio usando la b-spline de orden cero como:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{g-1/2}}^{x_{g+1/2}} \rho(x, t) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} b_0\left(\frac{x - x_g}{\Delta x}\right) \rho(x, t) dx, \quad (4.19)$$

luego:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{g-1/2}}^{x_{g+1/2}} \rho(x, t) dx = \frac{q_{p\alpha}}{\Delta x} \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} b_0\left(\frac{x - x_g}{\Delta x}\right) S_x(x - x_{p\alpha}) dx. \quad (4.20)$$

De esta forma se define la función de interpolación como:

$$W_\alpha(x_g - x_{p\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} b_0\left(\frac{x - x_g}{\Delta x}\right) S_x(x - x_{p\alpha}) dx. \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta la definición dada en la ecuación (4.15), se redefine la función de interpolación de la forma (Figura 4.17):

$$W_\alpha(x_g - x_{p\alpha}) = b_1\left(\frac{x_g - x_{p\alpha}}{\Delta x}\right). \quad (4.22)$$

Finalmente, se define la densidad de carga con respecto a la función de interpolación:

$$\rho_g = \frac{q_{p\alpha}}{\Delta x} \sum_p W_\alpha(x_g - x_{p\alpha}). \quad (4.23)$$

#### 4.1.4 Discretización de ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones que rigen la dinámica microscópica del centro de masa de las SP están dadas por [9]:

$$\frac{dx_{p\alpha}}{dt} = v_{p\alpha}, \quad (4.24)$$

$$\frac{dv_{p\alpha}}{dt} = \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} E_{p\alpha}. \quad (4.25)$$

A continuación, se muestran distintas formas que se utilizan para discretizarlas.

- Método de Euler:

El método de Euler es el más fundamental para la integración numérica. La discretización de las ecuaciones (4.24) y (4.25) se hace de la siguiente forma:

$$x_{p\alpha}^{n+1} = x_{p\alpha}^n + v_{p\alpha}^n dt, \quad (4.26)$$

$$v_{p\alpha}^{n+1} = v_{p\alpha}^n + \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_{\alpha} E_g^n dt. \quad (4.27)$$

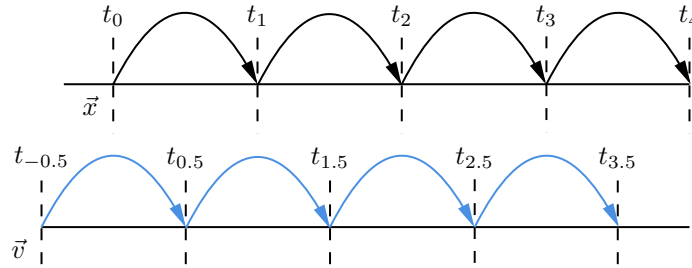
- Leapfrog:

El método de Leapfrog consiste en definir la velocidad en la mitad del intervalo de integración mientras la posición se define en los intervalos enteros. De esta forma, las ecuaciones (4.24) y (4.25) se discretizan como:

$$x_{p\alpha}^{n+1} = x_{p\alpha}^n + v_{p\alpha}^{n+1/2} dt, \quad (4.28)$$

$$v_{p\alpha}^{n+1/2} = v_{p\alpha}^{n-1/2} + \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_{\alpha} E_g^n dt. \quad (4.29)$$

El esquema del método se observa en la Figura 4.18.



**Figura 4.18:** Esquema método Leapfrog.

- Runge Kutta de 4to orden:

Se definen las siguientes constantes para actualizar la posición de las partículas:

$$k_1 = v_{p\alpha}^n dt,$$

$$k_2 = \left( v_{p\alpha}^n + \frac{1}{2} k_1 \right) dt, \quad (4.30)$$

$$k_3 = \left( v_{p\alpha}^n + \frac{1}{2} k_2 \right) dt,$$

$$k_4 = \left( v_{p\alpha}^n + \frac{1}{2} k_3 \right) dt.$$

Luego, se obtiene que la posición en el paso de tiempo  $n + 1$  es:

$$x_{p\alpha}^{n+1} = x_{p\alpha}^n \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (4.31)$$

De igual forma, las constantes para actualizar la velocidad están dadas en la ecuación (4.32):

$$\begin{aligned} l_1 &= \left( \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_\alpha E_g^n \right) dt, \\ l_2 &= \left( \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_\alpha E_g^n + \frac{1}{2} l_1 \right) dt, \\ l_3 &= \left( \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_\alpha E_g^n + \frac{1}{2} l_2 \right) dt, \\ l_4 &= \left( \frac{q_{p\alpha}}{m_{p\alpha}} W_\alpha E_g^n + l_3 \right) dt. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Finalmente la velocidad en el paso de tiempo  $n + 1$  se obtiene usando:

$$v_{p\alpha}^{n+1} = v_{p\alpha}^n \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \quad (4.33)$$

#### 4.1.5 Discretización de ecuaciones de campo

Las ecuaciones a discretizar son la ecuación de campo en el límite electrostático (4.3) y la ecuación de Poisson (4.5).

Para discretizar la ecuación de Poisson se usan los siguientes métodos:

- Diferencias finitas de tres puntos:

$$\epsilon_0 \frac{\phi_{g+1} - 2\phi_g + \phi_{g-1}}{\Delta x^2} = -\rho_g. \quad (4.34)$$

- Transformada rápida de Fourier: Se resuelve la ecuación de Poisson usando la función *Fast Fourier Transform* `fft` de la siguiente forma:

$$\rho_k = \text{fft}(\rho), \quad (4.35)$$

$$\phi_k = \frac{\rho_k}{k^2}. \quad (4.36)$$

donde  $k$  es el número de onda. Posteriormente, se implementa la transformada inversa de Fourier *Inverse Fourier Transform* `ifft` de  $\phi_k$  y se extrae su parte real para obtener  $\phi_g$ .

Para discretizar la ecuación de campo se utiliza:

- Diferencias finitas centradas:

$$E_g = \frac{\phi_{g+1} - \phi_{g-1}}{2\Delta x}. \quad (4.37)$$

#### 4.1.6 Normalización de unidades

En las simulaciones computacionales es conveniente trabajar con cantidades normalizadas con el fin de prevenir el uso de números pequeños o grandes que conducen la propagación del error. Se definen las variables normalizadas con el superíndice prima ( $'$ ). El esquema utilizado se observa en la Tabla 4.1.

**Tabla 4.1:** Normalización de las unidades.

Descripción	Normalización
Tiempo	$t' = t\omega_{pe}$
Espacio	$l' = l\frac{\omega_{pe}}{c}$
Carga	$q' = \frac{q}{e}$
Masa	$m' = \frac{m}{m_e}$
Velocidad	$v' = \frac{v}{c}$
Potencial eléctrico	$\phi' = \frac{\phi e}{m_e c^2}$
Campo eléctrico	$E' = \frac{E e}{m_e \omega_{pe} c}$
Densidad de carga	$\rho' = \frac{\rho e}{m_e \omega_{pe}^2 \epsilon_0}$
Densidad	$n' = \frac{n}{n_0}$
Frecuencia	$\omega' = \frac{\omega}{\omega_{pe}}$

Las constantes  $k_B$ ,  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  adquieren un valor unitario por unidades naturales. Adicionalmente la velocidad de la luz es  $c = 1$ .

##### 4.1.6.1 Ejemplo de normalización

A continuación, se realiza un ejemplo de la normalización teniendo en cuenta el esquema de la sección anterior. En la Tabla 4.2 se observan algunas variables que deben ser definidas al inicio de la simulación, estas se detallan en unidades del Sistema Internacional (SI) y en unidades normalizadas.

**Tabla 4.2:** Ejemplo normalización de las unidades.

Descripción	Variabes en unidades en SI	Variabes normalizadas
Densidad del plasma $n_0$	$3 \times 10^6$	$n'_0 = n_0/n_0 = 1$
Carga del electrón $e^-$	$-1.6 \times 10^{-19}$	$e'^- = e^-/e = -1$
Masa del electrón $m_e$	$9.1 \times 10^{-31}$	$m'_e = m_e/m_e = 1$
Carga del protón $e$	$1.6 \times 10^{-19}$	$e' = e/e = 1$
Masa del protón $m_i$	$1836m_e$	$m'_i = m_i/m_e = 1838$
Velocidad de la luz $c$	$3 \times 10^8$	$c' = c/c = 1$
Frecuencia del plasma electrónica $\omega_e$	$9.77 \times 10^4$	$\omega'_e = \omega_e/\omega_e = 1$
Longitud de Debye $\lambda_D$	3.98	$\lambda'_D = \lambda_D \frac{\omega_p}{c} = 0.0013$
Velocidad inicial de los electrones $v_{0e}$	$c/100$	$v'_{0e} = v_{0e}/c = 0.01$
Velocidad inicial de los protones $v_{0i}$	$c/10000$	$v'_{0i} = v_{0i}/c = 1.0 \times 10^{-4}$
Velocidad térmica de los electrones $v_{te}$	$4.0 \times 10^5$	$v'_{te} = v_{te}/c = 0.0013$
Velocidad térmica de los protones $v_{ti}$	$9.1 \times 10^3$	$v'_{ti} = v_{ti}/c = 3.02 \times 10^{-5}$
Longitud del sistema $L$	$180\lambda_D$	$L' = L \frac{\omega_p}{c} = 0.24$

Cabe mencionar que para calcular la carga portada por una SP se usa la ecuación (4.38):

$$q_{p\alpha} = \frac{q_\alpha n_0 L}{N_{p\alpha}}, \quad (4.38)$$

donde  $N_{p\alpha}$  es la cantidad de SP  $p$  de la especie  $\alpha$  en el sistema. Teniendo esto en cuenta, para el esquema mostrado en la Tabla 4.2 en el SI la carga de la SP del electrón es  $-3.45 \times 10^{-14}$ . Esto indica que la cantidad de partículas reales portadas por una SP es  $q_{pe}/e^- = 2.1534 \times 10^5$ . Por otra parte, teniendo en cuenta que la relación carga masa de la SP debe ser igual a la relación de la partícula real, la masa de la SP se calcula sabiendo que  $QM_e = e^-/m_e = -1.76 \times 10^{11}$ , luego  $m_{pe} = q_{pe}/QM_e = 1.96 \times 10^{-25}$ . Luego se obtiene que  $QM_{pe} = q_{pe}/m_{pe} = -1.76 \times 10^{11}$ , de esta forma se garantiza que la igualdad de las relaciones de carga-masa  $QM_e = QM_{pe}$  y que por tanto la SP va a seguir la misma trayectoria que una partícula real ya que la aceleración de una partícula depende de la relación carga-masa.

#### 4.1.7 Condiciones de frontera y estabilidad numérica

Las condiciones de frontera implementadas en el programa son *periódicas*, esto con el fin de imitar un sistema de tamaño infinito. Este método es también llamado *reflexión en la frontera*, ya que la partícula que sale de la frontera va a reingresar por la frontera opuesta.

Por otra parte, es necesario que se escoja de forma adecuada el paso de tiempo y el tamaño de la celda. Esto se hace de acuerdo a las condiciones establecidas por R.W. Hockney y J.W. Eastwood [6]:

$$dx < 3.4\lambda_D, \quad (4.39)$$

$$dt < 2\omega_{pe}^{-1}. \quad (4.40)$$

#### 4.1.8 Ejemplo ilustrativo método PIC

Con fin de ilustrar al lector sobre el método PIC en el límite electrostático, se realiza un ejemplo en MATLAB basado en el código de Lapenta [12] con un sistema de pocas partículas y una iteración. Además, se emplea el método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson y el método de Euler para las ecuaciones de movimiento. Cabe mencionar que este ejemplo no es realista y no cumple las condiciones para un bajo error numérico. Este código puede ser descargado en el enlace: <https://github.com/gsara798/PLASMAPP-0.1.git>.

En la Tabla 4.3 se observan las cantidades que se definen inicialmente en el programa.

**Tabla 4.3:** Parámetros iniciales del programa ejemplo.

Descripción de la variable	Símbolo	Valor
Longitud del sistema	L	1
Número de puntos en la malla	Ng	6
Tamaño de la celda	dx	dx = L/(Ng-1) = 0.2
Número de iteraciones	Nt	2
Paso de tiempo	dt	0.5
Cantidad de partículas especie	N	5
Velocidad inicial especie	V0	0
Velocidad térmica especie	Vth	0.1
Carga de la partícula real	q	-1
Masa de la partícula real	m	1
Relación carga-masa especie	QM	-1
Densidad del plasma	n0	1
Frecuencia electrónica de plasma	WP	1

Como se observa, para este ejemplo solo se tiene una especie de electrones, de manera que se define la carga de la SP Q teniendo en cuenta la ecuación (4.38) de la siguiente forma:

$$Q = \frac{q * n0 * L}{N} = -0.2. \quad (4.41)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que se debe cumplir la cuasi-neutralidad, se tiene que la densidad de carga definida en el programa como rho es:

$$\text{rho} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} Q_{\alpha}. \quad (4.42)$$

En este código, por simplicidad, se decide que los iones estén fijos en el fondo, esto se puede asumir debido a que como poseen una gran masa, el movimiento de estas se puede despreciar. De esta forma, se debe definir una densidad de carga de fondo  $\rho_{\text{back}}$  para que se cumpla la cuasi-neutralidad de la siguiente forma:

$$nQ + \rho_{\text{back}} = 0, \quad (4.43)$$

$$\frac{N}{L}Q + \rho_{\text{back}} = 0, \quad (4.44)$$

luego,

$$\rho_{\text{back}} = -\frac{N}{L}Q = 1. \quad (4.45)$$

El siguiente paso del programa es posicionar las partículas de manera uniforme a través del espacio usando un vector  $\mathbf{xp}$ . Esto se hace por medio de la función `linspace` y se implementa de la forma:

$$\mathbf{xp} = (\text{linspace}(0, L-L/N, N))', \quad (4.46)$$

donde  $'$  se utiliza en MATLAB para transponer un vector o una matriz. A través de la ecuación (4.46) y con los parámetros iniciales, se obtiene el vector de posición:

$$\mathbf{xp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

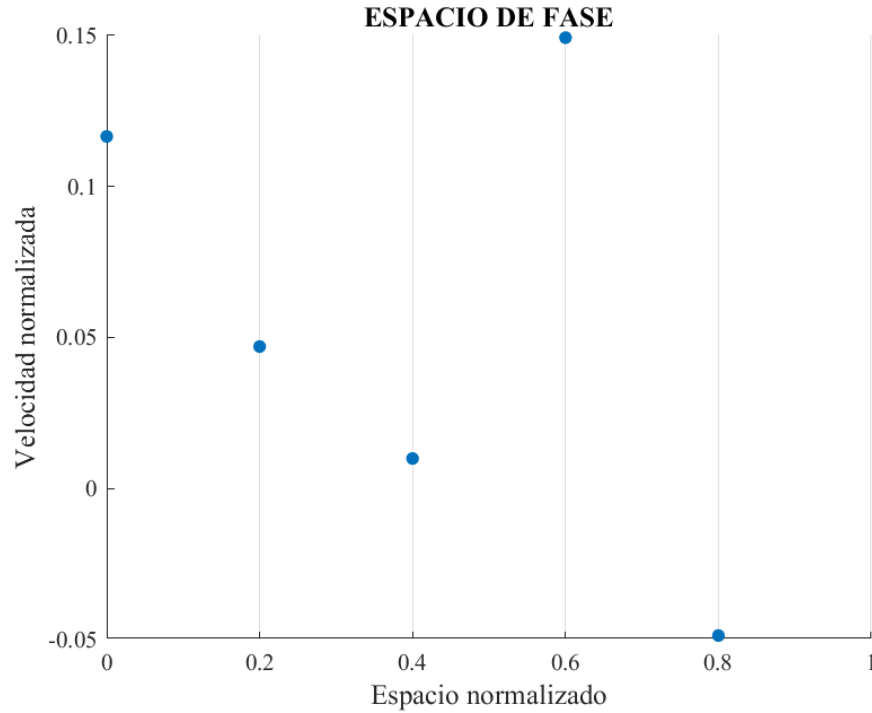
Posteriormente, se le da a las partículas del haz una velocidad. En primer lugar multiplicamos la velocidad térmica del haz por la función `randn`, la cual hace que la velocidad tenga una distribución normal, posteriormente se le suma la velocidad inicial  $V_0$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{vp} = V_{\text{th}} \times \text{randn}(N, 1) + V_0. \quad (4.48)$$

Con esto se tiene el vector de velocidad dado por:

$$\mathbf{vp} = \begin{bmatrix} 0.1166 \\ 0.0470 \\ 0.0100 \\ 0.1493 \\ -0.0487 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

De esta forma el espacio de fase inicial está dado por la Figura 4.19.



**Figura 4.19:** Espacio de fase inicial donde las líneas grises simbolizan la malla.

Posteriormente, para resolver la ecuación de Poisson usando la ecuación (4.34), se debe definir una matriz  $Ax$  que contenga los coeficientes que multiplican a  $\phi$ , esta se realiza usando la función `spdiags` la cual crea una matriz diagonal con los coeficientes que se necesiten:

$$\begin{aligned} \text{un} &= \text{ones}(\text{Ng}-1, 1), \\ Ax &= \text{spdiags}([\text{un} \ -2*\text{un} \ \text{un}], [-1 \ 0 \ 1], \text{Ng}-1, \text{Ng}-1) \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde `ones` se utiliza para crear una matriz de unos. De esta forma se obtiene que:

$$Ax = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Por último, antes de iniciar el ciclo computacional, se define un vector auxiliar  $p$  el cual se usará posteriormente para construir la función de interpolación. Este define de la forma:

$$p1 = 1:N1; \ p1 = [p1 \ p1];, \quad (4.52)$$

obteniendo:

$$\mathbf{p} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \quad (4.53)$$

Una vez definidos todos los parámetros iniciales y los que no varían en el tiempo, se puede iniciar el ciclo computacional utilizando la función `for`, la cual tiene un rango desde 1 hasta  $Nt$ .

Se inicia el ciclo PIC aplicando la ecuación de posición (4.26) para las SP de la forma:

$$\mathbf{xp} = \mathbf{xp} + \mathbf{vp} * dt. \quad (4.54)$$

Para la primera iteración se obtiene:

$$\mathbf{xp} = \begin{bmatrix} 0.0583 \\ 0.2235 \\ 0.4050 \\ 0.6746 \\ 0.7757 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Luego se aplican las condiciones de frontera periódicas:

$$\begin{aligned} \text{out} &= (\mathbf{xp} < 0); \mathbf{xp}(\text{out}) = \mathbf{xp}(\text{out}) + L, \\ \text{out} &= (\mathbf{xp} >= L); \mathbf{xp}(\text{out}) = \mathbf{xp}(\text{out}) - L. \end{aligned} \quad (4.56)$$

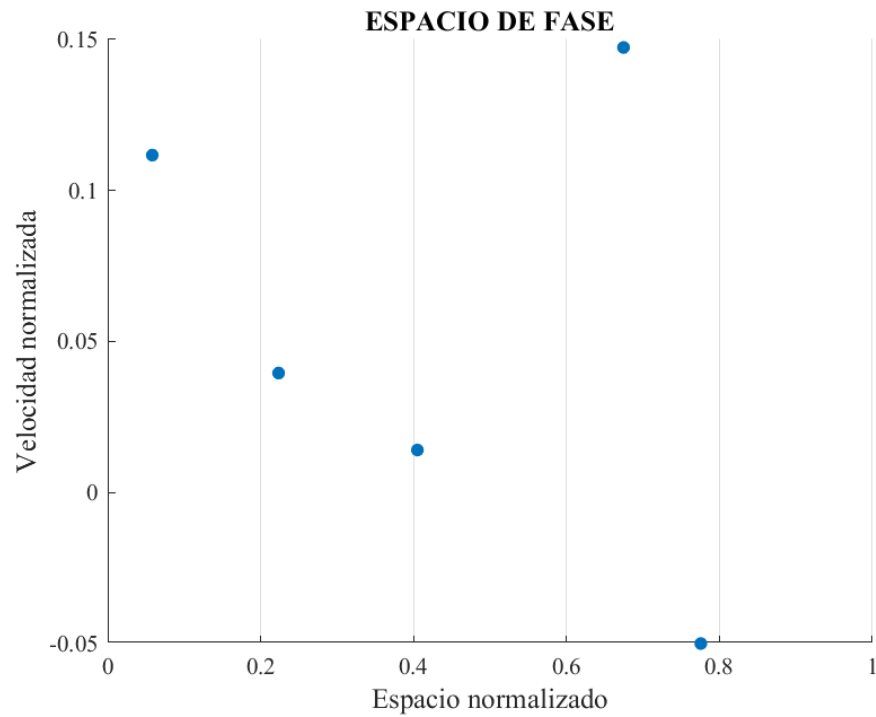
Esto significa que si  $\mathbf{xp}$  es menor que cero (frontera 1), se le debe sumar  $L$ . Por otra parte si  $\mathbf{xp}$  es mayor o igual que  $L$  (frontera 2), se le debe restar este mismo valor. Esto garantiza que si las partículas se salen de la frontera, puedan ingresar por la otra frontera.

El siguiente paso es buscar la posición de la SP con respecto a la malla, es decir, que se debe encontrar entre qué nodos se encuentra una partícula. Para hacer este proceso se introduce la función `floor` la cual redondea la posición del elemento al número entero más cercano menor o igual que la posición real. Para la primera iteración se tiene el espacio de fase de la Figura 4.20, si se desea saber entre qué nodos se encuentra la SP, en primer lugar se utiliza la ecuación (4.57) para hallar el nodo izquierdo  $\mathbf{g}$  en el que se encuentra una SP:

$$\mathbf{g} = \text{floor}(\mathbf{xp}/dx) + 1. \quad (4.57)$$

Luego, se obtiene el vector:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$



**Figura 4.20:** Espacio de fase en la iteración 1.

Posteriormente, para hallar el nodo de la derecha se usa:

$$g1 = g + 1. \tag{4.59}$$

De esta forma se obtiene el vector de nodos:

$$g1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

De esta parte se puede concluir que la primera partícula se encuentra entre los nodos 1 y 2, la segunda entre los nodos 2 y 3, la tercera entre los nodos 4 y 5 y la cuarta entre los nodos 4 y 5.

Posteriormente se construye un vector de proyección `Project` el cual combina los re-

sultados de las ecuaciones (4.58) y (4.60) de la forma:

$$\text{Project} = [\mathbf{g}; \mathbf{g1}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Luego, se le aplican las condiciones de frontera periódicas a la proyección de la forma:

$$\begin{aligned} \text{out} &= (\text{lt}(\text{Project}, 1)); \text{Project}(\text{out}) = \text{Project}(\text{out}) + N\mathbf{g}, \\ \text{out} &= (\text{gt}(\text{Project}, N\mathbf{g})); \text{Project}(\text{out}) = \text{Project}(\text{out}) - N\mathbf{g}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Posteriormente, se halla en qué porcentaje está la SP en el nodo de la izquierda utilizando la ecuación:

$$\mathbf{Fg} = \text{abs}((\mathbf{x}p/\mathbf{d}x) - \mathbf{g}), \quad (4.63)$$

obteniendo el vector:

$$\mathbf{Fg} = \begin{bmatrix} 0.7086 \\ 0.8824 \\ 0.9751 \\ 0.6268 \\ 0.1217 \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Posteriormente para hallar en qué porcentaje se encuentra la SP al nodo derecho se utiliza:

$$\mathbf{Fg1} = 1 - \mathbf{Fg}. \quad (4.65)$$

Luego se obtiene el vector:

$$\mathbf{Fg1} = \begin{bmatrix} 0.2914 \\ 0.1176 \\ 0.0249 \\ 0.3732 \\ 0.8783 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Esto quiere decir que por ejemplo la primera partícula se encuentra en un 70,86% en el nodo 1 y en un 29,14% en el nodo 2.

El siguiente paso es construir la matriz de interpolación la cual permite llevar la información entre las SP y la malla. Para esto se define una matriz de tamaño  $N \times N\mathbf{g}$  en la

cual se escribe la fracción que aporta la partícula a cada nodo dada por:

$$\text{Fraction} = [\text{Fg} ; \text{Fg1}] = \begin{bmatrix} 0.7086 \\ 0.8824 \\ 0.9751 \\ 0.6268 \\ 0.1217 \\ 0.2914 \\ 0.1176 \\ 0.0249 \\ 0.3732 \\ 0.8783 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

en la posición  $(p, \text{Project})$ . El índice  $p$  de la matriz va a dar la información de la partícula, mientras el índice  $\text{Project}$  va a dar la información de los nodos de la malla. Esta matriz se construye de la forma:

$$\text{mat} = \text{sparse}(p, \text{Project}, \text{Fraction}, \text{N1}, \text{Ng}). \quad (4.68)$$

Usando la función  $\text{full}(\text{mat})$  se observa que la matriz está dada por:

$$\text{mat} = \begin{bmatrix} 0.7086 & 0.2914 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8824 & 0.1176 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9751 & 0.0249 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6268 & 0.3732 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1217 & 0.8783 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Esto significa que, por ejemplo, la partícula 1 está aportando 70.86% al nodo 1, mientras que al nodo 2 le está aportando 29.14%.

Ahora se debe encontrar la densidad de carga en los nodos aportada por los electrones, de esta forma se establece que  $\text{rho}_e$  es:

$$\text{rho}_e = \text{full}((Q/dx) * \text{sum}(\text{mat}))'. \quad (4.70)$$

Para hallar la densidad de carga total en los nodos  $\text{rho}_t$  se suma  $\text{rho}_e$  y  $\text{rho}_\text{back}$ , obteniendo:

$$\text{rho}_t = \begin{bmatrix} 0.2914 \\ -0.1739 \\ -0.0927 \\ 0.2267 \\ -0.2516 \\ 1.0000 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Una vez hallada la densidad de carga, es posible determinar el potencial eléctrico  $\text{Phi}$  usando el operador backslash ( $\backslash$ ) el cual se utiliza para resolver el sistema de ecuaciones

lineales:

$$\begin{aligned} \text{Phi} &= \text{Ax} \setminus (-\text{rhot}(1:\text{Ng}-1) * \text{dx}^2) \\ \text{Phi} &= [\text{Phi}; 0], \end{aligned} \quad (4.72)$$

Luego, se obtiene que:

$$\text{Phi} = \begin{bmatrix} -0.0117 \\ 0.0070 \\ 0.0037 \\ -0.0091 \\ 0.0101 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Posteriormente, se debe resolver la ecuación (4.37), donde  $\phi_{g+1} = \text{Phi}1$  y  $\phi_{g-1} = \text{Phi}1$  se definen de la forma:

$$\text{Phi}1 = [\text{Phi}(2:\text{Ng}); \text{Phi}(1)] = \begin{bmatrix} -0.0025 \\ -0.0027 \\ 0.0009 \\ -0.0046 \\ 0 \\ 0.0046 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\text{Phi}1 = [\text{Phi}(\text{Ng}); \text{Phi}(1:\text{Ng}-1)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0046 \\ -0.0025 \\ -0.0027 \\ 0.0009 \\ -0.0046 \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Luego, se obtiene el campo eléctrico en los nodos  $E_g$ :

$$E_g = -(\text{Phi}1 - \text{Phi}1)/(2 * \text{dx}) = \begin{bmatrix} 0.0063 \\ 0.0181 \\ -0.0086 \\ 0.0048 \\ 0.0023 \\ -0.0228 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Por último, se mueven las partículas aplicando la ecuación (4.27) de la forma:

$$\text{vp} = \text{vp} + \text{QM} * \text{mat} * E_g * \text{dt}, \quad (4.77)$$

donde  $\text{mat} * E_g$  es el campo que siente la SP. Luego, se obtiene el vector de velocidad:

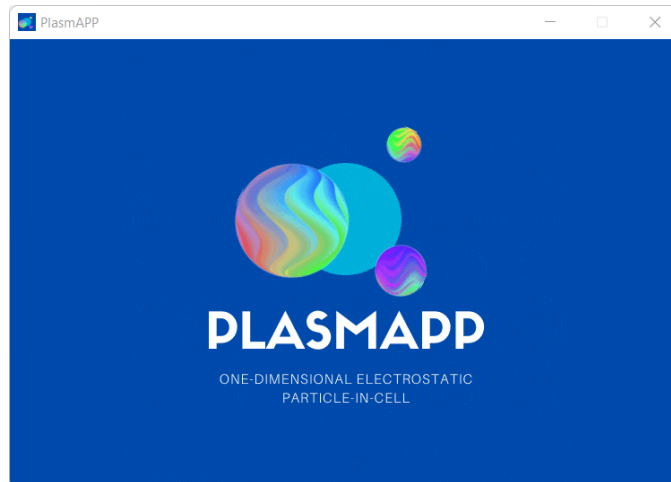
$$\text{vp} = \begin{bmatrix} 0.1117 \\ 0.0396 \\ 0.0141 \\ 0.1474 \\ -0.0500 \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

## 5. DESARROLLO DE PLASMAPP

Con el fin de simplificar las simulaciones del plasma y apoyar a estudiantes y a nuevos investigadores en el área, se creó la aplicación PlasmAPP, la cual utiliza el método PIC para resolver la ecuación de Vlasov en el límite electrostático unidimensional. El algoritmo implementado consiste en tres códigos los cuales se encuentran interconectados. A continuación se describe cada código junto con su interfaz gráfica. El enlace dado a continuación direcciona al repositorio de Github en donde se pueden encontrar los códigos implementados: <https://github.com/gsara798/PLASMAPP-0.1.git>. Adicionalmente, en el siguiente enlace se puede observar el manual de usuario: [https://drive.google.com/drive/folders/15vV8z33tgUmbpBs\\_ySLgsq57-JqtmiBJ?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/15vV8z33tgUmbpBs_ySLgsq57-JqtmiBJ?usp=sharing).

### 5.1 CÓDIGO 1: Start.mlapp

El primer programa inicializa al usuario mostrándole el logo de PlasmAPP. Una vez se presiona la imagen mostrada, el programa Inputs.mlapp se abre. La interfaz gráfica de esta sección se observa en la Figura 5.21.



**Figura 5.21:** Interfaz gráfica de Start.mlapp.

### 5.2 CÓDIGO 2: Inputs.mlapp

En la interfaz del código Inputs.mlapp el usuario ingresa los parámetros iniciales necesarios para ejecutar el programa. Esta cuenta con cuatro pestañas las cuales se explican a continuación:

- **System:** En esta ventana, el usuario escoge los parámetros del sistema. En la Figura 5.22 se observa el contenido de la pestaña.

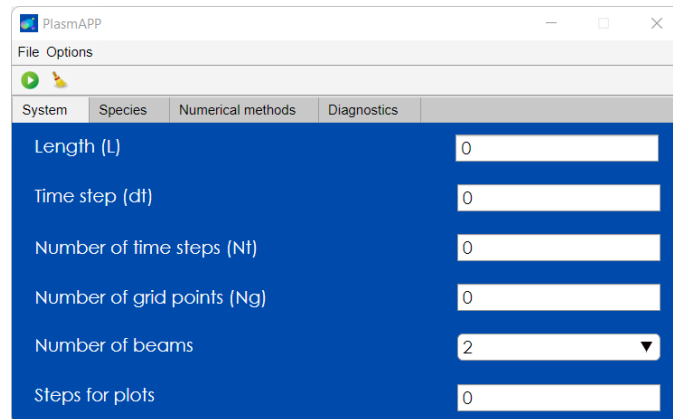


Figura 5.22: Pestaña **System** en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.

- **Species:** Una vez el usuario escoge la cantidad de haces que desea simular en la ventana **System**, se pueden determinar las características de cada especie en la pestaña **Species** como se observa en la Figura 5.23.

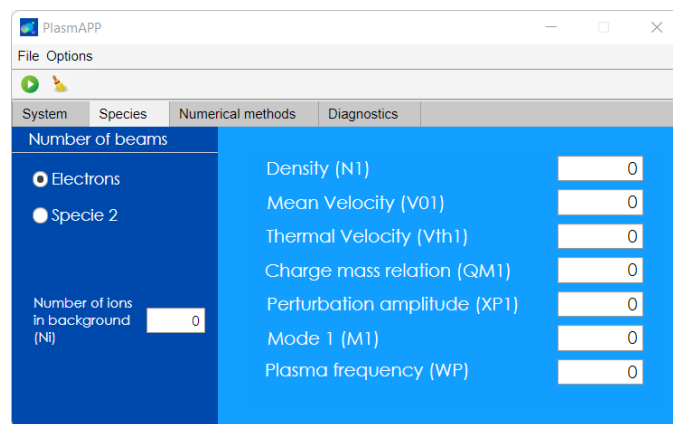
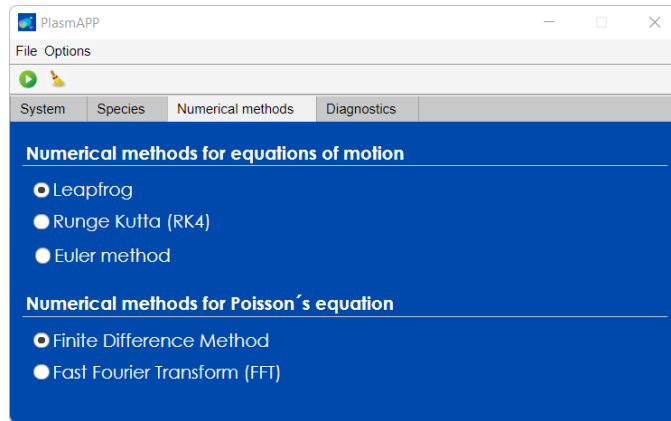


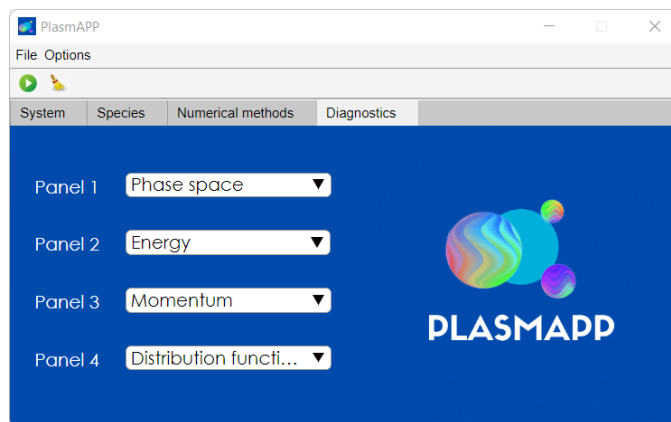
Figura 5.23: Pestaña **Species** en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.

- **Numerical methods:** En esta pestaña se escogen los métodos numéricos para resolver las ecuaciones de movimiento y para la ecuación de Poisson, como se observa en la Figura 5.24.



**Figura 5.24:** Pestaña **Numerical methods** en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.

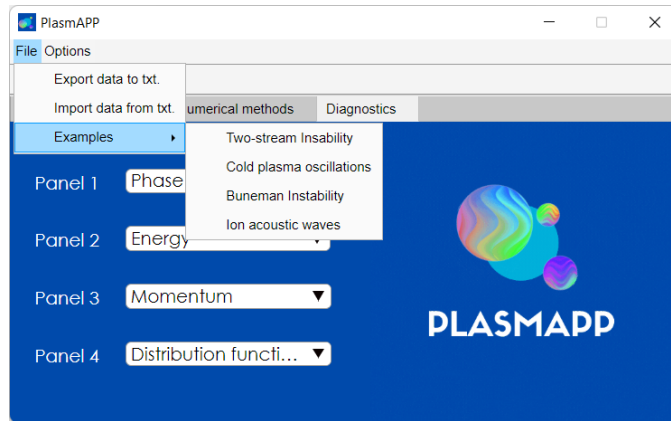
- **Diagnostics:** En la última pestaña el usuario selecciona los diagnósticos que desea observar. Esta interfaz se aprecia en la Figura 5.25.



**Figura 5.25:** Pestaña **Diagnostics** en la interfaz gráfica de Inputs.mlapp.

Entre los diagnósticos que puede seleccionar están: espacio de fase, energía en función del tiempo (energía cinética, energía potencial y energía total), momentum en función del tiempo, potencial eléctrico en función del espacio, campo eléctrico en función del espacio y la relación de dispersión.

Adicionalmente, el usuario por medio del botón *file* en el menú, tiene la opción de exportar datos en formato text, importarlos en el mismo formato y puede cargar los ejemplos seleccionados. Esto se puede observar en la Figura 5.26.



**Figura 5.26:** Opción *file* en el menú. En esta se permite exportar las variables en formato text e importar variables desde el mismo tipo de formato.

Una vez el usuario presiona el botón para correr el programa, todas las variables son guardadas en un vector `data`. Posteriormente, se abre el programa `Main.mlapp` al que se le envía este vector.

### 5.3 CÓDIGO 3: `Main.mlapp`

El último código se utiliza para procesar las variables y con estas implementar el algoritmo PIC, adicionalmente, en la interfaz gráfica se deben observar los diagnósticos seleccionados por el usuario. A continuación se describe el código implementado:

- **Extraer información del vector `data`:** En primer lugar el código toma el vector `data`, y a cada valor de este se le asigna un nombre de variable. Por ejemplo, el primer valor del vector es la longitud del sistema, a este se le asigna el nombre `L`. Usando los datos se puede determinar el tamaño de la celda `dx`.
- **Calcular la carga:** Usando la función:

$$[Q\_1, Q\_2, rho\_back] = Charge(app, QM1, QM2), \quad (5.1)$$

se pueden calcular las cargas `Q1` y `Q2` y la densidad de carga de fondo `rho_back` a partir de la relación carga-masa de cada especie.

- **Ubicar las partículas en el espacio de fase:** Por medio de la función:

$$[position, velocity] = InitialLoading(app, N, V0, Vth, XP, Mode), \quad (5.2)$$

se puede calcular la posición y la velocidad inicial de cada especie ( $x_{p1}$ ,  $x_{p2}$ ,  $v_{p1}$ ,  $v_{p2}$ ) usando el número de partículas, la velocidad inicial, la velocidad térmica, la amplitud de la perturbación y el modo de la perturbación. Acá se posicionan las SP de cada especie de manera uniforme en el espacio y se tiene una velocidad con una función de distribución Maxwelliana. Adicionalmente, se puede añadir una perturbación, la cual se calcula para cada especie usando:

$$\text{position} = \text{position} + \text{Amplitude} * \cos((2 * \pi * \text{Mode} * \text{position}) / L). \quad (5.3)$$

- **Vectores auxiliares:** La función:

$$\text{aux\_vector} = \text{AuxVector}(\text{app}, N), \quad (5.4)$$

permite crear los vectores auxiliares  $p1$  y  $p2$  para cada especie los cuales se utilizan para crear las matrices de interpolación.

- **Se prepara la ecuación de Poisson:** Se crea la matriz  $Ax$  que se explica en la ecuación (4.50) y se crea el vector de números de onda  $k$  para poder calcular el potencial a través de la transformada rápida de Fourier.
- **Preparar diagnósticos:** Se crean los vectores de tiempo (`time`) y de espacio (`space`). Luego se crean vectores nulos para el momentum para cada especie, para el momentum total, para la energía cinética de cada especie, para la energía cinética total y para la energía potencial total. Estos tendrán un tamaño de  $1 \times Nt$ . Posteriormente se crean matrices de ceros en las que se guardará la información en cada paso de tiempo de la posición de cada especie, la velocidad de cada especie, la densidad de carga en la malla, el potencial eléctrico en la malla y el campo eléctrico en la malla.

Una vez definidas las variables iniciales, se puede comenzar el ciclo implementando la función `for`, en donde las iteraciones `it` van desde 1 hasta  $Nt$ . A continuación se explica cada paso del ciclo:

- **Momentum y energía:** En primer lugar, se calcula la energía cinética de cada especie utilizando la función:

$$E_k = E_{kin}(\text{app}, \text{charge}, QM, \text{velocity}, N), \quad (5.5)$$

la cual utiliza la ecuación:

$$E_k = 0.5 * \text{abs}(\text{charge} / QM) * (\text{sum}(\text{velocity} .^2)). \quad (5.6)$$

Luego, se calcula la energía cinética total sumando la de cada especie. Posteriormente se calcula el momentum de cada especie por medio de la función:

$$\text{mom} = \text{momentum}(\text{app}, \text{charge}, QM, \text{velocity}, N), \quad (5.7)$$

usando la ecuación:

$$\text{mom} = (\text{charge}/\text{QM}) * (\text{sum}(\text{velocity})), \quad (5.8)$$

y se calcula el momentum total con la sumatoria del momentum de cada especie. Luego, se puede proceder a calcular la energía potencial con la ecuación:

$$E_{\text{pot}}(\text{it}) = 0.5 * \text{sum}(\text{Eg}.^2) * \text{dx}. \quad (5.9)$$

Por último se suma la energía potencial y la cinética para hallar la energía total.

- **Actualizar posiciones:** Para poder hallar la posición de las partículas, se utiliza la función:

$$\text{position} = \text{MotionX}(\text{app}, \text{position}, \text{velocity}). \quad (5.10)$$

Esta calcula la posición dependiendo del método que el usuario escoja implementando las ecuaciones 4.26, 4.28 y 4.31.

- **Aplicar condiciones de frontera periódicas:** Para aplicar las condiciones de frontera a la posición de cada especie se usa la función:

$$\text{variable} = \text{PeriodicBC}(\text{app}, \text{variable}, \text{LB}, \text{UB}) \quad (5.11)$$

donde `variable` es cualquier variable a la que se le desee aplicar las condiciones, LB es el límite inferior y UB es el límite superior.

- **Realizar matrices de interpolación:** Se implementa la función:

$$\text{interp} = \text{InterpolationF}(\text{app}, \text{position}, \text{aux\_vector}), \quad (5.12)$$

para hallar la función de interpolación para cada especie.

- **Calcular densidad de carga:** Luego, se calcula la densidad de carga para cada especie implementando la función:

$$\text{rho} = \text{Charge\_density}(\text{app}, \text{charge}, \text{interp}). \quad (5.13)$$

Para hallar la densidad de carga total se suman las densidades de cada especie y la de fondo.

- **Calcular potencial eléctrico:** Se utiliza la función:

$$\text{Phi} = \text{Poisson}(\text{app}, \text{charge\_density}), \quad (5.14)$$

la cual calcula el potencial eléctrico dependiendo del método ingresado por el usuario. Para esto se implementan las ecuación 4.34 ó 4.36.

- **Se calcula el campo eléctrico en la malla:** Implementando la ecuación 4.37 se crea la función:

$$E_g = EfieldG(app,Phi), \quad (5.15)$$

con la que se calcula el campo eléctrico en los nodos.

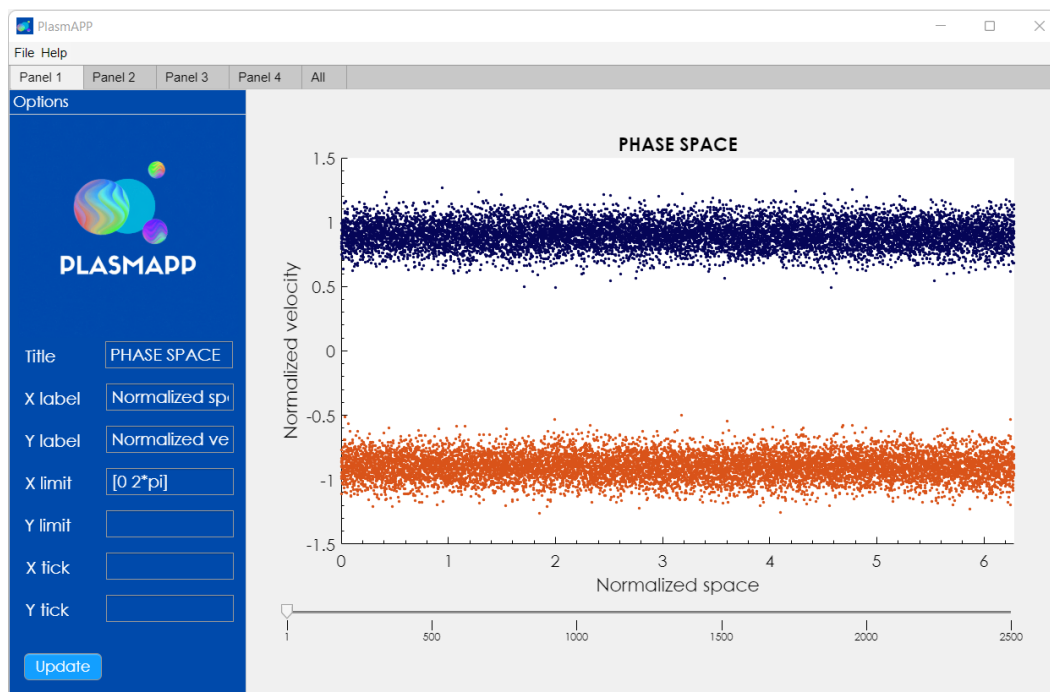
- **Actualizar velocidades:** Para poder calcular las velocidades de las SP, para cada especie se utiliza la función:

$$velocity = MotionV(app,velocity,QM,interp,Eg,it,N). \quad (5.16)$$

Esta permite calcular la velocidad a través del método seleccionado por el usuario implementando las ecuaciones 4.27, 4.29 ó 4.33.

- **Guardar valores:** Finalmente, se guardan los valores de posición, velocidad, densidad de carga, potencial eléctrico y campo eléctrico en las matrices creadas en el ítem **Preparar diagnósticos**.

La interfaz gráfica de este programa se aprecia en la Figura 5.27.



**Figura 5.27:** Interfaz gráfica del código Main.mlapp en la pestaña *Panel 1*.

Como se observa, la interfaz contiene una pestaña para cada diagnóstico que el usuario escogió y una última pestaña que recopila todos los diagnósticos (Figura 5.28). En la pestaña de cada diagnóstico se puede editar la gráfica cambiando su título, el título

de los ejes, los límites de la gráfica y las divisiones que esta tiene. Adicionalmente, en parte inferior se tiene un deslizador que permite observar la gráfica en la iteración que desea.

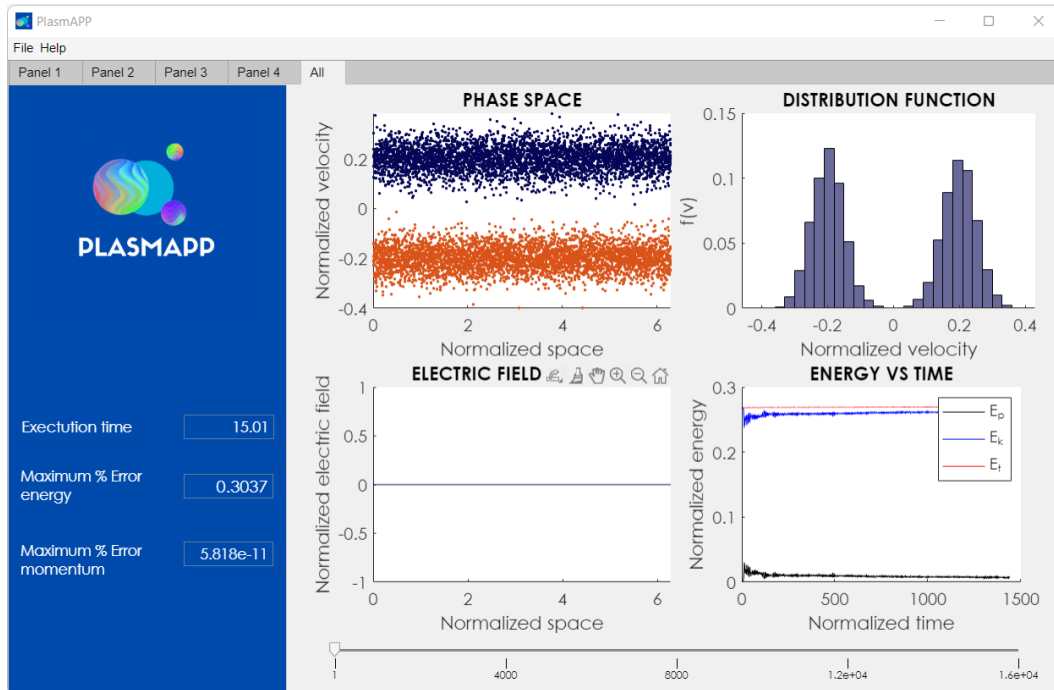


Figura 5.28: Interfaz gráfica del código Main.mlapp en la pestaña *All*.

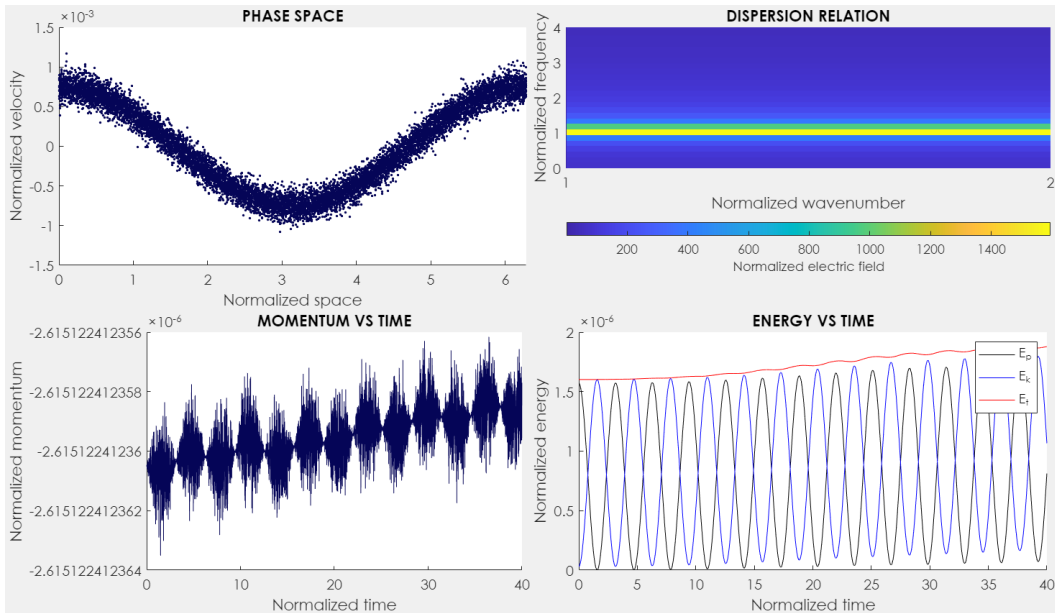
## 6. RESULTADOS

### 6.1 OSCILACIONES DE PLASMA FRÍO

Teniendo en cuenta que para las simulaciones de plasma frío la velocidad térmica de los electrones debe tender a cero, luego por la ecuación 3.5,  $\lambda_D \rightarrow 0$ . Esto hace que las simulaciones de este fenómeno acumulen error a lo largo del tiempo, ya que es imposible cumplir la condición de estabilidad de la ecuación 4.39. Como respuesta, el programa genera un calentamiento numérico del plasma, haciendo que la energía total aumente hasta que se alcanza la estabilidad [6]. Sin embargo, si la simulación se realiza con una velocidad térmica cercana a cero ( $v_{th,e} = 0.0001c$ ) y en un tiempo corto, el error obtenido no será significativo.

En esta sección se pretende validar el comportamiento del programa y establecer los métodos numéricos que poseen mejor conservación de la energía y del momentum además del tiempo de ejecución de cada método.

Para esta simulación, inicialmente se toman los datos  $L = 2\pi$ ,  $dt = 0.0005$ ,  $Nt = 8000$ ,  $Ng = 1024$ ,  $N1 = 10000$ ,  $v01 = 0$ ,  $vth1 = 0.0001$ ,  $QM1 = -1$ ,  $XP1 = 0.001$ ,  $M1 = 1$ ,  $WP1 = 1$  y  $Ni=10000$ . Adicionalmente, se usa Leapfrog para la solución de las ecuaciones de movimiento y Diferencias Finitas para resolver la ecuación de Poisson. Los resultados se observan en la Figura 6.29.



**Figura 6.29:** Simulación de oscilaciones de plasma frío con espacio de fase en  $t = 4/\omega_{pe}$ , relación de dispersión, momentum en función del tiempo y energía potencial, cinética y total en función del tiempo.

En primer lugar para el espacio de fase en el tiempo  $t = 4/\omega_{pe}$  se observa que una vez desplazados los electrones de forma cosenoidal con respecto al equilibrio, la velocidad comienza a oscilar a su vez en dirección contraria al desplazamiento de la posición. En la relación de dispersión se observa que la frecuencia de las oscilaciones está en  $\omega/\omega_{pe} = 1$ , lo que corresponde a la frecuencia del plasma electrónico. Por otra parte, se aprecia que el momentum tiene un leve ascenso con respecto al tiempo, sin embargo el máximo porcentaje de error de este es solo de  $6.092 \times 10^{-11}\%$ . Por último, en la gráfica de la energía en función del tiempo, se observa que inicialmente el comportamiento es adecuado con respecto a la teoría ya que las oscilaciones hacen que haya un intercambio conservativo entre la energía cinética y la potencial. Sin embargo, por estabilidad numérica, a lo largo del tiempo, la energía total aumenta, de forma que el plasma se calienta inadecuadamente, obteniendo un porcentaje de error de 17.1%.

Para comparar los métodos numéricos se realizó una matriz de experimentos en donde se evaluaron 15 simulaciones para cada uno de los métodos de las ecuaciones de movimiento: Leapfrog, Euler y Runge Kutta de cuarto orden, usando diferencias finitas para la ecuación de Poisson. Adicionalmente se usó  $Nt = 1000$  para disminuir el error numérico proporcionado por el uso de haces fríos. Estos resultados se observan en la Tabla 6.4. Posteriormente se repite el experimento usando la transformada rápida de Fourier como método de solución de la ecuación de Poisson, cuyos resultados se aprecian en la Tabla 6.5.

**Tabla 6.4:** Matriz de experimentos usando el método de diferencias finitas para resolver la ecuación de Poisson.

Run	Leapfrog			Runge Kutta de 4to orden			Método de Euler		
	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)
1	0,889	0,314	8,71E-11	1,146	0,392	5,40E-11	0,904	0,367	2,88E-10
2	0,889	0,279	6,20E-11	1,101	0,386	6,93E-10	0,868	0,391	5,90E-11
3	0,897	0,307	8,68E-11	1,203	0,404	7,89E-11	0,850	0,390	2,38E-11
4	1,019	0,306	6,69E-11	1,201	0,401	3,95E-11	0,843	0,389	7,93E-11
5	0,915	0,342	8,47E-11	1,107	0,399	7,62E-11	0,853	0,397	3,27E-11
6	0,901	0,289	2,98E-10	1,103	0,398	4,08E-11	0,846	0,373	3,17E-10
7	0,930	0,279	8,99E-11	1,12	0,388	1,20E-10	0,864	0,385	1,97E-10
8	0,945	0,313	4,43E-11	1,097	0,383	1,01E-10	0,896	0,384	5,01E-11
9	0,895	0,302	1,15E-10	1,103	0,406	3,43E-11	0,851	0,381	4,89E-11
10	0,890	0,265	1,44E-09	1,109	0,418	1,64E-10	0,857	0,405	1,27E-10
11	0,883	0,290	9,67E-11	1,116	0,392	7,12E-11	0,868	0,397	5,85E-11
12	0,882	0,293	5,69E-11	1,097	0,408	5,82E-10	0,885	0,401	2,01E-11
13	0,888	0,307	6,60E-11	1,102	0,396	8,03E-11	0,874	0,410	1,08E-10
14	0,892	0,320	4,73E-11	1,086	0,408	1,03E-10	0,851	0,383	1,34E-10
15	0,890	0,296	4,05E-11	1,094	0,384	6,72E-10	0,852	0,410	3,74E-11
<b>Promedio</b>	0,907	0,300	1,79E-10	1,119	0,398	1,94E-10	0,864	0,391	1,05E-10

De los experimentos realizados se obtiene que en todos los métodos usados, el momentum tiene un error máximo del orden de  $10^{-10}$ , mientras que el error de la energía es del orden de  $10^{-1}$ . Esta diferencia se debe a que en el modelo PIC, se puede conservar la energía o el momentum, pero no ambos [31]. Los errores no deben ser significativos si se tienen en cuenta las condiciones de estabilidad numérica. Para el código implementado, se asegura la conservación del momentum al usar el mismo esquema de interpolación para la carga y para la fuerza [6]. Sin embargo, la energía posee un error

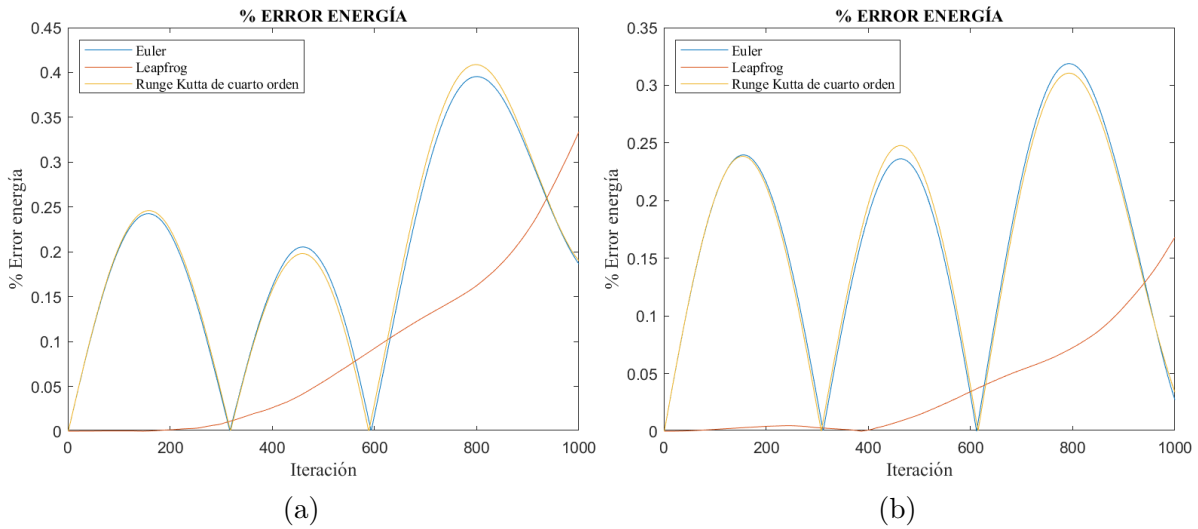
**Tabla 6.5:** Matriz de experimentos usando el método de transformada rápida de Fourier para resolver la ecuación de Poisson.

Run	Leapfrog			Runge Kutta de cuarto orden			Método de Euler		
	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)	Tiempo	Error energía (%)	Error momentum (%)
1	0,975	0,1879	2,85E-11	1,128	0,330	2,65E-10	0,933	0,3351	1,40E-10
2	0,969	0,1999	6,49E-11	1,125	0,325	3,01E-11	0,872	0,3431	3,27E-11
3	0,950	0,1557	2,59E-11	1,122	0,323	4,76E-11	0,898	0,3157	2,09E-11
4	0,946	0,1640	5,83E-11	1,126	0,334	3,54E-11	0,885	0,3118	9,71E-11
5	0,921	0,1720	4,56E-11	1,155	0,337	2,81E-10	0,875	0,3215	1,01E-11
6	0,944	0,1983	4,96E-11	1,194	0,320	5,12E-11	0,882	0,3342	4,16E-11
7	0,928	0,1837	1,36E-10	1,152	0,329	5,42E-11	0,876	0,3120	1,01E-10
8	0,927	0,1853	3,38E-11	1,165	0,321	4,75E-11	0,903	0,3226	3,91E-11
9	0,921	0,1675	5,69E-10	1,143	0,328	3,23E-11	0,900	0,3192	1,27E-10
10	0,914	0,1762	1,28E-10	1,159	0,311	8,07E-11	0,885	0,3219	2,49E-11
11	0,906	0,1819	4,47E-11	1,176	0,333	4,47E-10	0,891	0,3186	1,88E-11
12	0,902	0,1795	5,04E-11	1,140	0,335	2,28E-10	0,886	0,3272	6,11E-11
13	0,898	0,1603	2,71E-11	1,188	0,345	3,38E-11	0,870	0,3190	2,56E-11
14	0,908	0,1693	8,81E-11	1,258	0,351	3,25E-11	0,921	0,3109	2,93E-11
15	0,918	0,1715	5,38E-10	1,215	0,309	7,43E-11	0,897	0,3407	2,19E-11
<b>Promedio</b>	0,928	0,1769	1,26E-10	1,163	0,329	1,16E-10	0,891	0,3236	5,28E-11

más significativo por el uso de una malla de tamaño finito [12]. De esta forma el problema se reduce a encontrar los métodos numéricos que conservan mejor la energía. Se observa que para las ecuaciones de movimiento el método más adecuado es el Leapfrog, mientras que para la ecuación de Poisson, el método que posee menor error numérico es la transformada rápida de Fourier. Adicionalmente, se concluye que los métodos que poseen menor tiempo de ejecución son el de Euler para las ecuaciones de movimiento y el de Diferencias Finitas para la ecuación de Poisson.

En la Figura 6.30 se aprecia una comparación entre los porcentajes de error de la energía en función de las iteraciones para los métodos numéricos de las ecuaciones de movimiento usando diferencias finitas (Figura 6.30a) y transformada rápida de Fourier (Figura 6.30b) para la ecuación de Poisson. En las gráficas se observa que el método de Euler y el de Runge Kutta de cuarto orden tienen un error oscilante debido a que no se tiene un intercambio conservativo de la energía cinética y la potencial, mientras que el método Leapfrog tiene un error ascendente. Inicialmente el método posee estabilidad en la malla y un intercambio conservativo de la energía, sin embargo, después de la iteración 200 para la gráfica de la Figura 6.30a y de la iteración 400 para la Figura 6.30b, aumenta el porcentaje de error debido al calentamiento numérico del plasma.

De esta sección se concluye que las oscilaciones de plasma frío coinciden con el comportamiento esperado por las bases teóricas, lo que implica que el código funciona correctamente. Adicionalmente, para el experimento realizado, se obtuvo que el método numérico más estable para las ecuaciones de movimiento es el Leapfrog, mientras que para la ecuación de Poisson el que posee menor error es la transformada rápida de Fourier. Por otra parte los métodos que poseen menor tiempo de ejecución son el método de Euler y Diferencias Finitas.

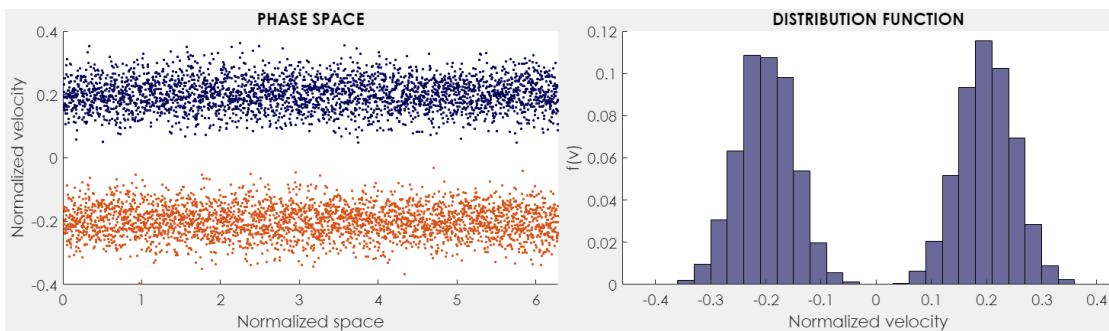


**Figura 6.30:** Comparación de porcentaje de error para las ecuaciones de movimiento: Leapfrog, Euler y Runge Kutta de cuarto orden con (a) método de diferencias finitas y (b) método de transformada rápida de Fourier para la ecuación de Poisson.

## 6.2 INESTABILIDAD TWO-STREAM ELECTRÓN-ELECTRÓN

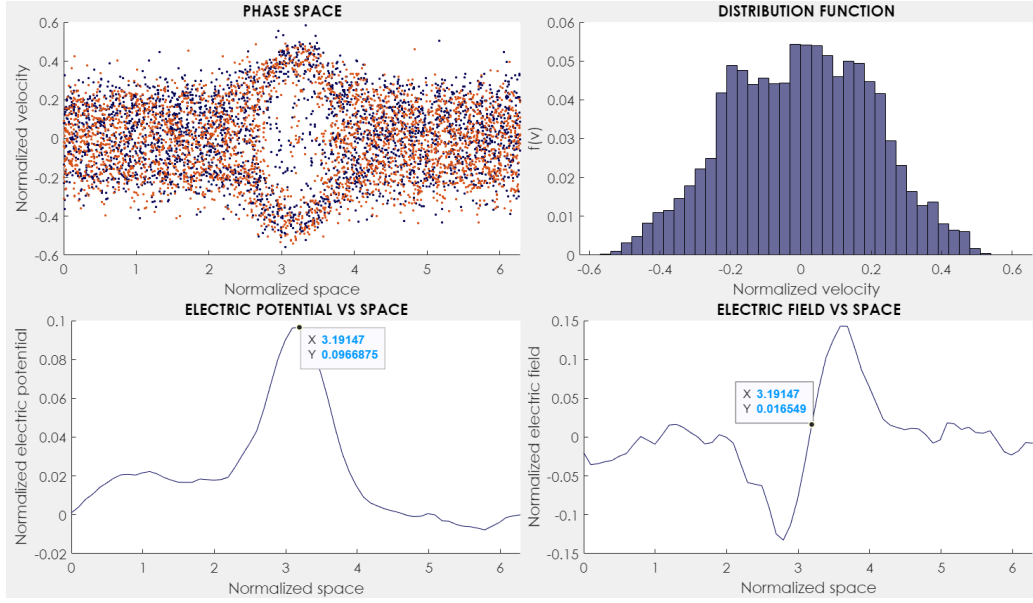
Para simular la inestabilidad Two-Stream electrón-electrón usaron los datos  $L = 2\pi$ ,  $N_t = 144000$ ,  $dt = 0.09$ ,  $N_g = 64$ ,  $N_1 = 3000$ ,  $N_2 = 3000$ ,  $N_i = 6000$ ,  $V_{01} = 0.2$ ,  $V_{02} = -0.2$ ,  $V_{th1} = 0.05$ ,  $V_{th2} = 0.05$ ,  $Q_{M1} = -1$ ,  $Q_{M2} = -1$ ,  $X_{P1} = 0.01$ ,  $X_{P2} = 0.01$ ,  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$  y  $W_{P1} = 1$ .

En la Figura 6.31 se observa el estado inicial del sistema.



**Figura 6.31:** Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón  $it = 1.0$ .

Una vez el sistema evoluciona, se generan vórtices o agujeros de electrones en el espacio de fase, como se observa en la Figura 6.32, la cual corresponde a la iteración  $it = 8 \times 10^4$ .



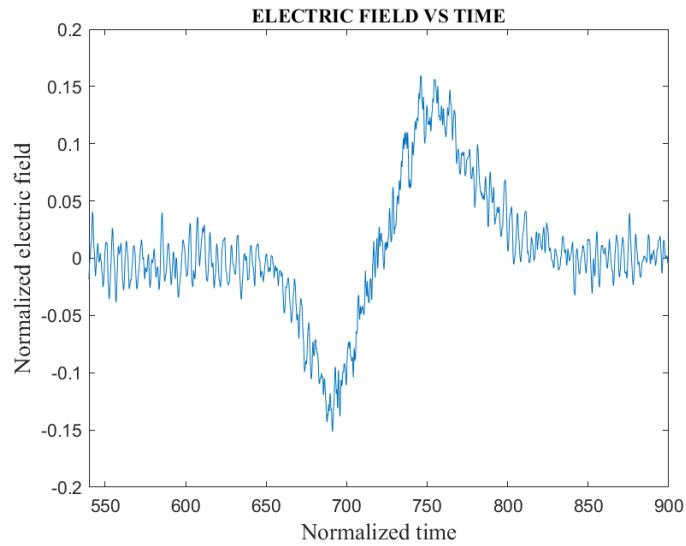
**Figura 6.32:** Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón  $it = 8 \times 10^4$ .

Como se observa en el gráfico del potencial eléctrico en función del espacio, el punto espacial donde el potencial alcanza un máximo corresponde al centro del agujero de electrones. Como el campo eléctrico está definido por la derivada negativa del potencial eléctrico, entonces, este punto máximo separa las dos regiones donde el campo eléctrico cambia de signo. Teniendo en cuenta que la dirección de la fuerza eléctrica es opuesta a la dirección del campo eléctrico debido al signo de la carga ( $\vec{F} = q\vec{E}$ ), las partículas que están a la derecha (izquierda) del máximo experimentarán fuerzas hacia la izquierda (derecha), entonces, las partículas con una velocidad inicial positiva (negativa) experimentarán una tendencia a cambiar la dirección del movimiento, esto implica una curvatura en el espacio de fase que se visualiza como un agujero. Adicionalmente, se graficó el campo eléctrico en función del tiempo (entre  $540/\omega_{pe}$  y  $900/\omega_{pe}$  en el punto del espacio  $3.19c/\omega_{pe}$ ), esto con el fin de observar la formación de los pulsos bipolares del campo eléctrico (Figura 6.33).

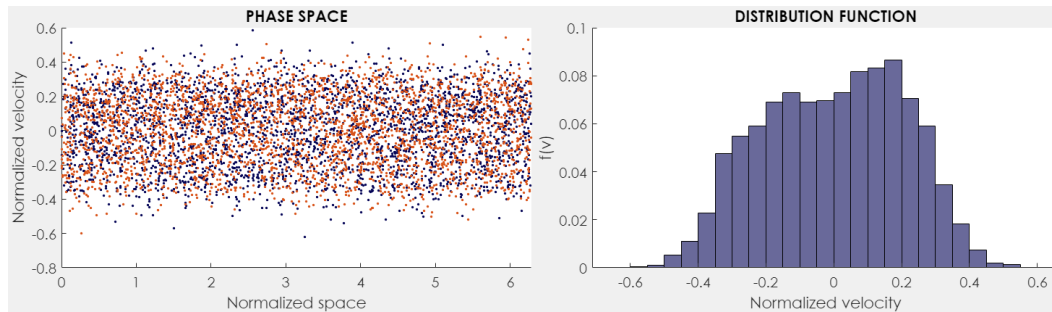
Como se muestra en la función de distribución representada como un histograma en la Figura 6.34, cuando la simulación finaliza en la iteración  $it = 1.44 \times 10^5$ , el fenómeno alcanza el equilibrio térmico.

Para observar cómo se relaciona la energía con la inestabilidad, el número de pasos de tiempo se reduce a  $Nt = 1000$ . En primer lugar, se muestra en la Figura 6.35 que la energía cinética  $E_k$  se inyecta en el campo eléctrico  $E_p$  en una iteración aproximadamente igual a  $it = 80$  que corresponde a un tiempo de  $t = 7.2/\omega_{pe}$ . Cuando esta energía libre se intercambia con el campo eléctrico, se produce la inestabilidad.

La Figura 6.36 muestra que en un tiempo de aproximadamente  $14.4/\omega_{pe}$ , el campo



**Figura 6.33:** Formación de pulsos bipolares del campo eléctrico para la inestabilidad Two-Stream electrón-electrón.



**Figura 6.34:** Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón  $it = 1.44 \times 10^5$ .

eléctrico alcanza su máximo, posteriormente este disminuye debido a la interacción entre el campo eléctrico y las partículas del plasma las cuales absorben su energía. Además, la energía cinética aumenta, lo que proporciona un calentamiento del plasma. Finalmente, se observa una conservación de la energía con un error máximo de 0.31%.

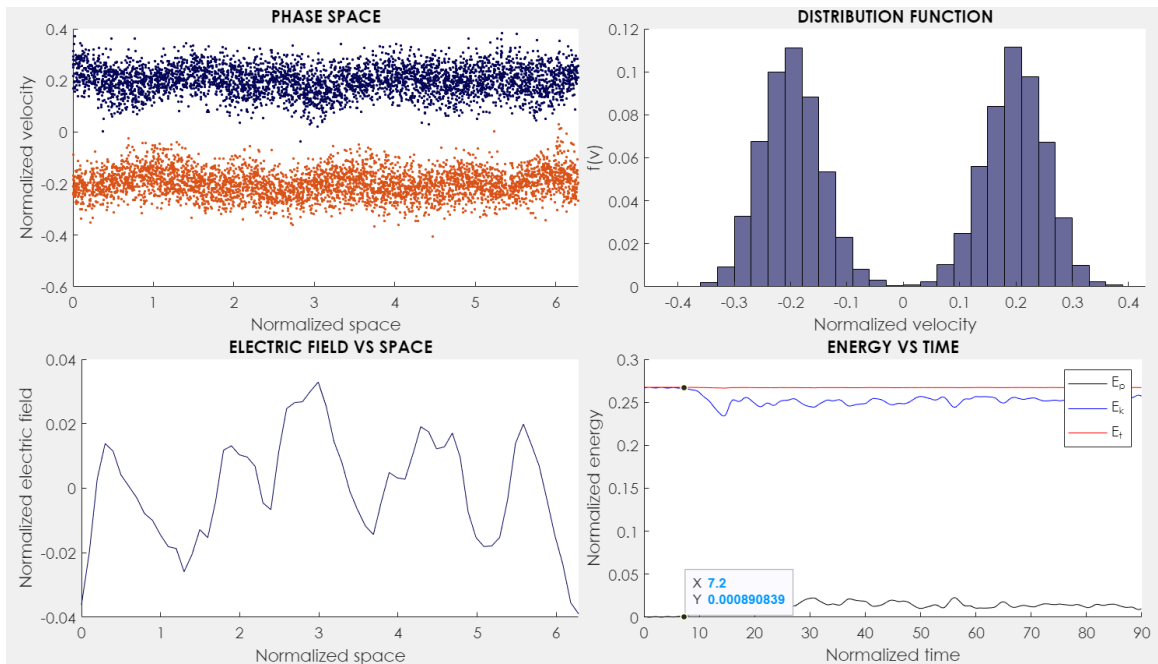


Figura 6.35: Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón  $it = 80$ .

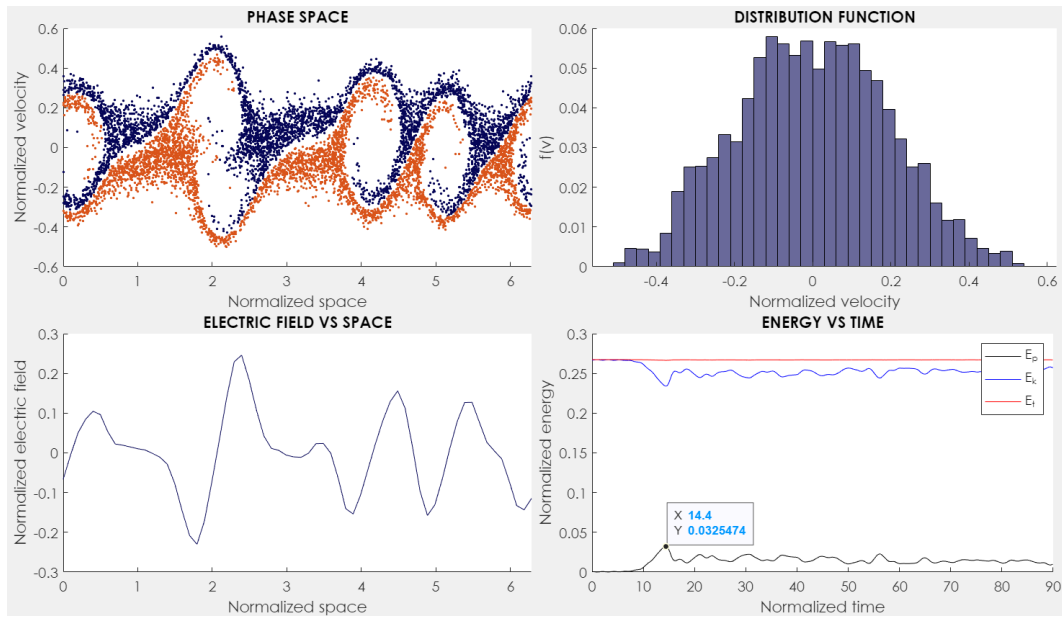
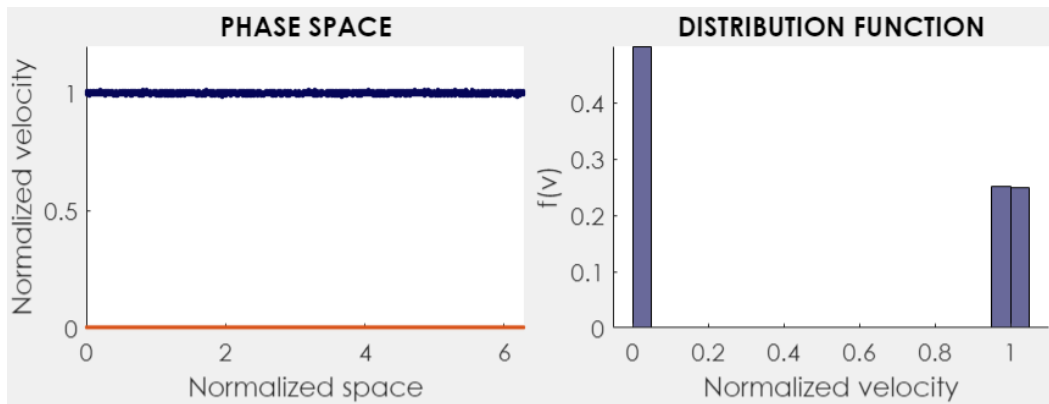


Figura 6.36: Inestabilidad Two-Stream electrón-electrón  $it = 160$ .

### 6.3 INESTABILIDAD DE BUNEMAN

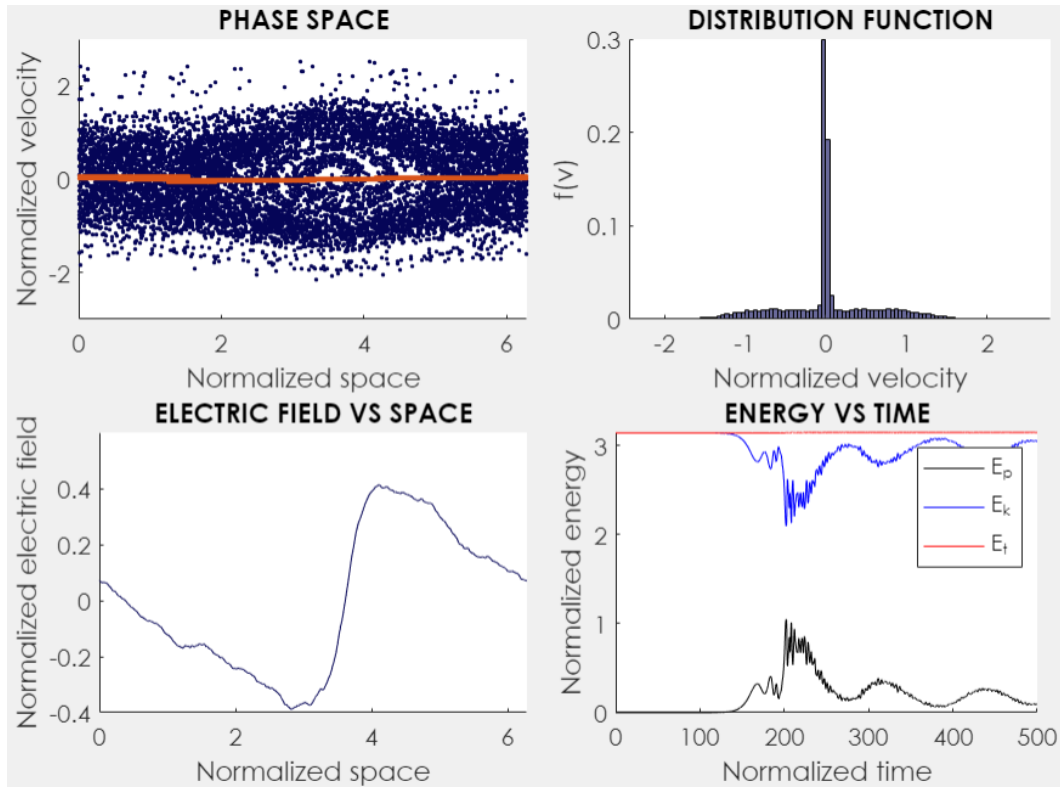
Los datos usados para simular la inestabilidad de Buneman fueron:  $L = 2\pi$ ,  $Nt = 5000$ ,  $dt = 0.1$ ,  $Ng = 512$ ,  $N1 = 10000$ ,  $N2 = 10000$ ,  $Ni = 0$ ,  $v01 = 1$ ,  $v02 = 0$ ,  $vth1 = 0.004$ ,  $vth2 = 0$ ,  $QM1 = -1$ ,  $QM2 = 0.001$ ,  $XP1 = 0$ ,  $XP2 = 0$ ,  $M1 = 0$  y  $M2 = 0$ . Cabe mencionar que los parámetros escogidos no son físicos (por ejemplo la velocidad inicial de los electrones es del orden de la velocidad de la luz), sin embargo se usan debido a que estos permiten una mejor visualización y análisis del fenómeno.

En la Figura 6.37 se observa el estado inicial de la simulación, donde se tiene una función de distribución con un pico en  $v = 0c$  correspondiente a los iones del sistema y un pico centrado en  $v = 1c$ , el cual corresponde al haz de electrones.



**Figura 6.37:** Inestabilidad de Buneman  $it = 1$ .

Una vez el sistema evoluciona, se genera la inestabilidad de Buneman. Esta se caracteriza por la propagación de agujeros de electrones al rededor del haz de iones como se observa en la Figura 6.38.

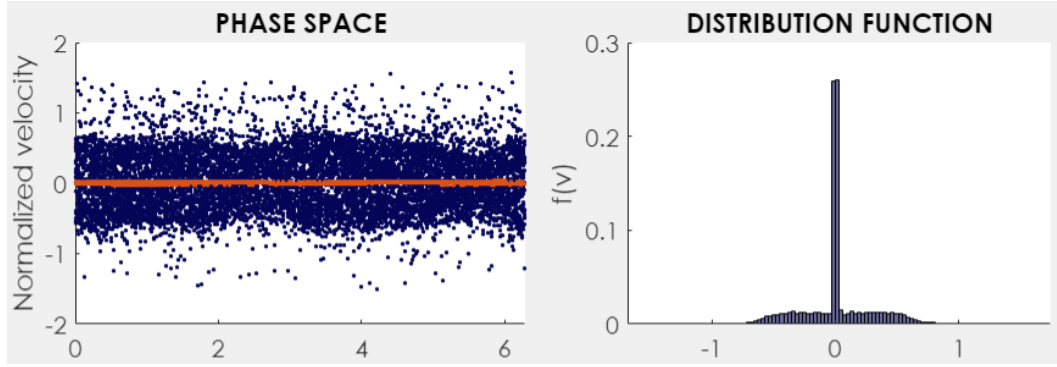


**Figura 6.38:** Inestabilidad de Buneman  $it = 3500$ .

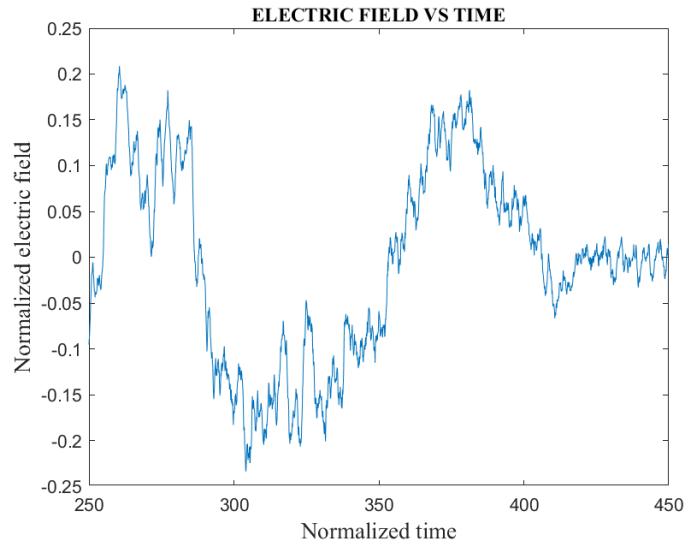
Adicionalmente, se aprecia un pulso bipolar del campo eléctrico, que confirma la existencia de un vórtice en el espacio de fase. Por otra parte, en la gráfica de la energía en función del tiempo, se observa que inicialmente la energía total corresponde exclusivamente a la cinética, la cual es proporcionada por la velocidad inicial del haz de electrones. Posteriormente, la energía potencial incrementa, lo que indica un aumento del campo eléctrico que pretende restaurar el equilibrio térmico. Luego, la energía del campo disminuye y la cinética aumenta, representando un calentamiento del plasma.

En la Figura 6.39 se aprecia el fenómeno en la última iteración. En esta los electrones poseen una función de distribución maxwelliana con una velocidad media de  $v_{0e} = 0c$  y una velocidad térmica aproximada de  $v_{th,e} = 0.8c$ . Esto corresponde a 200 veces la velocidad térmica inicial.

Por otra parte, se grafica el campo eléctrico en función del tiempo entre  $250/\omega_{pe}$  y  $450/\omega_{pe}$  para observar la onda solitaria en el punto del espacio  $3.55c/\omega_{pe}$  (Figura 6.40).



**Figura 6.39:** Inestabilidad de Buneman  $it = 5000$ .

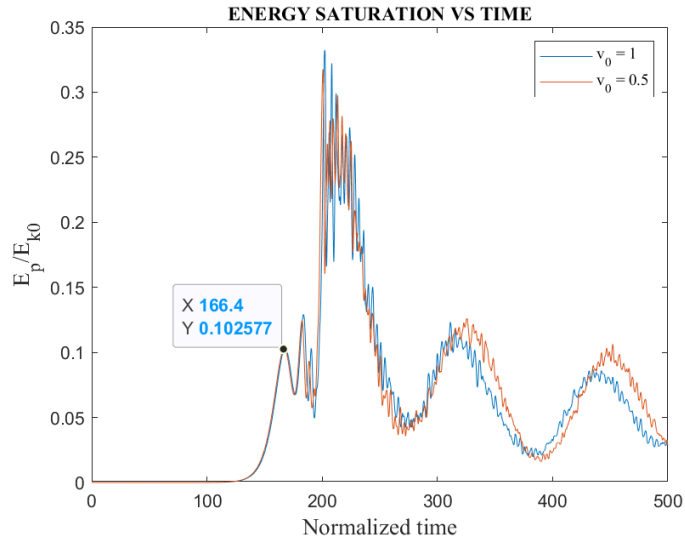


**Figura 6.40:** Formación de pulsos bipolares del campo eléctrico para la inestabilidad Buneman.

El modelo de Hirose [32] y la simulación PIC de Rajawat y Sengupta [27] muestran que la relación entre la energía potencial y la energía cinética inicial de los electrones  $E_{k0}$  varía con respecto a la masa del electrón y del ion como sigue:

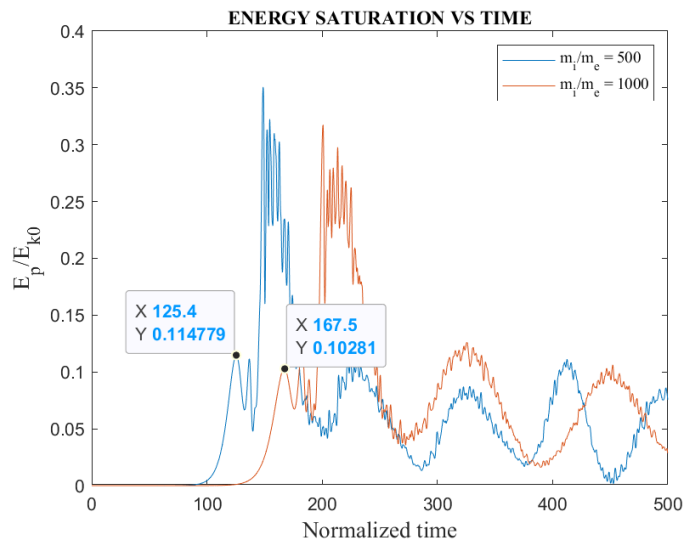
$$\frac{E_p}{E_{k0}} \approx \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}. \quad (6.1)$$

Con el fin de demostrar que esta relación se cumple, se realizaron dos simulaciones con distinta velocidad inicial ( $v01 = 1$  y  $v01 = 0.5$ ) y con una relación de masas de  $m2/m1 = 1000$ . Teóricamente, para estas simulaciones  $E_p/E_{k0} \approx 0.1$ . Posteriormente se graficó  $E_p/E_{k0}$  en función del tiempo (Figura 6.41) y se observa que la relación se cumple en ambos casos, con un error del 2.58%.



**Figura 6.41:** Primera saturación de la energía para  $m_2/m_1 = 1000$  con ( $v_{01} = 1$  y  $v_{01} = 0.5$ ).

De modo complementario, se realizaron dos simulaciones variando la relación de la masa ( $m_2/m_1 = 500$  y  $m_2/m_1 = 1000$ ) y fijando la velocidad inicial ( $v_{01} = 0.5$ ) (Figura 6.42). Se observa que en ambos casos se cumple la relación de la ecuación (6.1) con un error del 8.91% para  $m_2/m_1 = 500$  y del 2.81% para  $m_2/m_1 = 1000$ . Además, se obtuvo que a menor relación de las masas, el fenómeno satura más rápido y posee mayor inestabilidad. Esto corresponde teóricamente con la tasa de crecimiento del fenómeno dado por la ecuación (3.30).

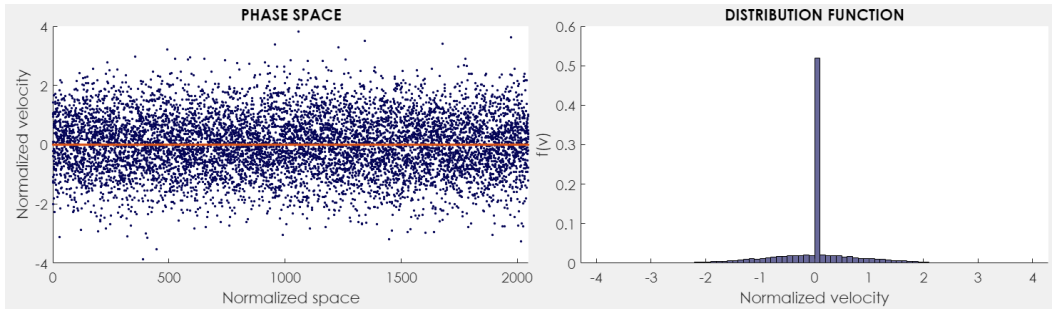


**Figura 6.42:** Primera saturación de la energía para  $m_2/m_1 = 500$  y  $m_2/m_1 = 1000$  con  $v_{01} = 0.5$ .

## 6.4 ONDAS DE LANGMUIR Y ONDAS ION-ACÚSTICAS

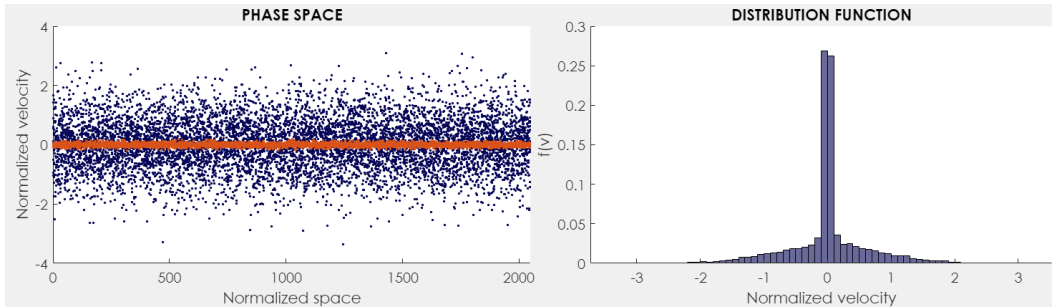
Para simular las ondas ion-acústicas y de Langmuir se usaron inicialmente los parámetros:  $L = 2048$ ,  $Nt = 8000$ ,  $dt = 0.05$ ,  $N_g = 8192$ ,  $N_1 = 8000$ ,  $N_2 = 8000$ ,  $N_i = 0$ ,  $V_{01} = 0$ ,  $V_{02} = 0$ ,  $V_{th1} = 1$ ,  $V_{th2} = 0$ ,  $QM_1 = -1$ ,  $QM_2 = 0.01$ ,  $XP_1 = 0.2$ ,  $XP_2 = 0$ ,  $M_1 = 1$  y  $M_2 = 0$ .

En la Figura 6.43 se observa el espacio de fase y la función de distribución para el estado inicial de la simulación.



**Figura 6.43:** Simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir  $it = 1$ .

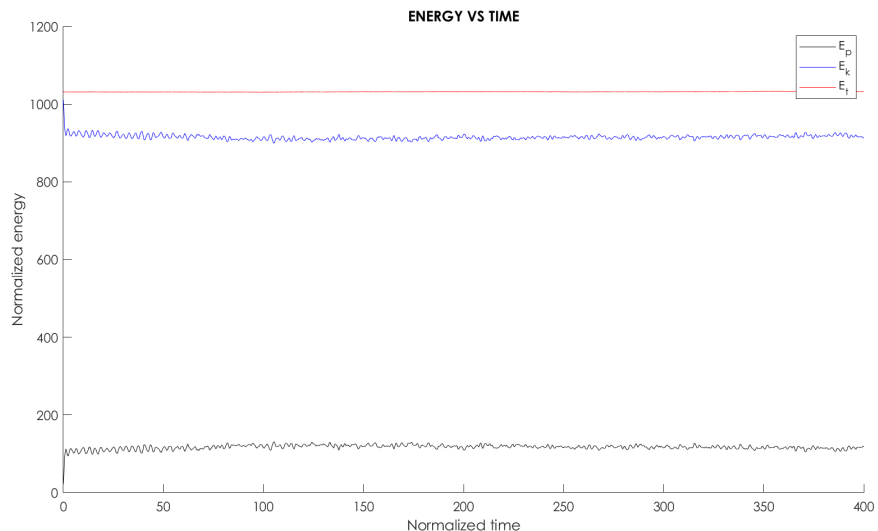
Cuando el sistema evoluciona, en la Figura 6.44 se observa un calentamiento de los iones, donde la velocidad térmica es de aproximadamente  $v_{th,i} = 0.0427c$ .



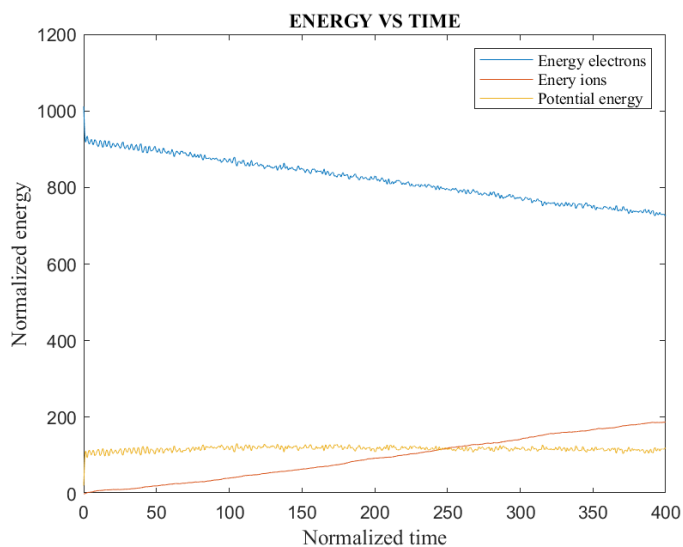
**Figura 6.44:** Simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir  $it = 8000$ .

Por otra parte, en la gráfica de la energía en función del tiempo (Figura 6.45) se observa que existe un intercambio conservativo entre la energía cinética y la potencial con un porcentaje de error máximo en la energía total de 0.2526%.

Con el fin de analizar cómo varía la energía cinética con respecto a cada una de las especies, se realizó la gráfica de la Figura 6.46. Como se observa, inicialmente, la energía libre proviene de la diferencia de temperatura entre las especies y la perturbación



**Figura 6.45:** Energía potencial, cinética y total en función del tiempo para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.

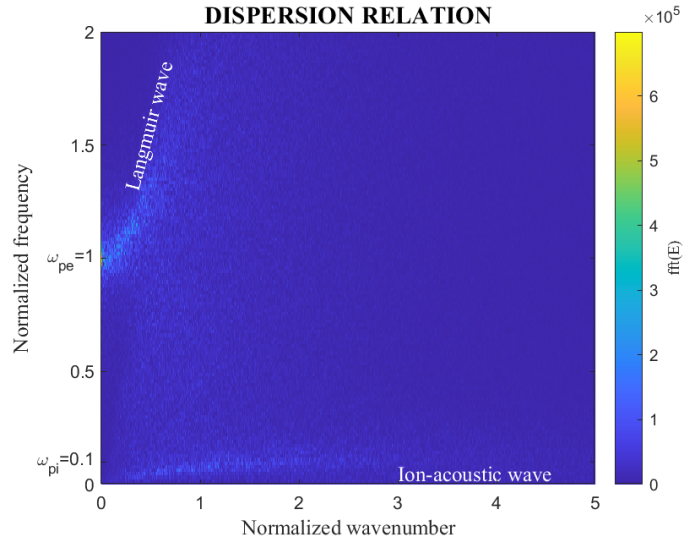


**Figura 6.46:** Energía potencial, cinética de electrones y de iones en función del tiempo para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.

añadida, de manera que se genera un campo eléctrico inicial con la combinación de las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas. El campo interactúa con los electrones por medio de leves oscilaciones, sin embargo, casi no se aprecia el amortiguamiento de Landau ya que este depende de la longitud del sistema, la cual es muy grande en la simulación realizada. Adicionalmente, la suma de las ondas de Langmuir y la ion acústicas genera una onda de gran amplitud (energía), la tasa de amortiguamiento de las ondas ion acústicas depende de la relación de las masas de las especies, de manera que existe un amortiguamiento de Landau en donde la onda interactúa efectivamente

con los iones haciendo que estos incrementen su temperatura por la energía que les cede los electrones.

Por otra parte, en la Figura 6.47 se observa la relación de dispersión simulada.



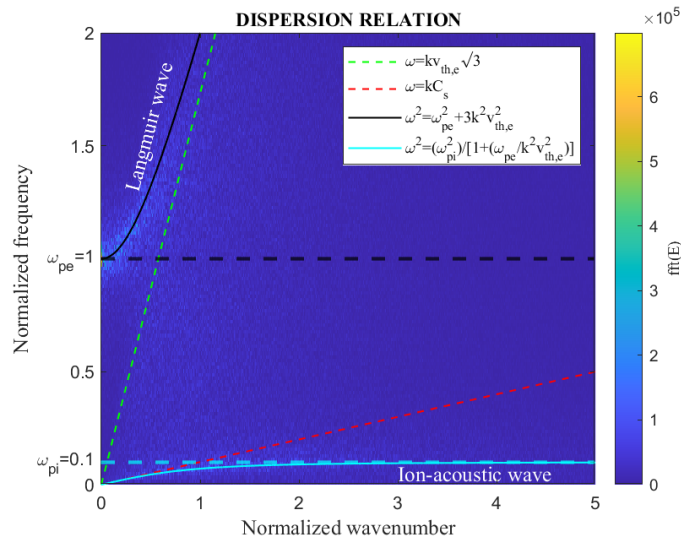
**Figura 6.47:** Relación de dispersión para simulación ondas ion-acústicas y de Langmuir.

Luego, en la Figura 6.48, se graficaron las relaciones de dispersión teóricas sobre la simulada. Se observa que para las ondas de Langmuir y las ondas ion-acústicas, estas coinciden, lo que demuestra que el modelo utilizado es correcto.

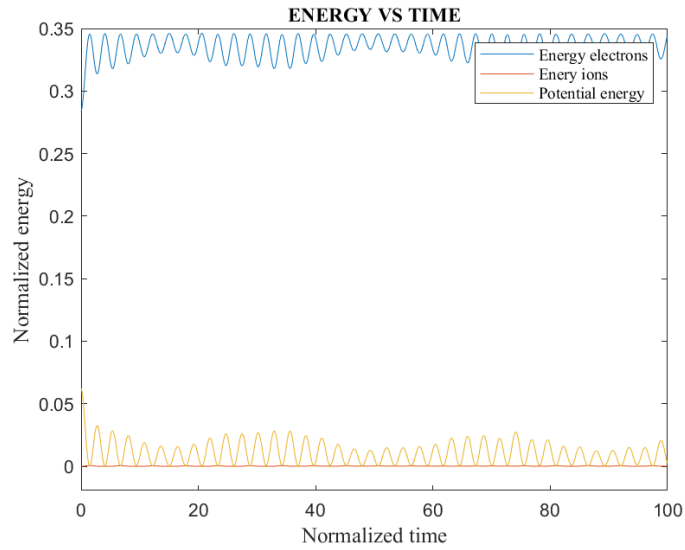
## 6.5 AMORTIGUAMIENTO DE LANDAU EN LAS ONDAS DE LANGMUIR

Con el fin de observar de forma efectiva el amortiguamiento de Landau, se realiza una simulación en la que se ignoran las ondas ion acústicas, es decir disminuyendo la longitud del sistema a:  $L = 2\pi$ . Adicionalmente se usan los parámetros:  $Nt = 3000$ ,  $dt = 0.05$ ,  $Ng = 8192$ ,  $N1 = 8000$ ,  $N2 = 8000$ ,  $Ni = 0$ ,  $V01 = 0$ ,  $V02 = 0$ ,  $Vth1 = 0.3$ ,  $Vth2 = 0$ ,  $QM1 = -1$ ,  $QM2 = 0.01$ ,  $XP1 = 0.2$ ,  $XP2 = 0$ ,  $M1 = 1$  y  $M2 = 0$ .

Para observar cómo varía la energía cinética de los electrones, de los iones y la potencial se realizó la gráfica de la Figura 6.49. En esta se observa una interacción resonante entre los electrones y el campo eléctrico. Los iones se ven débilmente afectados por el campo.



**Figura 6.48:** Comparación relaciones de dispersión teóricas y simulada para las ondas ion-acústicas y de Langmuir.



**Figura 6.49:** Gráfica de energía cinética de los electrones y de los iones y energía potencial en función del tiempo para la visualización del amortiguamiento de Landau.

## 7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

### 7.1 CONCLUSIONES

- Se realizó un código utilizando el método PIC en el límite electrostático unidimensional. Adicionalmente se implementó una interfaz gráfica intuitiva para el usuario, la cual permite que estudiantes y futuros investigadores puedan ingresar en el área de física del plasma y simulaciones cinéticas.
- En este trabajo se lograron simular las oscilaciones de plasma frío obteniendo el resultado esperado de un intercambio oscilante semi-conservativo de la energía cinética y la potencial. El porcentaje de error obtenido para la energía fue del 17.1% esto debido a que por la baja temperatura del plasma, es imposible cumplir con la condición de estabilidad en la malla. Sin embargo, en la relación de dispersión se comprobó que la frecuencia de las oscilaciones es igual a la frecuencia electrónica del plasma  $\omega_{pe}$ .
- En las simulaciones de la inestabilidad Two-Stream, se demostró la formación de agujeros de electrones en el espacio de fase, los cuales conllevan a la generación de pulsos bipolares del campo eléctrico, esto es consistente con las mediciones realizadas en ambientes astrofísicos. Por otra parte, se observó que la energía libre proveniente de la velocidad de los electrones es la que genera la inestabilidad. Inicialmente, el campo eléctrico posee un crecimiento, sin embargo el sistema trata de recobrar el equilibrio térmico liberando un campo eléctrico que a su vez interactúa con los electrones, haciendo que el campo disminuya. Finalmente, se obtuvo que a largas escalas de tiempo, el sistema alcanza el equilibrio termodinámico.
- La inestabilidad de Buneman se caracterizó por la generación de agujeros de electrones que se pueden identificar como pulsos bipolares del campo eléctrico. Estos son de baja velocidad, sin embargo, el agujero tiende a desvanecerse de forma rápida por la interacción entre los electrones y los iones. Por otro lado, se obtuvo un calentamiento de los electrones y de los iones. Además, se demostró que el fenómeno cumple con la relación de la primera saturación del modelo de Hirose con un error máximo de 8.91%. Finalmente, se observó que efectivamente la tasa de crecimiento de la inestabilidad depende de la relación de las masas de las especies.
- Por medio del programa implementado, se lograron simular las ondas ion-acústicas y las ondas de Langmuir. En primera instancia, se observó que bajo las condiciones propuestas, los iones tienden a calentarse, mientras que los electrones pierden energía. A pesar de que no hayan colisiones involucradas, existe un intercambio de energía entre las dos especies presentes en la simulación, esto lo hacen por medio de la interacción de los campos. El amortiguamiento de Landau para los electrones es leve debido al tamaño del sistema, sin embargo, estos se enfrían

ya que la onda interactúa de forma más efectiva con los iones, haciendo que exista un intercambio de energía que busca alcanzar el equilibrio térmico. Por otra parte, se graficó la relación de dispersión teórica y simulada y se observó que estas coinciden, lo que demuestra que el modelo implementado es correcto y que las ondas simuladas efectivamente son las de Langmuir y las ion-acústicas.

- Para observar de forma más efectiva el amortiguamiento de Landau, se despreciaron las ondas ion-acústicas por medio de la disminución del tamaño del sistema. Se obtuvo que para las ondas de Langmuir el campo interactúa con los electrones haciendo que la amplitud de este disminuya a lo largo del tiempo.
- A partir de la aplicación PlasmAPP se pudo verificar la funcionalidad de los distintos métodos numéricos. Como resultado se obtuvo que todos los métodos conservan el momentum con un error máximo del orden de  $10^{-10}$  mientras que la energía se conserva con un error del orden de  $10^{-1}$  lo que indica que el programa es funcional. Se demostró que para las ecuaciones de movimiento, el método con menor error fue el Leapfrog, mientras que para la ecuación de Poisson se obtuvo menor error con la transformada rápida de Fourier. Por otra parte, se concluye que los métodos que poseen menor tiempo de ejecución son el de Euler para las ecuaciones de movimiento y el de Diferencias Finitas para la ecuación de Poisson. Por último, se observó que el método de Euler y el de Runge-Kutta cuentan con porcentajes de error oscilantes que aumentan de amplitud a lo largo del tiempo, mientras que el Leapfrog tiene un error ascendente.
- Con las simulaciones implementadas se pudo demostrar que las mediciones del campo eléctrico realizadas en ambientes astrofísicos, cumplen con la forma de las inestabilidades u ondas simuladas.

## 7.2 TRABAJO FUTURO

- Se recomienda utilizar el programa añadiendo parámetros físicos reales de un ambiente espacial. Esto permitiría analizar los fenómenos que se pueden generar en ese plasma de tipo astrofísico.
- Adicionalmente, se podrían incluir más especies de iones. Esto debido a que en la mayor parte de ambientes astrofísicos se cuenta con múltiples especies. Por otra parte se podría añadir el grado de ionización del gas plasmógeno.
- Se podría incluir un campo magnético constante de fondo que simule por ejemplo el campo magnético del sol. Esto implicaría adicionar la fuerza de Lorentz.
- El código implementado es electrostático, de manera que se recomienda como trabajo futuro implementarlo en el límite electromagnético.

- Por otra parte, el código implementado puede realizarse en dos dimensiones. Esto haría que el sistema sea más realista.
- Existe una amplia gama de plasmas astrofísicos que cuentan con una función de distribución kappa, por lo que se recomienda añadirlo a la simulación.
- A pesar de que el método PIC disminuye la carga computacional por medio del uso de SP, estas simulaciones siguen siendo de alto consumo de memoria por lo que toman tiempo en ser realizadas, por lo que se propone paralelizar el código.

## REFERENCIAS

- [1] S. Eliezer and Y. Eliezer, *S. Eliezer and Y. Eliezer, "The Fourth State of Matter", Institute of Physics, Bristol, England (2001), 2nd updated edition*, 01 2001.
- [2] F. F. Chen, *Introduction to plasma physics*. New York: Plenum Press, 1974.
- [3] R. Goldston and P. H. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*. CRC Press, 2020. [Online]. Available: <https://books.google.it/books?id=7kM7yEFUGnAC>
- [4] P. L. Pritchett, *Particle-in-Cell Simulation of Plasmas— A Tutorial*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 1–24. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/3-540-36530-3\\_1](https://doi.org/10.1007/3-540-36530-3_1)
- [5] J. M. Dawson, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 55, 4 1983. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.55.403>
- [6] R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer simulation using particles*. Bristol: Hilger, 1988, 1988.
- [7] K. Chaudhary, A. M. Imam, S. Z. H. Rizvi, and J. Ali, "Plasma kinetic theory," in *Kinetic Theory*, G. Z. Kyzas and A. C. Mitropoulos, Eds. Rijeka: IntechOpen, 2018, ch. 7. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5772/intechopen.70843>
- [8] D. Rodríguez-Patiño, S. Ramírez Ramírez, J. Hoyos, J. Salcedo Gallo, and E. Restrepo Parra, "Implementation of the two-dimensional electrostatic particle-in-cell method implementation of the two-dimensional electrostatic particle-in-cell method," *American Journal of Physics*, vol. 88, p. 159, 01 2020.
- [9] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*. New York: Taylor and Francis, 2005.
- [10] D. Tskhakaya, *The Particle-in-Cell Method*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 161–189. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-74686-7\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74686-7_6)
- [11] Y. Omura, *One-dimensional Electromagnetic Particle Code*, 01 2005.
- [12] G. Lapenta, "Kinetic plasma simulation: Particle in cell method," 08 2015.
- [13] N. Krall, A. Trivelpiece, and J. Kempton, *Principles of Plasma Physics*, ser. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1973. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=b0BRAAAAMAAJ>
- [14] A. Pukhov, "Particle-in-cell codes for plasma-based particle acceleration," 2015.

- [15] K. Sharma, *Solid State Physics and Devices-the Harbinger of Third Wave of Civilization*, 2013. [Online]. Available: <https://cnx.org/contents/IJGecnVz@89.1:NrD{ }7noJ@1/SSPD-Chapter1-Part-7-Hydrogen-Atom-Analysis>
- [16] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, 3rd ed. Fundamentals of Plasma Physics, Third Edition by J.A. Bittencourt. Published by Springer-Verlag, New York, Inc.; 2004. ISBN 0-387-20975-1., 2004.
- [17] P. M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] J. D. Callen, “Plasma Descriptions I : Kinetic , Two-Fluid,” in *Fundamentals of Plasma Physics*, draft ed., Madison, Wisconsin, jun 2006, ch. 5. [Online]. Available: <http://homepages.cae.wisc.edu/{~}callen/book.html><http://homepages.cae.wisc.edu/{~}callen/chap5.pdf>
- [19] J. S. Blandón, J. P. Grisales, and H. Riascos, “Electrostatic plasma simulation by particle-in-cell method using ANACONDA package,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 850, p. 012007, jun 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/850/1/012007>
- [20] I. Hutchinson, “Electron holes in phase space: What they are and why they matter,” *Physics of Plasmas*, vol. 24, p. 055601, 05 2017.
- [21] ———, “How can slow plasma electron holes exist?” *Physical Review E*, vol. 104, 07 2021.
- [22] C. Norgren, D. Graham, M. Argall, K. Steinvall, M. Hesse, Y. Khotyaintsev, A. Vaivads, P. Tenfjord, D. Gershman, P.-A. Lindqvist, J. Burch, and F. Plaschke, “Millisecond observations of nonlinear wave–electron interaction in electron phase space holes,” *Physics of Plasmas*, vol. 29, p. 012309, 01 2022.
- [23] J. S. Pickett, L.-J. Chen, S. W. Kahler, O. Santolík, M. L. Goldstein, B. Lavraud, P. M. E. Décréau, R. Kessel, E. Lucek, G. S. Lakhina, B. T. Tsurutani, D. A. Gurnett, N. Cornilleau-Wehrin, A. Fazakerley, H. Rème, and A. Balogh, “On the generation of solitary waves observed by cluster in the near-earth magnetosheath,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 12, no. 2, pp. 181–193, 2005. [Online]. Available: <https://npg.copernicus.org/articles/12/181/2005/>
- [24] Q. Moreno, M. E. Dieckmann, X. Ribeyre, S. Jequier, V. T. Tikhonchuk, and E. D’humieres, “Impact of the electron to ion mass ratio on unstable systems in particle-in-cell simulations,” *Physics of Plasmas*, 2018.
- [25] M. V. Goldman, D. L. Newman, and R. E. Ergun, “Phase-space holes due to electron and ion beams accelerated by a current-driven potential ramp,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 10, no. 1/2, pp. 37–44, 2003. [Online]. Available: <https://npg.copernicus.org/articles/10/37/2003/>

- [26] Y. V. Khotyaintsev, A. Vaivads, M. André, M. Fujimoto, A. Retinò, and C. J. Owen, “Observations of slow electron holes at a magnetic reconnection site,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 165002, Oct 2010. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.165002>
- [27] R. S. Rajawat and S. Sengupta, “Particle-in-cell simulation of buneman instability beyond quasilinear saturation,” *Physics of Plasmas*, vol. 24, no. 12, p. 122103, dec 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063%2F1.5006463>
- [28] H. E. J. Koskinen, *Physics of space storms from the solar surface the Earth*. Berlin; London; Chichester, UK: Springer ; Published in association with Praxis Pub., 2011. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-00319-6>
- [29] J. Guo and B. Li, “The electron-ion streaming instabilities driven by drift velocities of the order of electron thermal velocity in a nonmagnetized plasma,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 347, no. 1, p. 99–107, May 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-013-1494-2>
- [30] D. Pířa, J. Souček, O. Santolík, M. Hanzelka, G. Nicolaou, M. Maksimovic, S. D. Bale, T. Chust, Y. Khotyaintsev, V. Krasnoselskikh, M. Kretzschmar, E. Lorfèvre, D. Plettemeier, M. Steller, Š. Štverák, P. Trávníček, A. Vaivads, A. Vecchio, T. Horbury, H. O’Brien, V. Evans, V. Angelini, C. J. Owen, and P. Louarn, “First-year ion-acoustic wave observations in the solar wind by the RPW/TDS instrument on board solar orbiter,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 656, p. A14, dec 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%2F202140928>
- [31] J. Brackbill, “On energy and momentum conservation in particle-in-cell plasma simulation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 317, 04 2016.
- [32] A. Hirose, “On amplitude saturation of buneman instability and anomalous resistivity,” *Plasma Physics*, vol. 20, no. 5, pp. 481–485, may 1978. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0032-1028/20/5/008>