

**Aproximaciones de De Vylder a la
Distribución del Momento de la Ruina en el
Modelo de Riesgo Clásico Bajo una
Estrategia de Barrera de Dividendos
Constante**

Johan Verney Méndez Gamba
Juan Jesús Cruz Mora

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2015

II

**Aproximaciones de De Vylder a la
Distribución del Momento de la Ruina en el
Modelo de Riesgo Clásico Bajo una
Estrategia de Barrera de Dividendos
Constante**

Johan Verney Méndez Gamba
Juan Jesús Cruz Mora

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director
Francisco Zuluaga

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2015

Agradecimientos al profesor Francisco Ivan Zuluaga

Índice general

Introducción	1
1. El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante	5
1.1. Introducción	5
1.2. El Problema Clásico	6
1.3. El Déficit en la Ruina	17
1.4. La modificación de Dickson-Waters	20
1.5. La Distribución del Monto de Reclamación Exponencial	21
1.6. Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales	24
2. La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante	33
2.1. Introducción	33
2.2. Resultados Preliminares	34
2.2.1. Funciones Especiales	39
2.3. Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante	56
2.4. Descomposición de la densidad del tiempo de ruina	70

3. Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina	77
3.1. Introducción	77
3.2. El Método de De Vylder	77
3.3. Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante . . .	78
4. Conclusiones	89
Bibliografía	91

Introducción

El presente escrito se enmarca dentro del ámbito de la teoría del riesgo en la cual se estudian diferentes variables relacionadas con compañías de seguros, variables en la que algunas de las cuales, en el caso más trabajado hasta ahora, dependen del modelado del costo total de los siniestros como un proceso de Poisson Compuesto donde la hipótesis básica es que el número de siniestros sigue un proceso estocástico de Poisson; una de dichas variables establece una barrera, constante o lineal, sobre la cuál, si la reserva o capital de la compañía supera esta barrera, se pagarán dividendos a los accionistas a una tasa c , el objetivo, en éste caso, consiste en determinar, dependiendo del capital inicial de la compañía, el valor b de dicha barrera que permita optimizar el valor esperado de los dividendos entregados a los accionistas hasta que la ruina ocurra, dado que si se aplica una estrategia de barrera la ruina se dará con seguridad.

En Gerber, Shiu y Smith [8] se aborda este problema, considerando la distribución del monto de reclamación individual del tipo exponencial o mezcla de exponenciales, además los autores en dicho artículo consideran que en el momento de la ruina se genera un déficit que no es cubierto por la compañía y por tanto los accionistas deben estar en la capacidad de cubrir tal déficit, lo que supone plantear una barrera modificada b^o que soporte la nueva condición sobre los accionistas y que optimice la entrega de dividendos, por tanto se hace una comparación entre b y b^o . En el primer capítulo se hace el análisis de éste artículo ([8]).

2 Introducción

Dentro de las variables que se estudian en la teoría de riesgo, más específicamente dentro de la teoría de la ruina, está la posibilidad de que la compañía se arruine en un tiempo dado de acuerdo a sus reservas iniciales, a lo que denominamos tiempo de ruina y que se define como:

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$$

con $T = \infty$ si $U(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, donde

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0,$$

es el proceso de reservas de la compañía con la reserva inicial $u \geq 0$, c representa la tasa a la que se reciben las primas, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ son las variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) que representan el monto de la reclamación individual, y $\{N(t); t \geq 0\}$ es el proceso de conteo que indica el número de reclamaciones hasta el tiempo t , tal proceso de conteo se considera Poisson con parámetro $\lambda > 0$.

En los últimos años ha habido un considerable interés en encontrar la densidad del tiempo de ruina en el modelo de riesgo clásico a través de la inversa de su transformada de Laplace, ésta técnica es empleada en Li y Lu [10] donde se considera una barrera de dividendos constante en el modelo clásico y se aplica el enfoque desarrollado por Dickson y Willmot [7] para encontrar una expresión explícita para la función densidad del tiempo de ruina en sus dos componentes: [I] la función de densidad del tiempo de ruina sin pago de dividendos, es decir, sin que la reserva alcance la barrera b ; [II] la función de densidad del tiempo de ruina con pago de dividendos, en las dos componentes se considera una distribución del tipo exponencial para el monto de reclamación individual, siendo muy poco probable una expresión explícita para otro tipo de distribución. En el segundo capítulo se estudia y hace seguimiento a tales expresiones explícitas.

Finalmente dado que uno de los problemas más estudiados en la teoría del riesgo es la probabilidad de ruina de una compañía, problema que fue estudiado en 1930 por *Filip Lundberg* quien introdujo un modelo denominado *Modelo Clásico de Crámer-Lundberg* [9], gracias a las investigaciones realizadas posteriormente por *Carl Crámer* en 1930, quien retoma las ideas de *Lundberg* y las pone en contexto de los procesos estocásticos. Existen varios métodos para estimar la probabilidad de ruina, sin embargo el cálculo

de esta probabilidad no es sencilla ya que involucra una ecuación integro-diferencial, en algunos casos especiales, como la distribución exponencial, es posible calcular y modelar la probabilidad de ruina bajo condiciones especiales; dicho esto no siempre se hace posible encontrar la probabilidad de ruina para diversos tipos de distribuciones del monto de reclamación individual motivo por el cuál se han generado métodos que buscan aproximar tal probabilidad considerando diferentes distribuciones del monto de reclamación.

De Vylder [6] propuso un método simple de aproximación a la probabilidad de la ruina por la aproximación del proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ por un proceso $\{\tilde{U}(t)\}_{t \geq 0}$ con un proceso de Poisson $\tilde{\lambda}$ y una distribución de reclamación individual $\tilde{P}(x) = 1 - \exp\{-\tilde{\alpha}x\}$, $x \geq 0$, estos nuevos parámetros son escogidos igualando los momentos de $U(t)$ y $\tilde{U}(t)$ y reemplazados en la expresión de la probabilidad de ruina para monto de reclamación con distribución exponencial. Más adelante Dickson y Wong [4] extendieron la idea de De Vylder para aproximar los momentos y la distribución del tiempo de ruina y los comparan con algunos algoritmos establecidos para hallar el valor de los momentos y la densidad exacta.

En el tercer capítulo se hace uso de las expresiones para la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante del segundo capítulo con las cuales se muestran tablas y gráficas aproximadas por el método de De Vylder para diferentes distribuciones del monto de reclamación individual.

4 Introducción

CAPÍTULO 1

El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

1.1. Introducción

En la teoría del riesgo el modelo clásico compuesto de Poisson con un valor importante en las primas recibidas hace que el proceso de excedente $U(t)$ a lo largo del tiempo tienda a infinito. De Finetti [5] destaca que ésta no encaja en una situación real. De acuerdo a De Finetti, el propósito de una compañía es maximizar el valor esperado de los dividendos entregados a los accionistas hasta una posible ruina.

La estrategia de barrera cobra sentido y juega un papel importante, ya que, si se aplica una estrategia de barrera con parámetro b constante no se entregarán dividendos mientras el excedente no alcance esta barrera b , además con una estrategia de barrera constante b la ruina ocurrirá con seguridad. En ese momento ocurrirá un déficit y algunas de las reclamaciones no podrán ser solucionadas.

Dickson y Waters [17] sostienen que una compañía de seguros debería responsabilizarse de ese déficit y por lo tanto los accionistas deberían estar en la capacidad de cubrir ese déficit al momento de alcanzar la ruina.

Esto conlleva a un nuevo problema matemático, maximizar el valor

6 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

esperado de la diferencia entre los dividendos entregados hasta el momento de la ruina y el déficit de ésta ruina, con lo cual surge una barrera óptima modificada la cual se nota por b^0 . Se analizará con detalle la diferencia entre b^* y b^0

1.2. El Problema Clásico

Vamos a suponer que el excedente de una compañía de seguros en el momento t está gobernada por la siguiente dinámica

$$U(t) = U(0) + ct - S(t) \quad (1.2.1)$$

- $U(t)$: Excedente al momento t
- $U(0) = u$: Excedente inicial
- ct : La compañía recibe primas continuamente a la tasa c en el tiempo t
- $S(t)$: Proceso de pérdida o reclamación agregada

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo, en particular se asume que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson con parámetro λ , y $N(t)$ es el número de reclamos en el intervalo $[0, t]$ con las siguientes propiedades:

1. $N(0)=0$
2. Tiene incrementos independientes y estacionarios, es decir, si $0 < s < t < u < v$ entonces $N(t) - N(s)$ es independiente de $N(v) - N(u)$
3. La distribución de $N(t) - N(s)$ depende únicamente de $t - s$
4. $P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ con λt el número de reclamos esperadas en $[0, t]$ y λ es el valor esperado de reclamaciones en el intervalo de tiempo unitario

Definición 1.2.1. Se dice que una función f es de orden $o(h)$ si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Considérese el intervalo infinitesimal de 0 a t , en este caso dt^n ($n > 1$) se dice que es $o(dt)$

Ejemplo 1.2.1. dt^2 es $o(h)$ puesto que

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dt^2}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} dt = 0$$

Considérese ahora la probabilidad de una reclamación en el intervalo infinitesimal dt , así $P(N(dt) = 1) = e^{-\lambda dt}(\lambda dt)$, aproximando $e^{-\lambda dt}$ por una serie de Taylor de orden 1

$$\begin{aligned} P(N(dt) = 1) &= (1 - \lambda dt)(\lambda dt) \\ &= \lambda dt - \lambda^2 dt^2 \\ &= \lambda dt - o(dt) \\ P(N(dt) \geq 2) &= 1 - [P(N(dt) = 0) + P(N(dt) = 1)] \\ &= 1 - [e^{-\lambda dt} + e^{-\lambda dt} \lambda dt] \\ &= 1 - [(1 - \lambda dt) + (1 - \lambda dt) \lambda dt] \\ &= \lambda^2 dt^2 = o(dt) \end{aligned}$$

la probabilidad de máximo una reclamación es $t \sim dt \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P(N(dt) = 0) &= 1 - [P(N(dt) = 1) + P(N(dt) \geq 2)] \\ &= 1 - \lambda dt + o(dt) \end{aligned}$$

Observación 1.2.1. Si el número de reclamaciones en el intervalo $[0, t]$ es Poisson de parámetro λ , el tiempo entre reclamaciones es exponencial con media $1/\lambda$, así:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

8 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde $\{X_i\}_{i \geq 1}$ es una familia de v.a.i.i.d., representando el monto de la i -ésima reclamación y $S(t)$ es la pérdida agregada en un intervalo.

- X_i son modelados como una variable aleatoria continua y son independientes de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$
- $S(t)$ en un proceso de Poisson compuesto con parámetro λ
- X_i se distribuye exponencial o mezcla de exponenciales, o bien Erlang o mezcla de Erlangs
- $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$

Observación 1.2.2. Sea $S = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$

$$\begin{aligned} E(S) &= E(E(S/N)) \\ &= E(E(X_1 + \dots + X_n | N)) \\ &= E[N\mu_x] = \mu_x E[N] \\ &= \mu_x \mu_N \quad p_1 = \mu_x \\ p_1 &= \int_0^{\infty} xp(x)dx \quad p \text{ es la } fdp \end{aligned}$$

de acuerdo a lo anterior la pérdida esperada en un intervalo de tiempo unitario está dada por

$$\begin{aligned} E(S(1)) &= p_1 \mu_{N(1)} \\ &= \lambda p_1 \\ c &= (1 + \theta) \lambda p_1 \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

donde θ es el factor de sobre prima.

Se supone ahora que la compañía otorga dividendos a sus accionistas de acuerdo a una estrategia de dividendos. Sea $D(t)$ los dividendos entregados al

momento t , de ésta manera se introduce el concepto conocido como excedente modificado el cual denotamos por $X(t)$

$$X(t) = U(t) - D(t) \quad t \geq 0$$

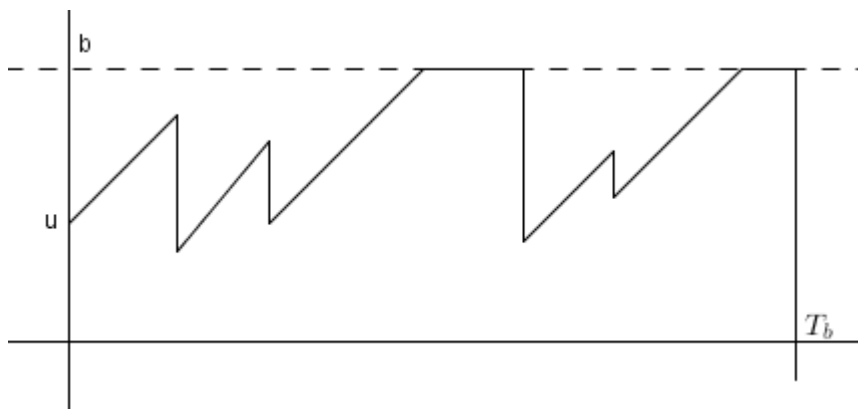
con $D(0) = 0$, así aparece el concepto del momento de la ruina alcanzado en un tiempo T el cual está definido así:

$$T = \inf\{t \geq 0 : X(t) < 0\}$$

Supongamos que la compañía de seguros otorga dividendos de acuerdo a una estrategia de barrera constante con parámetro b . El objetivo principal de la compañía consiste en hallar b tal que maximiza el valor presente esperado de todos los dividendos entregados hasta el momento de la ruina.

La estrategia de barrera constante con parámetro b , consiste en que cuando $X(t) = b$, la compañía entregará a sus accionistas dividendos continuamente a la tasa c por unidad de tiempo. Sea x el excedente modificado inicial, es decir, $X(0) = x$

$$\begin{aligned} X(t) &= U(t) - D(t) \\ X(0) &= U(0) - D(0) \\ &= U(0) = x \end{aligned}$$



10 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

cuando $t = T$ la compañía está fuera del negocio.

Sea $V(x; b)$ $0 \leq x \leq b$ el valor presente esperado de todos los dividendos entregados hasta el momento de la ruina, se define

$$V(x; b) = E \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \right]$$

δ : Fuerza del interés o tasa de interés continuo compuesto
 $e^{-\delta t}$: Factor de descuento

Proposición 1.2.2. $V(x; b)$ es una función de x y satisface la siguiente ecuación integro-diferencial

$$cV'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) + \lambda \int_0^x V(y; b)p(x-y)dy = 0 \quad 0 < x < b$$

Demostración. En el intervalo infinitesimal dt se tiene que

$$V(x; b) = (1 - \lambda dt)e^{-\delta dt}V(x + cdt) + \lambda dt e^{-\delta t} \int_0^{x+cdt} V(x + cdt - y)p(y)dy + o(dt)$$

y teniendo presente que $P(A) = \int P(A|X = x)P(x)dx$

$$\begin{aligned} V(x; b) &= (1 - \lambda dt)(1 - \delta dt)V(x + cdt; b) \\ &\quad + \lambda dt(1 - \delta dt) \int_0^{x+cdt} V(x + cdt - y; b)p(y)dy + o(dt) \\ &= (1 - \delta dt - \lambda dt + \lambda \delta dt^2)V(x + cdt; b) \\ &\quad + (\lambda dt + \lambda \delta dt^2) \int_0^{x+cdt} V(x + cdt - y; b)p(y)dy + o(dt) \\ &= V(x + cdt; b) - (\lambda + \delta)V(x + cdt; b)dt \\ &\quad + \lambda dt \int_0^{x+cdt} V(x + cdt - y; b)p(y)dy + o(dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x + cdt; b) - V(x; b) &= (\lambda + \delta)V(x + cdt; b)dt \\ &\quad - \lambda dt \int_0^{x+cdt} V(x + cdt - y; b)p(y)dy + o(dt) \end{aligned}$$

dividiendo ambos lados de ésta ecuación por cdt y tomando el límite cuando $dt \rightarrow 0$ se tiene

$$V'(x; b) = \frac{1}{c}(\lambda + \delta)V(x; b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x V(x - y; b)p(y)dy$$

$$cV'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) + \lambda \int_0^x V(x - y)p(y)dy = 0$$

realizando el cambio de variable $z = x - y$ $dz = -dy$ se transforma en

$$cV'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) - \lambda \int_0^x V(z; b)p(x - z)dz = 0$$

□

Proposición 1.2.3. *La ecuación*

$$cV'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) - \lambda \int_0^x V(z; b)p(x - z)dz = 0$$

satisface la condición de frontera

$$V(b; b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b V(b - y; b)p(y)dy$$

Demostración. Considerar primero el valor presente esperado de todos los dividendos entregados hasta la primera reclamación

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^s ce^{-\delta t} dt \right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^s ce^{-st} dt \right] \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{c}{\delta + \lambda} \end{aligned}$$

consideramos el valor presente esperado de los dividendos otorgados después de la primera reclamación

$$\begin{aligned} E \left[e^{-\delta s} \int_0^b V(b - y)p(y)dy \right] &= \int_0^\infty e^{-\delta s} \left[\int_0^b V(b - y; b)p(y)dy \right] \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda + \delta)s} ds \int_0^b V(b - y; b)p(y)dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b V(b - y; b)p(y)dy \end{aligned}$$

12 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Sea $h(x)$ una solución de la siguiente ecuación integro-diferencial

$$h'(x) = \frac{\lambda + \delta}{c}h(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x h(x-y)p(y)dy \quad x > 0$$

puesto que

$$V'(x; b) = \frac{\lambda + \delta}{c}V(x; b) - \frac{\lambda}{c} \int_b^x V(x-y; b)p(y)dy$$

entonces $V(x; b)$ debe tener una solución de la forma

$$\begin{aligned} V(x; b) &= c(b)h(x) \\ V'(x; b) &= c(b)h'(x) \\ &= c(b) \left[\frac{\lambda + \delta}{c} \frac{V(x; b)}{c(b)} - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \frac{V(x-y; b)}{c(b)} p(y)dy \right] \\ &= \frac{\lambda + \delta}{c} V(x; b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x V(x-y; b)p(y)dy \end{aligned}$$

ahora se debe hallar $c(b)$

$$\begin{aligned} V(b; b) &= c(b)h(b) \\ c(b)h(b) &= \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b c(b)h(b-y)p(y)dy \end{aligned}$$

se despeja $c(b)$ y reemplaza en

$$V'(x; b) = c(b)h'(x)$$

$$\begin{aligned} c(b)h(b) - c(b) \left[\frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b h(b-y)p(y)dy \right] &= \frac{c}{\lambda + \delta} \\ c(b) \left[h(b) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b h(b-y)p(y)dy \right] &= \frac{c}{\lambda + \delta} \\ c(b) &= \frac{1}{h'(b)} \end{aligned}$$

luego

$$V(x; b) = \frac{h(x)}{h'(b)} \quad 0 \leq x \leq b$$

$$V'(x; b) = \frac{h'(x)}{h'(b)}$$

$$V'(b, b) = 1$$

□

1. $h(x) > 0$
2. $b = b^* \quad h''(b^*) = 0$

$V'(b, b) = 1$ donde $h(x)$ es solución de

$$ch'(x) = (\lambda + \delta)h(x) - \lambda \int_0^x h(x-y)p(y)dy \quad x > 0$$

1. $h(x) > 0$
2. Sea $b = b^*$ luego $h''(b^*) = 0$ con b^* el óptimo

ahora se asume que $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ luego $P(y) = 1 - e^{-\beta y}$

$$ch'(x) = (\lambda + \delta)h(x) - \lambda \int_0^x h(x-y)\beta e^{-\beta y} dy$$

$$ch''(x) = (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(x-x)e^{-\beta x} - \lambda\beta \int_0^x h'(x-y)\beta e^{-\beta y} dy$$

$$= (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(0)e^{-\beta x} - \lambda\beta \int_0^x h'(x-y)\beta e^{-\beta y} dy$$

integrando ésta última por partes

$$z = e^{-\beta y} \quad dv = h'(x-y)dy$$

$$dz = -\beta e^{-\beta y} dy \quad v = -h(x-y)$$

14 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}\int_0^x h'(x-y)\beta e^{-\beta y} dy &= [-e^{-\beta y}h(x-y)]_0^x - \int_0^x h(x-y)\beta e^{-\beta y} dy \\ &= -e^{-\beta x}h(0) + h(x) - \beta \int_0^x h(x-y)e^{-\beta y} dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ch''(x) &= (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(0)e^{-\beta x} + \lambda\beta e^{-\beta x}h(0) - \lambda\beta h(x) + \lambda\beta^2 \int_0^x h(x-y)e^{-\beta y} dy \\ &= (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(x) + \beta \left[\lambda\beta \int_0^x h(x-y)e^{-\beta y} dy \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ch'(x) &= (\lambda + \delta)h(x) - \lambda\beta \int_0^x h(x-y)e^{-\beta y} dy \\ ch''(x) &= (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(x) + \beta [(\lambda + \delta)h(x) - ch'(x)] \\ &= (\lambda + \delta)h'(x) - \lambda\beta h(x) + \lambda\beta h(x) + \beta\delta h(x) - \beta ch'(x) \\ &= (\lambda + \delta - \beta c)h'(x) + \beta\delta h(x) \\ ch''(x) - (\lambda + \delta - \beta c)h'(x) - \beta\delta h(x) &= 0\end{aligned}$$

ésta es una EDOL coeficientes constantes cuya solución es

$$h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces del polinomio característico

$$cr^2 - (\lambda + \delta - \beta c)r - \beta\delta = 0$$

$$r_1 = \frac{(\lambda + \delta - \beta c) + \sqrt{(\lambda + \delta - \beta c)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} > 0$$

$$r_2 = \frac{(\lambda + \delta - \beta c) - \sqrt{(\lambda + \delta - \beta c)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} < 0$$

para hallar c_1 y c_2 se usa la ecuación integro-diferencial original

$$h'(x) = \frac{\lambda + \delta}{c}h(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x h(x-y)p(y)dy \quad x > 0$$

$$\begin{aligned}
 c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x} &= \frac{\lambda + \delta}{c} [c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}] - \frac{\lambda}{c} \int_0^x [c_1 e^{r_1(x-y)} + c_2 e^{r_2(x-y)}] \beta e^{-\beta y} dy \\
 &= \frac{\lambda + \delta}{c} [c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}] - \frac{\lambda \beta}{c} \int_0^x c_1 e^{r_1(x-y)} e^{-\beta y} dy \\
 &\quad - \frac{\lambda \beta}{c} \int_0^x c_2 e^{r_2(x-y)} e^{-\beta y} dy \\
 &= \frac{\lambda + \delta}{c} [c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}] - \frac{\lambda \beta c_1}{c} \left[\frac{e^{r_1 x} - e^{-\beta x}}{r_1 + \beta} \right] - \frac{\lambda \beta c_2}{c} \left[\frac{e^{r_2 x} - e^{-\beta x}}{r_2 + \beta} \right]
 \end{aligned}$$

ahora agrupando

$$\begin{aligned}
 r_1 c_1 e^{r_1 x} &- \frac{\lambda + \delta}{c} c_1 e^{r_1 x} + \frac{\lambda r_1 \beta c_1}{c(r_1 + \beta)} e^{r_1 x} - \frac{\lambda r_1 \beta c_1}{c(r_1 + \beta)} e^{-\beta x} \\
 &= -r_2 c_2 e^{r_2 x} + \frac{\lambda + \delta}{c} c_2 e^{r_2 x} - \frac{\lambda \beta c_2}{c(r_2 + \beta)} e^{r_2 x} - \frac{\lambda \beta c_2}{c(r_2 + \beta)} e^{-\beta x}
 \end{aligned}$$

$$c_1 e^{r_1 x} \left[r_1 - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda \beta}{c(r_1 + \beta)} \right] - \frac{\lambda \beta c_1 e^{-\beta x}}{c(r_1 + \beta)} = -c_2 e^{r_2 x} \left[r_2 - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda \beta}{c(r_2 + \beta)} \right] + \frac{\lambda \beta c_2 e^{-\beta x}}{c(r_2 + \beta)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{c_1 e^{r_1 x}}{r_1 + \beta} \left[r_1^2 - \left(\frac{\lambda + \delta}{c} - \beta \right) r_1 - \frac{\beta \delta}{c} \right] - \frac{\lambda \beta c_1 e^{-\beta x}}{c(r_1 + \beta)} \\
 = \frac{-c_2 e^{r_2 x}}{r_2 + \beta} \left[r_2^2 - \left(\frac{\lambda + \delta}{c} - \beta \right) r_2 - \frac{\beta \delta}{c} \right] + \frac{\lambda \beta c_2 e^{-\beta x}}{c(r_2 + \beta)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{-\lambda \beta c_1 e^{-\beta x}}{c(r_1 + \beta)} = \frac{\lambda \beta c_2 e^{-\beta x}}{c(r_2 + \beta)}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{r_1 + \beta}{r_2 + \beta}$$

como $r_1 + \beta > 0$ y $r_2 + \beta > 0$ y

16 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}
 c_1 &\cdot c_2 < 0 \\
 c_1 + c_2 &> 0 & c_1 > 0, c_2 < 0 \\
 c_1 &= r_1 + \beta & c_2 = -(r_2 + \beta) \\
 V(x; b) &= \frac{h(x)}{h'(b)} & 0 \leq x \leq b \\
 h(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}
 \end{aligned}$$

Sea $b = b^*$ tal que $h''(b^*) = 0$, (minimizar h para maximizar $V(x; b)$)

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= r_1 c_1 e^{r_1 x} + r_2 c_2 e^{r_2 x} \\
 h''(x) &= r_1^2 c_1 e^{r_1 x} + r_2^2 c_2 e^{r_2 x}
 \end{aligned}$$

$$r_1^2 c_1 e^{r_1 b^*} + r_2^2 c_2 e^{r_2 b^*} = 0$$

$$e^{(r_1 - r_2)b^*} = -c_2 r_2^2 / c_1 r_1^2$$

$$(r_1 - r_2)b^* = \ln \left(\frac{-c_2 r_2^2}{c_1 r_1^2} \right)$$

$$b^* = \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \left(\frac{-c_2 r_2^2}{c_1 r_1^2} \right)$$

como $h''(b^*) = 0$ entonces $V''(b^*, b^*) = 0$

$$V''(x; b) = h''(x)/h'(b)$$

ya que $c = (1 + \theta)\lambda p_1$ la ecuación integro-diferencial

$$cV'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) + \lambda \int_0^x V(y; b)p(x - y)dy = 0$$

se puede reescribir como

$$(1 + \theta)\lambda p_1 V'(x; b) - (\lambda + \delta)V(x; b) + \lambda \int_0^x V(y; b)p(x - y)dy = 0$$

$$(1 + \theta)p_1 V'(x; b) - (1 + \frac{\delta}{\lambda})V(x; b) + \int_0^x V(y; b)p(x - y)dy = 0$$

sea $\alpha = \delta/\lambda$ luego

$$(1 + \theta)p_1 V'(x; b) - (1 + \alpha)V(x; b) + \int_0^x V(y; b)p(x - y)dy = 0$$

1.3. El Déficit en la Ruina

Estamos interesados en el valor presente esperado del déficit en el momento de la ruina, el cual denotaremos como $R(x; b)$. Por definición $R(x; b) = E(e^{-\delta T} | X(T))$ es una función de x , $R(x; b)$ satisface la siguiente ecuación integro-diferencial

$$cR'(x; b) - (\lambda + \delta)R(x; b) + \lambda \int_0^x R(y; b)p(x - y)dy + \lambda \int_x^\infty (1 - P(y))dy = 0 \quad 0 < x < b$$

*** Demostración: Considerar el intervalo infinitesimal dt y sea $0 < x < b$

$$R(x; b) = (1 - \lambda dt)e^{-\delta dt} R(x + cdt; b) + \lambda dt e^{-\delta dt} \int_x^{x+cdt} R(x + cdt - y; b)p(y)dy \\ + \lambda dt e^{-\delta dt} \int_{x+cdt}^\infty (y - x - cdt)p(y)dy + o(dt)$$

y : monto reclamado

$x + cdt$: excedente acumulado

$$R(x; b) = (1 - \lambda dt)(1 - \delta dt)R(x + cdt; b) + \lambda dt(1 - \delta dt) \int_0^{x+cdt} R(x + cdt - y; b)p(y)dy \\ + \lambda dt(1 - \delta dt) \int_{x+cdt}^\infty (y - x - cdt)p(y)dy + o(dt)$$

18 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}
 R(x; b) &= (1 - \delta dt - \lambda dt + \lambda \delta dt^2) \cdot R(x + cdt; b) \\
 &+ (\lambda dt - \lambda \delta dt^2) \int_0^{x+cdt} R(x + cdt; b) p(y) dy \\
 &+ (\lambda dt - \lambda \delta dt^2) \int_{x+cdt}^{\infty} (y - x - cdt) p(y) dy + o(dt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(x; b) &= R(x + cdt; b) - (\lambda + \delta) R(x + cdt; b) dt + \lambda dt \int_0^{x+cdt} R(x + cdt - y; b) p(y) dy \\
 &+ \lambda dt \int_{x+cdt}^{\infty} (y - x - cdt) p(y) dy + o(dt)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{R(x + cdt; b) - R(x; b)}{cdt} &= \frac{\lambda + \delta}{c} R(x + cdt; b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{x+cdt} R(x + cdt - y; b) p(y) dy \\
 &- \frac{\lambda}{c} \int_{x+cdt}^{\infty} (y - x - cdt) p(y) dy + o(dt)
 \end{aligned}$$

tomando límite cuando dt tiende a cero se tiene:

$$R'(x; b) = \frac{\lambda + \delta}{c} R(x; b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x R(x - y; b) p(y) dy - \frac{\lambda}{c} \int_x^{\infty} (y - x) p(y) dy \quad (1.3.1)$$

Sea $z = x - y \quad dz = -dy$

$$\begin{aligned}
 \text{y además} \quad & - \int_x^0 R(z, b) p(x - z) dz \\
 &= \int_0^x R(z, b) p(x - z) dz \\
 &= \int_x^{\infty} (y - b) p(y) dy
 \end{aligned}$$

integrando por partes

$$u = y - x \quad du = dy$$

$$dw = p(y)dy \quad w = P(y)$$

$$\int_x^\infty (y-x)p(y)dy = (y-x)P(y)|_x^\infty - \int_x^\infty P(y)dy$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} (y-x)P(y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} yP(y) - x \lim_{y \rightarrow \infty} P(y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} yP(y) - x = \int_x^\infty dy \\ \int_x^\infty (y-x)p(y)dy &= \int_x^\infty dy - \int_x^\infty P(y)dy = \int_x^\infty (1-P(y))dy \end{aligned}$$

la ecuación (1.3.1) también satisface la condición de frontera $R'(b; b) = 0$
 *** Prueba: Considere el valor presente esperado del déficit en el momento de la ruina después de la primera reclamación

$$\begin{aligned} &E \left[e^{-\delta t} \left[\int_0^b R(b-y)p(y)dy + \int_b^\infty (y-b)p(y)dy \right] \right] \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[\int_0^b R(b-y)p(y)dy + \int_b^\infty (y-b)p(y)dy \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t} dt \left[\int_0^b R(b-y)p(y)dy + \int_b^\infty (y-b)p(y)dy \right] \\ R(b; b) &= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \left[\int_0^b R(b-y)p(y)dy + \int_b^\infty (y-b)p(y)dy \right] \end{aligned}$$

anteriormente se vió que

$$\int_0^b R(b-y)p(y)dy + \int_b^\infty (y-b)p(y)dy = \frac{\lambda+\delta}{\lambda} R(b; b) - \frac{c}{\lambda} R'(b; b)$$

ésta se reemplaza en (2)

$$\begin{aligned} R(b; b) &= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \left[\frac{\lambda+\delta}{\lambda} R(b; b) - \frac{c}{\lambda} R'(b; b) \right] \\ R(b; b) &= R(b; b) - \frac{c}{\lambda+\delta} R'(b; b) \quad \text{luego} \quad R'(b; b) = 0 \end{aligned}$$

20 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

ahora teniendo presente que

$$c = (1 + \theta)\lambda p_1 \text{ y que para } 0 < x < b$$

$$(1 + \theta)\lambda p_1 R'(x; b) - (\lambda + \delta)R(x; b)$$

$$+ \lambda \int_0^x R(x; b)p(x-y)dy + \lambda \int_x^\infty (1-P(y))dy = 0$$

$$(1+\theta)p_1 R'(x; b) - (1 + \frac{\delta}{\lambda})R(x; b) + \int_0^x R(x; b)p(x-y)dy + \int_x^\infty (1-P(y))dy = 0$$

$$(1+\theta)p_1 R'(x; b) - (1+\alpha)R(x; b) + \int_0^x R(x; b)p(x-y)dy + \int_x^\infty (1-P(y))dy = 0$$

$$\text{con } \alpha = \frac{\delta}{\lambda}$$

1.4. La modificación de Dickson-Waters

Inicialmente el objetivo fue encontrar el valor de b que maximiza el valor presente de todos los dividendos entregados hasta el momento de la ruina, se plantea que los accionistas deben estar comprometidos con cubrir el déficit en el momento de la ruina, ésta es la denominada modificación de Dickson Waters.

El valor de b que maximiza la esperanza de la diferencia entre el valor presente de los dividendos entregados hasta el momento de la ruina y el valor presente esperado del déficit en el momento de la ruina.

$$W(x; b) = V(x; b) - R(x; b)$$

$$W(x; b) = E \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) - e^{-\delta t} |X(T)| \right]$$

Sea $b = b^0$ el valor que maximiza $W(x; b)$

$$\frac{\partial W(x; b)}{\partial b} \Big|_{b=b^0} = 0$$

observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x; b)}{\partial x} &= V'(x; b) - R'(x; b) \\ \frac{\partial W(x; b)}{\partial x} \Big|_{x=b} &= V'(b; b) - R'(b; b) \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

$$W''(b^0, b^0) = 0$$

1.5. La Distribución del Monto de Reclamación Exponencial

Se discutirá ahora el caso especial para el cual $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ $y > 0$ donde $p_1 = 1/\beta$

Nótese que $p'(y) = -\beta(\beta e^{-\beta y}) = -\beta p(y)$ de lo cual se sigue que:

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \int_0^x V(y; b)p(x-y)dy = \beta V(x; b)$$

1. $(1+\theta)p_1V'(x; b) - (1+\alpha)V(x; b) + \int_0^x V(y; b)p(x-y)dy = 0 \quad 0 < x < b$
2. $(1 + \theta)p_1R'(x; b) - (1 + \alpha)R(x; b) + \int_0^x R(y; b)p(x - y)dy + \int_x^\infty (1 - P(y))dy = 0 \quad 0 < x < b$

Ejemplo 1.5.1. El monto de la reclamación individual es exponencial, es decir, $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, $y > 0$, $P(y) = 1 - e^{-\beta y}$ $p_1 = \frac{1}{\beta}$ $\beta > 0$ $P'(y) = -\beta p(y)$

así las dos ecuaciones integro-diferenciales las podemos transformar en una EDO aplicando el operador $\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) (1 + \alpha)V(x; b) &= (1 + \alpha)V'(x; b) + \beta(1 + \alpha)V(x; b) \\ \left(\frac{d}{dx} + \beta\right) (1 + \theta)p_1V'(x; b) &= (1 + \theta)p_1V''(x; b) + \beta(1 + \theta)p_1V'(x; b)\end{aligned}$$

22 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dx} + \beta \right) \left(\int_0^x V(y; b) p(x-y) dy \right) \\
 &= V(x; b) p(0) + \int_0^x V(y; b) p'(x-y) dy + \beta \int_0^x V(y; b) p(x-y) dy \\
 &= V(x; b) \beta - \beta \int_0^x V(y; b) p(x-y) dy + \beta \int_0^x V(y; b) p(x-y) dy \\
 &= \beta V(x; b)
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 (1 + \theta) p_1 V''(x; b) + \beta(1 + \theta) p_1 V'(x; b) - (1 + \alpha) V'(x; b) - \beta(1 + \alpha) U + \beta V(x; b) &= 0 \\
 (1 + \theta) p_1 V''(x; b) + (\beta(1 + \theta) p_1 - (1 + \alpha)) V'(x; b) - \alpha \beta V(x; b) &= 0 \\
 (1 + \theta) p_1 V''(x; b) + (1 + \theta - (1 + \alpha)) V'(x; b) - \alpha \beta V(x; b) &= 0 \\
 (1 + \theta) p_1 V''(x; b) + (\theta - \alpha) V'(x; b) - \alpha \beta V(x; b) &= 0
 \end{aligned}$$

esta es una EDOL homogénea coeficientes constantes de orden 2 cuya solución general es $V(x; b) = c_0 e^{rx} + c_1 e^{sx}$ $0 \leq x \leq b$, donde r y s raíces del polinomio característico $(1 + \theta) p_1 \xi^2 + (\theta - \alpha) \xi - \alpha \beta = 0$

$$\begin{aligned}
 P(y) &= 1 - e^{-\beta y} \quad \text{luego} \quad e^{-\beta y} = 1 - P(y) \\
 \left(\frac{d}{dx} + \beta \right) \int_x^\infty e^{-\beta y} dy &= \frac{d}{dx} \int_x^\infty e^{-\beta y} dy + \beta \int_x^\infty e^{-\beta y} dy \\
 -e^{-\beta x} + \int_x^\infty \frac{d}{dx} (e^{-\beta y}) dy + e^{-\beta x} & \\
 -e^{-\beta x} + e^{-\beta x} &= 0
 \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq b \begin{cases} V(x; b) = c_0 e^{rx} + c_1 e^{sx} \\ R(x; b) = d_0 e^{rx} + d_1 e^{sx} \end{cases}$$

$$V'(b; b) = 1 \quad R'(b; b) = 0$$

$$\frac{c_0}{\beta + r} + \frac{c_1}{\beta + s} = 0 \quad c_0 = \frac{\beta + r}{r(\beta + r)e^{rb} - s(\beta + s)e^{sb}} \quad (1.5.1)$$

$$c_0 r e^{rb} + c_1 s e^{sb} = 1 \quad c_1 = \frac{-(\beta + r)}{r(\beta + r)e^{rb} - s(\beta + s)e^{sb}} \quad (1.5.2)$$

1.5 La Distribución del Monto de Reclamación Exponencial 23

$$\frac{\beta^2}{\beta+r}d_0 + \frac{\beta^2}{\beta+s}d_1 = 1 \quad d_0 = \frac{-se^{sb}(\beta+r)(\beta+s)}{\beta^2 [r(\beta+r)e^{rb} - s(\beta+s)e^{sb}]} \quad (1.5.3)$$

$$d_0re^{rb} + d_1se^{sb} = 0 \quad d_1 = \frac{re^{rb}(\beta+r)(\beta+s)}{\beta^2 [r(\beta+r)e^{rb} - s(\beta+s)e^{sb}]} \quad (1.5.4)$$

$$\text{Sea } v(b) = r(\beta+r)e^{rb} - s(\beta+s)e^{sb}$$

$$V(x; b) = \frac{\beta+r}{v(b)}e^{rx} - \frac{\beta+s}{v(b)}e^{sx} \quad 0 \leq x \leq b$$

nuestro objetivo es hallar el valor de b que maximiza $V(x; b)$, sea $b = b^*$ tal que $v'(b^*) = 0$ minimiza a $V(x; b)$

$$r^2(\beta+r)e^{rb^*} - s^2(\beta+s)e^{sb^*} = 0$$

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \frac{s^2(\beta+s)}{r^2(\beta+r)}$$

$$\begin{aligned} W(x; b) &= V(x; b) - R(x; b) \\ &= c_0(b)e^{rx} + c_1(b)e^{sx} - d_0(b)e^{rx} - d_1(b)e^{sx} \\ &= (c_0(b) - d_0(b))e^{rx} + (c_1(b) - d_1(b))e^{sx} \end{aligned}$$

sea $b = b^0$ el valor que maximiza a $W(x; b) \quad \left. \frac{\partial w}{\partial b} \right|_{b=b^0} = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial b} = (c'_0(b) - d'_0(b))e^{rx} + (c'_1(b) - d'_1(b))e^{sx} = 0 \Leftrightarrow c'_0(b) = d'_0(b) \text{ y } c'_1(b) = d'_1(b)$$

las ecuaciones (4) y (5) se derivan y resuelven el sistema

$$\frac{\beta^2}{\beta+r} [c'_0(b) - d'_0(b)] + \frac{\beta^2}{\beta+s} [c'_1(b) - d'_1(b)] = 0$$

$$c'_0(b) - d'_0(b) = \frac{-(\beta+r)}{\beta+s} [c'_1(b) - d'_1(b)]$$

pero $W''(b^0; b^0) = 0$ condición contacto alto

$$\begin{aligned} W(x; b) &= [c_0(b) - d_0(b)]e^{rx} + [c_1(b) - d_1(b)]e^{sx} \\ W''(x; b) &= r^2 [c_0(b) - d_0(b)]e^{rx} + s^2 [c_1(b) - d_1(b)]e^{sx} \end{aligned}$$

$$b^0 = \frac{1}{r-s} \ln \left[\frac{-s^2 c_1(b^0) + d_1(b^0)}{r^2 c_0(b^0) - d_0(b^0)} \right]$$

b^0 se puede hallar por métodos numéricos

1.6. Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales

Se reemplaza ahora $p(y)$ por una combinación de distribuciones exponenciales así:

$$p(y) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n A_i = 1$$

se aplicará el operador

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta_1\right) \left(\frac{d}{dx} + \beta_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \beta_n\right)$$

a la ecuación integro-diferencial

$$(1+\theta)V'(x, b) - (1+\alpha)V(x; b) - \int_0^x V(y; b) \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i(x-y)} dy = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta_1\right) \left(\frac{d}{dx} + \beta_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \beta_n\right)$$

$$\cdot \int_0^x V(y; b) [A_1 \beta_1 e^{-\beta_1(x-y)} + A_2 \beta_2 e^{-\beta_2(x-y)} + \cdots + A_n \beta_n e^{-\beta_n(x-y)}] dy$$

la expansión del operador es:

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta_1\right) \left(\frac{d}{dx} + \beta_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} + \beta_n\right)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \sum_{i=1 < j}^{(2)} \beta_i \beta_j \cdot \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \sum_{i < j < k}^{(3)} \beta_i \beta_j \beta_k \cdot \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} + \cdots +$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}}^{(n-1)} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \cdots \beta_{i_{n-1}} \cdot \frac{d}{dx} + \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$$

1.6 Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales 25

veamos ahora como actúa el operador para los casos $n = 1, 2, 3$ sólo para la integral

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \right) = V(x) A_k \beta_k - \beta_k \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy = \frac{d}{dx} \left(A_k \beta_k V(x) - \beta_k \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \right)$$

$$= A_k \beta_k V'(x) - \beta_k \left[V(x) A_k \beta_k - \beta_k \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \right]$$

$$= A_k \beta_k V'(x) - \beta_k^2 A_k V(x) + \beta_k^2 \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$= A_k \beta_k V''(x) - \beta_k^2 A_k V'(x) + \beta_k^2 \left[V(x) A_k \beta_k - \beta_k \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \right]$$

$$= A_k \beta_k^3 V(x) - \beta_k^2 A_k V(x) + A_k \beta_k V''(x) - \beta_k^3 \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$= (-1)^n A_k \beta_k^{n-1} + (-1)^{n-1} A_k \beta_k^{n-2} V'(x) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \beta_k^{n-1} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$$

26 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{n+1} A_k \beta_k^n + (-1)^n A_k \beta_k^{n-1} V'(x) + \dots \\
 &+ (-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy
 \end{aligned}$$

por (2) aparecerá $\beta_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$ en algún momento, es decir,

$$\begin{aligned}
 &\beta_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \right) \\
 &= (-1)^n A_k \beta_k^n + (-1)^{n-1} A_k \beta_k^{n-1} V'(x) + \dots \\
 &- (-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy
 \end{aligned}$$

así se cancelan las integrales $(-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$ y $(-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy$, ya que siempre aparecerá una positiva y una negativa los demás términos se agrupan de acuerdo con el orden de sus derivadas.

La expresión $(\sum_{i=1}^n \beta_i) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ hace aparecer el término $-(-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k} dy$ el cual como se mostró arriba se canceló con $(-1)^n \beta_k^n \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k} dy$

Igual $(\sum \beta_i) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ hace aparecer el término $(-1)^n \beta_j \beta_k^{n-1} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k} dy$

$i \neq j$ el cual aparece en $(\sum \beta_i \beta_j) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}$ para $i = k$ con signo contrario

así se cancela el término $\beta_i \beta_k^{n-1} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(n-1)} dy$, $i \neq k$ análogamente

la expresión $(\sum \beta_i \beta_j) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}$ hace aparecer una vez el término

$$\beta_i \beta_j \beta_k^{n-2} \int_0^x V(y) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \quad i \neq n, i \neq k, i \neq j$$

el cual aparece una vez en la expresión $(\sum \beta_i \beta_j \beta_k) \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}$ con signo contrario y así sucesivamente, se continua agrupando los términos restantes respectivamente para $V(x), V'(x), \dots, V^{(n-1)}$, es decir, el operador

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx} + \beta_i \right)$$

1.6 Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales 27

anula la integral

$$\int_0^x V(y; b) A_k \beta_k e^{-\beta_k(x-y)} dy \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

en todos los términos donde aparece ésta, en resumen se tiene que:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx} + \beta_i \right) \left[cV'(x, b) - (\lambda + \delta)V(x; b) - \lambda \int_0^x V(y; b) \sum_{i=1}^n A_k \beta_k e^{-\beta_k(n-1)} dy \right]$$

se reduce a una combinación lineal del conjunto

$$\{V(x; b), V'(x; b), \dots, V^{(n-1)}(x; b)\} \text{ y así}$$

$$m_{n-1}V^{(n-1)}(x; b) + m_{(n-2)}V^{(n-2)}(x; b) + \dots + m_1V'(x; b) + m_0V(x; b) = 0$$

la cual corresponde a una EDOH lineal con coeficientes constantes reales distintos, luego

$$V(x; b) = \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} \quad 0 \leq x \leq b$$

un proceso idéntico muestra que $R(x; b)$ satisface la misma EDOH lineal con coeficientes constantes de orden $n + 1$ como ocurrió con $V(x; b)$, es decir,

$$R(x; b) = \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k x} \quad 0 \leq x \leq b$$

Ecuación 2.12 (*)

$$(1+\theta)p_1V'(x; b) - (1+\alpha)V(x; b) + \int_0^x V(y; b)p(x-1)dy = 0 \quad 0 < x < b \quad \alpha = \delta/\lambda$$

Se sustituye ahora

$$p(y) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y} \quad y > 0 \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n \quad \sum_{i=1}^n A_i = 1 \text{ y}$$

$$V(x; b) = \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} \quad 0 \leq x \leq b \text{ en la ecuación anterior (*)}$$

$$(1+\theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1+\alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} \right) \left(\sum_{i=1}^n A_k \beta_i e^{-\beta_i(x-y)} \right) dy = 0$$

28 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

propiedad de la sumatoria

$$\left(\sum_{i=1}^m A_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_i \beta_j$$

luego

$$\begin{aligned} (1 + \theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \int_0^x \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n c_k A_i \beta_i e^{\rho_k x} e^{-\beta_i x} e^{\beta_i y} dy &= 0 \\ (1 + \theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n c_k A_i \beta_i e^{\beta_i x} \int_0^x e^{(\rho_k + \beta_i)y} dy &= 0 \\ (1 + \theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n c_k A_i \beta_i e^{-\beta_i x} \left(\frac{1}{\rho_k + \beta_i} e^{(\rho_k + \beta_i)y} \right)_0^x dy &= 0 \\ (1 + \theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n c_k A_i \frac{\beta_i}{\rho_i + \beta_i} e^{-\beta_i x} (e^{(\rho_k + \beta_i)x} - 1) &= 0 \\ (1 + \theta)p_1 \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n c_k e^{\rho_k x} + \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^n A_i c_k \frac{\beta_i}{\rho_i + \beta_i} (e^{\rho_k x} - e^{-\beta_i x}) &= 0 \end{aligned}$$

cada una de las anteriores sumas se expande así:

$$\begin{aligned} &\left((1 + \theta)p_1 c_0 \rho_0 - (1 + \alpha)c_0 + \sum c_0 A_i \frac{\beta_0}{\rho_1 + \beta_0} \right) e^{\rho_0 x} \\ &+ \left((1 + \theta)p_1 c_1 \rho_1 - (1 + \alpha)c_1 \sum c_1 A_i \frac{\beta_1}{\rho_1 + \beta_1} \right) e^{\rho_1 x} \\ &+ \left((1 + \theta)p_1 c_2 \rho_2 - (1 + \alpha)c_2 \sum c_2 A_i \frac{\beta_2}{\rho_2 + \beta_2} \right) e^{\rho_2 x} + \dots + \\ &\left((1 + \theta)p_1 c_n \rho_n - (1 + \alpha)c_n \sum c_n A_i \frac{\beta_n}{\rho_n + \beta_n} \right) e^{\rho_n x} - \sum_{k=0}^n A_i c_k \frac{\beta_i}{\rho_i + \beta_k} e^{-\beta_i x} = 0 \end{aligned}$$

ésta es una combinación lineal del conjunto $\{e^{-\rho_0 x}, e^{-\rho_1 x}, \dots, e^{-\rho_n x}, e^{-\beta_i x}\}$ con $\rho_i \neq \rho_j$ y $\rho_i \neq \beta_i \quad \forall i, j$, el cual es un conjunto linealmente independiente

1.6 Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales 29

de modo que para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$c_k \left[(1 + \theta)p_1\rho_k - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_k}{\rho_k + \beta_n} \right] = 0$$

luego

$$(1 + \theta)p_1\rho_k - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_k}{\rho_k + \beta_n} = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

de modo que $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ son soluciones distintas de la ecuación

$$(1 + \theta)p_1m - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\rho_i + m} = 0$$

y también se tiene que

$$\sum_{i=0}^n A_i c_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} = 0$$

simplificando se tiene

$$\sum_{i=0}^n A_i c_k \frac{1}{\beta_i + \rho_k} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

como $V(x; b)$ satisface la condición $V'(b; b) = 1$ entonces

$$V'(b; b) = \sum_{k=0}^n c_k \rho_k e^{\rho_k b} = 1 = \frac{h'(b)}{h'(b)}$$

las dos últimas ecuaciones proporcionan un sistema de ecuaciones lineales $n + 1$ incógnitas c_0, c_1, \dots, c_n

Ecuación (3.7)

$$(1 + \theta)p_1 R'(x; b) - (1 + \alpha)R(x, b) + \int_0^x R(y; b)p(x - y)dy + \int_x^\infty [1 - P(y)]dy = 0 \quad 0 < x < b$$

30 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

en la ecuación (3.7) se sustituye $p(y) = \sum_{i=0}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y}$ y $R(x; b) = \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k x}$ pero primero hay que hallar $p(y)$, por definición

$$\begin{aligned} P(y) &= \int_0^y p(x) dx = \int_0^y \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i x} dx = \sum_{i=1}^n \int_0^y A_i \beta_i e^{-\beta_i x} dx = \sum_{i=1}^n -A_i e^{-\beta_i y} \Big|_0^y \\ &= - \sum_{i=1}^n A_i (e^{-\beta_i x} - 1) = \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_x^\infty (1-P(y)) dy &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_x^b \left[1 - \left(1 - \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} \right) \right] dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_x^b \sum_{i=1}^n A_i e^{-\beta_i y} dy \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \lim_{b \rightarrow \infty} \int_x^b e^{-\beta_i y} dy = \sum_{i=1}^n A_i \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\beta_i} e^{-\beta_i y} \right)_x^b = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-\beta_i x} - e^{-\beta_i b}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} (e^{-\beta_i x} - 0) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x} \end{aligned}$$

se evalúa ahora $\int_0^x R(y; b) p(x-y) dy$

$$\int_0^x \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k y} \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i (x-y)} dy$$

ésta integral ya se calculó en lugar de D_k con c_k lo demás idéntico, así:

$$\int_0^x R(x; b) p(x-y) dy = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n A_i D_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} (e^{-\rho_k x} e^{-\beta_i x})$$

de modo que la ecuación (3.7) queda:

$$\begin{aligned} (1+\theta) p_1 \sum_{k=0}^n D_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1+\alpha) \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k x} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n A_i D_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} (e^{-\rho_k x} e^{-\beta_i x}) \\ + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x} = 0 \end{aligned}$$

el conjunto $\{e^{\rho_1 x}, e^{\rho_2 x}, \dots, e^{\rho_n x}, e^{-\beta_1 x}\}$ es un conjunto linealmente independiente de modo que en la anterior ecuación agrupando los términos

1.6 Distribución del Monto de Reclamación de una Combinación de Exponenciales 31

correspondientes para cada $e^{\rho_k x}$ y para $e^{-\beta_i x}$ se tiene que:

$$(1 + \theta)p_1 D_k \rho_k - (1 + \alpha)D_k + \sum_{i=0}^n A_k D_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} = 0 \quad y$$

$$\sum_{k=0}^n A_1 D_k \frac{\beta_1}{\beta_1 + \rho_1} + \sum_{k=0}^n A_2 D_k \frac{\beta_2}{\beta_2 + \rho_2} + \dots + \sum_{k=0}^n A_n D_k \frac{\beta_n}{\beta_n + \rho_n} = \frac{A_1}{\beta_1} + \frac{A_2}{\beta_2} + \dots + \frac{A_n}{\beta_n}$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n A_i D_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} = 0$$

luego para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{k=0}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} = \frac{A_i}{\beta_i}$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^n A_i \frac{1}{\beta_i + \rho_k} = \frac{1}{\beta_i^2}$$

por la condición de frontera $R(b; b) = 0$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^n D_k \rho_k e^{\rho_k b} = 0$$

las dos últimas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones lineales de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas D_0, D_1, \dots, D_n .

En las ecuaciones

$$V(x; b) = \sum c_k e^{\rho_k x} \quad R(x; b) = \sum D_k e^{\rho_k x}$$

se ha supuesto que $\rho_i \neq \rho_j \quad \forall i \neq j$

para $n = 2$ en

$$(1 + \theta)p_1 \xi - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \xi} = 0$$

se tiene

$$A_1 \frac{\beta_1}{\beta_1 + \xi} + A_2 \frac{\beta_2}{\beta_2 + \xi} = (1 + \alpha) - (1 + \theta)p_1 \xi$$

32 El Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

ésta ecuación tiene tres soluciones distintas tanto para $A_1, A_2 > 0$ como para $A_1 > 0$ y $A_2 < 0$ se aprecia esto fácilmente graficando las funciones

$$f(\xi) = A_1 \frac{\beta_1}{\beta_1 + \xi} + A_2 \frac{\beta_2}{\beta_2 + \xi} \quad g(\xi) = (1 + \alpha) - (1 + \theta)p_1\xi$$

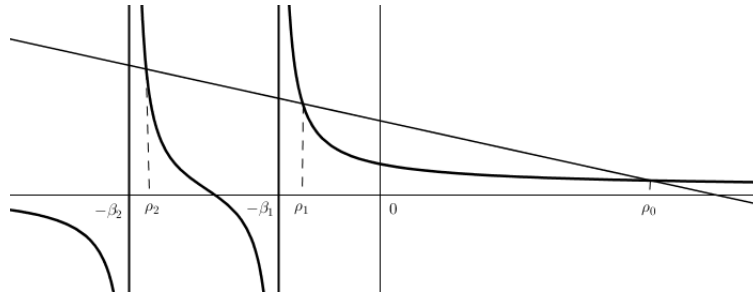


Figura 2.1

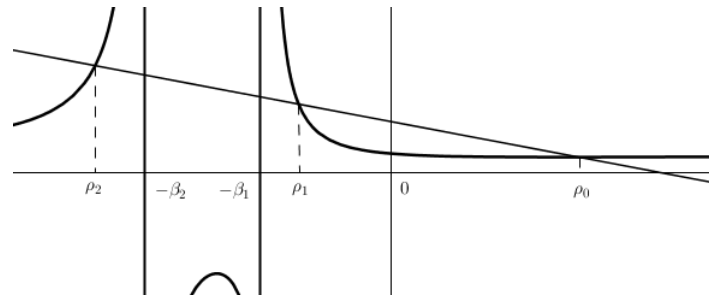


Figura 2.2

se aprecia de las gráficas que $\rho_0 > 0 > \rho_1 > -\beta_1 > \rho_2 > -\beta_2$ para $A_1, A_2 > 0$, y para $A_1 > 0$ y $A_2 < 0$ se satisface $\rho_0 > 0 > \rho_1 > -\beta_1 > -\beta_2 > \rho_2$

CAPÍTULO 2

La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

2.1. Introducción

Dentro de la teoría del riesgo se encuentra el estudio de la función de densidad del tiempo de la ruina en el modelo de riesgo clásico con una barrera de dividendos constante, en este capítulo se analiza el trabajo de [10] S. Li and Y. Lu, The density of the time of ruin in the classical risk model with a constant dividend barrier (Annals of Actuarial Science, vol 8. no. 01, pp. 63-78, 2014) quienes abordan esta temática cuando las reclamaciones se distribuyen de manera exponencial y derivan expresiones explícitas para la función de densidad del tiempo de la ruina y su correspondiente descomposición en la densidad del tiempo de la ruina sin el pago de dividendos y la densidad del tiempo de la ruina con el pago de dividendos. La manera en que se los autores encuentran estas densidades se basan en sus transformadas de Laplace, y las expresan en términos de algunas funciones especiales las cuales se tratan en paquetes computacionales especializados. Las transformadas son invertidas haciendo uso de la fórmula inversa Lagrange, se ilustran algunos ejemplos numéricos al final del capítulo.

2.2. Resultados Preliminares

Considere un modelo de riesgo clásico en el cual el proceso de excedente $\{U(t); t \geq 0\}$ con excedente inicial $u \geq 0$ esta dado por

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0,$$

donde c es la tasa constante de primas y $\{X_i\}_{i \geq 1}$ son variables aleatorias *i.i.d* representando el monto de reclamación individual, con función de distribución comun P y función de densidad (*fdp*) p , media μ y transformada de Laplace \hat{p} . El proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$ denota el número de reclamaciones hasta el momento t y se asume que es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$.

En este modelo, el incremento esperado del excedente por unidad de tiempo es $c - \lambda\mu$, el cual se asume es positivo, por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty$

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) < 1$$

donde $T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$

es el momento de la ruina, con $T = \infty$ si $U(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

Adicionalmente defina

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] \quad u \geq 0 \quad (2.2.1)$$

es la transformada de Laplace del momento de la ruina, donde δ es un parametro no negativo, e I es la funcion indicadora

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ ocurre} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

En algunos casos se considera una funcion similar a ϕ con la cual la interpretacion de δ es la de la fuerza del interes, con esta interpretación $\phi_\delta(u)$ da el valor presente esperado de 1 pagadero en el momento de la ruina. En particular cuando $\delta = 0$

$$\psi(u) = \phi_0(u)$$

Se puede derivar una ecuación integro - diferencial para ϕ usando la técnica de condicionamiento sobre el momento y el monto de la primera reclamación.

Sin embargo se debe tener en cuenta el factor de descuento en la definición de ϕ así

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} p(x) \phi_\delta(u+ct-x) dx dt \\ &+ \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty p(x) dx dt\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $s = u + ct \quad ds = c dt$
 $t = 0 \longrightarrow S = U$

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_0^S p(x) \phi_\delta(s-x) dx \frac{ds}{c} \\ &+ \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_S^\infty p(x) dx \frac{ds}{c} \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_0^S p(x) \phi_\delta(s-x) dx ds \\ &+ \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_S^\infty p(x) dx ds\end{aligned}$$

diferenciando con respecto a u se obtiene

$$\begin{aligned}\phi'_\delta(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[- \int_0^u p(x) \phi_\delta(u-x) dx + \int_u^\infty \frac{(\lambda+\delta)}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s p(x) \phi_\delta(s-x) dx ds \right] \\ &+ \frac{\lambda}{c} \left[- \int_0^\infty p(x) dx + \int_u^\infty \frac{(\lambda+\delta)}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty p(x) dx ds \right] \\ \phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \left[\frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s p(x) \phi_\delta(s-x) dx ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty p(x) dx ds \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(x) \phi_\delta(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty p(x) dx \\ \phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_\delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u p(u-x) \phi_\delta(x) dx - \frac{\lambda}{c} [1 - P(u)]\end{aligned}$$

36 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

esta ecuación es una ecuación general la cual puede ser resuelta para diferentes formas de P , ahora considere la ecuación

$$\lambda \hat{p}(s) = (\lambda + \delta) - cs \quad (2.2.2)$$

Ahora

$$\hat{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x) dx$$

es la transformada de Laplace de p , definida para todos los números no negativos s la cual es una función decreciente convexa puesto que

$$\hat{p}'(s) = \int_0^{\infty} -e^{-sx} xp(x) dx < 0$$

y

$$\hat{p}''(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 p(x) dx > 0$$

Denote $\ell(s) = \lambda + \delta - cs$ y ya que $\ell(0) = \lambda + \delta \geq \lambda = \lambda \hat{p}(0)$ la ecuación (2.2.2) tiene una raíz no negativa única, denotada como $\rho(\delta)$.

Adicionalmente si $p(x)$ es suficientemente regular, la ecuación (2.2.2) tiene una solución negativa denotada como $-R(\delta)$ y que se escribirá de aquí en adelante como $-R$

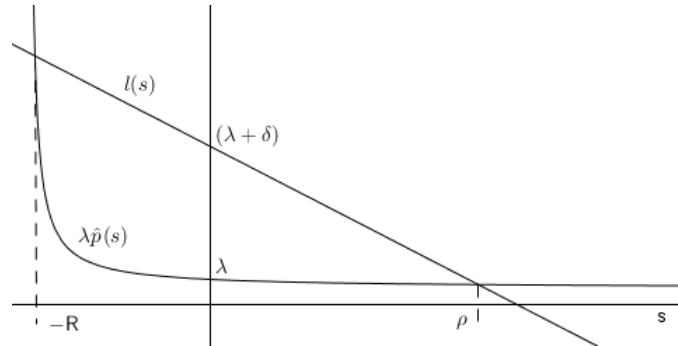


Figura 2.1

por ejemplo, si $p(x) = \beta e^{-\beta x}$ tenemos que

$$\delta + \lambda - cs = \lambda \frac{\beta}{\beta + s}$$

la expresión del lado derecho es una función racional con un polo en $s = -\beta$

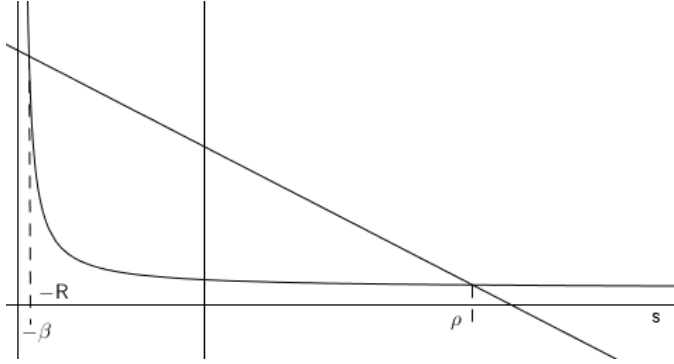


Figura 2.2

Dickson y Willmot [7] utilizando el teorema de la función implícita de Lagrange demuestran que si

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \hat{g}(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} g(t) dt$$

entonces la función g puede ser obtenida como

$$g(t) = ce^{-\lambda t} f(ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!} \int_0^{ct} yp^{n*}(ct-y)f(y)dy \quad (2.2.3)$$

donde p^{n*} es la convolución n -ésima de la densidad con ella misma, esto es $p^{n*}(x) = \int_0^x p^{(n-1)*}(x-y)p(y)dy$

Ahora teniendo presente que

$$p^{0*}(y) = I(y = 0)$$

y

$$\int_0^{ct} yp^{0*}(ct-y)f(y)dy = ct f(ct)$$

lo que conlleva a

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n} \int_0^{ct} yp^{n*}(ct-y)f(y)dy$$

Prueba: Empleando el teorema de la función implícita de Langrange el cual establece que:

Sea ρ una función de $\frac{\lambda+\delta}{c}$ y de $-\frac{\lambda}{c}$ definida a partir de otra función $\hat{\rho}$ tal que

$$\rho = \frac{\lambda + \delta}{c} - \frac{\lambda}{c} \hat{\rho}(\rho)$$

38 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Entonces para cualquier función analítica $\eta(z)$ se puede desarrollar en serie de Taylor alrededor de $z = \frac{\lambda+\delta}{c}$ para $-\frac{\lambda}{c}$ pequeño

$$\eta(\rho) = \eta\left(\frac{\delta + \lambda}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \eta'(z) \int_0^{\infty} e^{-zx} p^{n*}(x) dx \Big|_{z=\frac{\lambda+\delta}{c}} \right\}$$

donde p^{n*} es la convolución n-ésima de la densidad p consigo misma. Cuando $\eta(z) = e^{-zx}$ se tiene

$$e^{-\rho t} = e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ (-t) \int_0^{\infty} e^{-z(x+t)} p^{n*}(x) dx \Big|_{z=\frac{\lambda+\delta}{c}} \right\}$$

$$n = 1 \quad -(x+t)$$

$$n = 2 \quad (x+t)^2$$

$$n = 3 \quad -(x+t)^3$$

$$\begin{aligned} e^{-\rho t} &= e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^i}{i!} \left\{ (-1)^i t \int_0^{\infty} (x+t)^{i-1} e^{-z(x+t)} p^{i*}(x) dx \right\}_{z=\frac{\lambda+\delta}{c}} \\ &= e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} t \int_0^{\infty} (x+t)^{n-1} e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)} p^{n*}(x) dx \end{aligned}$$

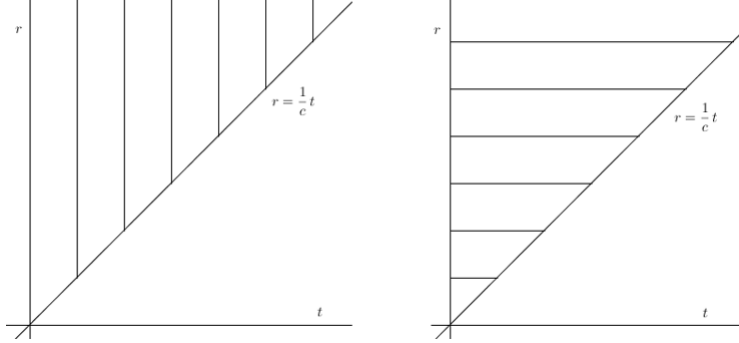
así para una función arbitraria f

$$\begin{aligned} \hat{f}(\rho) &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \int_0^{\infty} t \int_0^{\infty} (x+t)^{n-1} e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)} p^{n*}(x) dx f(t) dt \end{aligned}$$

con la sustitución $r = \frac{\lambda+t}{c}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\rho) &= c \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\delta)r} f(cr) dr \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \int_0^{\infty} t \int_{\frac{t}{c}}^{\infty} c^n r^{n-1} e^{-(\lambda+\delta)r} p^{n*}(cr-t) dr f(t) dt \end{aligned}$$

cambiando el orden de la integración se tiene



$$\hat{f}(\rho) = c \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)r} f(cr) dr + \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-(\lambda+\delta)r} \int_0^{cr} t p^{n*}(cr-t) f(t) dt dr$$

con $r = t$ y $t = y$

$$\hat{f}(\rho) = \int_0^\infty e^{\delta t} \left(c e^{-\lambda t} f(ct) + \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!} \int_0^{ct} y p^{n*}(ct-y) f(y) dy \right) dt$$

$$\hat{f}(\rho) = \hat{g}(\delta) = \int_0^\infty e^{\delta t} g(t) dt$$

donde $g(t)$ está dada por (2.2.3)

A continuación se deriva primero la inversa de Laplace con respecto a ρ (función f) y entonces se obtiene la correspondiente inversa de Laplace con respecto a δ (función g) usando (2.2.3)

2.2.1. Funciones Especiales

Algunas funciones especiales de utilidad

1. la función hipergeométrica generalizada

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(a_1)_m (a_2)_m \cdots (a_p)_m}{(b_1)_m (b_2)_m \cdots (b_q)_m} \frac{z^m}{m!}$$

40 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

${}_2F_2(\cdot)$ es conocida como la función Hipergeométrica confluyente de Kummer y ${}_2F_1(\cdot)$ es conocida como la función Hipergeométrica de Gauss

$${}_0F_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\pm z)^m}{m!} = e^{\pm z} \quad \text{serie exponencial}$$

$${}_1F_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha)_r \frac{z^m}{m!} = (1-z)^{-\alpha} \quad |z| < 1 \quad \text{serie binomial}$$

$$(a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$$

Función Lauricella F_B

$$F_B(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c, z_1, \dots, z_n)$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+m_2+\dots+m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}$$

Casos especiales de esta función son:

Series hipergeométrica confluyente especial en dos variables

$$\Phi_2(c; z_1, z_2) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_{m_1+m_2}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \quad (2.2.4)$$

Serie hipergeométrica confluyente especial en tres variables

$$\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} & & z_1 \\ b; & c; & z_2 \\ & & z_3 \end{matrix} \right) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{m_2}}{(c)_{m_1+m_2+m_3}} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3}}{m_1! m_2! m_3!} \quad (2.2.5)$$

Nota: Como

$$\begin{aligned} (c)_{m_1+m_2} &= \frac{\Gamma(c+m_1+m_2)}{\Gamma(c)} \\ (c+m_1)_{m_2} &= \frac{\Gamma(c+m_1+m_2)}{\Gamma(c+m_1)} \\ (c)_{m_1} &= \frac{\Gamma(c+m_1)}{\Gamma(c)} \end{aligned}$$

entonces

$$(c)_{m_1+m_2} = (c + m_1)_{m_2} (c)_{m_1}$$

ϕ_2 en (2.2.4) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \phi_2(c; z_1, z_2) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{(c + m_1)_{m_2} (c)_{m_1}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_{m_1}} \left[\sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{(c + m_1)_{m_2}} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \right] \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_{m_1}} {}_0F_1(; c + m_1; z_2) \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c)_{m_1+m_2+m_3} &= \frac{\Gamma(c + m_1 + m_2 + m_3)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c + m_2)}{\Gamma(c)} \\ &= \frac{\Gamma(c + m_1 + m_2 + m_3)}{\Gamma(c + m_2)} \frac{\Gamma(c + m_2)}{\Gamma(c)} \end{aligned}$$

de igual manera como

$$(c)_{m_1+m_2+m_3} = (c + m_2)_{m_1+m_3} (c)_{m_2}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} z_1 \\ b; c; z_2 \\ z_3 \end{matrix} \right) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{m_2}}{(c + m_2)_{m_1+m_3} (c)_{m_2}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \frac{z_3^{m_3}}{m_3!} \\ &= \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{m_2}}{(c)_{m_2}} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{1}{(c + m_2)_{m_1+m_3}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{z_3^{m_3}}{m_3!} \right] \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \\ &= \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{m_2}}{(c)_{m_2}} \Phi_2(c + m_2; z_1, z_3) \frac{z_2^{m_2}}{m_2!} \end{aligned}$$

42 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Ahora considere que el monto de reclamación individual es distribuido exponencialmente con $p(x) = \beta e^{-\beta x}$ y $P(x) = 1 - \beta e^{-\beta x}$, $x > 0$ reemplazando en (*) se tiene

$$\begin{aligned}\phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi_\delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \beta e^{-\beta(u-x)} \phi_\delta(x) dx - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi_\delta(u) - \frac{\lambda \beta e^{-\beta u}}{c} \int_0^u e^{\beta x} \phi_\delta(x) dx - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \quad (**)\end{aligned}$$

aplicando el operador $(\frac{d}{du} + \beta)$

$$\begin{aligned}\phi''_\delta(u) + \beta \phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi'_\delta(u) + \frac{\beta(\lambda + \delta)}{c} \phi_\delta(u) \\ &\quad - \frac{\lambda \beta}{c} \left[e^{-\beta u} e^{\beta u} \phi_\delta(u) + \int_0^u e^{\beta x} \phi_\delta(x) dx (-\beta e^{-\beta u}) \right] \\ &\quad - \frac{\lambda \beta^2}{c} e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} \phi_\delta(x) dx + \frac{\lambda \beta e^{-\beta u}}{c} - \frac{\lambda \beta e^{-\beta u}}{c} \\ \phi''_\delta(u) + \beta \phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi'_\delta(u) + \frac{\beta(\lambda + \delta)}{c} \phi_\delta(u) - \frac{\lambda \beta}{c} \phi_\delta(u) \\ \phi''_\delta(u) + \beta \phi'_\delta(u) &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi'_\delta(u) + \frac{\beta \delta}{c} \phi_\delta(u) \quad \text{ó} \\ \phi''_\delta(u) + \left[\beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] \phi'_\delta(u) - \frac{\beta \delta}{c} \phi_\delta(u) &= 0\end{aligned}$$

la solución general de esta ecuación es $\phi_\delta(u) = k_1 e^{\rho u} + k_2 e^{-R u}$ $u \geq 0$ donde $\rho > 0$ y $-R < 0$ son las raíces de la ecuación característica

$$\begin{aligned}s^2 + \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) s - \frac{\beta \delta}{c} &= 0 \\ \rho &= \frac{-(c\beta - \lambda - \delta) + \sqrt{(c\beta - \lambda - \delta)^2 + 4c\delta\beta}}{2c} \\ -R &= \frac{-(c\beta - \lambda - \delta) - \sqrt{(c\beta - \lambda - \delta)^2 + 4c\delta\beta}}{2c}\end{aligned}$$

ahora si $u \rightarrow \infty$ entonces $T \rightarrow \infty$, luego

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \phi_\delta(u) = 0$$

lo que implica que $k_1 = 0$ y $\phi_\delta(0) = k_2$ asi $\phi_\delta(u) = \phi_\delta(0)e^{-Ru}$

Para encontrar $\phi_\delta(0)$ reemplazamos $\phi_\delta(u)$ en (**)

$$\begin{aligned} - R\phi_\delta(0)e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru} - \frac{\lambda}{c}e^{\beta u} \int_0^u \beta e^{\beta x} \phi_\delta(0)e^{-Rx} dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\ - R\phi_\delta(0)e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru} - \frac{\lambda\beta}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru} \int_0^u e^{(\beta-R)x} dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \end{aligned}$$

haciendo

$$\begin{aligned} z &= (\beta - R)x \\ dz &= (\beta - R)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - R\phi_\delta(0)e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru} - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u}\phi_\delta(0) \int_0^{(\beta-R)u} \frac{e^z dz}{(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \\ - R\phi_\delta(0)e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru} - \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \frac{\phi_\delta(0)}{(\beta - R)} [e^{(\beta-R)u} - 1] - \frac{\lambda}{c}e^{-\beta u} \end{aligned}$$

$$R^2 - \left[\beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] R - \frac{\beta\delta}{c} = 0$$

$$-R^2 + \left[\beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] R + \frac{\beta\delta}{c} = 0$$

$$- R\phi_\delta(0)e^{-Ru} = \frac{(\lambda + \delta)}{c}\phi_\delta(0)e^{-Ru}$$

$$- \frac{\lambda\beta}{c(\beta - R)}\phi_\delta(0)e^{-Ru} + \frac{\lambda\beta}{c}e^{-\beta u} \frac{\phi_\delta(0)}{(\beta - R)} - \frac{\lambda e^{-\beta u}}{c}$$

$$\phi_\delta(0)e^{-Ru} \left[R + \frac{(\lambda + \delta)}{c} - \frac{\lambda\beta}{c(\beta - R)} \right] + e^{-\beta u} \left[\frac{\lambda\beta\phi_\delta(0)}{c(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c} \right] = 0$$

$$- \frac{\phi_\delta(0)e^{-Ru}}{(\beta - R)} \left[-R(\beta - R) - (\beta - R) \left[\frac{\lambda + \delta}{c} \right] + \frac{\lambda\beta}{c} \right] + e^{-\beta u} \left[\frac{\lambda\beta\phi_\delta(0)}{c(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c} \right] = 0$$

$$- \frac{\phi_\delta(0)e^{-Ru}}{(\beta - R)} \left[R^2 - \beta R + \left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right) R - \frac{\beta\delta}{c} \right] + e^{-\beta u} \left[\frac{\lambda\beta\phi_\delta(0)}{c(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c} \right] = 0$$

$$- \frac{\phi_\delta(0)e^{-Ru}}{(\beta - R)} \left[R^2 - \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) R - \frac{\beta\delta}{c} \right] + e^{-\beta u} \left[\frac{\lambda\beta}{c} \frac{\phi_\delta(0)}{(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c} \right] = 0$$

44 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

donde se desprende que

$$\phi_\delta(0) = \frac{\beta - R}{\beta}$$

por lo tanto

$$\phi_\delta(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru}, \quad u \geq 0, \quad (2.2.6)$$

donde $-R$ es la raíz negativa de la ecuación fundamental de Lundberg

$$cs^2 + (c\beta - \lambda - \delta)s - \delta\beta = 0 \quad (2.2.7)$$

ambos ρ y $-R$ juegan un papel muy importante al estudiar cantidades relacionadas con la ruina para el modelo de riesgo clásico en teoría de la ruina.

Por ejemplo observe que si $\delta = 0$

$$\phi_0(u) = E[I(T < \infty)] = \psi(u)$$

y como R es precisamente el coeficiente de ajuste, la ecuación (2.2.6) da la probabilidad de ruina definitiva como un caso especial.

ahora note que (2.2.7) implica

$$\begin{aligned} R - \rho &= \frac{(c\beta - \lambda - \delta) + \sqrt{(c\beta - \lambda - \delta)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} \\ &\quad + \frac{(c\beta - \lambda - \delta) - \sqrt{(c\beta - \lambda - \delta)^2 + 4c\beta\delta}}{2c} \\ &= \frac{2(c\beta - \lambda - \delta)}{2c} = \beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \end{aligned}$$

$$R - \rho = \beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \quad (2.2.8)$$

ahora como ρ satisface (2.2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} \rho^2 + \left[\beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] \rho - \frac{\beta\delta}{c} + \frac{\lambda\beta}{c} - \frac{\lambda\beta}{c} &= 0 \\ \rho^2 + \left[\beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] \rho + \left[\frac{\lambda}{c} - \frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] \beta &= 0 \\ \rho^2 + \beta\rho + \frac{\lambda\beta}{c} &= (\rho + \beta) \left[\frac{(\lambda + \delta)}{c} \right] \\ \frac{\lambda + \delta}{c} &= \frac{\rho^2 + \beta\rho}{\rho + \beta} + \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \\ &= \frac{\rho(\rho + \beta)}{(\rho + \beta)} + \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \\ &= \rho + \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \end{aligned}$$

De (2.2.8) se tiene

$$\begin{aligned} R &= \rho + \beta - \rho - \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \\ R &= \beta - \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\lambda + \delta}{c} = \rho + \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta}, \quad R = \beta - \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta} \quad (2.2.9)$$

ahora utilizando (2.2.9) se puede reescribir

$$\phi_\delta(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru}$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{\beta - R}{\beta} &= \frac{\lambda}{c(\rho + \beta)} \\ \phi_\delta(u) &= \frac{\lambda}{c} e^{(\frac{\lambda\beta/c}{\rho + \beta} - \beta)u} \frac{1}{\rho + \beta} \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c} \frac{u}{\rho + \beta}}}{\rho + \beta} \end{aligned}$$

46 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

esto da una idea de proponer una forma particular de $\hat{f}(\rho)$

Lema 1: Si $\hat{f}(\rho)$ es de la forma

$$\hat{f}(\rho) = \frac{e^{\frac{\mu}{\rho+\beta}}}{(\rho+\beta)^v} \frac{e^{-\theta\rho}}{\rho^k}, \quad \mu, \theta \geq 0, v, k > 0 \quad (2.2.10)$$

entonces

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i (t-\theta)^{i+v+k+1}}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \int_0^1 e^{-\beta(t-\theta)y} (1-y)^{k-1} y^{i+v-1} dy, \quad t > \theta \quad (2.2.11)$$

y

$$g(t) = e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} \frac{(ct-\theta)^{v+k-1}}{\Gamma(v+k)} \left[c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} \lambda\beta t(ct-\theta) \\ k; v+k; \beta(ct-\theta) \\ \mu(ct-\theta) \end{matrix} \right) - \frac{\lambda\beta t(ct-\theta)^2}{(v+k)(v+k+1)} \Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} \lambda\beta t(ct-\theta) \\ k; v+k+2; \beta(ct-\theta) \\ \mu(ct-\theta) \end{matrix} \right) \right], \quad t > \frac{\theta}{c} \quad (2.2.12)$$

Prueba: De Abramowitz and Stegun [3] se tiene que

$$\frac{e^{\frac{\mu}{\rho+\beta}}}{(\rho+\beta)^v} = \int_0^{\infty} e^{-(\rho+\beta)t} \left(\frac{t}{\mu} \right)^{\frac{v-1}{2}} I_{v-1}(2\sqrt{\mu t}) dt$$

donde $I_{v-1}(\cdot)$ es llamada una función de Bessel modificada de orden $v-1$ con

$$I_v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2i+v}}{i!(i+v)!}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{\mu}{\rho+\beta}}}{(\rho+\beta)^v} &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(e^{-\beta t} \left(\frac{t}{\mu} \right)^{\frac{v-1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\sqrt{\mu t}}{2}\right)^{2i+v-1}}{i!(i+v-1)!} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(e^{-\beta t} \left(\frac{t}{\mu} \right)^{\frac{v-1}{2}} (\mu t)^{\frac{v-1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^i}{i! \Gamma(i+v)} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(e^{-\beta t} t^{v-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^i}{i! \Gamma(i+v)} \right) dt \quad \mu \geq 0, \quad v > 0 \end{aligned}$$

y nuevamente por Abramowitz and Stegun [2]

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\theta\rho}}{\rho^k} &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(\frac{(t-\theta)^{k-1}}{\Gamma(k)} I(t > 0) \right) dt, \quad \theta \geq 0, \quad k > 0 \\ \frac{e^{\frac{\mu}{\rho+\beta}}}{(\rho+\beta)^v} &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(e^{-\beta t} t^{v-1} \sum_{i=0}^\infty \frac{(\mu t)^i}{i! \Gamma(i+v)} \right) dt, \quad \mu \geq 0, \quad v > 0 \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Nota: La transformada de Laplace de una convolución.

Sean h_1 y h_2 funciones cuya transformada de Laplace existe.
Se define

$$h(x) = \int_0^x h_1(y) h_2(x-y) dy$$

Entonces

$$\hat{h}(\rho) = \hat{h}_1(\rho) \cdot \hat{h}_2(\rho)$$

Luego la inversa de Laplace de $\hat{f}(\rho)$, con respecto a ρ se obtiene en términos de la convolución como

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \left(\frac{(t-x-\theta)^{k-1}}{\Gamma(k)} I(t-x > \theta) \right) \left(e^{-\beta x} x^{v-1} \sum_{i=0}^\infty \frac{(\mu x)^i}{i! \Gamma(i+v)} \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \int_0^{t-\theta} e^{-\beta x} (t-x-\theta)^{k-1} x^{i+v-1} dx, \quad t > \theta \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Ahora haciendo $y = \frac{x}{t-\theta}$ $dy = \frac{1}{t-\theta} dx$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \int_0^1 e^{-\beta(t-\theta)y} (t - (t-\theta)y - \theta)^{k-1} [(t-\theta)y] (t-\theta) dy \\ f(t) &= \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \int_0^1 e^{-\beta(t-\theta)y} [(t-\theta)(1-y)]^{k-1} (t-\theta)^{i+v-1} y^{i+v-1} (t-\theta) dy \\ &= \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i (t-\theta)^{i+v+k-1}}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \int_0^1 e^{-\beta(t-\theta)y} (1-y)^{k-1} \cdot y^{i+v-1} dy \quad t > \theta \end{aligned}$$

Note que la convolución n-ésima de $p(x)$, p^{n*} es

$$p^{n*}(x) = \int_0^x p^{(n-1)*}(x-y) p(y) dy$$

48 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
 p^{2*}(x) &= \int_0^x p(x-y)p(y)dy \\
 &= \int_0^x \beta e^{-\beta(x-y)} \beta e^{-\beta y} dy \\
 &= \beta^2 e^{-\beta x} \int_0^x dy \\
 &= \beta^2 x e^{-\beta x}
 \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned}
 p^{3*}(x) &= \int_0^x p^{2*}(x-y)p(y)dy \\
 &= \int_0^x p^{2*}(y)p(x-y)dy \\
 &= \int_0^x \beta^2 y e^{-\beta y} \beta e^{-\beta(x-y)} dy \\
 &= \frac{1}{2} \beta^3 x^2 e^{-\beta x}
 \end{aligned}$$

y en general

$$p^{n*}(x) = \frac{\beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(n)}, \quad x > 0$$

la cual es una función de densidad de una distribución Erlang (n) con parámetro de escala β

Entonces (2.2.3) y (2.2.14), se tiene que para $ct > \theta$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!} \int_0^{ct} y \frac{(ct-y)^{n-1} e^{-\beta(ct-y)}}{\Gamma(n)} f(y) dy \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!} \int_{\theta}^{ct} \frac{y(ct-y)^{n-1} e^{-\beta(ct-y)}}{\Gamma(n)} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \left(\int_0^{y-\theta} e^{-\beta x} (y-x-\theta)^{k-1} x^{i+v-1} dx \right) dy \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{(-\lambda+\beta c)t}}{n! \Gamma(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i! \Gamma(i+v) \Gamma(k)} \cdot \int_{\theta}^{ct} y \cdot (ct-y)^{n-1} e^{\beta y} \\
 &\quad \left(\int_0^{y-\theta} e^{-\beta x} (y-x-\theta)^{k-1} x^{i+v-1} dx \right) dy,
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{y-\theta}$, $du = \frac{dx}{y-\theta}$ se tiene en la integral

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^{-\beta(y-\theta)u} [y - u(y - \theta) - \theta]^{k-1} [u(y - \theta)]^{i+v-1} (y - \theta) du \\ &= (y - \theta)^{i+v+k-1} \int_0^1 e^{-\beta(y-\theta)u} (1 - u)^{k-1} u^{i+v-1} du \end{aligned}$$

y con

$$\begin{aligned} z &= 1 - u \\ dz &= -du \\ & - \int_1^0 e^{-\beta(y-\theta)(1-z)} z^{k-1} (1 - z)^{i+v-1} dz \\ &= e^{\beta\theta} \int_0^1 e^{-\beta y} e^{\beta(y-\theta)z} z^{k-1} (1 - z)^{i+v-1} dz \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}}{n!\Gamma(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!\Gamma(i+u)\Gamma(k)} \\ & \int_{\theta}^{ct} y(ct - y)^{n-1} (y - \theta)^{i+v+k-1} \left(\int_0^1 e^{\beta(y-\theta)z} z^{k-1} (1 - z)^{i+v-1} dz \right) dy \end{aligned}$$

Ahora de Abramowitz y Stegun [1] se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^{ry} y^{p-1} (1 - y)^{q-p-1} dy \\ &= {}_1F_1(p, q, r) \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}{\Gamma(q)} \quad p, q, r > 0 \\ & \quad p = k \quad r = \beta(y - \theta) \\ & \quad i + v = q - k \quad q - p = i + v \end{aligned}$$

entonces $g(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}}{n!\Gamma(n)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!\Gamma(i+v+k)} \\ & \int_{\theta}^{ct} y(ct - y)^{n-1} (y - \theta)^{i+v+k-1} {}_1F_1(k, i+v+k; \beta(y - \theta)) dy \end{aligned}$$

50 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

y ya que

$$\begin{aligned} {}_1F_1(k, i + v + k; \beta(y - \theta)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k)_m}{(i + v + k)_m} \frac{[\beta(y - \theta)]^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)}}{\frac{\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(i+v+k)}} \frac{\beta^m (y - \theta)^m}{m!} \end{aligned}$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}}{n!\Gamma(n)\Gamma(k)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m \Gamma(m+k)}{m!\Gamma(m+i+v+k)} \int_{\theta}^{ct} y(ct-y)^{n-1} (y-\theta)^{m+i+v+k-1} dy \quad (2.2.15)$$

Ahora la integral en (2.2.15) se puede resolver teniendo presente que

$$\begin{aligned} z &= \frac{x-y}{x} \\ y &= x(1-z) \\ dy &= -xdz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x y^{p-1} (x-y)^{q-1} dy &= x \int_0^1 [x(1-z)]^{p-1} [xz]^{q-1} dz \\ &= x^{p+q-1} \cdot \int_0^1 z^{q-1} (1-z)^{p-1} dz \\ &= x^{p+q-1} \cdot \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable

$$u = y - \theta \quad du = dy$$

$$y = \theta \quad u = 0$$

$$y = ct \quad u = ct - \theta$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{ct-\theta} (u + \theta)(ct - \theta - u)^{n-1} u^{m+i+v+k-1} du \\
 &= \int_0^{ct-\theta} u^{m+i+v+k} (ct - \theta - u)^{n-1} du + \theta \int_0^{ct-\theta} u^{m+i+v+k-1} (ct - \theta - u)^{n-1} du \\
 &= \int_0^{ct-\theta} u^{(m+i+v+k+1)-1} (ct - \theta - u)^{n-1} du + \theta \int_0^{ct-\theta} u^{(m+i+v+k)-1} (ct - \theta - u)^{n-1} du \\
 &= (ct - \theta)^{m+i+v+k+1-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k+1)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \\
 &\quad + \theta (ct - \theta)^{m+i+v+k-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k)}
 \end{aligned}$$

teniendo presente que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ por factor común

$$\begin{aligned}
 & \frac{(ct - \theta)^{n+m+i+v+k-1} \Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \\
 & \cdot \left[(ct - \theta) \frac{\Gamma(m+i+v+k+1)}{\Gamma(m+i+v+k)} + \theta \frac{\Gamma(n+m+i+v+k+1)}{\Gamma(n+m+i+v+k)} \right] \\
 &= \frac{(ct - \theta)^{n+m+i+v+k-1} \Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \\
 & \cdot [(ct - \theta)(m+i+v+k) + \theta(n+m+i+v+k+1)] \\
 &= \frac{(ct - \theta)^{n+m+i+v+k-1} \Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \\
 & \cdot [ct(m+i+v+k) - \theta(m+i+v+k) + \theta(m+i+v+k) + \theta n] \\
 &= \frac{(ct - \theta)^{n+m+i+v+k-1} \Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \cdot [ct(m+i+v+k) - \theta n - ctn + ctn] \\
 &= \frac{(ct - \theta)^{n+m+i+v+k-1} \Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \cdot [ct(n+m+i+v+k) - n(ct - \theta)]
 \end{aligned}$$

y por lo tanto $g(t)$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
 g(t) &= e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1}}{n!\Gamma(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(k)} \frac{1}{\Gamma(m+i+v+k)} \\
 & (ct-\theta)^{n+m+i+v+k-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+i+v+k+1)}{\Gamma(n+m+i+v+k+1)} \cdot [ct(n+m+i+v+k) - n(ct - \theta)]
 \end{aligned}$$

52 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$= e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} \cdot (ct - \theta)^{v+k-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda\beta t(ct - \theta)]^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\mu(ct - \theta)]^i}{i!}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{c(k)_m}{\Gamma(n + m + i + v + k)} - \frac{\lambda\beta(ct - \theta)^2(k)_m}{\Gamma(n + m + i + v + k + 2)} \right) \cdot \frac{[\beta(ct - \theta)]^m}{m!}$$

y puesto que

$$n = 1 \quad \frac{\lambda\beta t(ct - \theta)}{t} \frac{ct - \theta}{\Gamma(m + i + v + k + 2)}$$

reiniciando en cero y actualizando en uno

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad \frac{\lambda\beta(ct - \theta)^2}{\Gamma(n + m + i + v + k + 2)} \\ n = 2 & \quad \frac{\lambda^2\beta^2 t(ct - \theta)^3}{\Gamma(n + m + i + v + k + 3)} \\ n = 1 & \quad [\lambda\beta t(ct - \theta)] \cdot \frac{\lambda\beta(ct - \theta)^2}{\Gamma(m + i + v + k + 3)} \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Ahora teniendo presente que

$$\begin{aligned} (v + k)_{n+i+m} &= \frac{\Gamma(n + m + i + v + k)}{\Gamma(v + k)} \\ (v + k + 2)_{n+i+m} &= \frac{\Gamma(n + m + i + v + k + 2)}{\Gamma(v + k + 2)} \\ &= \frac{\Gamma(n + m + i + v + k + 2)}{(v + k + 1)(v + k)\Gamma(v + k)} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}(ct-\theta)^{v+k-1}}{\Gamma(v+k)} \\
 &\quad \left[c \sum_{n,m,i=0}^{\infty} \frac{(k)_m}{(v+k)_{n+i+m}} \frac{[\lambda\beta t(ct-\theta)]^n}{n!} \frac{[\beta(ct-\theta)]^m}{m!} \frac{[\mu(ct-\theta)]^i}{i!} \right. \\
 &\quad - \frac{\lambda\beta(ct-\theta)^2}{(v+k)(v+k+1)} \sum_{n,m,i=0}^{\infty} \frac{(k)_m}{(v+k+2)_{n+i+m}} \\
 &\quad \left. \cdot \frac{[\lambda\beta t(ct-\theta)]^n}{n!} \frac{[\beta(ct-\theta)]^m}{m!} \frac{[\mu(ct-\theta)]^i}{i!} \right]
 \end{aligned}$$

lo que da inmediatamente (2.2.12)

Corolario 1: Dos resultados particulares para el lema 1

1. Si $\theta = k = 0$ en (2.2.10) entonces para $t > 0$

$$f(t) = e^{-\beta t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i t^{i+v-1}}{i! \Gamma(i+v)} \quad (2.2.16)$$

$$g(t) = e^{-(\lambda+\beta c)t} \frac{(ct)^{v-1}}{\Gamma(v)} \left(c\Phi_2(v; \lambda\beta ct^2; \mu ct) - \frac{\lambda\beta(ct)^2}{v(v+1)} \Phi_2(v+2; \lambda\beta ct^2; \mu ct) \right) \quad (2.2.17)$$

2. Si $k = 0$ en (2.2.10) entonces

$$f(t) = e^{-\beta(t-\theta)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i (t-\theta)^{i+v-1}}{i! \Gamma(i+v)}, \quad t > 0 \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} \frac{(ct-\theta)^{v-1}}{\Gamma(v)} \left(c\Phi_2(v; \lambda\beta t(ct-\theta), \mu(ct-\theta)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda\beta(ct-\theta)^2}{v(v+1)} \Phi_2(v+2; \lambda\beta t(ct-\theta), \mu(ct-\theta)) \right), \quad ct > \theta
 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Prueba: Se prueba 2, ya que 1 se obtiene simplemente reemplazando $\theta = 0$

54 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Utilizando la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{\frac{\mu}{\rho+\beta}}}{(\rho+\beta)^v} e^{-\theta\rho} &= \int_0^\infty e^{-(\rho+\beta)t} e^{\beta\theta} \left(\frac{t-\theta}{\mu}\right)^{\frac{v-1}{2}} I_{v-1}\left(2\sqrt{\mu(t-\theta)}\right) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[e^{-\beta(t-\theta)} \left(\frac{t-\theta}{\mu}\right)^{\frac{v-1}{2}} \sum_{i=0}^\infty \frac{\left(\frac{2\sqrt{\mu(t-\theta)}}{2}\right)^{2i+v-1}}{i!(i+v-1)!} \right] dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[e^{-\beta(t-\theta)} \left(\frac{t-\theta}{\mu}\right)^{\frac{v-1}{2}} (\mu(t-\theta))^{\frac{v-1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^\infty \frac{[\mu(t-\theta)]^i}{i!\Gamma(i+v)} \right] dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[e^{-\beta(t-\theta)} (t-\theta)^{v-1} \sum_{i=0}^\infty \frac{[\mu(t-\theta)]^i}{i!\Gamma(i+v)} \right] dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[e^{-\beta(t-\theta)} \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i (t-\theta)^{v+i-1}}{i!\Gamma(i+v)} \right] dt
 \end{aligned}$$

de aquí se desprende (2.2.18)

Ahora reemplazando (2.2.18) en (2.2.3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{n!\Gamma(n)} \cdot \int_\theta^{ct} y(ct-y)^{n-1} e^{-\beta(ct-y)} e^{-\beta(y-\theta)} \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i (y-\theta)^{i+v-1}}{i!\Gamma(i+v)} dy \\
 &= e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda\beta)^n t^{n-1}}{n!\Gamma(n)} \sum_{i=0}^\infty \frac{\mu^i}{i!\Gamma(i+v)} \\
 &\quad \frac{[ct-\theta]^{n+i+v-1} \Gamma(n)\Gamma(i+v)}{\Gamma(n+i+v+1)} \cdot [ct(n+i+v) - n(ct-\theta)] \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} (ct-\theta)^{v-1}}{t} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda\beta t (ct-\theta))^n}{n!} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^\infty \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \frac{ct(n+i+v)}{\Gamma(n+i+v+1)} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta} (ct-\theta)^{v-1}}{t} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\lambda\beta t (ct-\theta))^n n}{n!} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^\infty \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \cdot \frac{(ct-\theta)}{\Gamma(n+i+v+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}(ct-\theta)^{v-1} \cdot c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \frac{(n+i+v)}{(n+i+v)\Gamma(n+i+v)} \\
 g(t) &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}(ct-\theta)^{v-1}}{t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \\
 &\quad n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \cdot \frac{ct-\theta}{\Gamma(n+i+v+1)}
 \end{aligned}$$

Ahora usando el hecho que

$$(v)_{n+i} = \frac{\Gamma(n+i+v)}{\Gamma(v)}$$

$$\begin{aligned}
 (v+2)_{n+i} &= \frac{\Gamma(n+i+v+2)}{\Gamma(v+2)} \\
 &= \frac{\Gamma(n+i+v+2)}{(v+1)\Gamma(v+1)} = \frac{\Gamma(n+i+v+2)}{v(v+1)\Gamma(v)}
 \end{aligned}$$

y que haciendo para $n=1$ $\lambda\beta[ct-\theta]^2 \rightarrow n=0$ $\lambda\beta[ct-\theta]^2$
 $n=2$ $\lambda\beta^2 t(t-\theta)^3 \rightarrow n=1$ $\lambda^2\beta^2 t(t-\theta)^3$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}(ct-\theta)^{v-1}c}{\Gamma(v)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \cdot \frac{1}{(v)_{n+i}} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}[ct-\theta]^{v-1}\lambda\beta(ct-\theta)^2}{v(v+1)\Gamma(v)} \\
 &\quad \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \frac{1}{(v+2)_{n+i}} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta\theta}[ct-\theta]^{v-1}}{\Gamma(v)} \left[c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(v)_{n+i}} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda\beta t(ct-\theta)^2}{\Gamma(v+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(v+2)_{n+i}} \frac{(\lambda\beta t(ct-\theta))^n}{n!} \frac{(\mu(ct-\theta))^i}{i!} \right], \quad ct > \theta
 \end{aligned}$$

obteniéndose inmediatamente (2.2.19)

56 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

De Srivastara y Liarlsson [13] se tiene que

$$\sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p (\alpha_i)_{m_1+m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{\prod_{i=1}^q (\beta_i)_{m_1+m_2} m_1! m_2!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n (z_1 + z_2)^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n n!}$$

en resumen

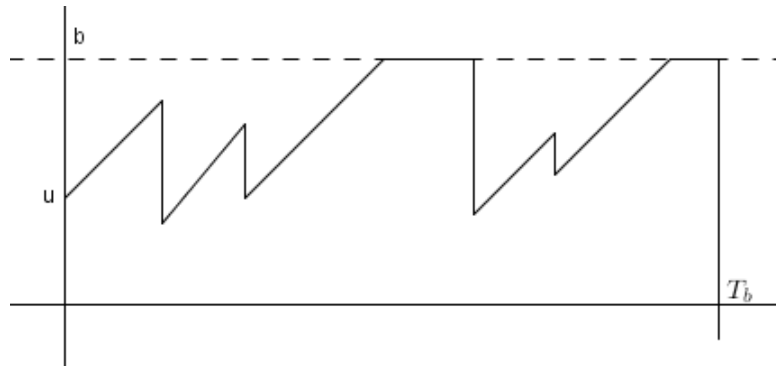
$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1)_{m_1+m_2}} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{m_1! m_2!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1)_n} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = {}_0F_1(; \beta_1; (z_1 + z_2)) \end{aligned}$$

con lo cual por ejemplo (2.2.17) se puede escribir como

$$\begin{aligned} g(t) = & e^{-(\lambda+\beta c)t} \frac{(ct)^{v-1}}{\Gamma(v)} \cdot [c \cdot {}_0F_2(; v; ct(\lambda\beta t + \mu)) \\ & - \frac{\lambda\beta(ct)^2}{v(v+1)} {}_0F_1(; v+2; ct(\lambda\beta t + \mu))] \end{aligned}$$

2.3. Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante

Ahora se introduce una barrera de dividendos constante al modelo de riesgo clásico, esto es, cuando el excedente alcanza el nivel b , la prima es pagada como dividendos de modo que el excedente permanece en el nivel b hasta que una nueva reclamación hace que caiga abajo de b .



2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 57

Sea $\{U_b(t) : t \geq 0\}$ el proceso de excedente correspondiente al capital inicial $U_b(0) = u$ bajo una estrategia de barrera de dividendos constante con nivel b

Entonces $\{U_b(t); t \geq 0\}$ puede ser expresado como

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), & U_b(t) < b \\ -dS(t) & U_b(t) = b \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Sea $T_b = \inf\{t; U_b(t) < 0\}$ el momento de la ruina (con $T_b = \infty$ si la ruina no ocurre) para el proceso de excedente modificado en (2.3.1)

Es bien conocido que la ruina es segura para este modelo y por tanto se esta interesado en encontrar la función de densidad de probabilidad (fpd) de T_b

Se define

$$\begin{aligned} \phi_{b,\delta}(u) &= E [e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty)] \\ &= E [e^{-\delta T_b}], \quad 0 < u \leq b < \infty \end{aligned}$$

como la transformada de Laplace de T_b con $\phi_{\infty,\delta}(u) = \phi_\delta(u)$

Si $p(x) = \beta e^{-\beta x}$ se tiene que

$$\phi_{b,\delta}(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru} + \frac{\beta - R}{\beta} R e^{-Rb} \frac{(p + \beta)e^{\rho u} - (\beta - R)e^{-Ru}}{(p + \beta)\rho e^{\rho b} - (\beta - R)R e^{-Rb}} \quad 0 \leq u \leq b \quad (2.3.2)$$

Prueba: Sea τ el momento en el cual el excedente alcanza por la primera vez el nivel b en el caso que para $u < b$ no ocurran reclamaciones antes de τ esto es $U(\tau) = b = u + c\tau$, es decir,

$$\tau = \frac{b - u}{c}$$

Entonces condicionando sobre el momento, el monto de la primera reclamación y de cuando la primera reclamación ocurre, o no, antes de τ , se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_{b,\delta}(u) &= \int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_0^{u+ct} \phi_{b,\delta}(u + ct - x) p(x) dx + \int_{u+ct}^\infty p(x) dx \right] dt \\ &\quad + \int_\tau^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_0^b \phi_{b,\delta}(b - x) p(x) dx + \int_b^\infty p(x) dx \right] dt \end{aligned}$$

58 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

ahora haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} s &= u + ct & t &= 0 & s &= u \\ & & t &= \tau & s &= u + c\tau = b \\ dt &= \frac{1}{c} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{b,\delta}(u) &= \frac{1}{c} \int_u^b \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \left[\int_0^s \phi_{b,\delta}(s-x)p(x)dx + \int_s^\infty p(x)dx \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_b^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \left[\int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx + \int_b^\infty p(x)dx \right] ds \\ ce^{-\frac{\lambda+\delta}{c}u} \phi_{b,\delta}(u) &= \lambda \int_u^b e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}} \left[\int_0^s \phi_{b,\delta}(s-x)p(x)dy + \int_s^\infty p(x)dx \right] ds \\ &\quad + \lambda \int_b^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}} \left[\int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx + \int_b^\infty p(x)dx \right] ds \end{aligned}$$

diferenciando con respecto a u

$$\begin{aligned} c \left[e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \phi'_{b,\delta}(u) + \phi_{b,\delta}(u) \left[-\frac{(\lambda+\delta)}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \right] \right] \\ = -\lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \left[\int_0^u \phi_{b,\delta}(u-x)p(x)dx + \int_u^\infty p(x)dx \right] \\ ce^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \phi'_{b,\delta}(u) - (\lambda+\delta)e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \phi_{b,\delta}(u) \\ = -\lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \int_0^u \phi_{b,\delta}(u-x)p(x)dx - \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} [1 - P(u)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\phi'_{b,\delta}(u) - (\lambda+\delta)\phi_{b,\delta}(u) &= -\lambda \int_0^u \phi_{b,\delta}(u-x)p(x)dy - \lambda [1 - P(u)] \\ \phi'_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi_{b,\delta}(u-x)p(x)dx - \frac{\lambda}{c} [1 - P(u)] \quad (*) \\ \phi'_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi_{b,\delta}(x)p(u-x)dx - \frac{\lambda}{c} [1 - P(u)] \quad (+) \end{aligned}$$

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 59

Ahora si $u = b$

$$\begin{aligned}\phi_{b,\delta}(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx + \int_b^\infty p(x)dx \right] dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \left[\int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx + (1-P(b)) \right] \quad (**)\end{aligned}$$

y de (*) se tiene que

$$\begin{aligned}\phi'_{b,\delta}(b) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx - \frac{\lambda}{c} [1-P(b)] \\ \phi_{b,\delta}(u) &= \frac{c}{\lambda+\delta} \phi'_{b,\delta}(b) + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \int_0^b \phi_{b,\delta}(b-x)p(x)dx + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} [1-P(b)]\end{aligned}$$

igualando esta expresión con (**) se tiene que

$$\frac{c}{\lambda+\delta} \phi'_{b,\delta}(u) \Big|_{u=b} = 0$$

con lo cual se obtiene la condición de frontera

$$\phi'_{b,\delta}(u) \Big|_{u=b} = 0$$

ahora reemplazando $p(x) = \beta e^{-\beta x}$ en (+)

$$\begin{aligned}\phi'_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \beta e^{-\beta(u-x)} \phi_{b,\delta}(x)dx - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \int_0^u \beta e^{\beta x} \phi_{b,\delta}(x)dx - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \quad (+++)\end{aligned}$$

diferenciando nuevamente

$$\begin{aligned}\phi''_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi'_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} \left[e^{-\beta u} \beta e^{\beta u} \phi_{b,\delta}(u) \right. \\ &\quad \left. - \beta e^{-\beta u} \int_0^u \beta e^{\beta x} \phi_{b,\delta}(x)dx \right] + \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \\ \phi''_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi'_{b,\delta}(u) + \frac{\lambda\beta e^{-\beta u}}{c} \int_0^u \beta e^{\beta x} \phi_{b,\delta}(x)dx - \frac{\lambda\beta}{c} \phi_{b,\delta}(u) + \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u}\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \int_0^u \beta e^{\beta x} \phi_{b,\delta}(x)dx = \frac{(\lambda+\delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} - \phi'_{b,\delta}(u)$$

60 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

la expresión anterior queda igual a

$$\begin{aligned}\phi''_{b,\delta}(u) &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \phi'_{b,\delta}(u) + \frac{\beta(\lambda + \delta)}{c} \phi_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} - \beta \phi'_{b,\delta}(u) - \frac{\lambda\beta}{c} \phi_{b,\delta}(u) + \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \\ \phi''_{b,\delta}(u) &= \left[\frac{(\lambda + \delta)}{c} - \beta \right] \phi'_{b,\delta}(u) + \frac{\beta\delta}{c} \phi_{b,\delta}(u) \\ \phi''_{b,\delta}(u) + \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) \phi'_{b,\delta}(u) - \frac{\beta\delta}{c} \phi_{b,\delta}(u) &= 0\end{aligned}$$

la solución general de esta ecuación es

$$\phi_{b,\delta}(u) = \eta_1 e^{\rho u} + \eta_2 e^{-Ru}$$

donde $\rho > 0$ y $-R < 0$ son las raíces de la ecuación característica

$$s^2 + \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) s - \frac{\beta\delta}{c} = 0$$

ahora reemplazando la solución general en (++)

$$\begin{aligned}\eta_1 \rho e^{\rho u} - \eta_2 R e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} [\eta_1 e^{\rho u} + \eta_2 e^{-Ru}] \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \int_0^u e^{\beta x} (\eta_1 e^{\rho x} - \eta_2 e^{-Rx}) dx - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ \eta_1 \rho e^{\rho u} - \eta_2 R e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} [\eta_1 e^{\rho u} + \eta_2 e^{-Ru}] - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \eta_1 \int_0^u e^{(\beta+\rho)x} dx \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \eta_1 \int_0^u e^{(\beta-R)x} dx - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \\ \eta_1 \rho e^{\rho u} - \eta_2 R e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} [\eta_1 e^{\rho u} + \eta_2 e^{-Ru}] - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{\eta_1}{\beta + \rho} (e^{(\beta+\rho)u} - 1) \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{\eta_2}{\beta - R} (e^{(\beta-R)u} - 1) - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ \eta_1 \rho e^{\rho u} - \eta_2 R e^{-Ru} &= \frac{(\lambda + \delta)}{c} \eta_1 e^{\rho u} + \frac{(\lambda + \delta)}{c} \eta_2 e^{-Ru} - \frac{\lambda\beta}{c} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} e^{\rho u} \\ &\quad + \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-Ru} \frac{\eta_2}{(\beta - R)} \\ &\quad + \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{\eta_2}{(\beta - R)} - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u}\end{aligned}$$

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 61

$$\begin{aligned} & \eta_1 e^{\rho u} \left[\rho - \frac{(\lambda + \delta)}{c} + \frac{\lambda \beta}{c(\beta + \rho)} \right] + \eta_2 e^{Ru} \left[-R - \frac{(\lambda + \delta)}{c} + \frac{\lambda \beta}{c(\beta - R)} \right] \\ &= \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} e^{-\beta u} + \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_2}{(\beta - R)} e^{-\beta u} - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1 e^{\rho u}}{(\beta + \rho)} \left[\rho(\beta + \rho) - \frac{\lambda + \beta}{c}(\beta + \rho) + \frac{\lambda \beta}{c} \right] + \\ & \frac{\eta_2 e^{-Ru}}{(\beta - R)} \left[-R(\beta - R) - \frac{(\lambda + \delta)}{c}(\beta - R) + \frac{\lambda \beta}{c} \right] \\ &= \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} e^{-\beta u} + \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_2}{(\beta - R)} e^{-Ru} - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_1 e^{-\rho u}}{(\beta + \rho)} \left[\rho^2 + \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) \rho - \frac{\beta \delta}{c} \right] + \frac{\eta_2 e^{-Ru}}{(\beta - R)} \left[R^2 - \left(\beta - \frac{\lambda + \delta}{c} \right) R - \frac{\beta \delta}{c} \right] \\ &= \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} e^{-\beta u} + \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_2}{(\beta + R)} e^{-Ru} - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} e^{-\beta u} + \frac{\lambda \beta}{c} \frac{\eta_2}{(\beta - R)} e^{-\beta u} &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ \frac{\lambda \beta}{c} e^{-\beta u} \left[\frac{\eta_1}{\beta + \rho} + \frac{\eta_2}{\beta - R} \right] &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \\ \frac{\eta_1}{(\beta + \rho)} + \frac{\eta_2}{(\beta - R)} &= \frac{1}{\beta} \quad (\otimes) \end{aligned}$$

de la condición de frontera

$$\eta_1 \rho e^{\rho u} - \eta_2 R e^{-Ru} = 0$$

de manera que

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{R e^{-Rb}}{\rho e^{\rho b}}$$

62 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

dividiendo (\otimes) por η_2

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\beta + \rho} + \frac{1}{\beta - R} &= \frac{1}{\beta \eta_2} \\ \frac{Re^{-Rb}}{\rho e^{\rho b}} \cdot \frac{1}{\beta + \rho} + \frac{1}{\beta - R} &= \frac{1}{\beta \eta_2} \\ \frac{(\beta - R)Re^{-Rb} + \rho e^{\rho b}(\beta + \rho)}{(\beta + \rho)(\beta - R)\rho e^{\rho b}} &= \frac{1}{\beta \eta_2} \\ \eta_2 &= \frac{1}{\beta} \frac{(\beta + \rho)(\beta - R)\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{Re^{-Rb}}{\rho e^{\rho b}} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{(\beta + \rho)(\beta - R)\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \\ \eta_1 &= \frac{1}{\beta} \frac{Re^{-Rb}(\beta + \rho)(\beta - R)}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \end{aligned}$$

con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_{b,\delta}(u) &= \frac{1}{\beta} \frac{Re^{-Rb}(\beta + \rho)(\beta - R)}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} e^{\rho u} + \frac{1}{\beta} \frac{(\beta + \rho)(\beta - R)\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} e^{-Ru} \\ &= \frac{\beta - R}{\beta} Re^{-Rb} \left[\frac{(\beta + \rho)e^{\rho u}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \right] \\ &\quad + \frac{\beta - R}{\beta} \rho e^{\rho b} \left[\frac{(\beta + \rho)e^{-Ru}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \right] \\ &\quad + \frac{\beta - R}{\beta} Re^{-Rb} \left[\frac{(\beta + \rho)e^{-Ru}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \right] \\ &\quad - \frac{\beta - R}{\beta} Re^{-Rb} \left[\frac{(\beta + \rho)e^{-Ru}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \right] \\ \phi_{b,\delta}(u) &= \frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{\beta} \left[\frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{(\beta - R)Re^{-Rb} + (\beta + \rho)\rho e^{\rho b}} + \frac{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b}}{(\beta - R)Re^{-Rb} + (\beta + \rho)\rho e^{\rho b}} \right] \\ &\quad + \frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{\beta} \left[\frac{(\rho + \beta)e^{\rho u} - (\beta - R)e^{-Ru}}{(\rho + \beta)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \right] \end{aligned}$$

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 63

la cual es (2.3.2)

Una forma equivalente para (2.3.2) se puede obtener recordando de (2.2.8) que $R - \rho = \beta - \frac{(\lambda + \delta)}{c}$ y adicionalmente $R\rho = \frac{\beta\delta}{c}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{(\beta + \rho)(\beta - R)}{\beta} &= \frac{\beta^2 - \beta R + \beta\rho - \rho R}{\beta} \\
 &= \frac{\beta^2 - (R - \rho)\beta - R\rho}{\beta} \\
 &= \frac{\beta^2 - [\beta - \frac{\lambda + \delta}{c}]\beta - \frac{\beta\delta}{c}}{\beta} \\
 &= \frac{\frac{\beta\lambda}{c}}{\frac{\beta}{1}} \\
 &= \frac{\lambda}{c}
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \eta_2 &= \frac{\lambda}{c} \frac{\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \\
 \eta_1 &= \frac{Re^{-Rb}}{\rho e^{\rho b}} \cdot \frac{\lambda}{c} \frac{\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \\
 &= \frac{\lambda}{c} \frac{Re^{-Rb}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}}
 \end{aligned}$$

Al final obteniéndose

$$\begin{aligned}
 \phi_{b,\delta}(u) &= \frac{\lambda}{c} \frac{Re^{-Rb}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \cdot e^{\rho u} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{c} \frac{\rho e^{\rho b}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}} \cdot e^{-Ru} \\
 &= \frac{\lambda}{c} \frac{\rho e^{\rho b - Ru} + Re^{-Rb + \rho u}}{(\beta + \rho)\rho e^{\rho b} + (\beta - R)Re^{-Rb}}
 \end{aligned}$$

Ahora primero se deriva la fdp de T , de (2.2.6) se tiene que

$$\phi_\delta(u) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Ru} = \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \cdot e^{\frac{\lambda\beta}{c} u}$$

64 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Sea $\zeta(t; u)$ la fdp del momento de ruina en el modelo de riesgo clasico y $\bar{\zeta}(t, u)$ una función tal que

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \zeta(t; u) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{\zeta}(t; u) dt\end{aligned}$$

de (2.2.16) y (2.2.17) con $\mu = \frac{\lambda\beta}{c}u$ y $v = 1$ se obtiene fácilmente y para $t > 0$ que

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}(t; u) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \cdot e^{-\beta t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\lambda\beta}{c}u\right]^i t^i}{i!\Gamma(i+1)} \\ &= e^{-(u+t)\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta} \frac{\lambda}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\lambda\beta}{c}t\right]^i t^i}{i!\Gamma(i+1)} \\ &= \frac{e^{-\beta(u+t)}}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{i+1} (\mu t)^i}{i!\Gamma(i+1)}\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}\zeta(t; u) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta u} \cdot e^{-(\lambda+\beta c)t} \cdot \left[c\Phi_2(1; \lambda\beta ct^2, \lambda\beta ut) - \frac{\lambda\beta(ct)^2}{2} \cdot \Phi_2(3; \lambda\beta ct^2, \lambda\beta ut) \right] \\ &= \lambda e^{-(\lambda+\beta c)t-\beta u} \left[\Phi_2(1; \lambda\beta ct^2, \lambda\beta ut) - \frac{\lambda\beta ct^2}{2} \Phi_2(3; \lambda\beta ct^2, \lambda\beta ut) \right]\end{aligned}$$

$\zeta(t; u)$ en términos de la función ${}_0F_1$

$$\zeta(t; u) = \lambda e^{-(\lambda+\beta c)t-\beta u} \cdot \left[{}_0F_1(; 1; \lambda\beta t(ct+u)) - \frac{\lambda\beta ct^2}{2} {}_0F_1(3; \lambda\beta t(u+ct)) \right]$$

Ahora sea $\zeta(t; u, b)$ la fdp del momento de la ruina para el modelo de riesgo clásico con una barrera de dividendos constante, y sea $\bar{\zeta}(t; u, b)$ una función tal que

$$\begin{aligned}\phi_{b,\delta}(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \zeta(t; u, b) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{\zeta}(t; u, b) dt\end{aligned}$$

Nótese que la inversa del primer término de $\phi_{b,\delta}(u)$ en (2.3.2) con respecto a δ está dada por (2.3.3) por lo tanto solo se considera el segundo término en

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 65

(2.3.2) denotado por (II), es decir

$$\begin{aligned}
 (II) &= \frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{\beta(\beta + \rho)\rho e^{\rho b}} \cdot \frac{(\rho + \beta)e^{\rho b} - (\beta - R)Re^{-Ru}}{1 + \frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{(\rho + \beta)\rho e^{\rho b}}} \\
 &= \frac{1}{\beta} [(\rho + \beta)e^{\rho u} - (\beta - R)e^{-Ru}] \frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{(\rho + \beta)\rho e^{\rho b}} \\
 &\quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(\beta - R)Re^{-Rb}}{(\rho + \beta)\rho e^{\rho b}} \right]^k \\
 &= \frac{1}{\beta} [(\rho + \beta)e^{\rho u} - (\beta - R)e^{-Ru}] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(\beta - R)R}{(\rho + \beta)\rho} \right]^{k+1} e^{-(k+1)(R+\rho)b}
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ahora de (2.2.9) se desprende que

$$\begin{aligned}
 \frac{(\beta - R)R}{(\rho + \beta)\rho} &= \frac{\frac{\lambda\beta}{c} \cdot R}{(\rho + \beta)^2\rho} \\
 &= \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{(\rho + \beta)^2\rho} \left(\beta - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta} \right)
 \end{aligned}$$

y de esta manera

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{(\beta - R)R}{(\rho + \beta)\rho} \right]^{k+1} &= \frac{\left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}} \left[\beta - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta} \right]^{k+1} \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \beta^{k+1-i} \left[\frac{-\lambda\beta}{\rho + \beta} \right]^i \tag{2.3.5} \\
 &= \frac{\left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\left(-\frac{\lambda\beta}{c}\right)^i \beta^{k+1}}{(\rho + \beta)^i}
 \end{aligned}$$

de nuevo de (2.2.9)

$$\beta - R = \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{\rho + \beta}$$

66 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

y por (2.3.5) podemos expresar (2.3.4) como

$$\begin{aligned}
 (II) &= \frac{1}{\beta} \left[(\rho + \beta)e^{\rho u} - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta}\right)u} \right] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c}\right)^{k+1}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^i}{(\rho + \beta)^i} e^{-(k+1)\left(\rho + \beta - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta}\right)b} \\
 &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c}\right)^{k+1} \cdot e^{-(k+1)\beta b} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{-\lambda}{c}\right)^i \\
 &\quad \cdot \frac{(\rho + \beta)e^{\rho u} e^{-(k+1)\left(\rho - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta}\right)b}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}(\rho + \beta)^i} - \left[\frac{\lambda\beta}{c} \cdot \frac{e^{-\left(\beta - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta}\right)u} e^{-(k+1)\left(\rho - \frac{\lambda\beta}{\rho + \beta}\right)b}}{\rho^{k+1}(\rho + \beta)^{2(k+1)}(\rho + \beta)^i} \right]
 \end{aligned}$$

el término entre corchetes se puede simplificar así

$$\frac{e^{-[(k+1)b-u]\rho}}{\rho^{k+1}} \frac{e^{\frac{(k+1)b\lambda\beta}{\rho + \beta}}}{(\rho + \beta)^{2k+i+1}} - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{e^{-(k+1)b\rho}}{\rho^{k+1}} \frac{e^{\frac{[u+(k+1)b]\lambda\beta}{\rho + \beta}}}{(\rho + \beta)^{2k+i+3}}$$

con la cual se tiene que

$$\begin{aligned}
 (II) &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c}\right)^{k+1} e^{-(k+1)\beta b} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{-\lambda}{c}\right)^i \\
 &\quad \frac{e^{-[(k+1)b-u]\rho}}{\rho^{k+1}} e^{\frac{(k+1)b - \lambda\beta}{\rho + \beta}} - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{e^{-(k+1)b\rho}}{\rho^{k+1}} \frac{e^{\frac{[u+(k+1)b]\lambda\beta}{\rho + \beta}}}{(\rho + \beta)^{2k+i+3}} \\
 &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c}\right)^{k+1} e^{-(k+1)\beta b} \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{-\lambda}{c}\right)^i \\
 &\quad \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b}}{(\rho + \beta)^{2k+i+1}} \frac{e^{-[(k+1)b-u]\rho}}{\rho^{k+1}} - \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c}\right)^{k+2} e^{-[u+(k+1)b]\beta} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{-\lambda}{c}\right)^i \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}[u+(k+1)b]}}{(\rho + \beta)^{2k+i+3}} \frac{e^{-(k+1)b\rho}}{\rho^{k+1}}
 \end{aligned}$$

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 67

expresando de manera compacta esta expresión

$$(II) = Y(\rho; u; b) - Z(\rho; u; b)$$

ahora sea

$$\begin{aligned} Y(\rho; u; b) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{y}(t; u; b) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} y(t; u; b) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(\rho; u; b) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{z}(t; u; b) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} z(t; u; b) dt \end{aligned}$$

de (2.2.3) se tiene que para

$$Y(\rho; u; b), \quad \mu = \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b, \quad v = 2k + i + 1$$

$$\theta = (k+1)b - u, \quad \mu = k + 1$$

y para $Z(\rho; u; b)$; $\mu = \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b]$; $v = 2k + i + 3$, $\theta = (k+1)b$ y $x = k+1$, usando (2.2.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{y}(t; u; b) &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t+u}{b} - 1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right)^{k+1} e^{-(k+1)\beta b} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(-\frac{\lambda}{c} \right)^i \\ &\quad \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b \right]^j [t+u - (k+1)b]^{j+3k+i+3}}{j! \Gamma(j+2k+i+1) \Gamma(k+1)} \\ &\quad \cdot \int_0^1 e^{-\beta[t+u-(k+1)b]y} (1-y)^k y^{j+2k+1} dy, \quad t+u > b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z}(t; u; b) &= \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{b} - 1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right) e^{-[u+(k+1)b]\beta} \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(-\frac{\lambda}{c} \right)^i \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b] \right]^i [t - (k+1)b]^{j+3k+i+5}}{j! \Gamma(j+2k+i+3) \Gamma(k+1)} \\ &\quad \cdot \int_0^1 e^{-\beta[t-(k+1)b]y} (1-y)^k y^{j+2k+i+2} dy, \quad t > b \end{aligned}$$

68 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

de (2.2.12) se tiene que para $Y(\cdot)$

$$g(t) = \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t + \beta(k+1)b - \beta u} [ct + u - (k+1)b]^{3k+i+1}}{\Gamma(3k+i+2)}$$

$$\left[c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+2; & \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b] \\ & \beta[ct + u - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda\beta[ct + u - (k+1)b]^2}{(3k+i+2)(3k+i+3)} \cdot \Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+4; & \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b] \\ & \beta[ct + u - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right]$$

Ahora

$$y(t; u; b) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct-1}{b} - 1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right)^{k+1} \cdot e^{-(k+1)\beta b} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(-\frac{\lambda}{c} \right)^i g(t)$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t - \beta u}}{\beta} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct+u}{b} - 1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right)^{k+1}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c} \right) [ct + u - (k+1)b]^{3k+i+1}}{\Gamma(3k+i+2)}$$

$$\left[c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+2; & \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b] \\ & \beta[ct + u - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda\beta[ct + u - (k+1)b]^2}{(3k+i+2)(3k+i+3)} \cdot c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+4; & \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b] \\ & \beta[ct + u - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right]$$

(2.3.6)

como

$$ct + u > b \text{ entonces } t > \frac{b-u}{c}$$

2.3 Función de densidad del tiempo de ruina en presencia de una barrera de dividendos constante 69

de igual manera para $Z(\cdot)$ se tiene que

$$g(t) = \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t+\beta(k+1)b}[ct - (k+1)b]^{3k+i+3}}{\Gamma(3k+i+4)}$$

$$\left[c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+4; & \lambda\beta t[ct - (k+1)b] \\ & \beta[ct - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right]$$

$$- \frac{\lambda\beta[ct - (k+1)b]^2}{(3k+i+4)(3k+i+5)}$$

$$c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+6; & \lambda\beta t[ct - (k+1)b] \\ & \beta[ct - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \end{matrix} \right) \left. \right]$$

ahora

$$z(t; u; b) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct}{b}-1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right)^{k+2} e^{-[u+(k+1)b]\beta} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left(-\frac{\lambda}{c} \right)^i g(t)$$

lo que implica que

$$z(t; u; b) = \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t-\beta u} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct}{b}-1 \rfloor} (-1)^k \left(\frac{\lambda\beta^2}{c} \right)^{k+2}}{\beta^2}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c} \right)^i [ct - (k+1)b]^{3k+i+3}}{\Gamma(3k+i+4)}$$

$$\left[c\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+4; & \lambda\beta t[ct - (k+1)b] \\ & \beta[ct - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \end{matrix} \right) \right]$$

$$- \frac{\lambda\beta[ct - (k+1)b]^2}{(3k+i+4)(3k+i+5)}$$

$$\Phi_2^{(3)} \left(\begin{matrix} k+1; 3k+i+6; & \lambda\beta t[ct - (k+1)b] \\ & \beta[ct - (k+1)b] \\ & \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \end{matrix} \right) \left. \right] \quad (2.3.7)$$

$$ct > b \text{ entonces } t > \frac{b}{c}$$

70 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

De esta manera la fdp del momento de la ruina para el modelo de riesgo clásico con una barrera de dividendos constante es

$$\zeta(t; u, b) = \begin{cases} \zeta(t; u) & 0 \leq t \leq \frac{b-u}{c} \\ \zeta(t; u) + y(t; u; b) & \frac{b-u}{c} < t \leq \frac{b}{c} \\ \zeta(t; u) + y(t; u; b) - z(t; u, b) & t > \frac{b}{c} \end{cases} \quad (2.3.8)$$

2.4. Descomposición de la densidad del tiempo de ruina

Para el modelo de riesgo con una barrera de dividendos constante, hay dos posibilidades para que la ruina ocurra: [1] La ruina ocurre sin pago de dividendos (sin que el excedente alcance la barrera de dividendos), [2] La ruina ocurre con pago de dividendos, por lo tanto la densidad obtenida puede ser descompuesta en dos partes:

1. La fdp del momento de la ruina sin pago de dividendos, denotada como $\xi(t; u; b)$
2. La fdp del momento de la ruina con pago de dividendos que es igual a $\zeta(t; u, b) - \xi(t; u; b)$

A continuación se deriva $\xi(t; u; b)$ para $0 \leq u \leq b$, se define

$$T_u^b = \inf\{t \geq 0 \mid U(t) = b\}$$

como el primer momento en el que el excedente alcanza b desde u . Sea $H(u; b)$ la transformada de Laplace del primer momento en que se alcanza b sin que la ruina haya ocurrido, y sea $L(u; b)$ la transformada de Laplace del momento de la ruina sin que el excedente halla alcanzado b , es decir

$$H(u, b) = E \left[e^{-\delta T_u^b} I(T_u^b < T) \right] \quad (2.4.1)$$

$$L(u, b) = E \left[e^{-\delta T} I(T < T_u^b) \right] \quad (2.4.2)$$

Nota: Para $\delta = 0$ sea $\xi(u, b)$ la probabilidad de que la ruina ocurra desde u sin que el proceso de excedente alcance el nivel $b > u$ y $X(u, b)$ la probabilidad

de que el proceso de excedente alcance el nivel b sin que la ruina haya ocurrido. Estas dos probabilidades son complementarias es decir

$$\xi(u, b) + X(u, b) = 1$$

Para encontrar expresiones para $\xi(u, b)$ y $X(u, b)$ considere las probabilidades de ruina definitiva y de supervivencia en un proceso de excedente no restringido, asumiendo que $c > \lambda\mu$, lo que implica que $U(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ por lo tanto si la supervivencia ocurre desde u , entonces el proceso de excedente debe pasar el nivel $b > u$ en algún punto del tiempo. Como la distribución del momento de la próxima reclamación desde el momento en que el excedente alcanza el nivel b es exponencial, la conducta probabilística del proceso de excedente una vez alcanza el nivel b es independiente de su conducta antes de obtener b . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \chi(u; b)\phi(b) \\ 1 - \psi(u) &= \chi(u; b)(1 - \psi(b)) \\ \chi(u; b) &= \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)} \end{aligned}$$

de igual manera si la ruina ocurre desde el excedente inicial

$$\psi(u) = \xi(u, b) + \chi(u, b)\psi(b)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \xi(u, b) + \frac{[1 - \psi(u)]}{[1 - \psi(b)]}\psi(b) \\ \xi(u, b) &= \psi(u) - \frac{[1 - \psi(u)]}{[1 - \psi(b)]}\psi(b) \\ \xi(u, b) &= \frac{[1 - \psi(b)]\psi(u) - [1 - \psi(u)]\psi(b)}{[1 - \psi(b)]} \\ \xi(u, b) &= \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)} < 1 \text{ ya que } \psi(u) < 1 \\ &= P(T < T_u^b) \\ &= \int_0^\infty \xi(t; u; b)dt \end{aligned}$$

lo que implica que $\xi(t; u; b)$ es una fdp defectuosa.

72 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Para el modelo de riesgo clásico, distinguiendo de cuando o no el excedente alcanza el nivel b antes del momento de ruina, se tiene

$$\phi_\delta(u) = L(u, b) + H(u; b)\phi_\delta(b) \quad 0 \leq u < b \quad (2.4.3)$$

$$E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | u(0) = u) = E(e^{-\delta T} I(T_u^b < T)) \cdot E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | u(0) = b) \\ + E(e^{-\delta T} I(T < T_u^b))$$

de lo que se sigue que

$$L(u; b) = \phi_\delta(u) - H(u; b)\phi_\delta(b) \quad (2.4.4)$$

Sean $\xi(t; u; b)$ y $\bar{\xi}(t; u; b)$ dos funciones tales que

$$L(u; b) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \xi(t; u; b) dt \\ = \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{\xi}(t; u; b) dt$$

la idea es encontrar una expresión explícita para $\xi(t; u; b)$ por la técnica de inversa utilizada anteriormente

Gerber y Shiu [11] demuestran que

$$H(u; b) = \frac{e^{\rho u} - \psi_1(u)}{e^{\rho b} - \psi_1(b)} \quad 0 \leq u \leq b \quad (2.4.5)$$

donde $\psi_1(u) = [e^{-\delta T_0} I(T < \infty) | U(0) = u]$ y T_0 es el tiempo de recuperación, el cual se refiere a la primera vez que el excedente alcanzado es cero después de la ruina

Adicionalmente cuando el monto de reclamación es exponencialmente distribuido con parámetro β , se muestra en Gerber y Shiu [12] que

$$\psi_1 = \frac{\beta - R}{\beta + \rho} e^{-Ru}$$

ahora de (2.2.9) se tiene que

$$\beta - R = \frac{\lambda \beta}{\beta + \rho}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\frac{\lambda\beta}{c}}{(\rho + \rho)^2} e^{\left[\frac{\lambda\beta}{c} - \beta\right]u} \\ &= \frac{\lambda\beta}{c} e^{-\beta u} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}u}}{(\rho + \beta)^2}\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

donde ρ y $-R$ son las soluciones de (2.2.7)

$H(u; b)$ puede ser reexpresado como

$$\begin{aligned}H(u; b) &= \frac{e^{\rho u} [1 - \psi_1(u) e^{-\rho u}]}{e^{\rho b} [1 - \psi_1(b) e^{-\rho b}]} \\ &= e^{\rho(u-b)} \frac{[1 - \psi_1(u) e^{-\rho u}]}{[1 - \psi_1(b) e^{-\rho b}]} \\ &= e^{\rho(u-b)} [1 - \psi_1(u) e^{-\rho u}] \sum_{k=0}^{\infty} [\psi_1(u)]^k e^{-k b \rho} \\ &= e^{-\rho(u-b)} \left[1 - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\beta+\rho)u} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}u}}{(\rho + \beta)^2} \right] \\ &\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-k b \rho} \\ &= e^{-\rho(u-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-k b \rho} \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\rho b + \beta u)} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}u}}{(\rho + \beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-k b \rho} \\ &= e^{-\rho(u-b)} + e^{-\rho(u-b)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-k b \rho} \\ &\quad - \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\rho b + \beta u)} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}u}}{(\rho + \beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-k b \rho}\end{aligned}$$

74 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

$$\begin{aligned}
 H(u; b) &= e^{-\rho(u-b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho+\beta)^{2k}} e^{-[(k+1)b-u]\rho} \\
 &\quad - e^{-\beta u} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1} e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}(u+kb)}}{(\rho+\beta)^{2k+2}} e^{-(k+1)b\rho}
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

teniendo presente de (2.2.6) que

$$\phi_{\delta}(b) = \frac{\beta - R}{\beta} e^{-Rb} = \frac{\lambda}{c} e^{-\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}b}}{\rho + \beta}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 H(u; b)\phi_{\delta}(b) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}b}}{\rho + \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^k e^{-k\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}kb}}{(\rho + \beta)^{2k}} e^{-[(k+1)b-u]\rho} \\
 &\quad - \frac{\lambda}{c} e^{-\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}b}}{(\rho + \beta)} e^{-\beta u} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1} e^{-\frac{k\beta}{b}} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}(u+kb)}}{(\rho + \beta)^{2k+2}} e^{-(k+1)b\rho} \\
 &= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+1} e^{-(k+1)\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b}}{(\rho + \beta)^{2k+1}} e^{-[(k+1)b-u]\rho} \\
 &\quad - \frac{e^{-\beta u}}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\beta}{c}\right)^{k+2} e^{-(k+1)\beta b} \frac{e^{\frac{\lambda\beta}{c}[u+(k+1)b]}}{(\rho + \beta)^{2k+3}} e^{-(k+1)b\rho} \\
 &= V(\rho; u; b) - W(\rho; u; b)
 \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 V(\rho; u; b) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} v(\rho; u; b) dt \\
 W(\rho; u; b) &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} w(\rho; u; b) dt
 \end{aligned}$$

De (2.2.10)

$$\hat{f}(\rho) = \frac{e^{\frac{\mu}{(\rho+\beta)}}}{(\rho + \beta)^v} \frac{e^{-\theta\rho}}{\rho^k}$$

2.4 Descomposición de la densidad del tiempo de ruina 75

Se tiene que para $V(\rho; u; b)$ los parámetros son

$$\mu = \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b, \quad v = 2k+1, \quad \theta = (k+1)b - u \quad k = 0$$

y para $W(\rho; u; b)$ son

$$\mu = \frac{\lambda\beta}{c}[u+(k+1)b], \quad v = 2k+3, \quad \theta = (k+1)b \quad \text{y} \quad k = 0 \quad \text{entonces usando (2,2,19)}$$

$$\begin{aligned} v(t; u; b) = & \frac{e^{-(\lambda+\beta c)t - \beta u}}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct+u}{b} - 1 \rfloor} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^{k+1} \frac{[ct + u - (k+1)b]^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\ & \left[c\Phi_2 \left(2k+1; \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b], \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \right) \right. \\ & \left. - \frac{\lambda\beta[ct + u - (k+1)b]^2}{(2k+1)(2k+2)} \right. \\ & \left. \Phi_2 \left(2k+3; \lambda\beta t[ct + u - (k+1)b], \frac{\lambda\beta}{c}(k+1)b[ct + u - (k+1)b] \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

con $\frac{ct+u}{b} > 1$ por lo tanto $t > \frac{b-u}{c}$ y

$$\begin{aligned} w(t; u; b) = & e^{-(\lambda+\beta c)t - \beta u} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{ct}{b} - 1 \rfloor} \left(\frac{\lambda\beta}{c} \right)^{k+2} \frac{[ct - (k+1)b]^{2k+2}}{\Gamma(2k+3)} \\ & \left[c\Phi_2 \left(2k+3; \lambda\beta t[ct - (k+1)b], \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \right) \right. \\ & \left. - \frac{\lambda\beta[ct - (k+1)b]^2}{(2k+3)(2k+4)} \right. \\ & \left. \Phi_2 \left(2k+5; \lambda\beta t[ct + (k+1)b], \frac{\lambda\beta}{c}[u + (k+1)b][ct - (k+1)b] \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

con $\frac{ct}{b} > 1$, así $ct > b \rightarrow t > \frac{b}{c}$

Entonces la función de densidad de probabilidad del momento de ruina sin pago de dividendos es:

$$\xi(t; u, b) = \begin{cases} \zeta(t; u) & 0 \leq t \leq \frac{b-u}{c} \\ \zeta(t; u) - v(t; u; b) & \frac{b-u}{c} < t \leq \frac{b}{c} \\ \zeta(t; u) - v(t; u; b) + w(t; u, b) & t > \frac{b}{c} \end{cases} \quad (2.4.10)$$

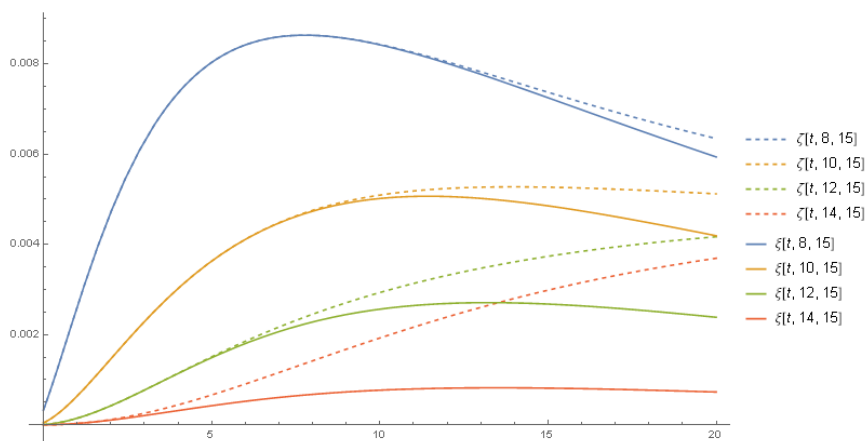
76 La Densidad del Tiempo de la Ruina en el Modelo de Riesgo Clásico Bajo una Estrategia de Barrera de Dividendos Constante

Ahora se presentan tablas para $\xi(t;u,15)$ y $\zeta(t;u,15)$ con valores para $u = 2, 4, \dots, 14$ y algunos valores de t ($1 \leq t \leq 20$) con $c = 1,1$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$ y $b = 15$

t	u=2	u=4	u=6	u=8	u=10	u=12	u=14
1	.101451	.0345522	.00996904	.00260703	.000637577	.00014839	.0000329146
	.101451	.0345522	.00996904	.00260703	.000637577	.00014839	.0000332487
3	.0543238	.033009	.0155311	.00628114	.00228873	.00077125	.000207635
	.0543238	.033009	.0155311	.00628114	.00228873	.000771462	.000258527
5	.0341383	.0266097	.0158551	.00803227	.00363072	.00149095	.000426579
	.0341383	.0266097	.0158551	.00803227	.00363082	.0015102	.000663825
7	.0238166	.0213774	.014705	.00859934	.00447472	.00206837	.000608566
	.0238166	.0213774	.014705	.00859938	.00448202	.00216929	.00116123
10	.0156283	.0159062	.0125246	.00842303	.00501707	.00256513	.000770111
	.0156283	.0159062	.0125249	.00843099	.00509305	.0029341	.00192656
13	.011212	.0123193	.0105681	.00776975	.00501975	.00270878	.000821141
	.011212	.0123197	.0105754	.00782511	.005267	.0034719	.00260492
16	.00852127	.0098552	.00895793	.00698271	.00474211	.00263847	.000803979
	.00852176	.00986129	.00899752	.007149	.00524946	.00384603	.00315468
20	.00627613	.00759454	.0072576	.00593732	.00419134	.00238489	.000729377
	.00628433	.00763529	.00740381	.00634542	.00512062	.00416984	.00369324

Sin negrilla $\xi(t;u,15)$, negrilla $\zeta(t;u,15)$

A continuación se presentan los gráficos para la funciones de densidad para el tiempo de ruina sin pago de dividendos (línea sólida) y la densidad del tiempo de ruina con $b = 15$ (línea discontinua) para los valores de $u = 8, 10, 12, 14$ de arriba hacia abajo con $c = 1,1$



CAPÍTULO 3

Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

3.1. Introducción

De Vylder [6] propuso un método de aproximación a la probabilidad última de ruina en el modelo clásico $\psi(u) = Pr(T < \infty)$; más tarde Dickson y Wong [4] extendieron ésta idea al aproximar los momentos y la distribución del tiempo de ruina. En éste capítulo se aplicará el método expuesto por De Vylder para aproximar la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante.

3.2. El Método de De Vylder

El método de De Vylder propone una aproximación simple a ψ a través de la aproximación de un proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ por un proceso $\{\tilde{U}(t)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$\tilde{U}(t) = u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t),$$

donde el proceso de reclamación agregado $\{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson

78 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

compuesto con parámetro de Poisson $\tilde{\lambda}$ y una distribución de reclamación de individual $\tilde{P}(x) = 1 - \exp\{\tilde{\alpha}x\}$, $x \geq 0$. Los parámetros del proceso aproximado son escogidos por la igualación de los momentos de $U(t)$ y $\tilde{U}(t)$, llevando a

$$\tilde{\alpha} = \frac{3m_2}{m_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\lambda m_2^3}{2m_3^2},$$

y $\tilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}$, así la aproximación de De Vylder a $\psi(u)$ es

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} \exp\left\{-\left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)u\right\}$$

En su artículo De Vylder muestra que ésta aproximación es buena cuando la función generadora de momentos de la distribución del monto de reclamación individual existe, pero no es tan buena cuando la función generadora no existe.

3.3. Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante

Como se vió en el capítulo anterior Li y Lu [10] establecieron una solución explícita para la densidad del tiempo de ruina en el modelo clásico con una barrera de dividendos constante cuando la distribución para el monto de reclamación individual es exponencial $P(x) = 1 - \exp\{\alpha x\}$, $x \geq 0$, solución sobre la cual se aplicará el método de De Vylder quien propone una aproximación simple a ψ a través de la aproximación de un proceso de reserva $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ por un proceso $\{\tilde{U}(t)\}_{t \geq 0}$ dado por

$$\tilde{U}(t) = u + \tilde{c}t - \tilde{S}(t),$$

donde el proceso de reclamación agregado $\{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson compuesto con parámetro de Poisson $\tilde{\lambda}$ y una distribución de reclamación

3.3 Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante 79

individual $\tilde{P}(x) = 1 - \exp\{\tilde{\alpha}x\}$, $x \geq 0$. Los parámetros del proceso aproximado son escogidos por la igualación de los momentos de $U(t)$ y $\tilde{U}(t)$, es decir,

$$E[U(t)] = E[\tilde{U}(t)]$$

lo cual resulta en

$$u + ct - \lambda m_1 t = u + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}t}{\tilde{\alpha}}$$

ahora de la igualdad del segundo momento

$$E[(U(t) - E[U(t)])^2] = E\left[\left(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)]\right)^2\right]$$

y como

$$U(t) - E[U(t)] = -S(t) + \lambda m_1 t$$

lo que equivale a

$$V[S(t)] = V[\tilde{S}(t)]$$

y por lo tanto

$$\lambda m_2 = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^2}$$

y en tercer lugar se tiene

$$E[(U(t) - E[U(t)])^3] = E\left[\left(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)]\right)^3\right]$$

lo que equivale a

$$Sk[S(t)] = Sk[\tilde{S}(t)]$$

de lo que resulta

$$\lambda m_3 = \frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^3}$$

lo que lleva inmediatamente a

$$\tilde{\alpha} = \frac{3m_2}{m_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\lambda m_2^3}{2m_3^2},$$

y

$$\tilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}$$

80 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

La aproximación de De Vylder a $\psi(u)$ es

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} \exp \left\{ - \left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}} \right) u \right\} \quad (3.3.1)$$

Ahora se procederá a ilustrar la aproximación de De Vylder para la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante en el modelo clásico. En primer lugar se ilustrarán algunos ejemplos en los que tanto la densidad del tiempo de ruina con una barrera de dividendos constante $\zeta(t; u, 15)$ como la densidad sin pago de dividendos $\xi(t; u, 15)$ tienen un comportamiento continuo dados que en algunos casos se presentan saltos para $\xi(t; u, b)$.

Para nuestros ejemplos consideramos algunas distribuciones del monto de reclamación individual usadas en algunos artículos y libros tales como la distribución empleada en el libro “Insuranse Risk and Ruin” de Dickson [14] con la que se ilustra la aplicación del método (primer ejemplo), de igual manera las distribuciones usadas en De Vylder [6] y las dos distribuciones finales usadas en Dickson y Wong [4] del tipo Pareto y Lognormal. Sin pérdida de generalidad, se puede escoger $\lambda = m_1 = 1$ así que $c = 1 + \theta$.

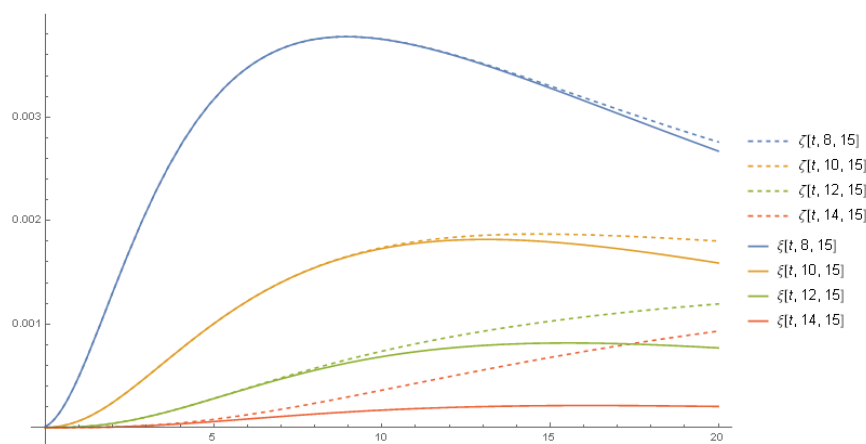
Ejemplo 3.1. Sea la distribución de monto de reclamación individual Erlang (2,2) con densidad $f(x) = 4xe^{-2x}$, $x > 0$. Tomando $c = 1, 2$, de la cual se obtienen los momentos $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{3}{2}$ y $m_3 = 3$, usando las expresiones para la obtención de los parámetros para la aplicación de la aproximación de De Vylder se obtiene lo siguiente: $\tilde{\lambda} = \frac{27}{16}$, $\tilde{\alpha} = \frac{3}{2}$ y $\tilde{c} = \frac{53}{40}$; sustituyendo estos parámetros en (3.3.1) se obtiene la siguiente tabla de la aproximación a la función de densidad de probabilidad $\xi(t; u, 15)$ y $\zeta(t; u, 15)$ con valores para $u = 2, 4, \dots, 14$ y algunos valores de t ($1 \leq t \leq 20$)

3.3 Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante 81

t	$u=2$	$u=4$	$u=6$	$u=8$	$u=10$	$u=12$	$u=14$
1	.0868664 .0868664	.0199998 .0199998	.00343999 .00343999	.000501094 .000501094	.0000652784 .0000652784	$7.83441 \cdot 10^{-6}$ $7.83441 \cdot 10^{-6}$	$8.79278 \cdot 10^{-7}$ $8.8272 \cdot 10^{-7}$
3	.0457741 .0457741	.022498 .022498	.00765716 .00765716	.00209127 .00209127	.00048968 .00048968	.000102046 .000102054	.0000177386 .0000201588
5	.0278656 .0278656	.0184856 .0184856	.00855511 .00855511	.0031734 .0031734	.00100424 .00100424	.000280229 .000281398	.0000583755 .0000794445
7	.018901 .018901	.0147625 .0147625	.00817677 .00817677	.00366025 .00366025	.00140269 .00140325	.000470219 .000479891	.000107616 .000176457
10	.0119438 .0119438	.0107469 .0107469	.00701393 .00701396	.00375256 .00375341	.00173016 .00173926	.000685735 .000738303	.000168855 .000361756
13	.0082761 .0082761	.0081031 .0081031	.0058561 .00585707	.00351003 .0035179	.001818 .00185751	.000793529 .00093055	.000202759 .000556316
16	.00608513 .00608522	.00630173 .00630269	.00488033 .00488681	.00315948 .00318895	.0017655 .00186349	.000816698 .0010686	.00021301 .000734798
20	.00429679 .00429835	.00467957 .00468751	.00385669 .00388663	.00267177 .00276019	.00159046 .00180256	.000769652 .00119469	.000203788 .000931953

Sin negrilla $\xi(t; u, 15)$, negrilla $\zeta(t; u, 15)$

A continuación se presenta los gráficos para la funciones de densidad para el tiempo de ruina sin pago de dividendos (línea solida) y la densidad del tiempo de ruina con $b = 15$ (línea discontinua) para los valores de $u = 8, 10, 12, 14$ de arriba hacia abajo con $c = 1.2$



Ejemplo 3.2 Se ilustra ahora la aproximación por el método de De Vylder para una mezcla de exponenciales con distribución de monto de reclamación individual de la forma:

$$P(x) = 1 - ae^{-\alpha_1 x} - (1 - a)e^{-\alpha_2 x}$$

82 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

para $x \geq 0$, donde

$$\alpha_1 = \frac{a}{1-a}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad a = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{7+s^2} \right]^{1/2}.$$

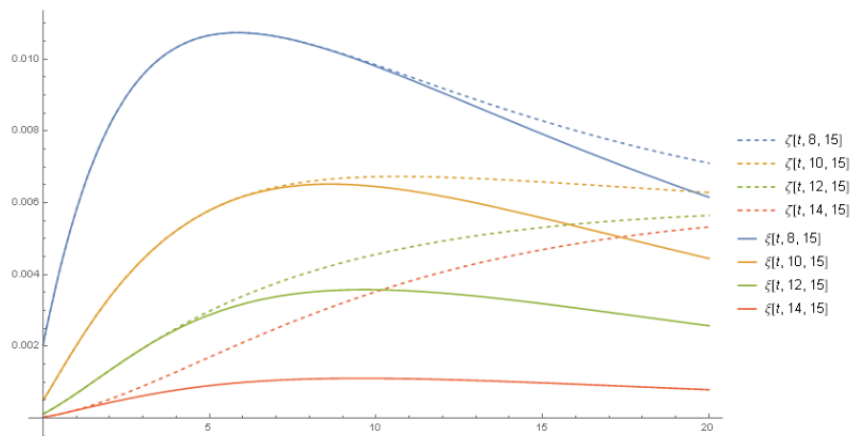
Entonces $m_1 = 1$, $m_2 = 1 - s^2$ y $m_3 = 1,5s^4 + 6s^2 - 1,5$. Esta distribución fue discutida por Bohman [16], a la que nos referiremos como distribución de Bohman y que utilizaremos en otros ejemplos más adelante, en las tablas y gráficas que siguen se ha tomado $c = 1,1$ y $s = \frac{6}{5}$ por lo cual se obtienen los momentos $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{61}{25}$ y $m_3 = \frac{12813}{1250}$ y los parámetros para la aplicación del método de De Vylder $\tilde{\lambda} = \frac{11349050}{18241441}$, $\tilde{\alpha} = \frac{3050}{4271}$ y $\tilde{c} = 0,971225$, al igual que en el ejemplo anterior la aproximación a la función de densidad de probabilidad $\xi(t;u,15)$ y $\zeta(t;u,15)$ con valores para $u = 2, 4, \dots, 14$ y algunos valores de t ($1 \leq t \leq 20$) se muestra en la tabla siguiente:

t	u=2	u=4	u=6	u=8	u=10	u=12	u=14
1	.0999313	.0417011	.0159991	.00581223	.00203082	.000688902	.000228282
	.0999313	.0417011	.0159991	.00581223	.00203082	.000688902	.000228282
3	.0536046	.034945	.0192419	.00956925	.00443561	.00195081	.000624088
	.0536046	.034945	.0192419	.00956925	.00443561	.00195081	.000891425
5	.0340709	.0273381	.0181006	.0106645	.0057922	.00287925	.000905747
	.0340709	.0273381	.0181006	.0106645	.0057922	.00287925	.00170125
7	.0239624	.021721	.0161476	.0106327	.00639713	.00338433	.00105489
	.0239624	.021721	.0161476	.0106327	.0064369	.00375938	.00249842
10	.015854	.0160629	.0133523	.0098005	.00645223	.00357721	.0011073
	.015854	.0160629	.0133523	.00983873	.00672439	.00456426	.00352468
13	.0114391	.0124172	.0110782	.00867777	.00599547	.00339977	.0010489
	.0114391	.0124191	.011111	.00887355	.00667574	.00507951	.00430277
16	.00873032	.00991822	.00925733	.00753814	.00534892	.00306913	.000945261
	.0087326	.00994478	.00939758	.00800992	.00652191	.00540483	.00485703
20	.00644353	.00759834	.00734554	.0061539	.00444862	.00257293	.000791523
	.0064769	.0077358	.00775217	.00710182	.0062867	.00564469	.0053264

Sin negrilla $\xi(t;u,15)$, negrilla $\zeta(t;u,15)$

De igual manera se presentan los gráficos para la funciones de densidad para el tiempo de ruina sin pago de dividendos (línea solida) y la densidad del tiempo de ruina con $b = 15$ (línea discontinua) para los valores de $u = 8, 10, 12, 14$ de arriba hacia abajo con $c = 1,1$

3.3 Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante 83



Ahora tomando $c = 1,1$ y $s = \sqrt{2}$ se tienen los momentos $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ y $m_3 = \frac{33}{2}$ y los parámetros para la aplicación del método de De Vylder $\tilde{\lambda} = \frac{54}{121}$, $\tilde{\alpha} = \frac{6}{11}$ y $\tilde{c} = \frac{101}{110}$, al igual que en el ejemplo anterior la aproximación a la función de densidad de probabilidad $\xi(t; u, 15)$ y $\zeta(t; u, 15)$ con valores para $u = 2, 4, \dots, 14$ y algunos valores de t ($1 \leq t \leq 20$) se muestra en la tabla siguiente:

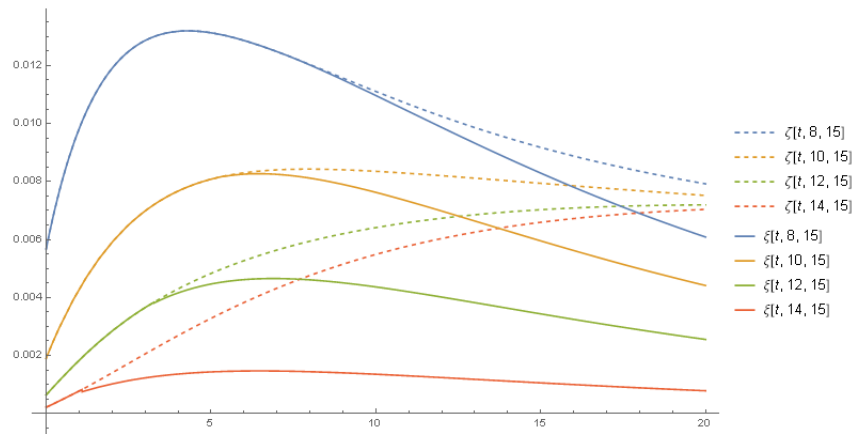
t	u=2	u=4	u=6	u=8	u=10	u=12	u=14
1	.0992089	.0477223	.021988	.00982345	.00428748	.00183713	.000775465
	.0992089	.0477223	.021988	.00982345	.00428748	.00183713	.000775465
3	.0536112	.0367767	.0225387	.0128665	.00698729	.00365437	.00122924
	.0536112	.0367767	.0225387	.0128665	.00698729	.00365437	.00205558
5	.0343306	.0281508	.0200797	.0131337	.00808344	.00446746	.00143502
	.0343306	.0281508	.0200797	.0131337	.00808344	.00483366	.00328438
7	.0242688	.0221648	.0174287	.0124846	.00825098	.00465627	.00146509
	.0242688	.0221648	.0174287	.0124846	.00840521	.00564056	.00432328
10	.0161408	.0162937	.0140943	.0109695	.00762884	.00436701	.00135496
	.0161408	.0162937	.0140979	.0111105	.00835583	.00641418	.00548921
13	.0116891	.0125593	.0114915	.009327	.00664091	.0038251	.00117959
	.0116891	.0125676	.0116107	.00986375	.00811875	.00685692	.00625548
16	.00894016	.00997513	.00941437	.00780728	.005623	.00324837	.000998819
	.00895055	.0100719	.009811	.00888084	.00785452	.00709052	.00672587
20	.00656747	.00752148	.00724382	.00608868	.00441597	.00255562	.00078443
	.00668229	.0079008	.00817003	.00792384	.00752261	.00719722	.00704116

Sin negrilla $\xi(t; u, 15)$, negrilla $\zeta(t; u, 15)$

De igual manera se presentan los gráficos para las funciones de densidad para el tiempo de ruina sin pago de dividendos (línea sólida) y la densidad

84 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

del tiempo de ruina con $b = 15$ (línea discontinua) para los valores de $u = 8, 10, 12, 14$ de arriba hacia abajo con $c = 1,1$



Se puede apreciar un pequeño salto en la gráfica de $\xi(t;u,15)$ para el caso en el que se toma el valor de $u = 14$

Se procedera ahora a ilustrar algunos casos tales como el ejemplo anterior donde para $\xi(t;u,15)$ se presentan saltos por lo que se daran las tablas de dichos casos y las gráficas para $\zeta(t;u,15)$ las cuales son continuas. Siguiendo con la distribución de Bohman en los dos siguientes ejemplos tenemos:

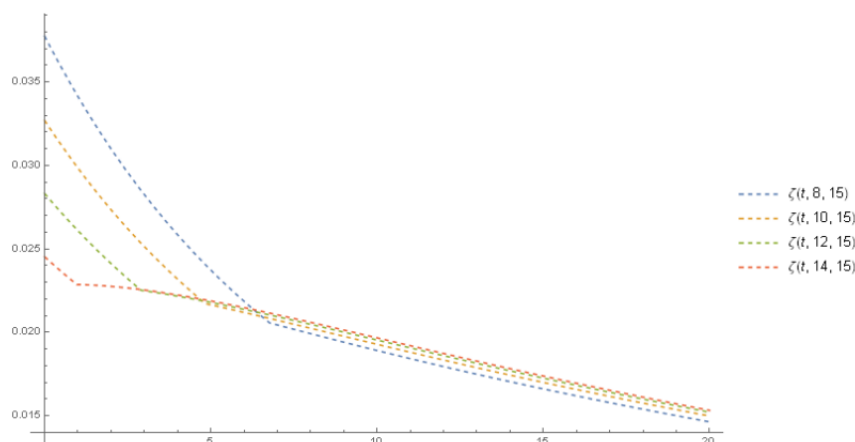
para $s = 5$ se tiene $m_1 = 1$, $m_2 = 26$ y $m_3 = 1086$ y parámetros $\tilde{\lambda} = \frac{2197}{32761}$, $\tilde{\alpha} = \frac{13}{181}$ y $\tilde{c} = \frac{1871}{1810}$ la tabla de valores y gráficos de la aproximación para $c = 1,1$ y los mismos valores que en el caso anterior son:

3.3 Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante 85

t	$u=2$	$u=4$	$u=6$	$u=8$	$u=10$	$u=12$	$u=14$
1	.0510471	.0446412	.0390375	.0341357	.029848	.0260978	.00146268
	.0510471	.0446412	.0390375	.0341357	.029848	.0260978	.0228695
3	.0399989	.0356338	.031733	.0282488	.0251383	.00366681	.00103047
	.0399989	.0356338	.031733	.0282488	.0251383	.0224979	.0225422
5	.0319348	.0289529	.0262237	.02373	.00506643	.00257489	.000720906
	.0319348	.0289529	.0262237	.02373	.0216515	.0217973	.0218881
7	.0259526	.0239165	.0220016	.00582412	.00353833	.00178906	.000497097
	.0259526	.0239165	.0220016	.0204482	.0207284	.0209417	.0210575
10	.0196029	.0184668	.00503982	.00333236	.00199949	.000993396	.000269341
	.0196029	.0184668	.018448	.0189182	.0192905	.0195468	.0196769
13	.00550333	.00398871	.00275718	.00178195	.00103589	.00049224	.000125118
	.0155977	.0163367	.0169753	.0174969	.0178912	.0181532	.0182828
16	.00288269	.00202965	.00134822	.000824492	.000443536	.000189935	.0000464566
	.0142592	.0150352	.0156845	.0162014	.0165845	.0168351	.0169575
20	.0011084	.000731971	.000449768	.000255367	.000139134	.0000651865	.0000168193
	.0128145	.0135558	.0141652	.0146438	.0149948	.0152229	.015334

Sin negrilla $\xi(t; u, 15)$, negrilla $\zeta(t; u, 15)$

Función de densidad del tiempo de ruina con $b = 15$ (línea discontinua) para los valores de $u = 8, 10, 12, 14$ de arriba hacia abajo con $c = 1, 1$



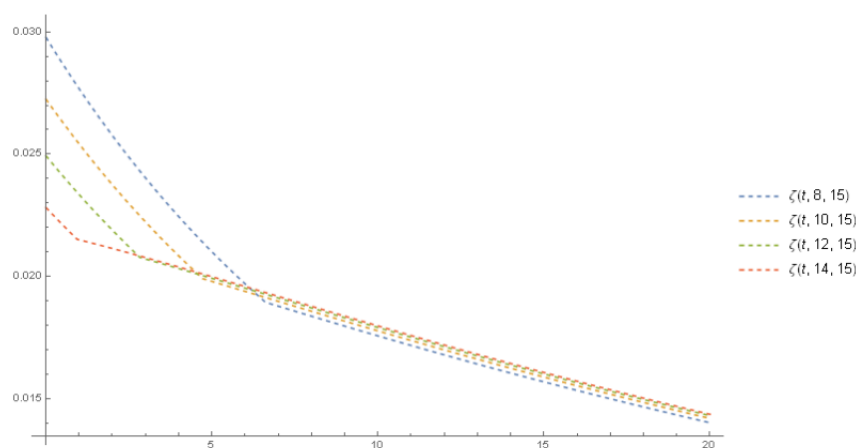
Si siguiendo con el ejemplo, tomando $s = 6,496012$, con momentos $m_1 = 1$, $m_2 = 43,1982$ y $m_3 = 2922,72$ y parámetros $\tilde{\lambda} = 0,0424654$, $\tilde{\alpha} = 0,0443404$ y $\tilde{c} = 1,05771$, de igual manera para los mismos valores de t y u la tabla y gráficas se presentan a continuación

Aproximación a la función de densidad de probabilidad $\xi(t; u, 15)$ y $\zeta(t; u, 15)$ con valores para $u = 2, 4, \dots, 14$ y algunos valores de t ($1 \leq t \leq 20$)

86 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

t	$u=2$	$u=4$	$u=6$	$u=8$	$u=10$	$u=12$	$u=14$
1	.0357089 .0357089	.0328015 .0328015	.0301305 .0301305	.0276769 .0276769	.0254229 .0254229	.0233523 .0233523	.000540698 .0215037
3	.0303287 .0303287	.0280667 .0280667	.0259718 .0259718	.0240318 .0240318	.0222354 .0222354	.00138809 .020719	.000399503 .0207799
5	.0259602 .0259602	.0241988 .0241988	.0225532 .0225532	.0210161 .0210161	.00196512 .0198051	.0010155 .0199331	.000289231 .0199988
7	.0223905 .0223905	.0210186 .0210186	.0197247 .0197247	.00231608 .0187928	.00141968 .0189909	.000724245 .0191254	.000202962 .0191932
10	.018183 .018183	.0172416 .0172416	.00207948 .0173069	.0013683 .0175784	.000815687 .017783	.000401443 .0179191	.00010728 .0179867
13	.00237242 .0154121	.00168348 .0158173	.00113531 .0161556	.000711413 .0164253	.000396702 .0166258	.000177371 .0167577	.0000408364 .0168225
16	.00122964 .0143663	.000819873 .0147628	.000507068 .0150903	.000280002 .0153489	.00012831 .0155395	.0000424499 .0156642	$9.40996 \cdot 10^{-6}$.0157251
20	.000422144 .0131147	.000241193 .0134853	.00012046 .0137891	.0000530064 .0140274	.0000267602 .0142024	.0000119206 .0143164	$2.92288 \cdot 10^{-6}$.0143722

Sin negrilla $\xi(t;u,15)$, negrilla $\zeta(t; u, 15)$

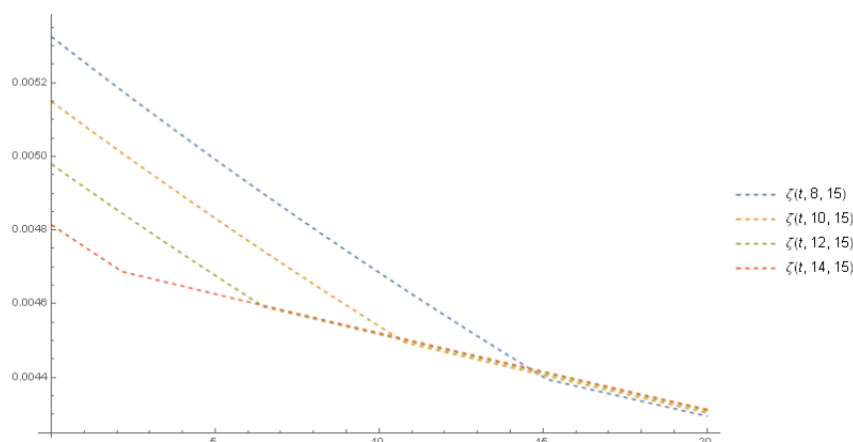


Ejemplo 3.3: Ahora se toma otra mezcla de exponenciales como distribución del monto de reclamación individual, distribución discutida por Wikstad [15], la cual tiene la forma $P(x) = 1 - 0,0039790e^{-0,014631x} - 0,1078392e^{0,190206x}0,8881815e^{5,514588x}$, $x \geq 0$. Para la cual los momentos $m_1 = 0,999977$, $m_2 = 43,1954$ y $m_3 = 7716,66$, tomado $c = 1,1$, los parámetros para la aplicación del método de De Vylder son $\tilde{\lambda} = 0,00609068$, $\tilde{\alpha} = 0,016793$ y $\tilde{c} = 0,462713$, con lo que se obtienen la tabla y gráficas

3.3 Aproximación por el método de De Vylder de la densidad del tiempo de ruina con una estrategia de barrera constante 87

t	u=2	u=4	u=6	u=8	u=10	u=12	u=14
1	.00580976 .00580976	.00561903 .00561903	.00543455 .00543455	.00525613 .00525613	.00508357 .00508357	.00491667 .00491667	.00475526 .00475526
3	.0056543 .0056543	.0054709 .0054709	.00529345 .00529345	.00512176 .00512176	.00495563 .00495563	.00479489 .00479489	.0000144288 .00466951
5	.00550404 .00550404	.00532769 .00532769	.00515699 .00515699	.00499175 .00499175	.00483181 .00483181	.00467699 .00467699	.0000131379 .00462671
7	.00535878 .00535878	.0051892 .0051892	.00502498 .00502498	.00486596 .00486596	.00471196 .00471196	.000039851 .00458099	.0000119061 .0045841
10	.00514987 .00514987	.00498995 .00498995	.00483499 .00483499	.00468483 .00468483	.00453932 .00453932	.0000343326 .00451753	.0000101638 .00452062
13	.0049512 .0049512	.00480038 .00480038	.00465413 .00465413	.00451233 .00451233	.0000549252 .00444845	.0000291904 .00445463	$8.54068 \cdot 10^{-6}$.0044577
16	.00476221 .00476221	.00461995 .00461995	.00448192 .00448192	.0000737018 .00437694	.0000464957 .00438622	.0000244002 .00439235	$7.02893 \cdot 10^{-6}$.00439538
20	.00452436 .00452436	.00439276 .00439276	.0000856756 .00428278	.000058408 .00429512	.0000361483 .00430429	.0000185217 .00431034	$5.17422 \cdot 10^{-6}$.00431333

Sin negrilla $\xi(t;u,15)$, negrilla $\zeta(t;u,15)$



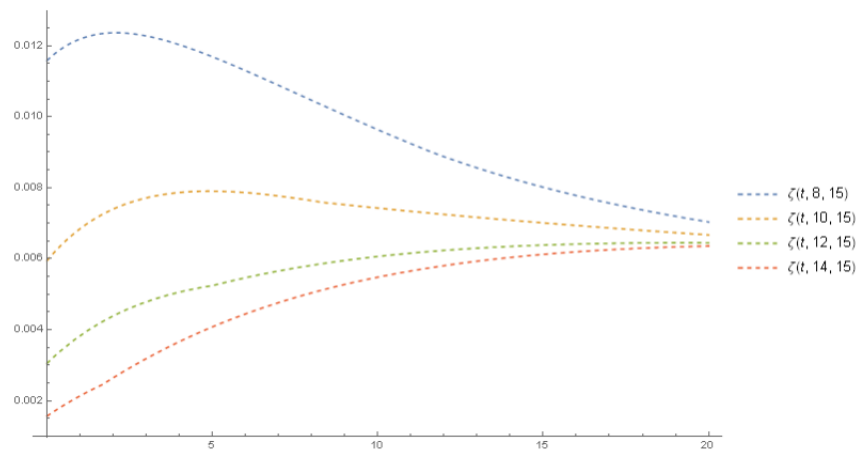
Ejemplo 3.4: Finalmente se ilustra el caso en el que dos distribuciones tienen los mismos valores para los tres primeros momentos, en este caso se tiene una distribución tipo Pareto(4,3) así $P(x) = 1 - \left(\frac{3}{3+x}\right)^4$ y una distribución lognormal con parámetros $\mu = -\frac{\log 3}{2}$ y $\sigma = \sqrt{\log 3}$ y $P(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$, donde Φ denota la función de distribución normal estandar, en ambos casos los momentos obtenidos son $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ y $m_3 = 27$, lo que hace que tanto la distribución Pareto (4,3) como la lognormal, en este caso, tengan los mismos valores de la aproximación por el método de De Vylder con parámetros $\tilde{\lambda} = \frac{1}{6}$, $\tilde{\alpha} = \frac{1}{3}$ y $\tilde{c} = \frac{3}{5}$ y $c = 1,1$.

88 Aproximación de De Vylder a la Densidad del Momento de la Ruina

Como en los ejemplos anteriores la tabla y gráficas de las densidades son las siguientes:

t	$u=2$	$u=4$	$u=6$	$u=8$	$u=10$	$u=12$	$u=14$
1	.0671467	.0381876	.0216174	.0121871	.00684547	.00383247	.00213926
	.0671467	.0381876	.0216174	.0121871	.00684547	.00383247	.00213926
3	.0443396	.0295752	.0192377	.0122747	.00771288	.00478612	.00155888
	.0443396	.0295752	.0192377	.0122747	.00771288	.00478612	.00318776
5	.0315487	.0235944	.016874	.0116882	.00790268	.0052421	.00144731
	.0315487	.0235944	.016874	.0116882	.00790268	.0052421	.00408193
7	.0237376	.0193021	.0147927	.0108829	.00776775	.00437173	.00131182
	.0237376	.0193021	.0147927	.0108829	.00776775	.00565485	.00476379
10	.0167016	.0148378	.0122541	.00963421	.00669307	.00372656	.00110653
	.0167016	.0148378	.0122541	.00963421	.00742679	.00606351	.00548065
13	.0125203	.0118237	.0103003	.00815683	.00562224	.0031168	.00092132
	.0125203	.0118237	.0103003	.00855812	.00716518	.00629722	.00593028
16	.00981209	.00968682	.00859932	.00678542	.00467354	.00258599	.000762985
	.00981209	.00968682	.00880764	.00777934	.00693654	.00641272	.00619521
20	.00744766	.00751948	.00667514	.00527361	.00363056	.00200703	.000591705
	.00744766	.00770461	.00744996	.00703439	.00667047	.00644561	.0063577

Sin negrilla $\xi(t; u, 15)$, negrilla $\zeta(t; u, 15)$



CAPÍTULO 4

Conclusiones

En la teoría del riesgo, en especial en la teoría de la ruina, muchas de las expresiones explícitas halladas, ya sea en términos de valores cuantitativos o probabilidad, para las diversas variables sobre las que se han hecho estudios han sido para una distribución del monto de reclamación de tipo exponencial, lo que ha generado que diversos investigadores procuren encontrar aproximaciones para diversos tipos de distribuciones del monto de reclamación individual, entre ellas una de las más conocidas, por su sencilla aplicación, es la aproximación planteada por De Vylder en 1978.

En diversos trabajos se ha encontrado que el método de aproximación de De Vylder es buena en especial cuando la función generadora de momentos existe para la distribución del monto de reclamación, este trabajo en su capítulo 3 se desarrolló bajo este supuesto ya que no se encuentra hasta el momento, punto de comparación.

La aproximación muestra que la función de densidad de probabilidad del tiempo de ruina bajo una estrategia de dividendos constante, sin pago de estos, tiene saltos.

El análisis hecho en [10] S. Li and Y. Lu estimula nuevas investigaciones, tal como la obtención de la función de densidad del tiempo de la ruina para

90 Conclusiones

el modelo de riesgo clásico, con una estrategia de pago de dividendos umbral, haciendo uso de las técnicas y resultados del artículo base así como lo sugieren los mismos autores.

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. pp 505-13.2.1. Dover Publications, New York, 1972
- [2] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. pp 1025-29.3.63. Dover Publications, New York, 1972
- [3] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. pp 1026-29.3.81. Dover Publications, New York, 1972
- [4] D. Dickson and K. S. Wong, *De Vylder approximations to the moments and distribution of the time to ruin*. 2004.
- [5] B. De Finetti, *Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio*, Proceedings of the Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, vol 2, no. 1, pp. 433-443, 1957.
- [6] F. De Vylder, *A practical solution to the problem of ultimate ruin probability*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1978, no. 2, pp. 114-119, 1978.

-
- [7] D. Dickson and G.E. Willmot, *The density of the time to ruin in the classical poisson risk model*. Astin Bulletin, vol.35, no. 01, pp. 45-60, 2005.
- [8] H. U. Gerber and E. S. Shiu, and N. Smith, *Maximizing dividends without Bankruptcy*. Astin Bulletin, vol. 35, no. 01, pp. 5-23, 2006.
- [9] I. Laurin, *An introduction into Lundberg's theory of risk*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1930, no. 1, pp. 84-111, 1930.
- [10] S. Li and Y. Lu, *The density of the time of ruin in the classical risk model with a constant dividend barrier*. Annals of Actuarial Science, vol 8. no. 01, pp. 63-78, 2014.
- [11] H. U. Gerber and E. S. Shiu, *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal, vol 2, no. 1, pp. 65-6,25, 1998
- [12] H. U. Gerber and E. S. Shiu, *On the time value of ruin*. North American Actuarial Journal, vol 2, no. 1, pp. 66-6,37, 1998
- [13] P.W.K.H.M. Srivastava, P.W. Karlson, *Multiple Gaussian Hypergeometric Series.*, pp. 28-30. Ellis Horwood Ltd, Publisher, 1985.
- [14] D. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press, 2005.
- [15] N. Wikstad, *Exemplifications of ruin probabilities*. Astin Bulletin, 6, pp. 147-152, 1971.
- [16] H. Bohman, *A Rule of Thumb and its Verification.*, Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1977, no. sup1, pp. 25-36, 1977.
- [17] D.C. Dickson, H.R. Waters *Some Optimal Dividends Problems*. Astin Bulletin, 34, pp. 49-74, 204.