

# Transformada fraccional de Fourier en el caso de un plano imagen inclinado

## Fourier fraccional transformar no caso de un plano imagem inclinado

### Fraccional Fourier transform in the case of an inclined image plane

C. O. Torres<sup>1</sup>, L. Mattos<sup>2</sup>, C. Jiménez<sup>3</sup>, J. Castillo<sup>4</sup> y  
Y. Torres<sup>5</sup>

*Recepción:13-oct-2009/Modificación:27-abr-2010/Aceptación:27-abr-2010*

*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

#### Resumen

La conocida fórmula de difracción de Fresnel relaciona la distribución de amplitud compleja de una onda en el plano objeto (campo ondulatorio de entrada) con la distribución de amplitud compleja de la onda en el plano imagen (campo ondulatorio de salida) cuando se trata de propagación en el espacio libre; esto significa que si los planos objeto e imagen son paralelos entre sí, el sistema imagen correspondiente se dice que es un sistema lineal invariante a desplazamiento (LSI). Esta propiedad ventajosa es esencial para el desarrollo de técnicas de imagen sensitivas a fase; sin embargo, si el plano imagen

---

<sup>1</sup> Doctor en Ciencias físicas, cesartorres@unicesar.edu.co, docente, grupo LOI, Universidad Popular del Cesar, Valledupar–Colombia.

<sup>2</sup> Magíster en Ingeniería electrónica, lorenzo.mattos@gmx.fr, docente, grupo LOI, Universidad Popular del Cesar, Valledupar–Colombia.

<sup>3</sup> Magíster en Matemática aplicada, carlosj114@gmail.com, docente, grupo GIMA, Universidad de La Guajira, Riohacha–Colombia.

<sup>4</sup> Magíster en Matemática aplicada, jacas68@yahoo.es, docente, grupo GIMA, Universidad de La Guajira, Riohacha–Colombia.

<sup>5</sup> Docteur en Optique et Traitement du Signal, ytorres@uis.edu.co, docente investigador, grupo GOTS, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga–Colombia.

está inclinado con respecto al haz incidente, la distancia efectiva de propagación cambiará sobre el plano imagen, consecuentemente el sistema imagen será no invariante a desplazamiento. En este artículo es propuesta una extensión del formalismo de la difracción de Fresnel al caso de un plano imagen inclinado utilizando la transformada de Fourier de orden fraccional.

**Palabras claves:** difracción de Fresnel, plano imagen inclinado, transformada fraccional de Fourier.

## Resumo

A bem conhecida equação de difração de Fresnel estabelece uma relação entre a distribuição de amplitude complexo de uma onda no plano do objeto (campo de onda de entrada) com a distribuição de amplitude complexa da onda no plano da imagem (campo de onda de saída) no caso da propagação em espaço livre. Isto significa que se os planos objeto e imagem são paralelos uns aos outros, o sistema imagem correspondente é dito ser um sistema linear invariante ao deslocamento (LSI). Esta propriedade vantajosa é essencial para o desenvolvimento de técnicas de imagem sensível á fase, No entanto, se o plano da imagem está inclinada respeito do feixe incidente, a distancia efetiva da propagação mudara sobre o plano imagen, consecuentemente o sistema imagem não é invariante ao deslocamento. Neste trabalho uma extensão do formalismo da difração de Fresnel para o caso de um plano imagem inclinado é proposto usando a transformada de Fourier de ordem fracionária.

**Palavras chaves:** difração de Fresnel, plano de imagem inclinada, Fourier fracionária transformar.

## Abstract

The well-known Fresnel integral relates a known complex wave defined in the object plane (the input wave field) to the observable complex wave (the output wave field) defined in the image plane after free-space propagation; this means that if the object and image plane are parallel to each other, corresponding imaging system is said to be linear-shift-invariant (LSI). This advantageous property was essential for the development of phase sensitive imaging techniques; however, if the image plane is inclined with respect to the incident beam, the effective propagation distance will vary over the image plane, consequently, the imaging system is not shiftinvariant. In this paper an extension of the theoretical formalism of Fresnel diffraction to the case of an inclined image plane is proposed using the fractional Fourier transform.

**Key words:** Fresnel diffraction, inclined image plane, fractional Fourier transform.

---

## 1 Introducción

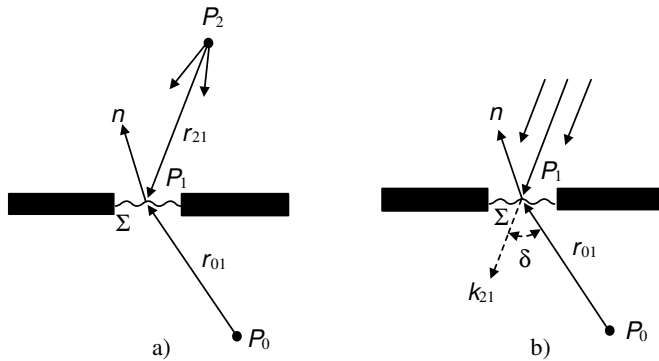
Las mediciones de superficies rugosas de componentes metálicos son consideradas de gran importancia en el campo de maquinado mecánico. Desde 1972, cuando Sprague [1] aplicó técnicas de speckle blanco, muchos investigadores han estudiado este aspecto para realizar mediciones de superficies rugosas, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Los patrones de speckle contienen información sobre las estructuras microscópicas de una superficie rugosa. Para estudiar la relación entre las propiedades estadísticas de los patrones de speckle, formados por superficies rugosas, se debe obtener la distribución de amplitud compleja del campo de speckle. Para lograr este propósito, las ecuaciones correspondientes a la difracción, que describen la propagación de las ondas difractadas de la superficie rugosa al plano de observación, deben ser construidas; en estudios preliminares, las ecuaciones de difracción de Fresnel y Fraunhofer fueron utilizadas para calcular el campo del patrón de speckle [6, 7], con la consideración de que el plano de observación es paralelo al plano del objeto en todos los montajes experimentales, a excepción de la referencia [8]. El propósito de este artículo es derivar las ecuaciones de difracción correspondientes para describir la difracción de una superficie inclinada rugosa reflectiva, bajo iluminación de una onda plana coherente en términos de la transformada fraccional de Fourier. Se considera la diferencia entre el modelo de difracción por superficie reflectiva (RSDM) y el modelo de difracción por transmisión de la apertura (TADM); encontrándose una ecuación general de difracción en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional. Aplicando las aproximaciones de campo cercano y de campo lejano a una ecuación general de difracción con consideración de rotación del sistema coordenado, se obtienen las ecuaciones de difracción, tanto para el campo cercano como para el lejano. El significado físico de estas ecuaciones y la obtención como casos particulares de las ecuaciones de Fresnel y Fraunhofer son también presentadas.

## 2 Integral básica de difracción para una superficie inclinada

### 2.1 Integral de difracción de Fresnel–Kirchhoff

La figura 1 representa el diagrama esquemático del modelo TADM. La figura 1(a) muestra que la luz de una fuente puntual  $P_2$  es difractada por transmisión

de la apertura,  $P_0$  es un punto de observación inicial en la región de difracción.



**Figura 1:** modelo de difracción por transmisión de la apertura: a) Fuente puntual incidente. b) Luz paralela incidente

Luego la integral de difracción de Fresnel–Kirchhoff se puede escribir como

$$U(P_0) = \int \int_{\Sigma} U'(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} ds, \quad (1)$$

donde  $\Sigma$  es la superficie de la integral y se escoge como una apertura ficticia curvada. Matemáticamente,  $U'(P_1) = \frac{1}{i\lambda} \frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right]$  puede ser vista como una fuente puntual secundaria virtual en el punto  $P_1$  sobre  $\Sigma$ ,  $r_{21}$  y  $r_{01}$  son los módulos de los radio vectores  $\vec{r}_{21}$  y  $\vec{r}_{01}$ , respectivamente;  $\vec{n}$  es la normal a  $\Sigma$  en el punto  $P_1$ . La expresión (1) es únicamente aplicable para el caso de incidencia de fuente puntual (ver figura 1(a)) e inaplicable cuando una onda plana incidente ilumina una apertura de transmisión (ver figura 1(b)). Pero como el término  $\frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}}$  en  $U'(P_1)$  es exactamente la distribución del campo luminoso de la superficie de la apertura  $\Sigma$ , y se representa por  $U(P_1)$ , entonces (1) toma la forma

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds. \quad (2)$$

La ecuación (2) puede ser usada en el caso de incidencia de luz paralela, es decir, la fuente de luz puntual  $P_2$  está ahora infinitamente alejada de la

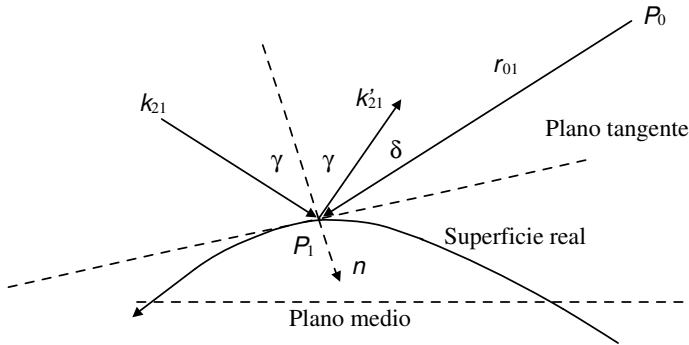
apertura de transmisión. Visto desde la figura 1(b), el vector de onda incidente  $\vec{k}_{21}$  tiene la misma dirección de  $\vec{r}_{21}$ , luego, (2) se puede reescribir como

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})}{2} \right] ds. \quad (3)$$

Dando la expresión de  $U(P_1)$ , el campo ondulatorio  $U(P_0)$  en el punto de observación  $P_0$  puede ser obtenido. El ángulo  $\delta$  en la figura 1(b) y el término  $\left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})}{2} \right]$  en (3) representa el ángulo de difracción y el factor de inclinación respectivamente para el modelo de difracción por transmisión de la apertura.

## 2.2 Integral básica de difracción de RSDM

La figura 2 es la ilustración esquemática del modelo RSDM. Una onda plana está incidiendo sobre una superficie que produce scattering débil con un vector de onda  $\vec{k}_{21}$  y es reflejada y difundida.



**Figura 2:** modelo de difracción (RSDM) por superficie reflectiva

El vector de onda reflejado en el punto  $P_1$  es  $\vec{k}'_{21}$ , comenzando en un punto arbitrario sobre la superficie actual. La atención debe ser puesta sobre el ángulo  $\delta$  en la figura 2, el cual es definido como el ángulo de difracción para el modelo de difracción por superficie reflectiva, pero es diferente

del definido anteriormente en el modelo de difracción por transmisión de la apertura; específicamente, el ángulo  $\delta$  en la figura 1(b) está definido entre el vector de onda incidente  $\vec{k}_{21}$  y la línea  $P_1P_0$ , mientras que  $\delta$ , en la figura 2, es el ángulo entre el vector de onda reflejado  $\vec{k}'_{21}$  y la línea  $P_1P_0$ . Como resultado de esto, el factor de inclinación utilizado para el modelo de difracción por transmisión de la apertura no puede ser directamente usado para el modelo de difracción por superficie reflectiva. Para obtener el factor de inclinación de una difracción por superficie reflectiva, el factor de inclinación  $\left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})}{2} \right]$  para el modelo de difracción por transmisión de la apertura debe ser reemplazado por  $\left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}'_{21})}{2} \right]$ . De la figura 2 se nota que  $\cos(\vec{n}, \vec{k}'_{21}) = -\cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})$ , donde  $\vec{n}$  es la normal a la superficie en el punto  $P_1$ . Combinando con (3), se obtiene la integral de difracción básica para una superficie reflectiva

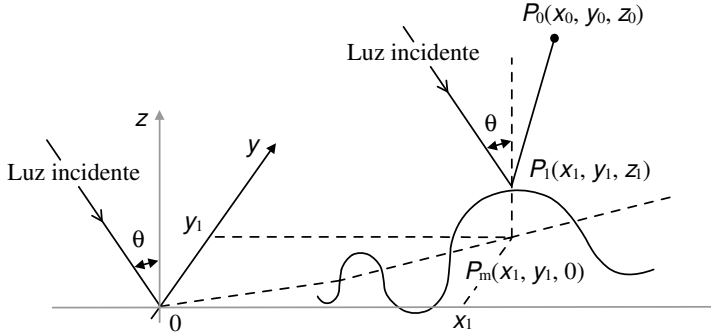
$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) + \cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})}{2} \right] ds, \quad (4)$$

donde  $(\vec{n}, r_{01})$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y  $\vec{r}_{01}$ ,  $(\vec{n}, \vec{k}_{21})$  es el ángulo entre  $\vec{n}$  y  $\vec{k}_{21}$ ,  $r_{01}$  es el módulo del radio vector  $\vec{r}_{01}$  y  $P_0$  es el punto de observación de la región de difracción.

### 3 Ecuación general de la difracción para un plano inclinado

#### 3.1 Distribución de amplitud compleja de una superficie clásica

La figura 3 ilustra el caso cuando una onda plana coherente está incidiendo sobre una superficie rugosa reflectiva, con un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $z$ . El plano medio del objeto es representado por el plano coordenado  $xOy$ , donde el origen  $O$  y  $P_m(x_1, y_1, 0)$  es la proyección de un punto genérico  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  situado sobre la superficie convencional,  $z_1$  es una medida de la altura de la superficie en  $P_1$ . El punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  es un punto de observación en el régimen de difracción, sin pérdida de generalidad, asumiendo que la luz incidente tiene amplitud constante  $A_0$  y paralela al plano  $xOz$ , se nota que es



**Figura 3:** onda plana incidiendo sobre una superficie reflectiva

un objeto de reflexión de pura fase, ignorando la absorción de la luz y otros factores, y haciendo que la fase en el origen  $O$  sea cero, se tiene la fase en  $P_1$

$$\varphi(P_1) = k(x_1 \sin \theta - z_1 \cos \theta),$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de onda y  $\lambda$  es la longitud de la onda incidente. Aquí se obtiene la distribución de amplitud compleja de la luz de onda incidente sobre la superficie

$$U(P_1) = A_0 \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta - z_1 \cos \theta) \right\}. \quad (5)$$

### 3.2 Cálculo del factor de inclinación

Suponiendo que la superficie es  $z = h(x, y)$ , donde  $h(x, y)$  es el origen de la altura de la superficie del plano medio, se pueden obtener las componentes del vector normal unitario descendente  $\vec{n}$  en el punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \left\{ \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \frac{h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \frac{h_z}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right\},$$

donde  $h_x = \frac{\partial h(x_1, y_1)}{\partial x}$ ,  $h_y = \frac{\partial h(x_1, y_1)}{\partial y}$  notando que

$$\vec{r}_{01} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \text{ y } \vec{k}_{21} = k \{\sin \theta, 0, -\cos \theta\},$$

se tiene:

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = \left\{ \frac{h_x(x_1 - x_0) + h_y(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \right\}, \quad (6)$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{k}_{21}) = \left\{ \frac{h_x \sin \theta + \cos \theta}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \right\}. \quad (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en  $\left[ \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}_{21})}{2} \right]$ , se obtiene el factor de inclinación del modelo de difracción por superficie reflectiva.

### 3.3 Ecuación general de la difracción para una superficie inclinada

Se tiene

$$r_{01} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad (8)$$

y el elemento de área en (3), en el punto  $P_1$ ,

$$ds = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1} dx_1 dy_1. \quad (9)$$

Introduciendo (5) y (6)-(9) en (4), se obtiene la ecuación general de la difracción para una superficie inclinada

$$U(P_0) = \frac{1}{i2\lambda} \int \int_D A_0 \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta - z_1 \cos \theta) \right\} \times \frac{\exp \left( ik \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \right)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \times \left[ \frac{h_x(x_1 - x_0) + h_y(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} + h_x \sin \theta + \cos \theta \right] dx_1 dy_1, \quad (10)$$

donde  $D$  define la región de integración en el plano medio.



## 4 Ecuación de difracción de campo cercano

### 4.1 Arreglo geométrico del experimento

La figura 4 muestra el arreglo geométrico del experimento para el análisis de la difracción de una superficie reflectiva de scattering débil.

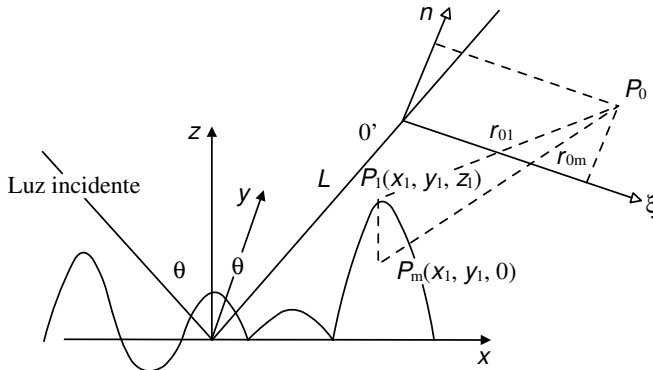


Figura 4: configuración geométrica

### 4.2 Derivación de la ecuación de difracción de campo cercano

A partir de (10) es difícil calcular la difracción de la luz que debe ser aproximadamente considerada para utilidades prácticas. Todas las aproximaciones son hechas sobre la base de la aproximación paraxial: (1) la distancia  $L$  es muy grande comparada con las dimensiones lineales máximas de la región de iluminación, y (2) el punto de observación  $P_0$  está cerrado sobre el eje  $z$ . Considerando la relación entre el plano de observación y el plano objeto, el factor  $r_{01}$  en el término exponencial  $\exp(ikr_{01})$  en la ecuación (10) puede ser expandido en serie como

$$r_{01} \approx r_{0m} + \frac{z_1^2 - 2z_1z_0}{2r_{0m}},$$

donde el término cuadrático retenido como  $k$  es un número grande, mientras los términos de mayor orden son despreciados,

$$r_{0m} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_0^2},$$

es la distancia entre los puntos  $P_0$  y  $P_m$ . De acuerdo a la aproximación paraxial (1) y (2),  $r_{01}$  puede ser además refinado por las siguientes tres razonables aproximaciones: (a) ignorando el término pequeño  $\frac{z_1^2}{2r_{0m}}$ ; (b)  $\frac{z_{0m}}{r_{0m}} \approx \frac{z_0}{r_0}$ ; (c)  $r_{0m} \approx r_0 + \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2r_0} - \frac{(x_1x_0 + y_1y_0)}{r_0}$  donde  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$  es la distancia de  $P_0$  del origen  $O$ . Luego  $r_{01}$  en el término exponencial se reduce a

$$r_{01} \approx r_0 + \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2r_0} - \frac{(x_1x_0 + y_1y_0)}{r_0} - \frac{z_0z_1}{r_0}. \quad (11)$$

Si se asume que el área de iluminación sobre la superficie del objeto es pequeña, la siguiente desigualdad puede ser utilizada

$$r_0 \gg \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{2r_0} - \frac{(x_1x_0 + y_1y_0)}{r_0} - \frac{z_0z_1}{r_0}, \quad (12)$$

$r_{01}$  en el denominador de (10) puede ser escrita como

$$r_{01} \approx r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad (13)$$

Asumiendo que la superficie de scattering débil satisface la aproximación de pendiente pequeña, luego las inecuaciones  $|n_x| \ll |n_z|$ ,  $|n_y| \ll |n_z|$  o equivalentemente  $|h_x| \ll 1$ ,  $|h_y| \ll 1$  son válidas. Los términos de la derivación parcial en (10) pueden ser simplificados como

$$\frac{h_x(x_1 - x_0) + h_y(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} + h_x \sin \theta + \cos \theta \approx \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \cos \theta. \quad (14)$$

Sustituyendo (11)-(14) en (10), se obtiene la expresión aproximada de la ecuación de difracción para una superficie inclinada reflectiva

$$\begin{aligned} U(P_0) = U(x_0, y_0, z_0) &= \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \cos \theta \right] \times \\ &\frac{\exp\left(ik\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\right)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \int \int_D \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 \sin \theta - z_1 \cos \theta)\right\} \times \\ &\exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda} \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right\} \exp\left\{-i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1x_0 + y_1y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right\} \times \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{z_0 z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\} dx_1 dy_1. \quad (15)$$

Aplicando la conversión de coordenadas a (15),  $x_0 = L \sin \theta + \xi \cos \theta$ ,  $y_0 = \eta$  y  $z_0 = L \cos \theta - \xi \sin \theta$  e introduciendo la función apertura  $P(x, y)$ , (15) puede ser transformada en

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \theta \right] \frac{\exp \left( ik \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \times \\ & \int \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, y_1) \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\} \times \\ \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos \theta + \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right] z_1 \right\} & \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} \times \\ & \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1 (L \sin \theta + \xi \cos \theta) + y_1 \eta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} dx_1 dy_1 \quad (16) \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de difracción de campo cercano para una superficie rugosa inclinada.

Si  $U_0(x_1, y_1) = P(x_1, y_1) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos \theta + \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right] z_1 \right\}$ , (16) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = & \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \theta \right] \frac{\exp \left( ik \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \times \\ \exp \left\{ -i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(L \sin \theta + \xi \cos \theta)^2 + \eta^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} & \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(L \sin \theta + \xi \cos \theta)^2 + \eta^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} \times \\ \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_1, y_1) \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\} & \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda} \frac{x_1^2 + y_1^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} \times \\ & \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1 (L \sin \theta + \xi \cos \theta) + y_1 \eta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} dx_1 dy_1. \quad (17) \end{aligned}$$

La ecuación (17) corresponde a una transformación fraccional de Fourier de orden  $\alpha$  dada por la expresión

$$U(\xi, \eta) = \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \theta \right] \frac{\exp \left( ik \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \times$$

$$\exp \left\{ -i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(L \sin \theta + \xi \cos \theta)^2 + \eta^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} \mathcal{F}^\alpha \left\{ U_0(x_1, y_1) \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\} \right\}, \quad (18)$$

es decir, la función de apertura o pupila se encuentra montada sobre una fase de la forma  $\exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\}$  correspondiendo a una onda esférica; y la distribución de amplitud compleja en el plano de observación corresponde a una transformada fraccional de Fourier de orden fraccional de la distribución de amplitud compleja del plano objeto. Donde

$$\mathcal{F}^\alpha [U_0(x_1, y_1)] = \frac{\exp \left[ i \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]}{2\pi \sin \alpha} \exp \left[ \frac{-i (\xi^2 + \eta^2)}{2 \tan \alpha} \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{-i (x_1^2 + y_1^2)}{2 \tan \alpha} \right] \exp \left[ \frac{i (x_1 \xi + y_1 \eta)}{\sin \alpha} \right] U_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

Considerando en (18) las aproximaciones necesarias que permitan describir la difracción de campo cercano, se puede obtener la forma estándar de la ecuación de difracción de Fresnel para una superficie inclinada y reflectiva, es decir,

$$U(\xi, \eta) = \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \theta \right] \times \frac{\exp \left( ik \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \exp \left\{ -i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(L \sin \theta + \xi \cos \theta)^2 + \eta^2}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right\} \times \mathcal{F}^\alpha \left\{ P(x_1, y_1) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos \theta + \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right] z_1 \right\} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\} \right\}, \quad (19)$$

de la misma forma, considerando difracción de campo lejano  $(x_1^2 + y_1^2)_{\text{Máx}} \ll \frac{\lambda L}{\pi}$ , se llega a la forma estándar de la ecuación difracción de Fraunhofer para una superficie inclinada y reflectiva, es decir,

$$U(\xi, \eta) = \frac{A_0}{i2\lambda} \left[ \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \theta \right] \frac{\exp \left( ik \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right)}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \times \mathcal{F} \left\{ P(x_1, y_1) \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \cos \theta + \frac{L \cos \theta - \xi \sin \theta}{\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2}} \right] z_1 \right\} \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \sin \theta) \right\} \right\} \quad (20)$$

### 4.3 Comparaciones con las ecuaciones de difracción de Fresnel y Fraunhofer

En el caso especial de incidencia normal, es decir,  $\theta = 0^0$ , (19) puede además ser redefinida utilizando las aproximaciones:

(a)  $\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \approx L + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2L}$ , por el factor  $\exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \right\}$  en (19).

(b)  $\sqrt{L^2 + \xi^2 + \eta^2} \approx L$ , para otros factores en (19).

Luego, (19) puede ser transformada en

$$U(\xi, \eta) = \frac{A_0 \exp(ikL)}{i\lambda L} \exp \left\{ -i \frac{\pi}{\lambda} \frac{\xi^2 + \eta^2}{L} \right\} \mathcal{F}^\alpha \left\{ P(x_1, y_1) \exp \left\{ -i \frac{4\pi}{\lambda} z_1 \right\} \right\}. \quad (21)$$

De (20) se obtiene

$$U(\xi, \eta) = \frac{A_0 \exp(ikL)}{i\lambda L} \mathcal{F} \left\{ P(x_1, y_1) \exp \left\{ -i \frac{4\pi}{\lambda} z_1 \right\} \right\}. \quad (22)$$

Las ecuaciones (21) y (22) son justamente las expresiones clásicas correspondientes a la difracción de Fresnel y de Fraunhofer para plano de difracción y plano de observación no inclinados.

## 5 Conclusiones

Partiendo de la integral de Difracción de Fresnel–Kirchhoff, se ha obtenido una integral básica de difracción para una superficie inclinada reflectiva donde la diferencia en el cálculo del factor de inclinación entre el modelo RSDM y el TADM ha sido tenido en cuenta. Como resultado fundamental se ha encontrado una ecuación general de difracción para una superficie inclinada y reflectiva, bajo iluminación de una onda plana coherente, considerando los efectos de rotación del sistema coordenado sobre la aproximación de campo cercano e introduciendo la consideración de inclinaciones pequeñas; la difracción de campo cercano y del campo lejano son obtenidas y presentadas como casos particulares de (8). Por tanto, la expresión derivada es más general que

las ecuaciones de difracción clásicas de Fresnel y Fraunhofer. Se debe resaltar que los campos de luz microscópicos emergentes están contenidos en estas ecuaciones de difracción, y hacen referencia a la distribución de altura de la superficie considerada.

## Referencias

- [1] Robert A. Sprague. *Surface Roughness Measurement Using White Light Speckle*. Applied Optics, ISSN 0003-6935, **11**(12), 2811-2816 (1972). Referenciado en 53
- [2] P. J. Chandley. *Surface roughness measurements from coherent light scattering*. Optical and Quantum Electronics, ISSN 0306-8919, **8**(4), 323-327 (1976). Referenciado en 53
- [3] H. M. Pedersen. *Object-roughness dependence of partially developed speckle patterns in coherent light*. Optics Communications, ISSN 0030-4018, **16**(1), 63-67 (1976). Referenciado en 53
- [4] H. Fuji, T. Asakura and Y. Shindo. *Measurement of surface roughness properties by means of laser speckle techniques*. Optics Communications, ISSN 0030-4018, **16**(1), 68-72 (1976). Referenciado en 53
- [5] Hitoshi Fujii and Toshimitsu Asakura. *Roughness measurements of metal surfaces using laser speckle*. Journal of the Optical Society of America B, ISSN 0740-3224, **67**(9), 1171-1176 (1977). Referenciado en 53
- [6] Ulf Persson. *Real time measurement of surface roughness on ground surfaces using speckle-contrast technique*. Optics and Lasers in Engineering, ISSN 0143-8166, **17**(2), 61-67 (1992). Referenciado en 53
- [7] Lisa C. Leonard and Vincent Toal. *Roughness measurement of metallic surfaces based on the laser speckle contrast method*. Optics and Lasers in Engineering, ISSN 0143-8166, **30**(5), 433-440 (1998). Referenciado en 53
- [8] S. L. Toh, H. M. Shang and C. J. Tay. *Surface-roughness study using laser speckle method*. Optics and Lasers in Engineering, ISSN 0143-8166, **29**(2-3), 217-225 (1998). Referenciado en 53