

# Ecuaciones Diferenciales Aleatorias y Dimensión Fractal

William Eduardo Alfonso Valencia

Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar  
el título de Magister en Matemáticas Aplicadas

Director:

Prof. Msc. Fredy Hernán Marín Sánchez

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS Y HUMANIDADES

Medellín 2013



---

## **Agradecimientos:**

En este gran momento de mi vida expreso mis agradecimientos a mi esposa Lida a quien amo y es mi compañera incansable e incondicional, al profesor Msc. Freddy Hernán Marín quien más que un tutor es una gran persona y un amigo que enseña con el ejemplo, a Jaime Burgos quien es y siempre será un excelente compañero.



# Índice general

0.1. Objetivos . . . . .	1
0.2. Resumen . . . . .	2
<b>1. Introducción al cálculo en media cuadrática</b>	<b>5</b>
1.1. El espacio $L_2$ . . . . .	5
1.2. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias . . . . .	8
1.2.1. Convergencia en media cuadrática . . . . .	8
1.2.2. Propiedades de la convergencia en media cuadrática . . . . .	8
1.3. Continuidad en media cuadrática . . . . .	10
1.4. Diferenciación en media cuadrática . . . . .	14
1.4.1. Propiedades de las derivadas en media cuadrática . . . . .	15
1.4.2. Funciones de esperanza y correlación para derivadas en media cuadrática . . . . .	17
1.4.3. Analiticidad en media cuadrática . . . . .	18
1.5. Integración en media cuadrática . . . . .	19
<b>2. Ecuaciones diferenciales aleatorias</b>	<b>23</b>
2.0.1. Existencia y unicidad . . . . .	24
2.1. La ecuación de Ito . . . . .	26
2.1.1. Representación del ruido blanco . . . . .	26
2.1.2. La ecuación y la integral de Ito . . . . .	27
2.1.3. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	29
<b>3. El método aleatorio de Euler y su convergencia en media cuadrática</b>	<b>31</b>
3.1. Teorema de valor medio aleatorio para procesos estocásticos . . . . .	34
3.2. Convergencia de procesos estocásticos analíticos en media cuadrática . . . . .	36
3.3. Sobre el esquema aleatorio de Euler . . . . .	37
3.4. Tres alternativas de convergencia en el esquema aleatorio de Euler . . . . .	38
3.5. Resultados numéricos experimentales . . . . .	44
3.6. Ejemplos numéricos experimentales . . . . .	46
3.6.1. Ejemplo 1 . . . . .	47
3.6.2. Ejemplo 2 . . . . .	49
<b>4. Dimensión fractal</b>	<b>53</b>
4.1. Determinación teórica de la dimensión fractal . . . . .	57

---

4.2. La dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch . . . . .	61
<b>5. Cálculo de la dimensión fractal para fenómenos físicos</b>	<b>63</b>
5.1. Formulación analítica de la dimensión fractal para procesos estocásticos	63
5.1.1. La longitud euclidiana . . . . .	64
5.1.2. Relación entre longitud y dimensión fractal para procesos estocásticos . . . . .	65
5.1.3. Longitud y dimensión fractal para procesos gaussianos . . . . .	66
5.2. Resultados numéricos experimentales . . . . .	67
5.2.1. Cálculo de la longitud y dimensión fractal para el movimiento browniano estándar . . . . .	67
5.2.2. Cálculo de la dimensión fractal para el proceso de Ornstein Uhlenbeck aleatorio . . . . .	74
<b>6. Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>Bibliography</b>	<b>85</b>

## 0.1. Objetivos

1. En el presente estudio se realizará la construcción numérica de soluciones para ecuaciones diferenciales aleatorias a partir del esquema aleatorio de Euler y se mostrará la convergencia a la solución exacta de un problema de valor aleatorio específico.
2. Se propondrán nuevas condiciones de convergencia en media cuadrática para el esquema numérico aleatorio de Euler, mas fáciles de verificar que las propuestas en los trabajos de (L. Jodar y L. Villafuerte 2007) [19, 20].
3. Se calcularán numéricamente el valor esperado y la varianza del proceso de aproximación, y se extienden los resultados de convergencia a las funciones de Correlación y Covarianza que en los trabajos de (L. Jodar y L. Villafuerte 2007) [19, 20] no se desarrollan.
4. Se aplicará el enfoque de (J. Girault, D. Kouame y A. Ouahabi) [16] a fin de proponer un método Numérico Analítico para determinar la longitud y dimensión fractal para Procesos Estocásticos Gaussianos, como el Movimiento Browniano Estándar y el Proceso de Ornstein Uhlenbeck.

## 0.2. Resumen

En la presente investigación inicialmente se hace una introducción a las ecuaciones diferenciales aleatorias y algunos teoremas de convergencia de soluciones en m.s., se presenta la construcción numérica de soluciones a problemas diferenciales de valor inicial aleatorios bajo el método aleatorio de Euler, y se introducen nuevas condiciones bajo las cuales el Esquema Aleatorio de Euler es convergente en el sentido de media cuadrática, además de extender los resultados de (Jodar, Lucas, Cortéz, J. L. Villafuerte) [19, 20], a la correlación y covarianza del proceso, para lo cual se utilizan dos ejemplos con sus respectivos resultados numéricos.

Se introduce el concepto de dimensión fractal y se exponen ciertos teoremas referentes a la forma de calcularse, como el Método de conteo de Cajas. Se propone la formulación numérica analítica para calcular la dimensión fractal de procesos estocásticos a partir de las ecuaciones diferenciales aleatorias, usando los resultados numéricos obtenidos anteriormente y con base en los estudios de (Jean-Marc Girault, Kouame, Ouahabi) [16], sobre la longitud y dimensión fractal para procesos estocásticos.

## Introducción

Las ecuaciones diferenciales aleatorias son muy importantes debido a sus aplicaciones ya que permiten el análisis y predicción del comportamiento de fenómenos físicos y naturales sujetos a condiciones aleatorias, donde la teoría del cálculo en media cuadrática y estocástico, sustentan sus aplicaciones en campos de la ingeniería y ciencias. A partir de los estudios de Langevin en 1908 sobre el movimiento browniano se inicia el estudio de este tipo de ecuaciones diferenciales [33], dando lugar a avances importantes en áreas como la física cuántica, química, biología, economía, medicina entre otras. Por lo anterior las ecuaciones diferenciales aleatorias se consideran esenciales en el estudio del análisis moderno y vale la pena resaltar grandes aportes a la teoría estadística de la comunicación, filtración de señales, investigación de operaciones, y la estabilidad estocástica que es una importante aplicación en control.

Debido a la aleatoriedad de algunos de sus elementos en el estudio de las ecuaciones diferenciales aleatorias se hace necesaria la exposición de sucesiones de variables aleatorias de segundo orden, su convergencia, continuidad y analiticidad en media cuadrática, además de proponer alternativas sobre construcción numérica de soluciones de valores iniciales aleatorios para problemas diferenciales. En ese sentido los estudios de (Jodar, Lucas. Cortéz, J. L. Villafuerte) [19] demuestran a partir del esquema aleatorio de Euler algunas condiciones para que la convergencia en media cuadrática (m.s) sea estable, y calculan el valor esperado y la varianza del proceso de aproximación [20] a partir de los cuales en el presente estudio se generan nuevas condiciones de convergencia para el esquema aleatorio de Euler a la solución teórica de un problema de valor inicial aleatorio.

Cuando un problema físico se traduce a un conjunto de ecuaciones matemáticas a fin de estudiar ciertos niveles de incertidumbre y de complejidad se hace necesaria la introducción de coeficientes aleatorios, por ejemplo en el análisis estructural de materiales donde las imperfecciones en la geometría y el material son demasiado complejos, los cuales pueden ser representados por procesos estocásticos, cuando se miden las formas naturales cuya dimensión es fraccionaria o de (Hausdorff-Besicovitch) la medida total depende de la escala de medición, aumentando su valor cada vez que la regla se reduce hasta el punto de hacerse infinita o indeterminable. En la simulación de la geomorfología terrestre a comienzos del siglo XX Lewis Fry Richardson determinó el valor de una constante que indica el grado de rugosidad de una costa o de una frontera de estudio, a partir de lo cual en (1967) Benoit Mandelbrot [5] encontró que también poseen

autosimilaridad estadística y determinó su dimensión fraccionaria la cual en (1975) la denominaría como dimensión fractal [6] y estableció la auto- similaridad de la superficie terrestre mediante aproximaciones de un modelo estocástico Poisson-Brown. A su vez Robert J. Adler (1978) [31] analizó la modelación espacial de la superficie terrestre sustentado a su vez en los estudios de Mandelbrot (1975) [6] en cuanto a la ondulación extrema de las costas y sus curvas de nivel segun el proceso gaussiano de Wiener.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se exponen algunas definiciones necesarias para el desarrollo del cálculo de media cuadrática (m.s.), exponiendo algunos teoremas sobre continuidad, diferenciación e integración en m.s. y la convergencia de sucesiones de variables aleatorias.

En el Capítulo 2 se introducen a las ecuaciones diferenciales aleatorias y algunos teoremas de existencia y unicidad de soluciones en m.s., la ecuación diferencial estocástica de Ito, su expresión en forma integral y la representación de ruido blanco.

En el Capítulo 3 se presenta la construcción numérica de soluciones a problemas diferenciales de valor inicial aleatorios bajo el método aleatorio de Euler, y se introducen nuevas condiciones bajo las cuales el Esquema Aleatorio de Euler es convergente en el sentido de media cuadrática, además de extender los resultados de [19] y [20] a la correlación y covarianza del proceso, para lo cual se utilizan dos ejemplos con sus respectivos resultados numéricos.

En el capítulo 4 se introduce el concepto de dimensión fractal, su determinación teórica y algunas de sus propiedades, además se exponen ciertos teoremas referentes a la forma de calcularse, como el Método de conteo de Cajas.

En el Capítulo 5 se expone la formulación numérico analítica para calcular la dimensión fractal de procesos estocásticos a partir de las ecuaciones diferenciales aleatorias, usando los resultados numéricos obtenidos en el Capítulo 3, con base en los estudios de (Jean-Marc Girault , Kouame , Ouahabi) 2010, [16] quienes investigaron el impacto de filtrado lineal sobre irregularidad para un proceso estocástico en términos de la dimensión fractal.

# 1 Introducción al cálculo en media cuadrática

El presente capítulo se exponen algunas definiciones y teoremas importantes, necesarios para el desarrollo del cálculo de media cuadrática, las propiedades de las variables aleatorias de segundo orden, criterios de convergencia y continuidad para sucesiones de variables aleatorias.

## 1.1. El espacio $L_2$

Considere inicialmente las propiedades de una clase de variables aleatorias reales  $X_1, X_2, \dots$ , cuyos segundos momentos  $E\{X_1^2\}, E\{X_2^2\}, \dots$ , son finitos. Esta clase de variables se conoce como variables aleatorias de segundo orden (2-rv's).

1. De la desigualdad de Schwarz se tiene que

$$E^2\{|X_1 X_2|\} \leq E\{X_1^2\} E\{X_2^2\} \quad (1.1)$$

se sigue directamente que

$$E\{(X_1 + X_2)^2\} < \infty \quad (1.2)$$

y

$$E\{(cX_1)^2\} = c^2 E\{X_1^2\}, \quad (1.3)$$

donde  $c$  es un real finito. Por lo tanto la clase de todas las (2-rv's) en un espacio de probabilidad constituyen un espacio vectorial lineal si todas las (2-rv's) están identificadas. Dos (2-rv's)  $X$  y  $Y$  son llamadas equivalentes si  $P(X \neq Y) = 0$ .

2. Usando la notación

$$E\{X_1 X_2\} = \langle X_1, X_2 \rangle, \quad (1.4)$$

la desigualdad de Schwarz (1.1) lleva a que

$$|\langle X_1, X_2 \rangle| < \infty. \quad (1.5)$$

Donde  $\langle X_1, X_2 \rangle$  satisface las siguientes propiedades del producto interno:

$$\langle X, X \rangle \geq 0; \langle X, X \rangle = 0 \quad \text{si y solo si } X = 0. \quad (1.6)$$

Con probabilidad uno se tiene

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_2, X_1 \rangle \quad (1.7)$$

$$\langle cX_1, X_2 \rangle = \langle cX_2, X_1 \rangle = c \langle X_1, X_2 \rangle \quad c \text{ es real finito.} \quad (1.8)$$

$$\langle X_1 + X_2, X_3 \rangle = \langle X_1, X_3 \rangle + \langle X_2, X_3 \rangle \quad (1.9)$$

3. Como es usual, la norma de la norma de la v.a es denotada y definida por

$$\|X\| = \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.10)$$

De las ecuaciones (1.6) a (1.9) se tiene que  $\|X\|$  posee las propiedades de la norma:

$$\|X\| \geq 0; \|X\| = 0 \quad \text{si y solo si } X = 0. \quad (1.11)$$

Con probabilidad uno:

$$\|cX\| = |c| \|X\| \quad c \text{ es real y finito.} \quad (1.12)$$

$$\|X_1 + X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\|. \quad (1.13)$$

La anterior desigualdad se cumple porque

$$\begin{aligned} \|X_1 + X_2\|^2 &= \langle X_1 + X_2, X_1 + X_2 \rangle \\ &= \langle X_1, X_1 \rangle + 2 \langle X_1, X_2 \rangle + \langle X_2, X_2 \rangle \\ &\leq \langle X_1, X_1 \rangle + 2 \|X_1\| \cdot \|X_2\| + \langle X_2, X_2 \rangle \\ &= (\|X_1\| + \|X_2\|)^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

4. Defina la distancia entre  $X$  y  $Y$  como

$$d(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\|. \quad (1.15)$$

La distancia en una métrica, es decir, tiene las propiedades

$$d(X_1, X_2) \geq 0; \quad d(X_1, X_2) = 0 \quad \text{si y sólo si, } X = X_2. \quad (1.16)$$

$$d(X_1, X_2) = d(X_2, X_1) \quad (1.17)$$

$$d(X_1, X_2) \leq d(X_1, X_3) + d(X_3, X_2). \quad (1.18)$$

De la ecuación (1.16) se concluye la equivalencia de dos variables aleatorias usando la definición de distancia, esto es  $X = Y$  si y sólo si  $d(X, Y) = 0$ .

El espacio vectorial lineal de variables aleatorias de segundo orden con producto interno, norma y distancia como las definidas anteriormente es llamado *espacio -  $L_2$* .

Se expone ahora un importante teorema asociado con con *espacio -  $L_2$*  (La prueba del teorema puede ser consultada en Loève [24] (1,p.161).

### **Teorema de completitud - $L_2$ .**

El *espacio -  $L_2$*  es completo en el sentido de que cualquier sucesión de Cauchy en  $L_2$  tiene un único límite en  $L_2$ , esto es hay un único elemento  $X \in L_2$  tal que

$$\|X_n - X\| \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$d(X_n, X_m) \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

cuando  $n, m \rightarrow \infty$  en alguna forma.

En consecuencia se observa que los *espacios -  $L_2$*  son espacios lineales normados y completos (Espacios de Banach) y con producto interno (espacios de Hilbert).

Un proceso estocástico s.p.  $X(t), t \in T$  se conoce como proceso estocástico de segundo orden (2-s.p), si para todo conjunto  $t_1, t_2, \dots, t_n$  las r.v.'s  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  son elementos del *espacio -  $L_2$* . Un (2-s.p) de segundo orden  $X(t)$  se caracteriza por

$$\|X(t)\|^2 = E \{X^2(t)\} < \infty, \quad t \in T \quad (1.21)$$

En el desarrollo del cálculo en m.s. se estudian procesos estocásticos de segundo orden, y variables aleatorias de segundo orden.

## 1.2. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Para el desarrollo de cálculo para procesos estocásticos primero se define la convergencia de sucesiones variables aleatorias lo cual se puede estudiar de cuatro formas diferentes que son: Convergencia en distribución, Convergencia en probabilidad, Convergencia en media cuadrática y Convergencia casi segura, El enfoque de este trabajo se centrará únicamente en la Convergencia en media cuadrática.

### 1.2.1. Convergencia en media cuadrática

**Definición:** Una sucesión de (2-rv's)  $\{X_n\}$  converge en m.s. para una variable aleatoria  $X$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0. \quad (1.22)$$

Este tipo de convergencia a menudo se expresa como

$$X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X, \quad \text{ó} \quad \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad (1.23)$$

El símbolo l.i.m. significa límite en la media cuadrática, también llamada convergencia en media cuadrática, o convergencia de segundo orden.

### 1.2.2. Propiedades de la convergencia en media cuadrática

#### Teorema 1.1

Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de (2-rv's), si  $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$  entonces  $E\{X_n\} \rightarrow E\{X\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Demostración:**

$$\text{Ya que } |E\{X_n\}| \leq E|X_n| \leq \|X_n\| < \infty \text{ entonces } E\{X_n\} \text{ existe.} \quad (1.24)$$

Como los *espacios*  $-L_2$  son completos, el límite  $X$  es de segundo orden y;

$$|E\{X_n\} - E\{X\}| \leq E|X_n - X| \leq \|X_n - X\|$$

ya que  $\|X_n - X\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}. \quad (1.25)$$

**Teorema 1.2:**

El límite en convergencia de m.s. es único, es decir, si

$$X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X \text{ y } X \xrightarrow{\text{m.s.}} Y \tag{1.26}$$

entonces  $X$  y  $Y$  son equivalentes, esto es;  $P(X \neq Y) = 0$ .

Este resultado se deduce también de la propiedad de la distancia.

**Definición:** Una sucesión  $\{X_n\}$  de (2-rv's) es fundamental en media cuadrática si:

$$\|X_m - X_n\| \rightarrow 0 \tag{1.27}$$

cuando  $m, n \rightarrow \infty$  de cualquier manera.

**Teorema 1.3:** Una sucesión  $\{X_n\}$  de (2-rv's) converge en media cuadrática a una variable aleatoria  $X$  cuando  $n \rightarrow \infty$  si y sólo si la sucesión es m.s. fundamental.

**Lema 1.1:**

Sean  $\{X_n\}$  y  $\{Y_n\}$  dos sucesiones de 2-r.v's, m.s. convergentes a  $X$ ,  $Y$ , respectivamente, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n Y_n\} = E\{XY\}. \tag{1.28}$$

Si  $X_n = Y_n$  para cada natural  $n$ , en (1.28), entonces se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n^2\} = E\{X^2\}. \tag{1.29}$$

Vea qué

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}[X_n] &= E\{X_n^2\} - (E\{X_n\})^2 \\ \text{var}[X] &= E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \end{aligned} \right\} \tag{1.30}$$

y por (1.28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\}. \tag{1.31}$$

De (1.29) y (1.31) se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[X_n] = \text{Var}[X]. \tag{1.32}$$

Así, si una sucesión  $X_n$  de 2-r.v.'s es convergente en m.s a la 2-r.v.  $X$ , entonces su valor esperado  $E\{X_n\}$  converge a  $E\{X\}$  y su varianza  $\text{var}[X_n]$  converge a  $\text{var}[X]$ .

### 1.3. Continuidad en media cuadrática

El concepto de convergencia en media cuadrática puede ser extendido de sucesiones de variables aleatorias a procesos estocásticos de segundo orden (2-s.p)  $\{X(t)\}$  donde  $t$  es continuo en un intervalo finito. Así como en el análisis de funciones ordinarias, esta extensión lleva a la noción de continuidad, en este caso, continuidad en media cuadrática.

Antes de ello se mostrarán algunas propiedades de los procesos estocásticos de segundo orden.

1. Si  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es de segundo orden, su valor esperado  $E\{X(t)\}$  es finito en  $T$ . Considere un nuevo proceso estocástico  $\{Y(t)\}$ ,  $t \in T$  definido por

$$Y(t) = X(t) - E\{X(t)\} \quad (1.33)$$

como  $Y(t)$  es de segundo orden lo cual implica  $E\{Y^2\} < \infty$  y  $E\{Y(t)\} = 0$ , así como  $\text{Var}\{Y\} = \text{Var}\{X\}$ , por lo tanto sin pérdida de generalidad se asume que los valores de la media para (2-s.p) es cero.

2.  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es un (2-s.p) si y sólo si, su función de correlación  $\Gamma(t, s) = E\{X(t)X(s)\}$  existe y es finita en  $T \times T$ , esto implica

$$\Gamma(t, t) = E\{X^2(t)\} < \infty \quad \text{en } T. \quad (1.34)$$

Por lo tanto los (2-s.p) poseen función de correlación, o covarianza. Se sigue con el desarrollo de dos teoremas para luego exponer las propiedades de continuidad en la media cuadrática.

#### Teorema 1.4:

Suponga que  $n$  y  $n'$  varían sobre algunos subconjuntos de  $\mathbb{N}$ , y tal que  $n_0$  y  $n'_0$  son puntos límites de  $\mathbb{N}$ . Sean  $X_n$  y  $X'_{n'}$  dos sucesiones de segundo orden de (2-rv's) si:

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow n_0} X_n = X \quad , \quad \text{l.i.m.}_{n' \rightarrow n'_0} X'_{n'} = X' \quad (1.35)$$

entonces

$$\lim_{\substack{n \rightarrow n_0 \\ n' \rightarrow n'_0}} E\{X_n X'_{n'}\} = E\{X X'\}. \quad (1.36)$$

**Demostración:** Como los espacios  $L_2$  son lineales, las (2-rv's)  $\Delta X = X_n - X$ , y  $\Delta X' = X'_{n'} - X'$  son de segundo orden, luego

$$\left| E\{X_n X'_{n'} - X X'\} \right| \leq \left| E\{X \Delta X'\} + E\{X' \Delta X\} + E\{\Delta X \Delta X'\} \right|$$

$$\leq \|X\| \cdot \|\Delta X'\| + \|X'\| \cdot \|\Delta X\| + \|\Delta X\| \cdot \|\Delta X'\| \quad (1.37)$$

donde la desigualdad desarrollada proviene de la desigualdad de schwarz. Por hipótesis,

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \|\Delta X\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n' \rightarrow n'_0} \|\Delta X'\| = 0 \quad (1.38)$$

se tiene que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow n_0 \\ n' \rightarrow n'_0}} \left| E\{X_n X'_{n'} - X X'\} \right| = 0. \quad (1.39)$$

y por la linealidad del valor esperado concluir

$$\lim_{\substack{n \rightarrow n_0 \\ n' \rightarrow n'_0}} E\{X_n X'_{n'}\} = E\{X X'\}. \quad (1.40)$$

### Teorema 1.5

Sean  $\{X_n\}$  y  $\{X'_{n'}\}$  dos sucesiones de variables aleatorias de segundo orden, si  $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$  y  $X'_{n'} \xrightarrow{\text{m.s.}} X'$  entonces :

$$\text{i.) } E\{X_n\} E\{X'_{n'}\} \xrightarrow{\text{m.s.}} E\{X\} E\{X'\}$$

$$\text{ii.) } \text{cov}\{X_n, X'_{n'}\} \xrightarrow{\text{m.s.}} \text{cov}\{X, X'\}$$

**Demostración:**

$$\text{i.) } \left| E\{X_n\} E\{X'_{n'}\} - E\{X\} E\{X'\} \right| = \left| E\{X_n\} E\{X'_{n'}\} - E\{X\} E\{X'\} + E\{X_n\} E\{X'\} - E\{X_n\} E\{X'\} \right|$$

$$= \left| E\{X_n\} (E\{X'_{n'}\} - E\{X'\}) + E\{X'\} (E\{X_n\} - E\{X\}) \right|$$

$$\leq |E\{X_n\}| |E\{X'_{n'} - X'\}| + |E\{X'\}| |E\{X_n - X\}|$$

$$\leq |E\{X_n\}| |E\{X'_{n'} - X'\}| + |E\{X'\}| |E\{X_n - X\}|$$

$$\leq \|X_n\| \|X'_{n'} - X'\| + \|X'\| \|X_n - X\|.$$

Como  $\|X'_{n'} - X'\| \rightarrow 0$  y  $\|X_n - X\| \rightarrow 0$  cuando  $n$  y  $n' \rightarrow \infty$  entonces se tiene que  $E\{X_n\} E\{X'_{n'}\} \xrightarrow{\text{m.s.}} E\{X\} E\{X'\}$ . Por el teoremas 1.4 y por i) se concluye ii.) de forma inmediata  $\square$ .

De este modo si dos sucesiones (2-rv's)  $\{X_n\}$  y  $\{X'_{n'}\}$  son convergentes en media cuadrática a las sucesiones (2-rv's)  $X$  y  $X'_{n'}$  respectivamente, el producto de sus valores esperados  $E\{X_n\}E\{X'_{n'}\}$  converge a  $E\{X\}E\{X'\}$  y la covarianza  $\text{cov}\{X_n, X'_{n'}\}$  converge a  $\text{cov}\{X, X'\}$  en media cuadrática.

De hecho, la existencia y finitud de  $\Gamma(t, s)$  sobre  $T \times T$  implican que  $\Gamma(t, t) = E\{X^2(t)\} < \infty$  sobre  $T$ . Además, la clase de las correlaciones es cerrada bajo adiciones, multiplicaciones y pasos al límite.[24].

Se concluye esta sección recordando que si  $X_1, \dots, X_N$  y  $Y_1, \dots, Y_M$  son r.v.'s. y  $a_i, b_j$  son números reales para  $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$ , entonces: (ver [19])

$$\text{cov} \left[ \sum_{i=1}^N a_i X_i, \sum_{j=1}^M b_j Y_j \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_i b_j [\text{cov} X_i, Y_j].$$

**Teorema 1.6: (Criterio de convergencia en media cuadrática):**

Sea  $\{X_n(t)\}, t \in T$ , una sucesión de (2-s.p)  $\{X_n(t)\}$  converge al proceso de segundo orden  $X(t)$  sobre  $T$ , si y sólo si, la función  $E\{X_n(t)X_{n'}(t)\}$  converge a una función finita sobre  $T$  cuando  $n, n' \rightarrow n_0$  en cualquier orden, donde  $n_0$  es el punto límite de algún conjunto  $\mathbb{N}$ , entonces

$$\Gamma_{X_n X_n}(t, s) \rightarrow \Gamma_{XX}(t, s), \quad n \rightarrow n_0 \quad (1.41)$$

en  $T \times T$

**Demostración:** Considere el criterio de convergencia mutua de Cauchy en media cuadrática. Se tiene que, con  $\Gamma(t, s) = \Gamma_{XX}(t, s)$

$$\begin{aligned} \|X_n(t) - X_{n'}(t)\|^2 &= E\{X_n^2(t) - 2E\{X_n(t)X_{n'}(t)\} + E\{X_{n'}^2(t)\}\} \\ &\rightarrow \Gamma(t, t) - 2\Gamma(t, t) + \Gamma(t, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

cuando  $n, n' \rightarrow n_0$ . Por medio del teorema 1.3, reemplazando  $X_n$  por  $X_n(t)$ ,  $X_{n'}$  por  $X_{n'}(s)$ ,  $X$  por  $X(t)$ , y  $X'$  por  $X(s)$ , la ecuación (1.40) se convierte en

$$E\{X_n(t)X_{n'}(s)\} \rightarrow E\{X(t)X(s)\} = \Gamma(t, s) \quad (1.43)$$

cuando  $n, n' \rightarrow n_0$ . Haciendo  $s = t$  se tiene

$$E\{X_n(t)X_{n'}(t)\} \rightarrow \Gamma(t, t), \quad n, n' \rightarrow n_0. \quad (1.44)$$

Tomando  $n = n'$  en la ecuación (1.43).

**Definición:** Un (2-s.p)  $X(t)$ ,  $t \in T$  es continuo en media cuadrática o m.s. continuo para un  $t$  fijo si

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} X(t + \tau) = X(t) \quad (1.45)$$

para  $(t + \tau) \in T$ , o

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|X(t + \tau) - X(t)\| = 0. \quad (1.46)$$

**Teorema 1.7 (Criterio de continuidad en media cuadrática):**

Un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$ ,  $t \in T$  es m.s. continuo en  $t$  si y sólo si  $\Gamma(t, s)$  es continua en  $(t, t)$

**Prueba:** Del teorema 1.6 se tiene que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} X(t + \tau) = X(t) \quad (1.47)$$

si y sólo si  $\Gamma(t, s)$

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau' \rightarrow 0}} E \{X(t + \tau)X(t + \tau')\} = E \{X^2(t)\}. \quad (1.48)$$

Esta condición es

$$\Gamma(t + \tau, t + \tau') \rightarrow \Gamma(t, t) \quad (1.49)$$

como  $\tau, \tau' \rightarrow 0$ , luego  $\Gamma(t, s)$  es continua en  $(t, t)$ .

En el caso donde  $X(t)$  es estacionario en el sentido amplio se tiene que:

$$\Gamma(t, s) = \Gamma(s - t) = \Gamma(\tau) \quad (1.50)$$

por lo tanto un s.p  $X(t)$  estacionario de segundo orden en el sentido amplio es m.s. continuo para todo  $t \in T$ , si y sólo sí,  $\Gamma(t)$  es continuo en  $\tau = 0$ .

El criterio de continuidad en m.s. es de fundamental importancia por que muestra que las propiedades de continuidad de procesos estocásticos de segundo orden están determinadas por las propiedades de continuidad ordinaria de estos, asociadas a la función de correlación.

**Corolario:** Si una función de correlación  $\Gamma(t, s)$  en  $T \times T$  es continuo en cada  $(t, t) \in T \times T$ , entonces es continua sobre  $T \times T$ .

**Prueba:** Si  $\Gamma(t, s)$  es continuo en todo  $(t, t) \in T \times T$ , así por el teorema 1.6 se establece que el proceso estocástico asociado  $X(t)$  es m.s. continuo para todo  $t \in T$ , por lo tanto para  $t, t + \tau, s, s + \tau' \in T$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} X(t + \tau) = X(t) \quad (1.51)$$

y

$$\lim_{\tau' \rightarrow 0} X(s + \tau') = X(s). \quad (1.52)$$

del teorema 1.4 se tiene que

$$\lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} E \{X(t + \tau)X(s + \tau')\} = E \{X(t)X(s)\} \quad (1.53)$$

Esta última ecuación es necesaria para que  $\Gamma(t, s)$  sea continua en todo  $(t, s) \in T \times T$ .

**Definición:** Si un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es m.s. continuo para todo  $t \in [t_1, t_2] \subset T$ , entonces  $X(t)$  es m.s. continuo en el intervalo  $[t_1, t_2]$ .

**Corolario:** Un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es m.s. continuo en un intervalo  $[t_1, t_2] \subset T$  si, y sólo si  $\Gamma(t, s)$  es continuo en  $(t, t)$ , para todo  $t \in [t_1, t_2]$ .

## 1.4. Diferenciación en media cuadrática

**Definición:** Un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$  con  $t \in T$ , tiene derivada en media cuadrática o, m.s. derivada  $\dot{X}(t)$  en  $t$ , si:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} = \dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t) = X'(t). \quad (1.54)$$

Las derivadas de orden superior se definen análogamente.

### Teorema 1.8 (Criterio de diferenciación en media cuadrática):

Un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$  con  $t \in T$ , es m.s. diferenciable en  $t$ , si y sólo si, la segunda derivada generalizada de  $\Gamma(t, t')$  existe y es finita en  $(T, T)$  es decir:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} (1/\tau\tau') \Delta_\tau \Delta_{\tau'} \Gamma(t, s) = \\ & = \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tau\tau'} \right) [\Gamma(t + \tau, s + \tau') - \Gamma(t + \tau, s) - \Gamma(t, s + \tau') + \Gamma(t, s)] \end{aligned} \quad (1.55)$$

existe y es finita en  $(t, t)$

**Demostración:** Por el criterio de convergencia en media cuadrática se tiene:

$$X_n(t) = [X(t+n) - X(t)]/n, \quad n = t \quad n' = \tau', \quad n_0 = 0 \quad (1.56)$$

en el teorema 1.6.

Se resalta que la existencia de la segunda derivada generalizada no es equivalente a la existencia de la segunda derivada parcial, pues no requiere continuidad de  $\Gamma(t, s)$  en  $(t, s)$ . Sin embargo si la segunda derivada generalizada existe, entonces la primera y segunda derivadas parciales existen. Por otra parte si las derivadas parciales hasta el segundo orden no existen, entonces la segunda derivada generalizada no existe.

**Definición:** Si un proceso estocástico de segundo orden  $X(t), t \in T$ , es m.s. diferenciable para todo  $t \in [t_1, t_2] \subset T$ , entonces  $X(t)$  es m.s. diferenciable en el intervalo  $[t_1, t_2]$ .

Se tiene por el teorema 1.8, que  $X(t)$  es m.s. diferenciable en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , si y sólo si la segunda derivada generalizada (1.56) existe y es finita para todo  $(t, t) \in [t_1, t_2]$ .

**Corolario:** Si la segunda derivada generalizada  $\Gamma_X(t, t')$  sobre  $T \times T$  existe y es finita en cada punto diagonal  $(t, t) \in T \times T$  entonces, las derivadas  $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t, t'), \frac{\partial}{\partial t'}\Gamma(t, t')$  y  $\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}\Gamma(t, t')$  existen y son finitas sobre  $T \times T$ .

**Corolario:** Si  $X'(t)$  existe sobre  $T$ , entonces  $\Gamma_X(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}\Gamma(t, t')$  sobre  $T \times T$ .

Se observa que si el proceso estocástico  $X(t)$  es estacionario en el sentido amplio,  $\Gamma(t, s)$  es únicamente una función de  $\tau = s - t$  y el proceso  $X(t), t \in T$ , es m.s. diferenciable en cualquier parte, si y sólo si  $X(t)$  es m.s. diferenciable en cualquier  $t$ .

**Corolario:** Un proceso  $X(t), t \in T$ , de segundo orden estacionario en el sentido amplio, es m.s. diferenciable si, y sólo si, la primera y segunda derivadas de  $\Gamma(t)$  existen y son finitas en  $\tau = 0$ .

### 1.4.1. Propiedades de las derivadas en media cuadrática

A continuación se exponen las propiedades asociadas con las derivadas en media cuadrática de los procesos estocásticos de segundo orden  $X(t)$ .

1. La diferenciación en media cuadrática de  $X(t)$  en  $t \in T$  implica m.s. continuidad de  $X(t)$  en  $t$ , ya que si

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \|X(t + \tau) - X(t)\|^2 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} |\tau|^2 \cdot \left\| \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \right\|^2 \\ &= 0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} (1/\tau^2) \Delta \Delta \Gamma(t, t). \end{aligned} \quad (1.57)$$

La última expresión (1.57) es cero porque la segunda derivada generalizada es finita por hipótesis.

2. La m.s. derivada  $\dot{X}(t)$  de  $X(t)$  en  $t \in T$ , si existe es única, esto es por la propiedad de convergencia y unicidad en m.s.
3. Si  $X(t)$  y  $Y(t)$  son m.s. diferenciables en  $t \in T$ , entonces la m.s. derivada de  $aX(t) + bY(t)$  existe en  $t$  y

$$\frac{d}{dt} [aX(t) + bY(t)] = a\dot{X}(t) + b\dot{Y}(t) \quad (1.58)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Para la demostración se aplica la propiedad de la norma ecuación (1.13),

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{aX(t + \tau) + bY(t + \tau) - aX(t) - bY(t)}{\tau} - a\dot{X}(t) - b\dot{Y}(t) \right\| \leq \\ &\left\| a \left[ \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - \dot{X}(t) \right] \right\| + \left\| \frac{Y(t + \tau) - Y(t)}{\tau} - \dot{Y}(t) \right\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

4. Si una función ordinaria  $f(t)$  es diferenciable en  $t \in T$  y  $X(t)$  es m.s. diferenciable en  $t \in T$ , entonces  $f(t)X(t)$  es m.s. diferenciable en  $t$ , y

$$\frac{d}{dt} [f(t)X(t)] = \frac{df(t)}{dt} X(t) + f(t) \frac{dX(t)}{dt} \quad (1.60)$$

Para la demostración por la propiedad de la norma ecuación (1.13) se tiene;

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{f(t + \tau)X(t + \tau) - f(t)X(t)}{\tau} - \frac{df(t)}{dt} X(t) - f(t) \frac{dX(t)}{dt} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{f(t + \tau)X(t + \tau) - f(t)X(t + \tau)}{\tau} - \frac{df(t)}{dt} X(t) \right\| + \left\| \frac{f(t)X(t + \tau) - f(t)X(t)}{\tau} - f(t) \frac{dX(t)}{dt} \right\| \\ &\leq \left\| \left[ \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau} - \frac{df(t)}{dt} \right] X(t + \tau) \right\| + \left\| \frac{df(t)}{dt} [X(t + \tau) - X(t)] \right\| + \left\| f(t) \left[ \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - \frac{dX(t)}{dt} \right] \right\| \\ &\leq \left| \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau} - \frac{df(t)}{dt} \right| \cdot \|X(t + \tau)\| + \left| \frac{df(t)}{dt} \right| \cdot \|X(t + \tau) - X(t)\| + |f(t)| \cdot \left\| \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} - \frac{dX(t)}{dt} \right\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

### 1.4.2. Funciones de esperanza y correlación para derivadas en media cuadrática

Se observó que si la derivada m.s. de  $X(t)$  y de orden superior existen, entonces son procesos estocásticos. Ahora se verá que sus funciones de correlación y correlación cruzada están definidas simplemente en términos de la función de correlación de  $X(t)$ . Primero se presenta un resultado elemental respecto de la m.s. derivada de  $X(t)$ .

Si  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es  $n$  veces m.s. diferenciable en  $T$ , los valores esperados de estas m.s. derivadas de  $X(t)$  existen en  $T$  y están dadas por

$$E \left\{ \frac{d^n X(t)}{dt^n} \right\} = \frac{d^n}{dt^n} E \{ X(t) \}. \quad (1.62)$$

Para probar la ecuación (1.62) considere el caso cuando  $n = 1$ , por definición se tiene que

$$\begin{aligned} E \{ \dot{X}(t) \} &= E \left\{ \text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \right] \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{E \{ X(t + \tau) \} - E \{ X(t) \}}{\tau} \right] = \frac{d}{dt} E \{ X(t) \}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

El segundo paso en la derivación de la ecuación (1.63) viene de intercambiar los “ $E$ ” y “l.i.m.” como se estableció en el teorema 1.1. La relación (1.62) para derivadas de orden superior se obtienen por evaluación en la ecuación (1.63).

#### Teorema 1.8:

Si la segunda derivada generalizada (1.51) Existe en  $(t, t)$  para todo  $t \in T$ , entonces la derivada parcial  $\frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial^2 \Gamma(t, s)}{\partial t \partial s}$  existe y es finita en  $T \times T$ .

**Prueba:** Por el teorema 1.8, la m.s. derivada  $\dot{X}(t)$  de  $X(t)$  existe para todo  $t$ . Por lo tanto, existe y es finita en  $T \times T$  con

$$\begin{aligned} E \{ \dot{X}(t) X(s) \} &= E \left\{ \text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{X(t + \tau) - X(t)}{\tau} \right] X(s) \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tau} \right) E \{ X(t + \tau) X(s) - X(t) X(s) \} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tau} \right) [\Gamma(t + \tau, s) - \Gamma(t, s)] = \frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Similarmente se establece que

$$E \{X(t)\dot{X}(s)\} = \frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial t} \quad (1.65)$$

existe y es finita en  $T \times T$ .

Finalmente, la existencia y finitud de  $E \{\dot{X}(t)\dot{X}(s)\}$  implican que

$$\begin{aligned} E \{\dot{X}(t)\dot{X}(s)\} &= E \left\{ \text{l.i.m.}_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \left[ \frac{X(t+\tau) - X(t)}{\tau} \right] \left[ \frac{X(s+\tau') - X(s)}{\tau'} \right] \right\} \\ &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} E \left\{ \left[ \frac{X(t+\tau)X(s+\tau') - X(t+\tau)X(s)}{\tau'} \right] \right\} - \left[ \frac{X(t)X(s+\tau') - X(t)X(s)}{\tau'} \right] \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \lim_{\tau' \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Gamma(t+\tau, s+\tau') - \Gamma(t+\tau, s)}{\tau'} - \frac{\Gamma(t, s+\tau') - \Gamma(t, s)}{\tau'} \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ \frac{\partial \Gamma(t+\tau, s)}{\partial s} - \frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial s} \right] = \frac{\partial^2 \Gamma(t, s)}{\partial t \partial s} \end{aligned} \quad (1.66)$$

existe y es finita en  $T \times T$ .

Por otro lado, considere la función de correlación cruzada para  $\partial^n X(t)/\partial t^n$ ,  $\partial^m X(t)/\partial t^m$  denotada por  $\Gamma_X(n)_X(m)(t, s)$  se tiene la formula general

$$\Gamma_X(n)_X(m)(t, s) = \frac{\partial^{n+m} \Gamma(t, s)}{\partial t^n \partial s^m} \quad (1.67)$$

si la derivada m.s. indicada existe.

En el caso donde  $X(t)$  es estacionario en el sentido amplio la ecuación (1.68) se reduce a

$$\Gamma_X(n)_X(m)(t, s) = \Gamma_X(n)_X(m)(\tau) = \frac{\partial^{n+m} \Gamma(\tau)}{\partial t^n \partial s^m}, \quad \tau = s - t. \quad (1.68)$$

### 1.4.3. Analiticidad en media cuadrática

El concepto de diferenciación en m.s. lleva a la noción por expansión de series de Taylor en el sentido de media cuadrática para un (2-s.p) y a la definición de analiticidad en media cuadrática.

**Definición:** Un proceso estocástico  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es m.s. analítico en  $T$  si este puede expandirse como una serie de Taylor convergente

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n X^{(n)}(t_0)}{n!}, \quad t, t_0 \in T. \quad (1.69)$$

En conexión con la m.s. analiticidad, se presenta el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [24] (Loève[1,p.471]).

**Teorema 1.9:**

Un proceso estocástico de segundo orden  $X(t)$  con  $t \in T$ , es m.s. analítico en  $T$  si y sólo si, su función de correlación  $\Gamma(t, s)$  es analítica en  $(t, t)$ , para todo  $t \in T$ , entonces  $\Gamma(t, s)$  es analítico en  $T \times T$ .

Es claro que  $E \{X^2(t)\} = \Gamma(t, t)$  es una función determinista que puede ser escrita como  $\Gamma(t, t) = f(t)$ . De este modo si la función de correlación  $\Gamma(t, s)$  es analítica en cada  $(t, t)$  para  $t \in T$ , entonces  $f(t)$  es analítica en cada  $t \in T$ .

El siguiente es un importante resultado asociado al álgebra de las funciones analíticas en el sentido determinista [22].

**Lema 1.7 :** Si  $f$  y  $g$  son funciones analíticas sobre  $T$ , entonces las sumas, productos, cocientes y composiciones son funciones analíticas.

Así mismo, es inmediato que  $f'$  es analítica en  $T$  y considerando las propiedades de las series de potencias del cálculo ordinario se puede probar que la función  $F$  es analítica sobre  $T$ , donde  $F$  es la primitiva de  $f$ , esto es,  $F' = f$ .

Por lo tanto se observa que la propiedad de analiticidad en el sentido de m.s. de procesos estocásticos está también determinada por las propiedades analíticas ordinarias de su función de correlación.

## 1.5. Integración en media cuadrática

Para el desarrollo de las integrales en media cuadrática para procesos estocásticos, se consideran principalmente integrales de Riemann en media cuadrática.

Considere una colección de todas las particiones finitas  $\{p_n\}$  de un intervalo  $[a, b]$ . La partición  $p_n$  es definida por la subdivisión de puntos  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b. \quad (1.70)$$

Sea

$$\Delta_n = \max_k \{t_k - t_{k-1}\}$$

y sea  $t'_k$  un punto arbitrario en el intervalo  $[t_{k-1}, t_k)$ . Sea  $X(t)$  un (2-s.p) definido en  $[a, b] \subset T$ . Sea  $f(t, u)$  una función ordinaria definida en el mismo intervalo para  $t$  y Riemann integrable para todo  $u \in U$ . Se forma la variable aleatoria

$$Y_n(u) = \sum_{k=1}^n f(t'_k, u)X(t'_k)(t_k - t_{k-1}) \quad (1.71)$$

Ya que el espacio  $L_2$  es lineal,  $Y_n(u)$  es un elemento del espacio  $L_2$ . Esta es una variable aleatoria definida para cada partición  $p_n$  y por cada  $u \in U$ .

**Definición:** Si para  $u \in U$ ,

$$\text{l.i.m.}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} Y_n(u) = Y(u) \quad (1.72)$$

existe para algunas sucesiones de particiones  $p_n$ , el s.p.  $Y_n(u)$ ,  $u \in U$ , es llamado Integral de Riemann en media cuadrática de  $f(t, u)X(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ , y se denota por

$$Y(u) = \int_a^b f(t, u)X(t)dt \quad (1.73)$$

Esto es independiente de las sucesiones de particiones como bien de las posiciones de  $t'_k \in [t_{k-1}, t_k)$

**Teorema 1.10 (Criterio de integración en media cuadrática):**

El proceso estocástico  $Y(u)$ ,  $u \in U$  definido por la ecuación (1.74) existe si y sólo si, la doble integral ordinaria de Riemann

$$\int_a^b \int_a^b f(t, u)f(s, u)\Gamma_{XX}(t, s)dtds \quad (1.74)$$

existe y es finita.

**Demostración:** Este teorema es un resultado inmediato del criterio de convergencia en media cuadrática, se tiene que

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^n f(t'_k, t)X(t'_k)(t_k - t_{k-1}), \quad t = u, n_0 = \infty. \quad (1.75)$$

en el teorema 1.5.

Las m.s. integrales impropias de Riemann son definidas de la misma manera. Una m.s. integrable impropia de Riemann, se dice  $\int_a^\infty f(t, u)X(t)dt$ , es definida por

$$\int_a^\infty f(t, u)X(t)dt = \text{l.i.m.}_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, u)X(t)dt \quad (1.76)$$

existe si, y sólo si, la doble integral impropia ordinaria de Riemann

$$\int_a^\infty \int_a^\infty f(t, u)f(s, u)\Gamma_{XX}(t, s)dtds \quad (1.77)$$

exite y es finita.

**Lema 1.8:** Si los números  $\xi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) satisfacen

$$|\xi_{n+1}| \leq A|\xi_n| + B \quad (1.78)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes no negativas independientes de  $n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , entonces

$$|\xi_n| \leq A^n |\xi_0| + \begin{cases} \frac{A^n - 1}{A - 1} B, & A \neq 1, \\ nB & A = 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.79)$$

Para  $n = 1$  (1.78) es idéntica a (1.79) y cierto por hipótesis. Asumiendo como cierta (1.79) para  $n < N$ , entonces por (1.78) se tiene para  $A \neq 1$

$$\begin{aligned} |\xi_{n+1}| &\leq A \left\{ A^n |\xi_0| + \frac{A^n - 1}{A - 1} B \right\} + B \\ &= A^{n+1} |\xi_0| + \left( A \frac{A^n - 1}{A - 1} + 1 \right) B \\ &= A^{n+1} |\xi_0| + \frac{A^{n+1} - 1}{A - 1} B \end{aligned}$$

que es (1.79) incrementada en 1. Un argumento similar se establece si  $A = 1$ . Así la demostración del lema se sigue por inducción.



## 2 Ecuaciones diferenciales aleatorias

En el presente capítulo se dará una introducción a las ecuaciones diferenciales aleatorias las cuales en los últimos años han tomado gran importancia al ser aplicadas en diversas áreas de las ciencias y la ingeniería, en control, filtración de señales [16], en modelación, análisis y predicción del comportamiento de fenómenos físicos y naturales [5], siendo estos donde se ha hecho mayor énfasis en métodos probabilísticos.

Se presentará la ecuación de Ito y su expresión en forma integral, una representación del ruido blanco, y algunos teoremas de existencia y unicidad de soluciones en media cuadrática.

Debido a que las ecuaciones diferenciales involucran varios elementos aleatorios se hace necesario su estudio aplicado para este campo, para ello a continuación se aplica el concepto de media cuadrática en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales aleatorias de la forma:

$$\dot{X}(t) = f(X_1(t), \dots, X_n(t); Y_1(t), \dots, Y_m(t); t), \quad t \in T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

con la condición inicial

$$X(t_0) = X_0, \quad (2.2)$$

donde  $Y_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  y  $X_{i0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se especifican únicamente en el sentido estocástico. Donde  $T = [t_0, a]$  es un intervalo (finito o infinito) de la recta real.

Es claro que este sistema de ecuaciones diferenciales también abarca el caso de ecuaciones diferenciales de orden superior. Esto es siempre posible cuando se requiere introducir más variables, o convertir en una ecuación diferencial de mayor orden a un conjunto de acoplamiento de ecuaciones de primer orden.

En notación de vector-matriz, este sistema básico de ecuaciones diferenciales esta dado por

$$\dot{X}(t) = f(X(t), Y(t), t), \quad t \in T \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.3)$$

donde  $X(t)$  es un vector  $n$ -dimensional con componentes  $X_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Los vectores  $n$ -dimensionales  $f$  y  $X_0$ , y el vector  $m$ -dimensional  $Y(t)$  estan definidos análogamente.

### 2.0.1. Existencia y unicidad

Inicialmente se expone la teoría de media cuadrática para ecuaciones diferenciales como la ecuación (2.3), en este desarrollo las cantidades estocásticas involucradas con la ecuación (2.3) toman valores en el espacio  $L_2$ , y todas las operaciones están definidas en el sentido media cuadrática. Ya que se trata de una extensión a partir de un vector de valores estocásticos, primero se establece algunas definiciones y la notación para ese vector.

#### 2.0.1.1. El espacio $L_2^n$

Sea  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , variables aleatorias de segundo orden, un vector aleatorio  $n$ -dimensional

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde el conjunto de vectores aleatorios constituye un espacio vectorial lineal si todas las 2-rv's equivalentes están identificadas. Este espacio con su norma

$$\|X\|_n = \max_{j=1,2,\dots,n} \|X_j\| \quad (2.5)$$

es llamado espacio  $L_2^n$ . Ya que el espacio  $L_2$  es completo, el espacio  $L_2^n$  también es completo con la norma  $\|X\|_n$ . Este es también un espacio de Banach con respecto a esta norma.

La m.s. continuidad, m.s. diferenciación, y m.s. integración asociada con un vector de procesos estocásticos de segundo orden es definida con respecto a la norma  $\|X\|_n$ . Por lo tanto, un vector de procesos estocásticos  $X(t)$ ,  $t \in T$ , es m.s. continuo en  $t$ , por ejemplo si

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|X(t + \tau) - X(t)\|_n = 0, \quad (t + \tau) \in T. \quad (2.6)$$

En esta definición, el vector  $X(t)$  es m.s. continuo en  $t \in T$ , si, y sólo si, cada componente de este proceso es m.s. continuo en  $t \in T$ .

Observaciones similares se pueden hacer respecto a la m.s. diferenciación, y m.s. integración del vector procesos estocásticos de segundo orden  $X(t)$ .

Sea  $X(t)$ ,  $t \in T$ , un vector de procesos estocásticos de segundo orden  $n$ -dimensional, el cual se caracteriza por un mapeo en el intervalo  $T$  en  $L_2^n$ . Es conveniente adoptar la notación  $X(t) : T \rightarrow L_2^n$  de aquí en adelante. Similarmente, un vector de transformación  $f(X(t), t)$  sobre un un vector de procesos estocásticos de segundo orden  $n$ -dimensional para cada  $t \in T$ , será denotado por  $f : L_2^n \times T \rightarrow L_2^n$ . La notación  $X \in L_2^n$  significa que  $X$  es un vector aleatorio de segundo orden  $n$ -dimensional.

### 2.0.1.2. Existencia y unicidad para soluciones en media cuadrática

Considere la solución de la ecuación (2.4) en el sentido de media cuadrática. El desarrollo, definiciones y teoremas son generalizaciones naturales de la respectiva teoría determinística de ecuaciones diferenciales. Por esto primero se expresa la ecuación (2.4) de la forma

$$\dot{X} = f(X(t), t), \quad t \in T; \quad X(t_0) = X_0. \quad (2.7)$$

**Definición:** Considere la ecuación (2.7) donde  $f : L_2^n \times T \rightarrow L_2^n$  continuamente y  $X_0 \in L_2^n$ . El proceso estocástico  $X(t) : T \rightarrow L_2^n$  es llamado solución en media cuadrática (m.s) de la ecuación (2.7) en  $T$  si:

1.  $X(t)$  es m.s. continua en  $T$ ,
2.  $X(t_0) = X_0$ ;
3.  $f(X(t), t)$  es la m.s. derivada de  $X(t)$  en  $T$ .

Cuando se habla de m.s. solución, se asume que  $f$  y  $X_0$  satisfacen las condiciones establecidas anteriormente.

#### Teorema 2.1:

$X(t) : T \rightarrow L_2^n$  es m.s. solución de la ecuación (2.7) si y sólo si, para todo  $t \in T$ ,

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds \quad (2.8)$$

donde la integral es entendida como m.s. integral.

La prueba de este teorema puede ser consultada en [33, p.128]

**Teorema 2.2:** Considere la ecuación (2.7). Si  $f : L_2^n \times T \rightarrow L_2^n$  satisface la m.s. condición de Lipchitz

$$\|f(X, t) - f(Y, t)\|_n \leq k(t) \|X - Y\|_n, \quad (2.9)$$

donde

$$\int_{t_0}^a k(t) dt < \infty,$$

entonces existe una única m.s. solución para una condición inicial  $X_0 \in L_2^n$ .

La prueba de este teorema esta dada por Strand[17, p.28] , otra prueba en espacios de Banach se encuentra en el trabajo de Hille and Phillips [11] .

## 2.1. La ecuación de Ito

Un caso especial de ecuaciones diferenciales aleatorias a la que se le ha hallado importantes aplicaciones en control, filtración de señales, telecomunicaciones, economía y finanzas, es una teoría donde el vector  $Y(t)$  en la ecuación (2.3) tiene únicamente componentes ruido blanco. Más específicamente, con la forma

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + G(X(t), t)W(t), \quad t \in T; \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.10)$$

donde  $W(t)$  es un vector m-dimensional cuyos componentes son ruido blanco gaussianos,  $G(X(t), t)$  es una función matriz de  $n \times m$ , y  $X_0$  es independiente de  $W(t)$ ,  $t \in T$ .

### 2.1.1. Representación del ruido blanco

Una representación para el proceso ruido blanco gaussiano es  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ . Sea  $B(t)$ ,  $t \geq 0$  un proceso Browniano , este es un proceso gaussiano con media cero y covarianza

$$\mu_B(t_1, t_2) = 2D \min(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0 \quad (2.11)$$

Es de resaltar que  $B(t)$ ,  $t \geq 0$  no es m.s. diferenciable. Formalmente, sin embargo se puede considerar m.s. derivable y determinar sus propiedades.

La derivada formal de  $B(t)$ ,  $\dot{B}(t)$ , es gaussiana con media cero, su covarianza está dada por

$$\mu_B(t_1, t_2) = \partial^2 \mu_B(t_1, t_2) / \partial t_1 \partial t_2 \quad (2.12)$$

Así

$$\begin{aligned} \mu_B(t_1, t_2) &= 2D \partial^2 \min(t_1, t_2) / \partial t_1 \partial t_2 \\ &= 2D \partial U(t_1 - t_2) / \partial t_1 = 2D \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

La función  $U(t_1 - t_2)$  está dada por

$$U(t_1 - t_2) = \begin{cases} 0, & t_1 < t_2 \\ 1, & t_1 > t_2 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Donde la derivada de  $\dot{B}(t)$ ,  $t \geq 0$  tiene las propiedades de un ruido blanco gaussiano. Así se escribe formalmente

$$\frac{dB(t)}{dt} = W(t), \quad t \geq 0 \quad (2.15)$$

### 2.1.2. La ecuación y la integral de Ito

Con la representación formal para un ruido blanco gaussiano (2.15), se puede interpretar la ecuación (2.10) de forma equivalente como

$$dX(t) = f(X(t), t)dt + G(X(t), t)dB(t), \quad t \in T; \quad X(t_0) = X_0. \quad (2.16)$$

Y su forma integral,

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t f(X(s), s)ds + \int_{t_0}^t G(X(s), s)dB(s), \quad t \in T; \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.17)$$

donde  $X(t_0)$  es independiente de el incremento de  $dB(t)$ ,  $t \in T$ .

La primera integral de la ecuación (2.17) puede definirse como una m.s. integral de Riemann. La segunda integral por otro lado carece de sentido en media cuadrática como integral de Riemann Stieltjes. La razón es que si se definen las r.v.'s  $Y_n$  por

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X(t'_k)[B(t_k) - B(t_{k-1})] \quad t'_k \in [t_{k-1}, t_k] \quad (2.18)$$

esta sucesión de r.v.'s no converge en el sentido de m.s. a un único límite; el límite depende de la elección específica de  $t'_k$ . Por lo tanto, la integral

$$\int_{t_0}^t X(s)dB(s) \quad (2.19)$$

no existe como m.s. integral en el sentido usual. Las ecuaciones (2.16) o (2.17) son generalmente llamadas ecuación diferencial estocástica de Ito, aunque se prefiere el término “Ecuación diferencial aleatoria” en ese contexto.

Considere ahora la integral (2.19) en el sentido de Ito. Sea  $B(t)$ ,  $t \in T = [0, a]$ , un proceso de Wiener con

$$E\{B(t)\} = 0, \quad E\{[B(t) - B(s)]^2\} = |t - s|, \quad t, s \in T \quad (2.20)$$

y sea  $X(t) : T \rightarrow L_2$  m.s. continuo en  $T$ . Para algún  $t \in T$ , el proceso estocástico  $X(t)$  es independiente del incremento  $\{B(t_{k+1}) - B(t_k)\}$  para todo  $t_k$  y  $t_{k+1}$  que satisfacen  $0 \leq t \leq t_k \leq t_{k+1} \leq a$ .

Sea  $\{p_n\}$  una sucesión de finitas particiones de  $T$  y sea

$$\Delta_n = \max_k \{t_{k+1} - t_k\}$$

Se forma una variable aleatoria

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k) [B(t_{k+1}) - B(t_k)], \quad (2.21)$$

es claro que desde

$$\|X(t_k) [B(t_{k+1}) - B(t_k)]\| = \|X(t_k)\| \cdot \|B(t_{k+1}) - B(t_k)\| < \infty$$

cada termino de la ecuación (2.21) pertenece a  $L_2$  y por lo tanto  $Y_n \in L_2$ .

**Definición:**

$$\text{Si } \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} Y_n = Y \quad (2.22)$$

existe, la r.v.  $Y$  se conoce como la integral estocástica de Ito, o integral de Ito de  $X(t)$  [con respecto a  $B(t)$ ] sobre el intervalo  $T$ . Esta integral se denota por

$$(I) \int_0^a X(t) dB(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_n \rightarrow 0}} Y_n \quad (2.23)$$

Una importante observación es que los valores de  $X(t)$  en la ecuación (2.21) no son tomados de puntos arbitrarios en el intervalo  $(t_k, t_{k+1})$ . Así esta definición no es de una m.s. integral en el sentido usual. Como ya se mencionó anteriormente el limite en media cuadrática  $Y$ , depende de esta elección.

Los siguientes teoremas son presentados sin prueba y pueden consultarse en [33, pp. 123-128].

**Teorema 2.3:**

Suponga que  $X(t)$  y  $B(t)$  satisfacen las condiciones dadas anteriormente, la integral de Ito ecuación (2.23), existe y es única.

### 2.1.3. Existencia y unicidad de soluciones

La existencia de la integral de Ito permite discutir acerca de la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación diferencial estocástica de Ito, para tal fin a continuación se expondrán algunos teoremas necesarios.

**Teorema 2.4:**

Sea  $\{X_n(t)\}$ ,  $t \in T = [0, a]$ , una sucesión de s.p.'s que satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $X_n(t) : T \rightarrow L_2$  es m.s. continua en  $T$  ;
2.  $X_n(t)$  es independiente del incremento  $\{B(t_{k+1}) - B(t_k)\}$  para todo  $t_k$  y  $t_{k+1}$  satisfaciendo  $0 \leq t \leq t_k \leq t_{k+1} \leq a$ .

Si  $X_n(t) \xrightarrow{\text{m.s.}} X(t)$  uniformemente en  $T$ , entonces  $X(t)$  también satisface las propiedades 1 y 2 y

$$Y_n(t) = \left(\mathbb{I}\right) \int_0^t X_n(s)dB(s) \xrightarrow{\text{m.s.}} Y(t) = \left(\mathbb{I}\right) \int_0^t X(s)dB(s) \tag{2.24}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t \in T$ .

Considere la ecuacion de Ito (Escalar)

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds + \left(\mathbb{I}\right) \int_{t_0}^t g(X(s), s) dB(s) \tag{2.25}$$

$$X(t_0) = X_0, \quad t \in T = [t_0, a].$$

Donde la condición inicial  $X_0 \in L_2$  es independiente de  $dB(t)$ ,  $t \in T$ .

**Teorema 2.5:**

Si  $X(t)$  es m.s. continuo en  $T = [0, a]$ , entonces para cada  $t \in T$ ,

$$\left\| \int_0^t X(s)ds \right\|^2 \leq t \int_0^t \|X(s)\|^2 ds \leq a \int_0^t \|X(s)\|^2 ds \tag{2.26}$$

**Teorema 2.6:**

Sean  $f(X, t)$  y  $g(X, t)$ ,  $t \in T$  dos funciones reales que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Ambas son continuas en  $T \times (-\infty, \infty)$  y por otra parte, uniformemente continuas en  $t$  respecto a  $t \in (-\infty, \infty)$ .

2. Las condiciones de crecimiento

$$f^2(x, t) \leq K^2(1 + x^2), \quad g^2(x, t) \leq K^2(1 + x^2) \quad (2.27)$$

3. Las condiciones de Lipschitz

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| \leq K|x_2 - x_1| \quad (2.28)$$

$$|g(x_2, t) - g(x_1, t)| \leq K|x_2 - x_1| \quad (2.29)$$

Para  $K > 0$ . Entonces la ecuación (2.25) tiene una única solución en m.s.

### 3 El método aleatorio de Euler y su convergencia en media cuadrática

En este capítulo se presenta la construcción numérica de soluciones de problemas diferenciales de valor inicial aleatorios bajo el Esquema aleatorio de Euler a fin de construir soluciones numéricas confiables, en ese sentido se observa que las aproximaciones son m.s. convergentes a la solución exacta del problema, se calculan el valor esperado, la varianza, la correlación y la covarianza del proceso, se enuncia un teorema de valor medio aleatorio, se expone el concepto de continuidad en media cuadrática y se presentan nuevas condiciones de convergencia para el método Aleatorio de Euler en el sentido de media cuadrática como una extensión de los resultados de [19] y [20] a la correlación y covarianza del proceso.

Como se ha expuesto, las ecuaciones diferenciales son una herramienta poderosa para representar la naturaleza y el mundo real, aunque debido a errores en las mediciones, su complejidad, o por razones técnicas, los parámetros y funciones que aparecen en los modelos matemáticos están sujetos a incertidumbre, esto motiva la inclusión de modelos aleatorios donde los parámetros son variables aleatorias y los terminos funcionales son procesos estocásticos.

Bajo las condiciones de Lipschitz de  $f(X, t)$  junto con su continuidad en media cuadrática el problema (3.1) admite un proceso estocástico como única solución local s.p. Hay varias razones con enfoque alternativo para que las condiciones de Lipschitz en el sentido media cuadrática sean adecuadas. Una es que tal hipótesis a menudo no se cumple. Y la segunda es que se buscan procesos solución que no sólo son m.s. diferenciables, sino también con realizaciones diferenciables. El siguiente resultado muestra bajo que condiciones un 2-s.p.  $p(t)$ ,  $t \in T$ , para un evento  $w \in \Omega$ , satisface las propiedades de que la realización  $p(t)$  es diferenciable en el sentido determinista, es m.s. diferenciable.

En particular, considere el problema de valor inicial aleatorio de la forma:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (3.1)$$

con la condición inicial  $X(t_0) = X_0$

#### Teorema 3.1.

Sea  $p(t) = p(t, \beta)$  un 2-s.p. definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , que depende de la 2-r.v.  $\beta$ . Suponga que, para cada  $w \in \Omega$ , la realización  $p(t, \beta)(w)$  es

una función determinista dos veces diferenciable con respecto a la variable  $t$ , y suponga que su segunda derivada satisface la propiedad:

$$\left| \frac{d^2}{dy^2} p(y, \beta)(w) \right| \leq M < +\infty, \quad \forall (y, w) \in [t - \delta, t + \delta] \times \Omega, \delta > 0. \quad (3.2)$$

Entonces el proceso de  $p(t)$  es m.s. diferenciable y  $\dot{p}(t)$  se define para cada  $w \in \Omega$ , por

$$\dot{p}(t)(w) = \frac{d}{dt} p(t, \beta)(w) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t, \beta)(w) - p(t, \beta)(w)}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

**Demostración:** Sea  $w \in \Omega$  fijo, y considere la expansión de Taylor sobre  $t$  de la función determinista diferenciable  $p(t, \beta)(w)$ ,

$$p(t + \Delta t, \beta)(w) = p(t, \beta)(w) + \frac{d}{dt} p(t, \beta)(w) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} p(t_w, \beta)(w) (\Delta t)^2 \quad (3.4)$$

para algunos  $t_w$  entre  $t$  y  $t + \Delta t$ . Sea  $\dot{p}(t)$  un s.p. definido por (3.3).

Como para cada  $\Delta t$ ,  $p(t + \Delta t, \beta)$  es una 2-r.v. que es una función de la r.v.  $\beta$ , entonces, por [12, pp. 93] se deduce que  $\dot{p}(t)$  es también una función de  $\beta$ , y por (3.4) se tiene que

$$E \left\{ \left( \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} - \dot{p}(t) \right)^2 \right\} = \left( \int_{\Omega} \frac{d^2}{dt^2} p(t_w, \beta)(w)^2 dp(w) \right) \frac{(\Delta t)^4}{4}. \quad (3.5)$$

Bajo la hipótesis (3.2), tomando límites en (3.5), cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , se obtiene

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left\{ \left( \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} - \dot{p}(t) \right)^2 \right\} = 0 \quad \square. \quad (3.6)$$

Sean  $\gamma$  y  $X_0$  variables aleatorias de segundo orden definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y sea  $f(X, t)$  tal que:

(H1)  $f : S \times T \rightarrow L_2$ ,  $S \subset L_2$  es una función de la 2-r.v.  $\gamma$ , continua en ambas variables  $(X, t)$ .

(H2) para  $w \in \Omega$ , La realización  $f(X, t)(w)$  es diferenciable y su derivada con respecto a la variable  $t$  satisface

$$\left| \frac{d}{dt} f(X, t)(w) \right| \leq M < \infty, \quad \forall (X, t, w) \in S \times T \times \Omega.$$

(H3), Existe una constante  $K > 0$  tal que

$$|f(X, t)(w) - f(Y, t)(w)| \leq K |X(w) - Y(w)|, \quad \begin{aligned} &\forall (X, t, w) \in S \times T \times \Omega. \\ &\forall (Y, t, w) \in S \times T \times \Omega. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2:**

Sea  $f(x, t)$  un 2-s.p. definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  que satisface las condiciones (H1), (H2) y (H3), y sea  $X_0$  una 2-r.v. dada, entonces, existe un 2-s.p.  $X_t$  solución del problema (3.1) con realizaciones diferenciables.

**Demostración:** Sea  $w \in \Omega$  un evento fijo, y considere la ecuación diferencial determinista

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d(t)}x_w(t) &= f(x_w(t), t), \\ x_w(t_0) &= x_0(w). \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Por la continuidad de  $f$  y la propiedad (H3) [27, pp. 15], existe una solución única  $x_w(t)$  del problema (3.7) tal que

$$x_w(t) = x_0(w) + \int_{t_0}^t f(x_w(s), s) ds. \quad (3.8)$$

Defina el proceso estocástico para cada  $w \in \Omega$  por

$$X(t, w) = x_w(t) \quad (3.9)$$

y note que por (H1),  $X(t, \cdot)$  es una función de la 2-r.v.  $\gamma$ . Por hipótesis (H2), el proceso  $X(t, w)$  admite dos realizaciones diferenciables con una segunda derivada acotada. Por otra parte, por el teorema 3.1,  $X(t, w)$  es m.s. diferenciable y

$$\dot{X}(t, w) = \frac{d}{d(t)}x_w(t) = f(x_w(t), t) = \frac{d}{d(t)}X(t, w) = f(X(t, w), t),$$

y

$$X(t_0, w) = x_0(w).$$

Así  $X(t, w)$  es una m.s. solución del problema (3.1). Con el fin de mostrar la singularidad de esta solución, note que

$$\begin{aligned} \|f(X, t) - f(Y, t)\|^2 &= E \left\{ (f(X, t) - f(Y, t))^2 \right\} = \int_{\Omega} (f(X, t) - f(Y, t))^2(w) dP(w) \\ &\leq \int_{\Omega} (K |X(w) - Y(w)|)^2 dP(w) = K^2 \|X - Y\|^2. \end{aligned}$$

por el Teorema 5.12 de [33, p. 118] sólo existe un 2-s.p. solución para el problema (3.1) que satisface

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds. \quad (3.10)$$

**Lema 3.1.**

Sea  $g : T \rightarrow L_2$  una m.s. función acotada y sea  $h > 0$ , entonces el m.s. módulo de continuidad de  $g$  es la función

$$m(g, h) = \sup_{|t-t^*| \leq h} \|g(t) - g(t^*)\| \quad t, t^* \in T. \quad (3.11)$$

La función  $g$  se dice que es m.s. uniformemente continua en  $T$ , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(g, h) = 0.$$

Sea  $f(X, t)$  definida en  $S \times T$ , donde  $S$  es un conjunto acotado en  $L_2$ . Se dice que  $f$  es aleatoria, acotada, uniformemente continua en  $S$ , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} m(f((X, \cdot), h)) = 0, \quad \text{uniformemente para } X \in S. \quad (3.12)$$

$$\sup_{X \in S} m(f((X, \cdot), h)) = m(h) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

**3.1. Teorema de valor medio aleatorio para procesos estocásticos**

El objetivo de esta sección es establecer una relación entre el incremento de  $X(t) - X(t_0)$  de un 2-s.p. y su m.s. derivada  $\dot{X}(\xi)$  para algunos  $\xi$  definidos en el intervalo  $[t_0, t]$  para  $t > t_0$ . Este resultado se utiliza luego para demostrar la convergencia del método aleatorio de Euler .

**Lema 3.2.**

Sea  $Y(t)$  un 2-s.p., m.s. continuo en el intervalo  $T = [t_0, t_1]$ . Entonces, existe  $\xi \in [t_0, t_1]$  tal que

$$\int_{t_0}^t Y(s) ds = Y(\xi)(t - t_0), \quad t_0 < t < t_1. \quad (3.14)$$

**Demostración:** Como  $Y(t)$  es m.s. continuo, el proceso integral

$$\int_{t_0}^t Y(s) ds$$

está bien definido. Por el teorema 1.7 la función de correlación  $\Gamma_Y(r, s)$  es una función continua determinista en  $T \times T$ . Para cada  $r$  fijo, la función  $\Gamma_Y(r, \cdot)$  es continua y por el teorema del valor medio clásico para integrales, se deduce que

$$\int_{t_0}^t \Gamma_Y(r, s) ds = \Gamma_Y(r, \xi)(t - t_0), \quad \text{para algunos } \xi \in [t_0, t]. \quad (3.15)$$

Nótese que por definición de  $\Gamma_Y(r, s)$ , la expresión (3.15) se puede escribir en forma

$$\int_{t_0}^t E \{Y(r)Y(s)\} ds = E \{Y(r)Y(\xi)\} (t - t_0). \quad (3.16)$$

Hay que demostrar que para el valor  $\xi$  satisfaga (3.15) se obtiene

$$\left\| \int_{t_0}^t Y(s) ds - Y(\xi)(t - t_0) \right\|^2 = E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds - Y(\xi)(t - t_0) \right)^2 \right\} = 0. \quad (3.17)$$

Como

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds - Y(\xi)(t - t_0) \right)^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds \right)^2 \right\} - 2E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds \right) Y(\xi) \right\} (t - t_0) + E \{Y(\xi)^2 (t - t_0)^2\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y por el Lema 1.1, se obtiene

$$E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds \right)^2 \right\} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t E \{Y(s)Y(r)\} dsdr \quad (3.19)$$

y

$$E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds \right) Y(\xi) \right\} = \int_{t_0}^t E \{Y(s)Y(\xi)\} ds \quad (3.20)$$

se sigue que (3.18) es equivalente a

$$\begin{aligned} & E \left\{ \left( \int_{t_0}^t Y(s) ds - Y(\xi)(t - t_0) \right)^2 \right\} = \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t E \{Y(s)Y(r)\} dsdr - \left( \int_{t_0}^t E \{Y(s)Y(\xi)\} ds \right) (t - t_0) \\ & \quad - \left( \int_{t_0}^t E \{Y(s)Y(\xi)\} ds \right) (t - t_0) + E \{Y(\xi)Y(\xi)\} (t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nótese que (3.17) se obtiene mediante la sustitución de (3.16) en (3.21).

**Teorema 3.4**

Sea  $X(s)$  un proceso estocástico de segundo orden m.s. diferenciable en  $[t_0, t_2]$  y m.s. continuo en  $T = [t_0, t_1]$ . Entonces, existe  $\xi \in [t_0, t_1]$  tal que

$$X(t) - X(t_0) = \dot{X}(\xi)(t - t_0). \quad (3.22)$$

**Prueba.** El resultado es una consecuencia directa del Lema 3.2 aplicado al 2-s.p.  $Y(t) = \dot{X}(t)$  y la fórmula integral

$$\int_{t_0}^t \dot{X}(s) ds = X(t) - X(t_0),$$

ver [33, p. 104].

## 3.2. Convergencia de procesos estocásticos analíticos en media cuadrática

Las propiedades de analiticidad pueden extenderse de funciones analíticas en sentido determinista a los procesos estocásticos de segundo orden  $X(t); t \in T$ . En particular considere el problema de valor inicial (3.1), cuya solución en forma integral, puede expresarse como [33, p. 18].

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(X(s), s) ds \quad (3.23)$$

Si  $X(t); t \in T$  es m.s analítico sobre  $T$  entonces admite una expansión en series de Taylor convergente en media cuadrática garantizando la existencia de las derivadas de orden superior, lo cual conduce a que  $\dot{X}(t) = f(X(t), t)$  sea m.s analítico sobre  $T$ .

Por otro lado si  $f(X(t), t); t \in T$  es m.s analítico sobre  $T$ , entonces (3.23) puede ser expresada como

$$\begin{aligned} X(t) &= X(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(X(t_0), t_0) ds \\ &= X(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(X(t_0), t_0) \implies X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} X^{(k)}(t_0) \end{aligned}$$

y en consecuencia,  $X(t)$  es m.s analítico sobre  $t \in T$ . Nótese que por el teorema 1.8 y por las propiedades del cálculo ordinario, la convergencia de las series de potencias se mantienen bajo las operaciones de integración y diferenciación, de esta manera se establece el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.** Sea  $X(t) t \in T$  un 2-s.p. y considere el problema de valor inicial (3.1).  $X(t)$  es m.s analítica si y solo si  $f(X(t), t)$  es m.s analítica.

### 3.3. Sobre el esquema aleatorio de Euler

Considere el problema de valor inicial aleatorio

$$X(t) = f(X(t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (3.24)$$

$$X(t_0) = X_0$$

donde  $X_0$  es una variable aleatoria,  $X(t)$  es desconocida,  $f(X, t)$  es un proceso estocástico definido en el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t)$$

puede expresarse en forma integral como:

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t f(X(s), S) ds$$

y en forma discretizada

$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(X(s), S) ds$$

como

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(S, X(s)) ds \approx f(t_{n-1}, X(t_{n-1})) (t_n - t_{n-1})$$

luego se tiene que

$$\begin{cases} X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + f(t_{n-1}, X_{t_{n-1}}) h; & h = t_n - t_{n-1} \\ X_{t_0} = X_0 \end{cases}$$

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t)) \implies X(t_n) = X(t_{n-1}) + f(t_{n-1}, X(t_{n-1})) (t_n - t_{n-1})$$

así:

$$X_{t_1} = X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) h$$

$$X_{t_2} = X_{t_1} + f(t_0, X_{t_0}) h = X_{t_0} + f(t_0, X_{t_0}) h + f(t_1, X_{t_1}) h$$

$$X_{t_2} = X_{t_0} + h \sum_{i=1}^2 f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \implies X_{t_2} = X_{t_0} + h \sum_{i=1}^2 f(t_{i-1}, t_{i-1})$$

$$X_{t_3} = X_{t_2} + hf(t_2, X_{t_2}) = X_{t_0} + h \sum_{i=1}^2 f + hf(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) = X_{t_0} + h \sum_{i=1}^3 f + hf(X_{t_{i-1}}, t_{i-1})$$

en general se tiene

$$X_{t_n} = X_{t_0} + h \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})$$

### 3.4. Tres alternativas de convergencia en el esquema aleatorio de Euler

A continuación presentaremos tres alternativas de convergencia para el esquema aleatorio de Euler, a partir de sus respectivas condiciones, las dos primeras son tomadas de [19] y [20], y la tercera es uno de los aportes propuestos en este trabajo en el cual se establecen condiciones alternativas sobre la función  $f$  y el 2.s.p  $X(t)$  para garantizar la convergencia del esquema de Euler en el sentido media cuadrática.

1) El objetivo de esta sección es mostrar que bajo las hipótesis del teorema 3.2, la sucesión  $X_n$  es m.s. convergente para el valor teórico  $X(t)$ , en el sentido de la estación fija, es decir  $h \rightarrow 0$  y  $t_n = t$ ; ver [15, p.26], donde el esquema aleatorio de Euler asociado con el problema de valor inicial (2.1) puede expresarse como:

$$\left. \begin{array}{l} X_n = X_{n-1} + hf(X_{n-1}, t_{n-1}) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right\} \quad n \geq 1 \quad (3.25)$$

con  $X_n$ ,  $f(X_{n-1}, t_{n-1})$  variables aleatorias de segundo orden y  $h = t_n - t_{n-1}$ .

Asumiendo la hipótesis del Teorema 3.2, sea  $X(t)$  la solución del problema de valor inicial aleatorio (3.1). De la condición (H2) del teorema 3.2, y la expresión (3.7) de la prueba del teorema 3.2, para cada  $w \in \Omega$  se obtiene

$$\left| \frac{d^2}{dt^2} x_w(t) \right| = \frac{d}{dt} f(x_w(t), t) < M, \quad \forall (t, w) \in T \times \Omega \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta la expansión en series de Taylor para  $x_w$  sobre  $t_n = t$  se tiene que

$$x_w(t_{n+1}) = x_w(t) + h(x_w(t), t) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} x_w(\xi(w)), \quad (3.27)$$

donde  $t_n = t < \xi(w) < t_{n+1}$  se quiere mostrar que el error aleatorio

$$e_n = X_n - X(t), \quad (3.28)$$

es m.s. convergente a cero en el sentido de estación fija. A partir de las realizaciones de  $e_n$ ,

$$e_n = X_n(w) - X(t, w) = X_n(w) - x_w(t), \quad n \geq 0 \quad (3.29)$$

y la realización del esquema de Euler,

$$X_{n+1}(w) = X_n(w) + hf(X_n(w), t), \quad X_0(w) = x_w(t_0). \quad (3.30)$$

de (3.27) y (3.30) se sigue que

$$e_{n+1}(w) = e_n(w) + h[(fX_n(w), t) - f(x_w(t), t)] - \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} x_w(\xi(w)). \quad (3.31)$$

De la condición (H3) del teorema 3.2 se tiene

$$|e_{n+1}(w)| \leq (1 + hK) |e_n(w)| + \frac{h^2 M}{2}. \quad (3.32)$$

Por el Lema 1.8 se obtiene

$$|e_{n+1}(w)| \leq e^{nhK} |e_0(w)| + \frac{(e^{nhK} - 1)}{Kh} \left( \frac{h^2 M}{2} \right) \quad (3.33)$$

Como  $e_n(w) = 0$  para todo  $w \in \Omega$ , y  $nh = t - t_0$ , en (3.33) se sigue que

$$|e_0(w)| \leq \frac{hM}{2K} (e^{(t-t_0)K} - 1), \quad (t, w) \in T \times \Omega. \quad (3.34)$$

Por (3.29) y (3.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_n\|^2 &= \|X_n - X(t)\|^2 = E \{ (X_n - X(t))^2 \} \\ &= \int_{\Omega} (X_n - X(t))^2(w) dP(w) = \int_{\Omega} (e_n)^2(w) dP(w) \\ &\leq \left[ \left( \frac{hM}{2K} \right) (e^{(t-t_0)K} - 1) \right]^2 \end{aligned}$$

Así  $\{e_n\}$  es m.s. convergente a cero, cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $nh = t - t_0$ .

**Teorema 3.5:**

Si  $f(X, t)$  satisface las hipótesis del teorema 3.2, entonces el método numérico aleatorio de Euler es m.s. convergente.

**Observación 3.1.** Desde el punto de vista práctico la m.s. convergencia del método numérico aleatorio de Euler es relevante ya que garantiza que  $X_n$ ,  $E \{X_n\}$ ,  $Var[X_n]$  y  $cov[X_n]$  convergen a los valores exactos de la solución teórica  $X(t)$ ,  $E \{X(t)\}$ ,  $Var[X(t)]$  y  $cov[X(t)]$  cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $nh = t - t_0$ .

**2)** En esta sección se analiza la convergencia media cuadrática, en el sentido de estación fija, en el método aleatorio de Euler de la forma:

$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hf(X_n, t_n) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

donde  $X_n$  y  $f(X_n, t_n)$  son variables aleatorias de segundo orden,  $h = t_n - t_{n-1}$ ,  $t_n = t_0 + nh$  y  $f : S \times T \rightarrow L_2$ ,  $S \subset L_2$  satisface la siguiente condiciones:

H4:  $f(X, t)$  es aleatoria acotada, uniformemente continua,

H5:  $f(X, t)$  satisface la m.s. condiciones de Lipschitz

$$\|f(X, t) - f(Y, t)\| \leq k(t) \|X - Y\|, \quad (3.36)$$

donde

$$\int_{t_0}^{t_1} k(t) dt < \infty.$$

Observe que bajo las hipótesis H4 y H5, importa la m.s. convergencia a cero del error

$$e_n = X_n - X(t), \quad (3.37)$$

donde  $X(t)$  es la solución teórica 2-s.p. del problema (3.1),  $t = t_n = t_0 + nh$ . Teniendo en cuenta (3.1), y Teorema 3.4, se obtiene,

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + hf(X(t_\xi), t_\xi) \quad \text{Para algún } t_\xi \in (t_n, t_{n+1}). \quad (3.38)$$

Por (3.35) y (3.38) se deduce que

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + h\|f(X(t_\xi), t_\xi) - f(X_n, t_n)\|. \quad (3.39)$$

Ya que la solución teórica  $X$  es m.s. acotada en  $[t_0, t_1]$ ,

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|X(t)\| \leq N < \infty.$$

Bajo la hipótesis H4, H5 y el teorema (3.4) se deduce que

$$\begin{aligned} & \|f(X(t_\xi), t_\xi) - f(X_n, t_n)\| \leq \|f(X(t_\xi), t_\xi) - f(X(t_\xi), t_n)\| \\ & + \|f(X(t_\xi), t_n) - f(X(t_n), t_n)\| + \|f(X(t_n), t_n) - f(X_n, t_n)\| \\ & \leq w(h) + k(t_n)Mh + k(t_n)\|e_n\| \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$M = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\dot{X}(t)\|. \quad (3.41)$$

A partir de (3.39) y (3.40) y el Lema 1.2 de [27, pp. 28], se obtiene

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + k(t_n)h)\|e_n\| + h[w(h) + k(t_n)Mh],$$

$$\leq \exp(nhk(t_n)) \|e_0\| + \frac{\exp(nhk(t_n)) - 1}{k(t_n)} [w(h) + k(t_n)Mh], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta que  $e_0 = 0$  y  $nh = t - t_0$ , la última desigualdad se puede escribir en la forma

$$\|e_{n+1}\| \leq \frac{\exp((t - t_0)k(t)) - 1}{k(t)} [w(h) + Mhk(t)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

ya que  $w(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , por la condición H4, a partir de (3.42) se obtiene la m.s. convergencia a cero de  $e_n$  cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $nh = t - t_0$ , por lo tanto se establece el siguiente resultado:

**Teorema 3.6.**

Si  $f(X, t)$  satisface las condiciones H4 y H5, entonces el esquema numérico aleatorio de Euler es m.s. convergente.

3) En que esta sección se establecen nuevas condiciones alternativas sobre la función  $f$  y el 2.s.p  $X(t)$  para garantizar la convergencia del esquema de Euler en el sentido media cuadrática, como aportes en el presente trabajo y además se enuncian con demostración algunos resultados inéditos, a partir del esquema aleatorio de Euler asociado con el problema de valor inicial (3.1) el cual puede expresarse como en (3.25):

$$\left. \begin{array}{l} X_n = X_{n-1} + hf(X_{n-1}, t_{n-1}) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right\} \quad n \geq 1$$

El objetivo de esta sección es demostrar que bajo las nuevas hipótesis  $H_6$  y  $H_7$  la sucesión  $X_n$  es m.s. convergente para el valor teórico  $X(t)$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

$$\begin{array}{l} H6 : f(X(t)), t \in T \text{ es m.s analítico sobre } T. \\ H7 : \|f(X, t) - f(Y, t)\| \leq k(t)\|X - Y\|, \text{ donde } \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt < \infty. \end{array} \quad (3.43)$$

Se mostrara que le error  $e_n = X_n - X(t)$  es m.s convergente a cero donde  $X(t)$  es la solución teórica del problema de valor inicial

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (3.44)$$

En efecto, por H6 y la proposición 3.1 es m.s analítica y en consecuencia,

$$X(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_{n+1} - t_n)^k}{k!} X^{(k)}(t_n) = X(t_n) + h\dot{X}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{X}(\xi),$$

luego,

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + hf(X(t_n), t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{X}(\xi); \quad t_n = t < \xi < t_{n+1}$$

Por el esquema numérico de Euler (3.25)

$$X_{n+1} = X_n + hf(X_n, t_n),$$

$$X_{n+1} - X(t_{n+1}) = X_n - X(t_n) + h[f(X_n, t_n) - f(X(t_n), t_n)] - \frac{h^2}{2}\ddot{X}(\xi)$$

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + h\|f(X_n, t_n) - f(X(t_n), t_n)\| + \frac{h^2}{2}\|\ddot{X}(\xi)\|,$$

de H7 se obtiene y por [27, pp. 27]

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + hk(t_n)\|e_n\| + \frac{h^2}{2}M$$

donde

$$M = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\ddot{X}(t)\|.$$

Por [27, pp. 18,28] se tiene

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\| &\leq (1 + hk(t_n)) \|e_n\| + \frac{h^2}{2}M \\ &\leq \exp(nhk(t_n)) \|e_0\| + \frac{\exp(nhk(t_n)) - 1}{k(t_n)} \left[ \frac{h}{2}M \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $e_0 = 0$  y  $nh = t - t_0$ , esta última ecuación puede ser escrita como

$$\|e_n\| \leq \frac{\exp((t - t_0)k(t_n)) - 1}{k(t_n)} \left[ \frac{h}{2}M \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

así se obtiene la convergencia a cero de  $\|e_n\|$  cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $nh = t - t_0$ .

**Teorema 3.7.** .

Si  $f(X, t)$  satisface las condiciones H6 y H7, entonces el método numérico de Euler aleatorio es convergente en media cuadrática.

**Proposición 3.2.** Considere el problema de valor inicial

$$\dot{X}(t) = a(t)X(t) + b(t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \tag{3.45}$$

$$X(t_0) = X_0.$$

Sea  $X_0$  una 2-r.v y  $b(t)$  un 2-s.p. m.s integrable ambos definidos sobre el mismo espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tal que  $b(t)$  es independiente de  $X(t)$  para cada  $t$  perteneciente al intervalo

$T = [t_0, t_1]$ . Sea  $a(t)$  una función determinística continua analítica definida sobre  $T$ . Si  $E\{b(t)\}$  es una función analítica sobre  $(t, t) \in T \times T$ , entonces el 2-s.p.  $X(t), t \in T$  es m.s analítica sobre  $T$ .

**Demostración.** El problema (3.45) puede expresarse en forma integral como

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^t (a(s)X(s) + b(s))ds$$

de ese modo

$$\dot{m}(t) - a(t)m(t) = E\{b(t)\}, \quad (3.46)$$

donde;

$$m(t) = E\{X(t)\}.$$

La solución explícita para la ecuación (3.46) toma la forma,

$$m(t) = E\{X_0\} e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)du} E\{b(s)\} ds.$$

Por el lema 1.7 vea que  $m(t)$  es analítica.

Por otro lado, sea  $Y(t) = X^2(t)$ , entonces,  $\dot{Y}(t) = 2X(t)\dot{X}(t)$ , luego,  $\dot{Y}(t) = 2a(t)X^2(t) + 2b(t)X(t)$  que en forma integral puede ser escrita como

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t (2a(s)p(s) + 2E\{b(s)\}m(s)) ds$$

donde  $p(t) = E\{Y(t)\} = E\{X^2(t)\}$ . De ese modo se tiene la ecuación diferencial,

$$\dot{p}(t) - 2a(t)p(t) = 2E\{b(t)\}m(t)$$

cuya solución explícita toma la forma

$$p(t) = p(t_0)e^{2\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{2\int_{t_0}^t a(s)ds} \int_{t_0}^t e^{-2\int_{t_0}^s a(u)du} E\{b(s)m(s)\} ds.$$

por el lema 1.7 y el teorema 1.9 se tiene que  $p(t) = E\{X^2(t)\} = \Gamma_x(t, t)$  es analítica, en consecuencia  $X(t)$  es m.s. analítica.

### 3.5. Resultados numéricos experimentales

Sea  $X_0$  una 2-r.v. definida en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y  $b(t)$  un 2-s.p. m.s. integrable definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , tales que  $b(t)$  es independiente de  $X_0$  para cada  $t$  en el intervalo  $T = [t_0, t_1]$ . Sea  $a(t)$  una función determinista continua definida en  $T$ , interesa solucionar numéricamente problemas de valor inicial aleatorio dados por:

$$\dot{X}(t) = a(t)X(t) + b(t); \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in T. \quad (3.47)$$

La ecuación (3.47) puede escribirse en forma diferencial como

$$dX(t) = [a(t)X(t) + b(t)] dt \quad (3.48)$$

en forma discreta

$$X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + \left( a(t_{n-1})X_{t_{n-1}} + b(t_{n-1}) \right) h \quad (3.49)$$

luego

$$X_{t_n} = (1 + ha(t_{n-1}))X_{t_{n-1}} + hb(t_{n-1}); \quad n \geq 1. \quad (3.50)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} X_{t_1} &= (1 + ha(t_0))X_{t_0} + hb(t_0) \\ X_{t_2} &= (1 + ha(t_1))X_{t_1} + hb(t_1) \\ &= (1 + ha(t_1))((1 + ha(t_0))X_{t_0} + hb(t_0)) + hb(t_1) \\ X_{t_2} &= (1 + ha(t_1))(1 + ha(t_0))X_{t_0} + h(1 + ha(t_1))b(t_0) + hb(t_1) \\ X_{t_3} &= (1 + ha(t_2))X_{t_2} + hb(t_2) \\ &= (1 + ha(t_2))((1 + ha(t_1))(1 + ha(t_0))X_{t_0} + h((1 + ha(t_1))b(t_0) + hb(t_1))) + hb(t_2) \\ &= (1 + ha(t_2))(1 + ha(t_1))(1 + ha(t_0))X_{t_0} + h(1 + ha(t_2))((1 + ha(t_1))b(t_0) + h(1 + ha(t_2))b(t_1)) + hb(t_2) \\ X_{t_3} &= \prod_{i=0}^2 (1 + ha(t_i))X_{t_0} + h \sum_{i=0}^2 \left( \prod_{j=1}^2 (1 + ha(t_j)) \right) b(t_i); \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

en general

$$X_{t_n} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i))X_{t_0} + h \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) b(t_i); \quad n \geq 1 \quad (3.51)$$

$$E\{X_{t_n}\} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i))E\{X_{t_0}\} + h \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) E\{b(t_i)\} \quad (3.52)$$

$$X_{t_n}^2 = \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) X_{t_0} + h \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) b(t_i) \right)^2 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 X_{t_0} + 2 \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) X_{t_0} \right) h \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) b(t_i) \\ &+ h^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) b(t_i) \right)^2 \\ E \{ X_{t_n}^2 \} &= \\ &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 E \{ X_{t_0}^2 \} + 2 \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right) h \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) E \{ X_{t_0} \} E \{ b(t_i) \} \\ &+ h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) (1 + ha(t_k)) E \{ b_{t_i} b_{t_k} \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

como

$$\text{Var}[X_{t_n}] = E \{ X_{t_n}^2 \} - (E \{ X_{t_n} \})^2 \quad (3.55)$$

se tiene

$$\begin{aligned} &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 \text{var}(t_0) + h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) (1 + ha(t_k)) E \{ b_{t_i} b_{t_k} \} \\ &- h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) (1 + ha(t_k)) E \{ b_{t_i} \} E \{ b_{t_k} \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 \text{var}(X_{t_0}) + h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) (1 + ha(t_k)) [E \{ b_{t_i} b_{t_k} \} - E \{ b_{t_i} \} E \{ b_{t_k} \}] \quad (3.57)$$

$$\text{Var}[X_{t_n}] =$$

$$= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 \text{var}(X_{t_0}) + h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) (1 + ha(t_k)) [E \{ b_{t_i} b_{t_k} \} - E \{ b_{t_i} \} E \{ b_{t_k} \}] \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{t_n}] &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ha(t_i)) \right)^2 \text{var}(X_{t_0}) \\ &+ h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + ha(t_j)) \right) \left( \prod_{l=k+1}^{n-1} (1 + ha(t_l)) \right) \text{cov}[b(t_i), b(t_k)]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

De la ecuaciones 3.51 y 3.52 se obtiene

$$\begin{aligned} E\{X_{t_n} X_{t_m}\} &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} f_i \right) \left( \prod_{i=0}^{m-1} f_k \right) E\{X^2(t_0)\} \\ &+ h E\{X(t_0)\} \left[ \left( \prod_{i=0}^{n-1} f_i \right) \sum_{k=0}^{m-1} \left( \prod_{l=k+1}^{m-1} f_r \right) E\{b(t_k)\} + \left( \prod_{i=0}^{n-1} f_k \right) \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{l=k+1}^{n-1} f_j \right) E\{b(t_i)\} \right] \\ &+ h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{K=0}^{m-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} f_j \right) \left( \prod_{l=K+1}^{m-1} f_i \right) E\{b(t_i) b(t_k)\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{X_{t_n} X_{t_m}\} &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} f_i \right) \left( \prod_{ik=0}^{m-1} f_k \right) \text{var}\{X_0\} \\ &+ h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{K=0}^{m-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} f_j \right) \left( \prod_{l=K+1}^{m-1} f_i \right) \text{cov}[b(t_i), b(t_k)] \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde

$$f_i = 1 + ha(t_i).$$

### 3.6. Ejemplos numéricos experimentales

En esta sección se reconstruyen los resultados numéricos de (Jodar, Lucas, Cortéz, y J. L. Villafuerte), observando una clara convergencia tal como se observa en los resultados reportados en [19] y [20], al igual se obtienen resultados similares a partir de las nuevas condiciones propuestas en el presente trabajo según la expresión (3.43), y se hace la extensión a las funciones de Correlación y Covarianza que en los trabajos mencionados no se desarrollan.

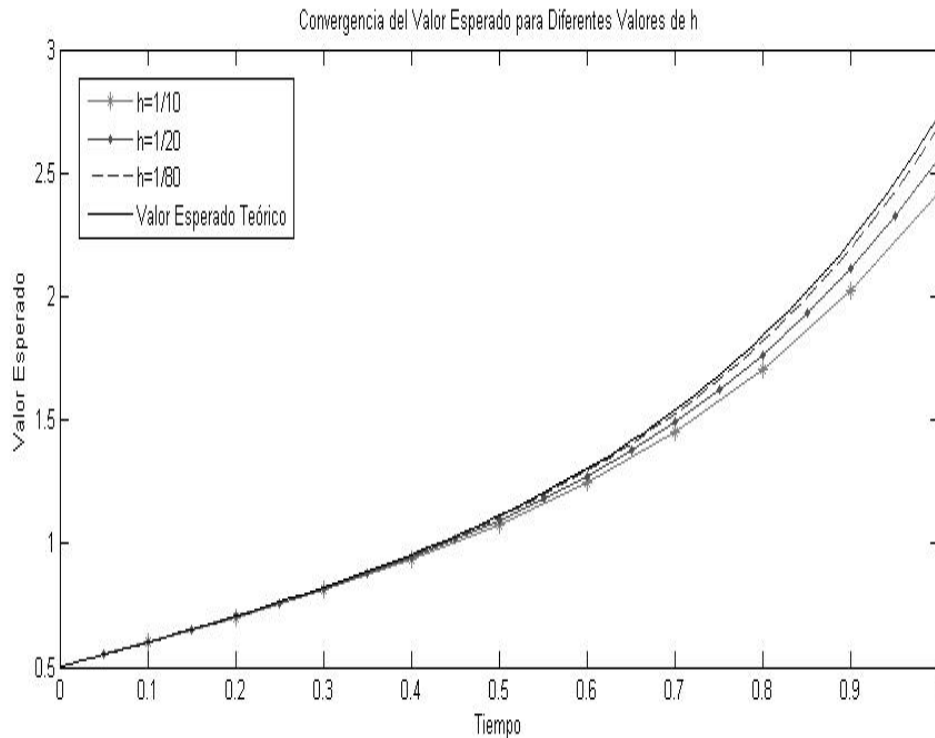
### 3.6.1. Ejemplo 1

Considere el problema de valor inicial aleatorio dado por:

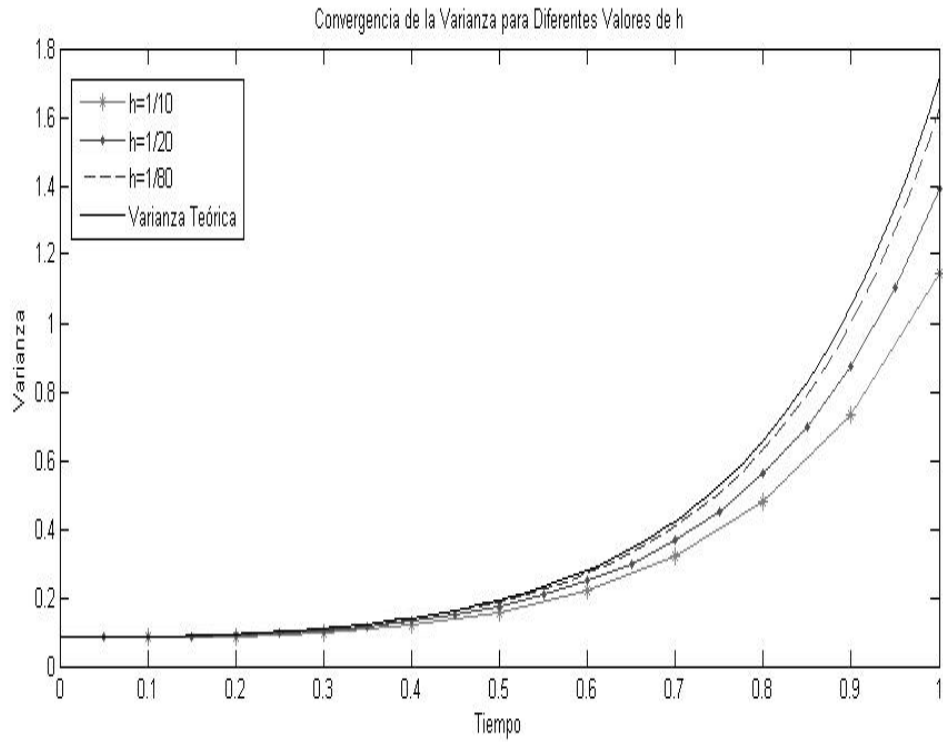
$$\dot{X}(t) = 2tX(t) + \exp(-t) + B(t), \quad X(0) = X_0, 0 \leq t \leq 1, \quad (3.62)$$

donde  $B(t)$  es un movimiento browniano estandar y  $X_0$  es una variable aleatoria, que sigue una distribución Normal  $N(1/2, 1/12)$ . Suponga que  $X(t)$  es independiente de  $B(t)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Observe que las funciones  $2t$ ,  $\exp(-t)$  y  $E\{B(t)\}$  son funciones analíticas y por la proposición (3.2) el esquema numérico de Euler es m.s. convergente para el problema (3.62).

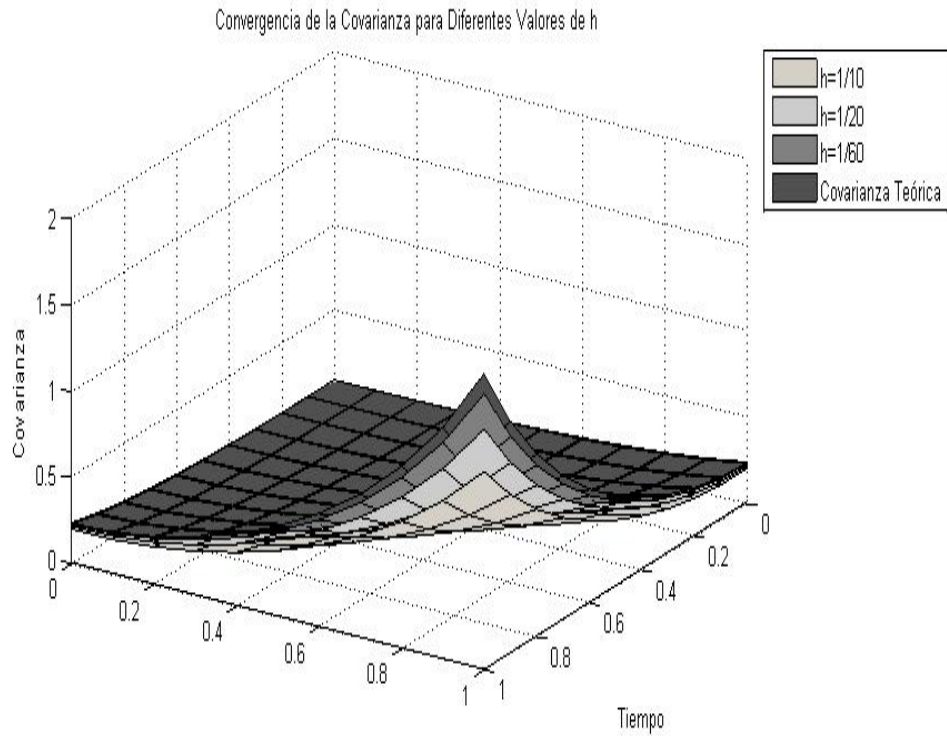
A continuación se observa en las gráficas 3.1 y 3.2, la convergencia bajo el esquema numérico de Euler para diferentes valores de  $h$ , del valor esperado y la covarianza para el problema (3.62), donde se presenta mejor convergencia a medida que  $h$  disminuye de acuerdo con lo expuesto en [19] y [20], a su vez que la extensión propuesta en este trabajo y su respectiva convergencia para las funciones de auto-covarianza y correlación en las gráficas 3.3 y 3.4.



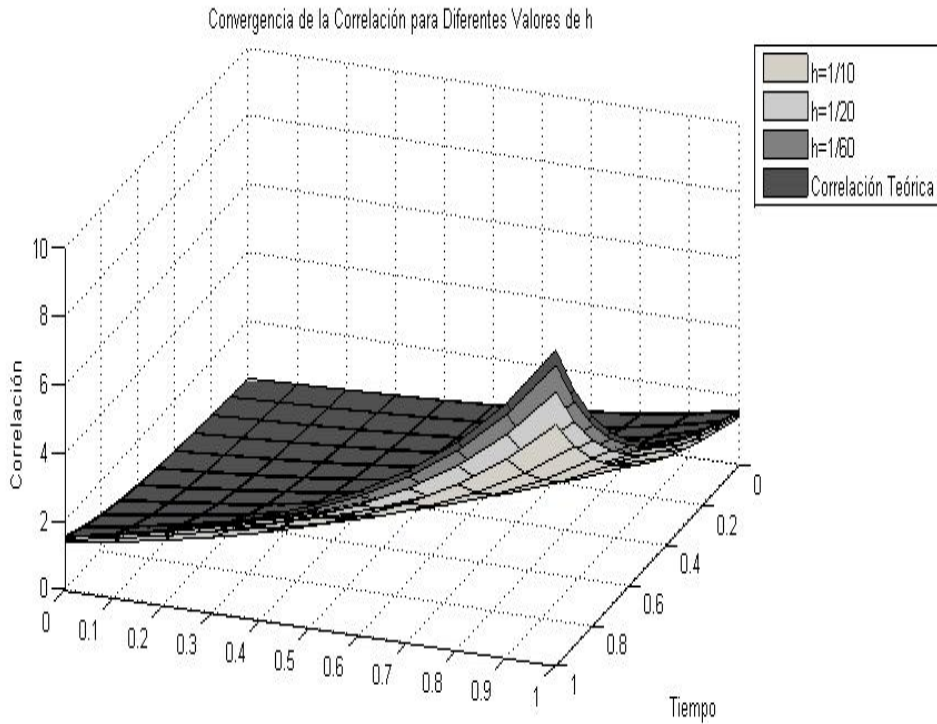
Gráfica 3.1



Gráfica 3.2



Gráfica 3.3



Gráfica 3.4

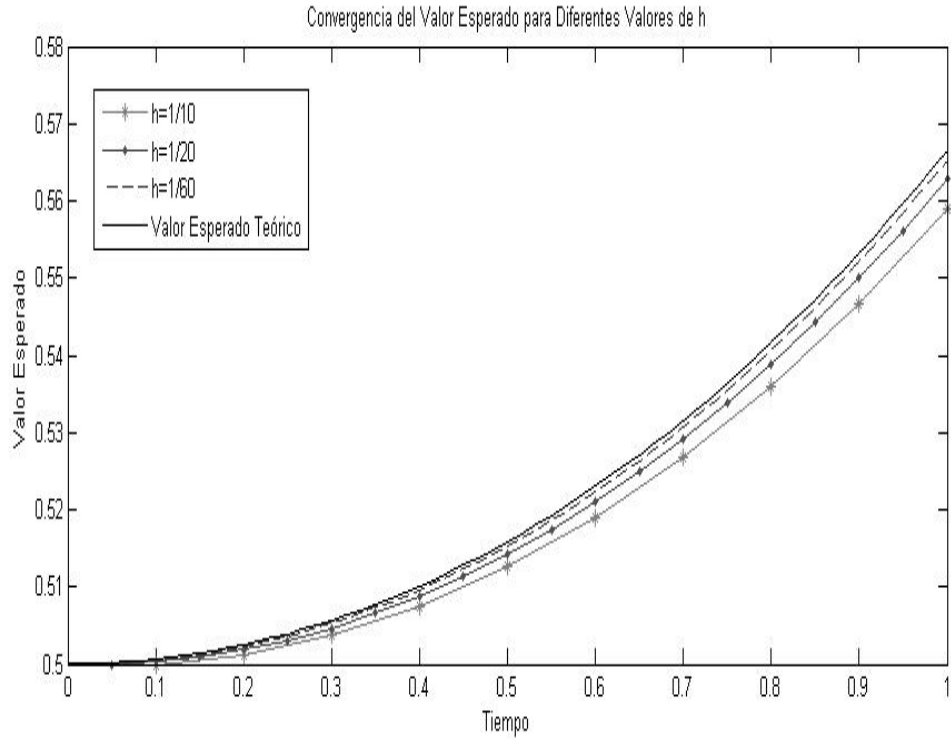
### 3.6.2. Ejemplo 2

Considere el problema de valor inicial aleatorio dado por

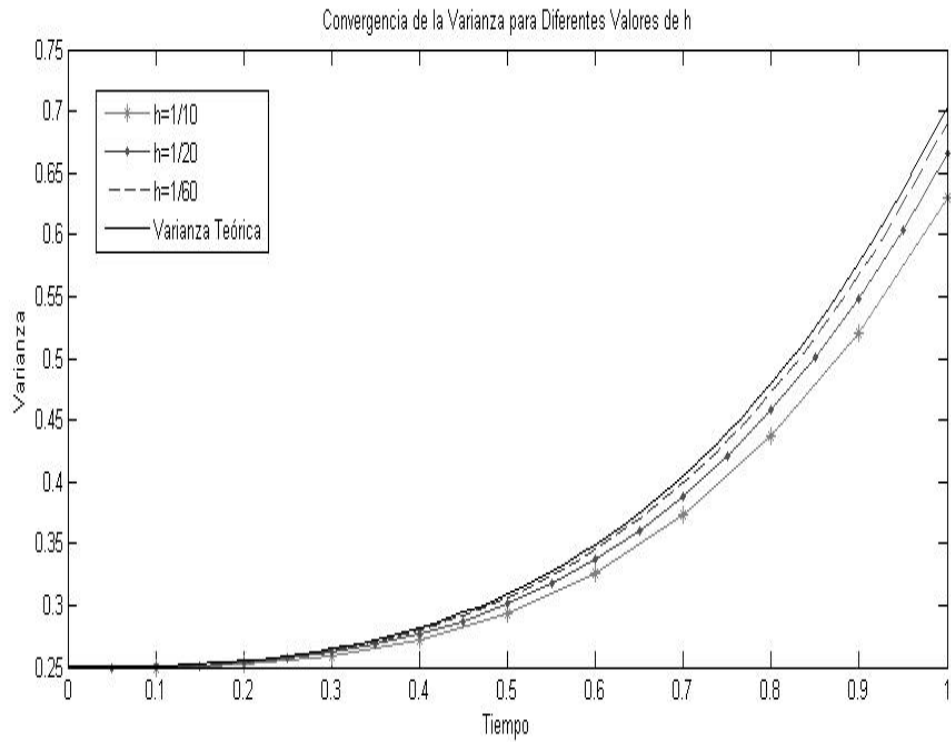
$$\dot{X}(t) = \frac{1}{4}tX(t) + B(t); X(0) = X_0; 0 \leq t \leq 1. \quad (3.63)$$

Donde  $B(t)$  es un Movimiento Browniano Estandar unidimensional y  $X_0$  es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal  $N(1/2, 1/4)$ . Suponga que  $X(t)$  es independiente de  $B(t)$  para cada  $t$  en  $[0, 1]$ . Observe que las funciones  $\frac{1}{4}t$ , y  $E\{B(t)\}$  son funciones analíticas y por la proposición (3.2) el esquema numérico de Euler es m.s. convergente para el problema (3.63).

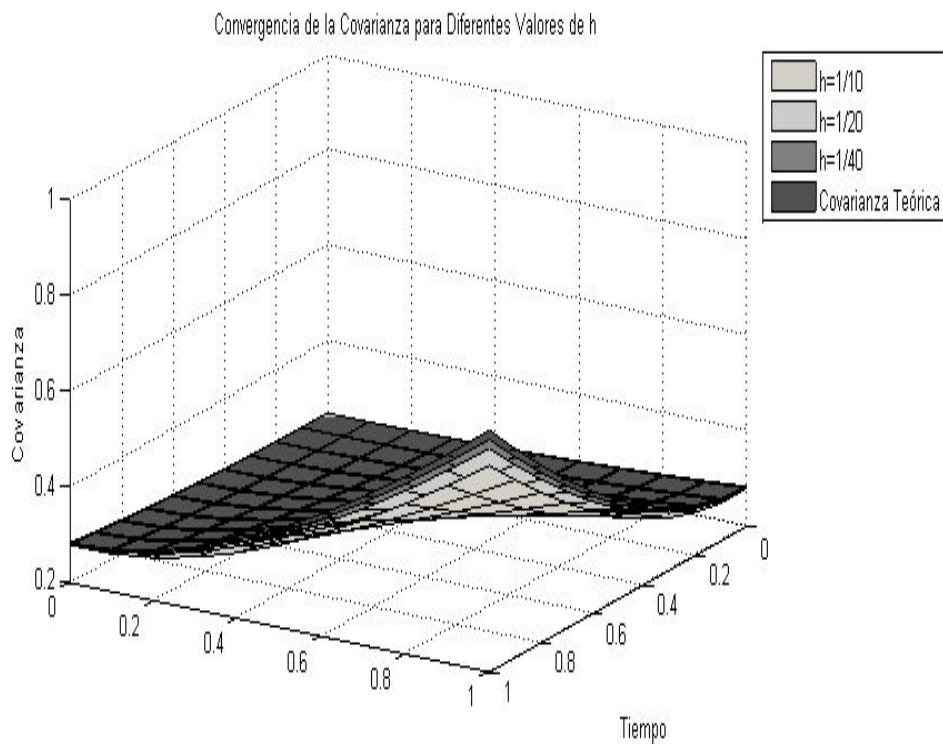
A continuación se observa en las gráficas 3.5 y 3.6, la convergencia bajo el esquema numérico de Euler para diferentes valores de  $h$ , para el valor esperado y la covarianza para el problema (3.63), donde se presenta mejor convergencia a medida que  $h$  disminuye de acuerdo con lo expuesto en [19] y [20], a su vez que la extensión propuesta en este trabajo y su respectiva convergencia para las funciones de Auto-covarianza y correlación en las gráficas 3.7 y 3.8.



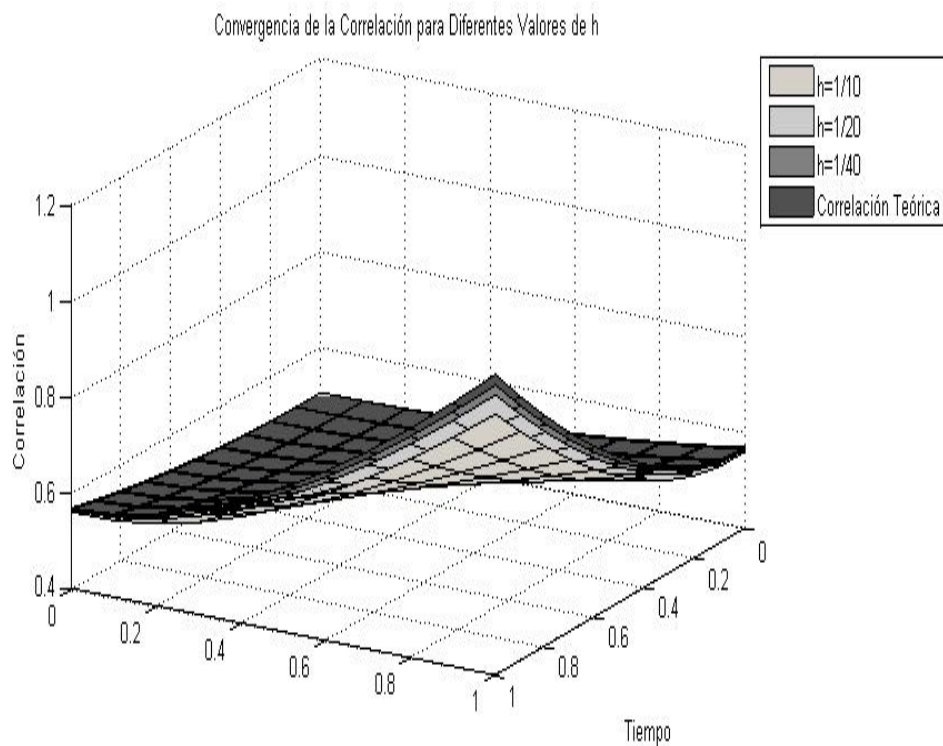
Gráfica 3.5



Gráfica 3.6



Gráfica 3.7



Gráfica 3.8



## 4 Dimensión fractal

En el presente capítulo se introduce el concepto de dimensión fractal, su determinación teórica y algunas de sus propiedades, además de exponer ciertos teoremas referentes a la forma cómo puede calcularse, como el Método de conteo de Cajas y la Dimensión Fractal de Haudorf-Besocovitch.

La dimensión fractal constituye un medio objetivo para la comparación de los fractales, los cuales son importantes porque se pueden definir en relación con datos del mundo real, y pueden medirse aproximadamente por medio de experimentos.

### Definición 4.1

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $A \in H(X)$  un subconjunto no vacío compacto de  $X$ ,  $B(x, \epsilon)$  una bola cerrada de radio  $\epsilon > 0$  y centro en un punto  $x \in X$ . Defina un número entero  $N(A, \epsilon)$ , como el menor número de bolas cerradas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir el conjunto  $A$ .

Esto es  $N(A, \epsilon) = M$  el más pequeño entero positivo, tal que  $A \subset \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \epsilon)$ , para

algún conjunto de puntos distintos  $x_n : n = 1, 2, \dots, M \subset X$ . La lógica es la siguiente: rodear cada punto  $x \in A$  por una bola abierta de radio  $\epsilon > 0$  para proporcionar un cubrimiento de  $A$  por conjuntos abiertos. Debido a que  $A$  es compacto este cubrimiento posee un subcubrimiento finito, que consta de un número entero  $\hat{M}$ , de bolas abiertas. Al asumir el cierre de cada bola, se obtiene un cubrimiento consistente de  $M$  bolas cerradas. Sea  $C$  el conjunto de los cubrimientos de  $A$  por a lo más  $\hat{M}$  bolas cerradas de radio  $\epsilon$ . Entonces  $C$  contiene al menos un elemento.

Sea  $f : C \rightarrow 1, 2, 3, \dots, M$  definido por  $f(c) =$  número de bolas en el cubrimiento  $c \in C$ . Entonces  $f(c) : c \in C$  es un conjunto finito de números enteros positivos. De ello se deduce que al menos contiene un número entero  $N(A, \epsilon)$ .

La idea intuitiva detrás de la dimensión fractal es que un conjunto  $A$  tiene dimensión fractal  $D$  si:

$$N(A, \epsilon) \approx C\epsilon^{-D} \text{ para alguna constante positiva } C.$$

Aquí se utiliza la notación " $\approx$ " de la siguiente manera. Sea  $f(\epsilon)$  y  $G(\epsilon)$  funciones de valores reales positivos de la variable real positiva  $\epsilon$ . Entonces,  $f(\epsilon) \approx g(\epsilon)$  significa que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(f(\epsilon))}{\ln(g(\epsilon))} = 1$ . Si "se resuelve" para  $D$  se tiene que

$$D \approx \frac{\ln N(A, \epsilon) - \ln C}{\ln(1/\epsilon)}$$

Se usa la expresión  $\ln(x)$  para denotar el logaritmo en base  $e$  del número real positivo  $x$ . Ahora note que el término  $\frac{\ln C}{\ln(1/\epsilon)}$  tiende a 0 cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $\epsilon > 0$ . Esto lleva a la siguiente definición.

**Definición 4.2** Sea  $A \in H(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Para cada  $\epsilon > 0$ ,  $N(A, \epsilon)$  denota el menor número de bolas cerradas de radio  $\epsilon > 0$  necesarios para cubrir  $A$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln N(A, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \right]$$

existe, entonces  $D$  se llama la dimensión fractal de  $A$ . También se usa la notación  $D = D(A)$  y se dice que " $A$  tiene dimensión fractal  $D$ "

**Teorema 4.1** Sea  $A \in (X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico, sea  $\epsilon_n = Cr^n$  definido para los reales  $0 < r < 1$  y  $C > 0$ , y los enteros  $n = 1, 2, 3, \dots$ , si

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)} \right],$$

entonces  $A$  tiene dimensión fractal  $D$ .

**Demostración:** Sea  $r$  y  $C$  números reales, y la sucesión de números enteros  $E = \{\epsilon_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Sea  $f(\epsilon) = \max \{\epsilon_n \in E : \epsilon_n \leq \epsilon\}$ . Suponga que  $\epsilon \leq r$ . Entonces

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq f(\epsilon)/r, \text{ y } N(A, \epsilon) \geq N(A, f(\epsilon)/r).$$

Dado que  $\ln(x)$  es una función creciente de  $x$  positiva para  $x \geq 1$  se tiene que

$$\frac{\ln(N(A, f(\epsilon)/r))}{\ln(1/f(\epsilon))} \leq \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(N(A, f(\epsilon)))}{\ln(r/f(\epsilon))} \quad (4.1)$$

Suponga que  $N(A, \epsilon_n) \rightarrow \infty$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ; si no entonces el teorema es verdadero. Tomando límite al lado derecho de la ecuación (4.1) cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$  resulta

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(N(A, f(\epsilon)))}{\ln(r/f(\epsilon))} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(r/\epsilon_n)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(r) + \ln(1/\epsilon_n)} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)} \right]$$

Tomando límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  en el lado izquierdo de la ecuación (4.1)

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(N(A, f(\epsilon)/r))}{\ln(1/f(\epsilon))} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln(1/\epsilon_n)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_{n-1}))}{\ln(1/r) + \ln(1/\epsilon_{n-1})} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)} \right] \end{aligned}$$

Dado que el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$  tanto en el lado izquierdo como al lado derecho de (4.1) se aproximan al mismo valor, por el teorema de estricción, el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  de la cantidad en el medio de la ecuación (4.1) también existe, y es igual al mismo valor.

**Teorema 4.2 Teorema de conteo de cajas.** Sea  $A \in H(\mathbb{R}^m)$ , donde se utiliza la métrica euclidiana. Considere un cubrimiento de  $\mathbb{R}^m$  por cajas cuadradas cerradas cuya longitud de lado es  $(1/2^n)$ . Sea  $N_n(A)$  el número de cajas de longitud de lado  $(1/2^n)$  que intersectan el atractor. Si:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N_n(A))}{\ln(1/2^n)} \right],$$

entonces  $A$  tiene dimensión fractal  $D$ .

**Demostración :** Note que para  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$2^{-m} N_{n-1}(A) \leq N(A, 1/2^n) \leq N_{k(n)}(A) \text{ para toda } n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde  $k(n)$  es el menor entero  $k$  que cumple la condición  $k \geq n - 1 + \frac{1}{2} \log_2 m$ . La primer desigualdad se obtiene porque una bola de radio  $1/2^n$  puede intersectarse a lo más  $2^m$  cajas de lado  $2^{n-1}$ . El segundo desarrollo se sigue del hecho de que una caja de lado  $s$  puede encajar dentro de una bola de radio  $r$  siempre que  $r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m \left(\frac{s}{2}\right)^2$  por el teorema de pitágoras. Ahora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(N_{k(n)})}{\ln(2^n)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(2^{k(n)}) \ln(N_{k(n)})}{\ln(2^n) \ln(2^n)} \right] = D,$$

ya que  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 1$ . También

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln 2^{-m} N_{n-1}}{\ln(2^n)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln N_{n-1}}{\ln(2^{n-1})} \right] = D,$$

del Teorema 4.1 con  $r = 1/2$ .

**Teorema 4.3** Considere los espacios métricos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  métricamente equivalentes. Sea  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  una transformación que proporciona la equivalencia de los espacios. Sea  $A_1 \in H(X_1)$  la cual tiene dimensión fractal  $D$ . Entonces  $A_2 = \theta(A_1)$  tiene dimensión fractal  $D$ . Esto es

$$D(A_1) = D(\theta(A_2)).$$

**Demostración :** Dado que los dos espacios  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son equivalentes bajo  $\theta$ , existen constantes positivas  $e_1$  y  $e_2$  tal que

$$e_1 d_2(\theta(x), \theta(y)) < d_1(x, y) < e_2 d_2(\theta(x), \theta(y)) \quad \text{para toda } x, y \in X_1. \quad (4.2)$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que  $e_1 < 1 < e_2$ . De la ecuación (4.2) se sigue que

$$d_2(\theta(x), \theta(y)) < \frac{d_1(x, y)}{e_1} \quad \text{para toda } x, y \in X_1.$$

en consecuencia

$$\theta(B(x, \epsilon)) \subset B(\theta(x), \epsilon/e_1) \quad \text{para toda } x \in X_1. \quad (4.3)$$

Ahora, de la definición de  $N(A_1, \epsilon)$ , se sabe que este es un conjunto de puntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X_1$ , donde  $N = N(A_1, \epsilon)$ , tal que el conjunto de bolas cerradas  $\{B(x_n, \epsilon) : n = 1, 2, \dots, N(A_1, \epsilon)\}$ , proporciona un cubrimiento para  $A_1$ . Se tiene que  $\{\theta(B(x_n, \epsilon/e_1)) : n = 1, 2, \dots, N(A_1, \epsilon)\}$ , proporciona un cubrimiento para  $A_2$ . En consecuencia

$$N(A_2, \epsilon/e_1) \leq N(A_1, \epsilon).$$

se sigue que,

$$\frac{\ln(N(A_2, \epsilon/e_1))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(N(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}.$$

Por lo tanto

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right] \quad (4.4)$$

$$= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(N(A_2, \epsilon/e_1))}{\ln(1/\epsilon)} \right] \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(N(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right] = D(A_1). \quad (4.5)$$

La ecuación (4.2) implica que

$$d_1(\theta^{-1}(x), \theta^{-1}(y)) < e_2 d_2(x, y) \quad \text{para toda } x, y \in X_2,$$

$$\text{en consecuencia } \theta^{-1}(B(x, \epsilon)) \subset B(\theta^{-1}(x), e_2 \epsilon) \quad \text{para toda } x \in X_2.$$

$$\text{Esto a su vez implica } N(A_1, e_2 \epsilon) \leq N(A_2, \epsilon).$$

por lo tanto, cuando  $\epsilon < 1$ ,

$$\left\lceil \frac{\ln(N(A_1, e_2 \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil$$

de esta forma

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_1, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_1, e_2 \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por combinación de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se tiene

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil = D(A_1) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil.$$

$$\text{y en consecuencia } D(A_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\lceil \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\rceil = D(A_1)$$

## 4.1. Determinación teórica de la dimensión fractal

**Definición 4.1.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $A \in H(X)$ . Sea  $N(\epsilon)$  el número mínimo de bolas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir  $A$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{\ln N(\tilde{\epsilon})}{\ln(1/\tilde{\epsilon})} : \tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon) \right\} \right\}$$

existe, entonces  $D$  se conoce como la dimensión fractal de  $A$ . También se utiliza la notación  $D = D(A)$ , y se dice: "que  $A$  tiene dimensión fractal  $D$ ".

**Teorema 4.1.1** Sea  $m$  un entero positivo, y considere el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiano})$ . La dimensión fractal  $D(A)$  existe para todo  $A \in H(\mathbb{R}^m)$ ; y sea  $B \in H(\mathbb{R}^m)$  tal que  $A \subset B$ , donde  $D(B)$  denota la dimensión fractal de  $B$ . Entonces  $D(A) \leq D(B)$ . En particular,

$$0 \leq D(A) \leq m.$$

**Demostración:** Se probará el teorema para el caso  $m = 2$ . Sin pérdida de generalidad suponga que  $A \subset \boxtimes$ , donde  $\boxtimes$  denota una caja cerrada de lado  $1/2^n$  que cubre a  $\mathbb{R}^2$ . De aquí se tiene que  $N(A, \epsilon) \leq N(\boxtimes, \epsilon)$  para todo  $\epsilon > 0$ . Por lo tanto para todo  $\epsilon > 0$  tal que  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$0 \leq \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \frac{\ln(N(\boxtimes, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

Observe que el límite superior del lado derecho existe y tiene valor 2. Luego el límite superior del lado izquierdo existe y está acotado superiormente por 2. Por lo tanto la dimensión fractal  $D(A)$  está definida y limitada superiormente por 2. También  $D(A)$  es no negativa.

Si  $A, B \in H(\mathbb{R}^2)$  con  $A \subset B$ , entonces las dimensiones fractales de  $A$  y  $B$  están definidas. El argumento anterior en la que  $\boxtimes$  se sustituye por  $B$  muestra que  $D(A) \leq D(B)$ .

**Teorema 4.1.2** Sea  $m$  un entero positivo, y considere el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{Euclidiano})$ . Sean  $A, B \in H(\mathbb{R}^m)$ . Sea  $A$  tal que su dimensión fractal está dada por

$$D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\}.$$

Sea  $D(B)$  y  $D(A \cup B)$  las dimensiones fractales de  $B$  y  $A \cup B$  respectivamente. Si  $D(B) < D(A)$ , entonces  $D(A \cup B) = D(A)$ .

**Demostración:** Por el teorema 3.1.1  $D(A \cup B) \geq D(A)$ . Se quiere mostrar que  $D(A \cup B) \geq D(A)$ . vea que, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$N(A \cup B, \epsilon) \leq N(A, \epsilon) + N(B, \epsilon).$$

luego

$$\begin{aligned} D(A \cup B) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A \cup B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \epsilon) + N(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1 + N(B, \epsilon)/N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\} \right\}$$

La prueba se completa, mostrando que  $N(B, \epsilon)/N(A, \epsilon)$  es menor que 1 cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño. Esto implicaría que el segundo límite de la derecha es igual a cero. El primer límite de la derecha converge a  $D(A)$ .

Note que

$$\sup \left\{ \frac{\ln(N(B, \tilde{\epsilon}))}{\ln(1/\tilde{\epsilon})} : \tilde{\epsilon} < \epsilon \right\}$$

es una función decreciente de la variable positiva  $\epsilon$  de ello se deduce que

$$\frac{\ln(N(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} < D(A) \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Como el límite indicado explícitamente en el teorema existe, se sigue que

$$\frac{\ln(N(B, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} < \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Esto permite concluir que

$$\frac{N(B, \epsilon)}{N(A, \epsilon)} < 1 \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

**Teorema 4.1.3** Sean  $\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  un sistema de funciones iteradas (IFS), hiperbólico, y sea  $A$  su atractor. Supongamos  $W_n$  es semejante al factor de escala  $s_n$  para cada  $n \in 1, 2, 3, \dots, N$ . Si el sistema iterado está totalmente desconectado o justo después de tocar el atractor tiene dimensión fractal  $D(A)$ , que está dado por la única solución de

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{D(A)} = 1, \quad D(A) \in [0, m].$$

Si el sistema de funciones iterado se solapa, entonces  $\bar{D} \geq D(A)$ , donde  $\bar{D}$  es la solución de

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^{\bar{D}} = 1, \quad \bar{D} \in [0, \infty)$$

La prueba de este teorema se puede encontrar en [8], [10], [14], y [30].

El siguiente argumento ofrece una valiosa comprensión de la dimensión fractal. Se restringe la atención al caso en que el sistema de funciones iterado  $\{\mathbb{R}^m, w_1, w_2, \dots, w_N\}$

está totalmente desconectado. Suponga que el factor de escala de  $s_i$  asociado con la similaridad  $w_i$  es distinto de cero para cada  $i \in 1, 2, \dots, N$ . Sea  $\epsilon > 0$ .

**Observación (i):** Sea  $i \in 1, 2, \dots, N$ . Dado que  $w_i$  es semejante al factor de escala  $s_i$ , se asigna bolas cerradas en bolas cerradas, de acuerdo con

$$w_i(B(x, \epsilon)) = B(w_i(x), |s_i| \epsilon).$$

Suponga que  $s_i \neq 0$ . Entonces  $w_i$  es invertible, y se obtiene

$$w_i^{-1}(B(x, \epsilon)) = B(w_i^{-1}(x), |s_i|^{-1} \epsilon).$$

Las dos últimas relaciones permiten establecer que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$N(A, \epsilon) = N(w_i(A), |s_i| \epsilon);$$

que es equivalente a

$$N(w_i(A), \epsilon) = N(A, |s_i|^{-1} \epsilon). \quad (4.7)$$

Esto se aplica para cada  $i \in 1, 2, 3, \dots, N$ .

**Observación (ii):** El atractor  $A$  del sistema iterado es la unión disjunta

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A),$$

donde cada uno de los conjuntos  $w_n(A)$  es compacto. Por lo tanto se puede elegir el número positivo  $\epsilon$  tan pequeño que si, por algún punto  $x \in \mathbb{R}^2$  y un cierto número entero  $i \in 1, 2, \dots, N$ , se tiene  $B(x, \epsilon) \cap w_i(A) \neq \emptyset$ , entonces  $B(x, \epsilon) \cap w_j(A) = \emptyset$  para todo  $j \in 1, 2, \dots, N$  con  $j \neq i$ . Luego si el número  $\epsilon$  es suficientemente pequeño se obtiene

$$N(A, \epsilon) = N(w_1(A), \epsilon) + N(w_2(A), \epsilon) + N(w_3(A), \epsilon) + \dots + N(w_N(A), \epsilon)$$

sustituyendo (4.7) en la última ecuación se tiene

$$N(A, \epsilon) = N(A, |s_1|^{-1} \epsilon) + N(A, |s_2|^{-1} \epsilon) + N(A, |s_3|^{-1} \epsilon) + \dots + N(A, |s_N|^{-1} \epsilon) \quad (4.8)$$

Esta ecuación funcional es verdadera para todo número positivo  $\epsilon$  que sea suficientemente pequeño. Suponga que  $N(A, \epsilon) \sim C\epsilon^{-D}$ , entonces sustituyendo en la ecuación (4.8) se obtiene:

$$C\epsilon^{-D} \approx C|s_1|^D \epsilon^{-D} + C|s_2|^D \epsilon^{-D} + C|s_3|^D \epsilon^{-D} + \dots + C|s_N|^D \epsilon^{-D}.$$

de donde se deduce que

$$1 = |s_1|^D + |s_2|^D + |s_3|^D + \dots + |s_N|^D.$$

## 4.2. La dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch de un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^m$  es otro número real que puede ser utilizado para caracterizar la complejidad geométrica de subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^m$ . Su definición es más compleja y sutil que el de la dimensión fractal. Una de las razones de su importancia es que está asociado con un método para comparar los "tamaños" de los conjuntos cuyas dimensiones fractales son los mismos. Su definición no se utiliza normalmente como la base de procedimientos experimentales para la determinación de dimensiones fractales de conjuntos físicos. Se trabaja en el espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, d)$ , donde  $m$  es un entero positivo y  $d$  denota la métrica euclidiana. Sea  $A \subset \mathbb{R}^m$  acotado. Luego se usa la notación:

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

donde  $\text{diam}(A)$  es el diámetro del conjunto  $A$

Sea  $0 < \epsilon < \infty$ , y  $0 \leq p < \infty$ .  $A$  denota el conjunto de sucesiones de subconjuntos  $\{A_i \subset A\}$ , tal que  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Entonces se define

$$M(A, p, \epsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^p : \{A_i\} \in A \right\},$$

$$\text{y } \text{diam}(A_i) < \epsilon \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots$$

Aquí se usa la convención  $(\text{diam}(A_i))^0 = 0$  donde  $M(A, p, \epsilon)$  es un número en el rango  $[0, \infty)$ ; su valor puede ser cero, finito o infinito, y se define

$$M(A, p) = \sup \{M(A, p, \epsilon) : \epsilon > 0\}.$$

Entonces para cada  $p \in [0, \infty]$  se tiene  $M(A, p) \in [0, \infty]$ .

**Definición 4.2.1:** Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclidiano})$ . Para cada  $p \in [0, \infty)$  la cantidad  $M(A, p)$  se conoce como la medida  $p$ -dimensional de Hausdorff de  $A$ .

**Teorema 4.2.1:** Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto acotado del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclidiano})$ . Sea  $M(A, p)$  definida como en (4.9). Entonces existe un único número real  $D_H \in [0, m]$  tal que

$$M(A, p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p < D_H \text{ y } p \in [0, \infty), \\ 0 & \text{si } p > D_H \text{ y } p \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.9)$$

La prueba de este teorema puede encontrarse en [13], sección 2.10.3.

**Definición 4.2.2:** Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclidiano})$ . El correspondiente número real  $D_H$ , como en el teorema

4.2.1, conocido como dimensión Hausdorff-Besicovitch del conjunto  $A$ . Este número se denotará por  $D_H(A)$ .

**Teorema 4.2.2:** Sea  $m$  un entero positivo y sea  $A$  un subconjunto del espacio métrico  $(\mathbb{R}^m, \text{euclidiano})$ .  $D(A)$  denota la dimensión fractal de  $A$  y sea  $D_H(A)$  la dimensión Hausdorff-Besicovitch de  $A$ . entonces

$$0 \leq D_H(A) \leq D(A) \leq m.$$

**Teorema 4.2.3:** Sea  $m$  un entero positivo. Sea  $\{\mathbb{R}^m; w_1, w_2, w_3, \dots, w_N\}$  un sistema de funciones iterado, hiperbólico, y sea  $A$  su atractor. Sea  $w_n$  una semejanza del factor de escala  $s_n$  para cada  $n \in 1, 2, 3, \dots, N$ . Si el sistema iterado de funciones está totalmente desconectado o simplemente tocando, entonces la dimensión de Hausdorff-Besicovitch  $D_H(A)$  y la dimensión fractal  $D(A)$  son iguales. De hecho  $D(A) = D_H(A) = D$ , en donde  $D$  es la única solución de

$$\sum_{n=1}^N |s_n|^D = 1, \quad D \in [0, m].$$

Si  $D$  es positivo, entonces la medida  $M(A, D_H(A))$  de Hausdorff  $D$ -dimensional es un número real positivo.

Esta prueba se puede encontrar en Hutchinson [14].

En el supuesto contemplado en el teorema 4.2.3 la medida dimensional de  $D_H(A)$ -Hausdorff puede utilizarse para comparar los "tamaños" de fractales que tienen la misma dimensión fraccional. Cuanto mayor sea el valor de  $M(A, D_H(A))$ , más grande es el fractal.

## 5 Cálculo de la dimensión fractal para fenómenos físicos

Además de los estudios mencionados anteriormente vale la pena resaltar en cuanto a la determinación de la dimensión fractal en (1991); Charles y James Taylor [9] obtienen no solo la dimensión fractal sino también un intervalo de confianza para esta y mejoran la estimación del método del conteo de cajas a partir de datos reales y simulados. Steven I. Dutch (1993) [32] establece que Ciertas formas geométricas simples pueden producir gráficos lineales que imitan el comportamiento fractal. A Den Outer, J. F. Kaashoek y H.R.G.K. Hack (1995) [2] analizaron las dificultades en el uso de la teoría fractal continua para superficies de discontinuidad. Martin Allen, Gareth J. B Brown, Nick J. Miles (1995) [25] hicieron una revisión de las actuales técnicas para la medición de dimensiones fractales de frontera las cuales se pueden dividir en dos grandes grupos basados en vectores que incluyen algoritmos estructurados, y en matrices para el análisis de sistemas de imágenes. Anicet A. Beauvais y David R. Montgomery (1996) [3] estudiaron Influencia del tipo de valle en las propiedades de escalamiento de río Planform, mediante el método del divisor de Richardson. Montgomery (1996) [18] estudió la sinuosidad y dimensión fractal de ríos serpenteantes como prueba de la auto-similitud de canales de sinuosidad igual. W. Blackburn, M. Segui, y A. Schuster (2000) [34] se apoyaron en la interpretaron el gráfico de Richardson para el análisis fractal de varios modelos de series de tiempo. A. Blachowski y K. Ruebenbauer (2009) [1] introdujeron el método de Rugosidad para la determinación de la dimensión fractal.

### 5.1. Formulación analítica de la dimensión fractal para procesos estocásticos

En (2010) J. Girault, D. Kouame y A. Ouahabi se puede consultar la formulación analítica de la dimensión fractal para señales estocásticas filtradas a fin investigar los efectos de un filtro lineal y la regularidad en un determinado proceso estocástico mono-fractal. Para definir claramente este enfoque se presentan a continuación definiciones utilizadas en relación con la medición de la longitud y dimensión fractal para señales, las cuales pueden ser extendidas a procesos estocásticos.

### 5.1.1. La longitud euclidiana

La longitud euclidiana de una señal determinista  $x(t)$  para una duración limitada  $T$  puede ser definida como:

$$L_x = T\bar{\lambda} \quad (5.1)$$

Donde

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lambda(t) dt \quad (5.2)$$

es la media aritmética de la longitud elemental  $\lambda(t)$  y

$$\lambda(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2} \quad (5.3)$$

La longitud elemental puede ser reescrita según el teorema de Pitágoras

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau^2 + \Delta(t, \tau)^2} \quad (5.4)$$

Donde el incremento  $\Delta(t, \tau)$ , está escrito en forma simétrica

$$\Delta(t, \tau) = x(t + \tau/2) - x(t - \tau/2) \quad (5.5)$$

Finalmente, la longitud de la señal se escribe

$$L_x = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau^2 + \Delta(t, \tau)^2} dt \quad (5.6)$$

Las señales estocásticas no pueden ser descritas por curvas continuas y sus irregularidades aún están presentes incluso cuando se examina con resoluciones más altas. Esto lleva a la conclusión paradójica de que las longitudes de tales señales no son finitas. Para superar el hecho de que las señales estocásticas no tienen una longitud finita, Richardson [23] supone que la longitud  $L_x$  de una señal fractal depende de la resolución en la que se mide y el calibre de la medición  $\lambda$ .

Para superar esta indeterminación cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , Richardson [23] propone la medición de la longitud de la curva para todo valor de  $\lambda > 0$ . Mandelbrot [7] demostró que midiendo  $L_x(\lambda)$  como una función de  $\lambda$  era una forma de determinar la dimensión fractal, es decir

$$L_x(\lambda) = K_x \lambda^{1-D_x} \quad (5.7)$$

donde  $D_x$  es la dimensión fractal de la señal y  $K_x$  es una constante.

Así la longitud se escribe en función de  $\lambda$  como

$$L_x(\lambda) = T\overline{\lambda(\tau)} \quad (5.8)$$

donde

$$\overline{\lambda(\tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lambda(t, \tau) dt \quad (5.9)$$

y donde la longitud elemental es  $\lambda(t, \tau) = (1/\tau) \sqrt{\tau^2 + \Delta(t, \tau)^2}$ . El Estimador de longitud correspondiente de la ecuación (5.8) es

$$\hat{L}_x(kT_s) = \frac{1}{kT_s} \sum_{n=1}^{N-k} \sqrt{(kT_s)^2 + \Delta(n, kT_s)^2} \quad (5.10)$$

Donde  $T_s$  es el periodo de muestreo, y  $N$  es el número de longitudes elementales entre  $[-T/2, T/2]$ . La definición de longitud puede ser extendida de curvas continuas a señales estocásticas estacionarias y ergódicas al reemplazar la media aritmética por la esperanza matemática  $E\{.\}$ , así se obtiene

$$L_x(\lambda) = TE\{\lambda\} \quad (5.11)$$

donde  $\lambda = \left(\frac{1}{\tau}\right) \sqrt{\tau^2 + \Delta^2}$  finalmente la definición se convierte en

$$L_x(\tau) = \frac{T}{\tau} E\{\sqrt{\tau^2 + \Delta^2}\} \quad (5.12)$$

la cual únicamente es posible resolver numéricamente. Una expresión analítica se tiene según [21] por

$$L_x(\tau) = \frac{T}{\tau} E\{|\Delta|\} \quad (5.13)$$

Esta definición supone que  $\tau \ll \Delta$ , que a menudo es cierto, en particular para un muestreo alta frecuencia. Sin embargo, si este no es el caso, se puede aplicar un aumento en la amplitud .

### 5.1.2. Relación entre longitud y dimensión fractal para procesos estocásticos

En este enfoque requiere cierta información a priori, tales como la densidad de probabilidad del proceso, su desviación estándar y la función de correlación.

Considere un proceso estocástico  $\{x_t\}$   $t \geq 0$  de valores en  $\mathbb{R}$ , la longitud promedio del proceso puede ser evaluada por la expresión

$$L_x(\tau) = \frac{T}{\tau} E\{|x_1, x_2|\} \quad (5.14)$$

donde  $x_1 = x_t$ ,  $x_2 = x_{t-\tau}$  y además

$$E\{|x_1 - x_2|\} = \int \int |x_1 - x_2| p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (5.15)$$

En este contexto  $p_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$  denota la función de densidad de probabilidad conjunta.

### 5.1.3. Longitud y dimensión fractal para procesos gaussianos

Suponga que el proceso estocástico  $\{x_t\}$   $t \geq 0$  es un proceso Gaussiano, en consecuencia  $x_1$  y  $x_2$  también son gaussianas

y por lo tanto la densidad de probabilidad conjunta se escribe como

$$p_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \frac{(1 - \rho_x^2)^{-1/2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{(-1/(2(1-\rho_x^2)))(x_1^2/\sigma_1^2 + x_2^2/\sigma_2^2 - 2\rho_x x_1 x_2 / \sigma_1 \sigma_2)} \quad (5.16)$$

donde  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  son las varianzas de las variables aleatorias  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente.  $\rho_x$  es el coeficiente de correlación definido por  $\rho_x = E\{x_1 x_2\} / E\{x_1^2\} E\{x_2^2\}$ .

La densidad de probabilidad de el incremento  $\Delta = x_2 - x_1$  es escrita como

$$p_\Delta(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x_1 x_2}(x_1, x_1 + \Delta) dx_1. \quad (5.17)$$

Observe que la densidad de probabilidad del incremento sigue una distribución normal  $N(0, \sigma'^2)$

$$p_\Delta(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'^2}} e^{-\Delta^2/2\sigma'^2} \quad (5.18)$$

con  $\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_x\sigma_1\sigma_2}$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a la misma señal  $x(t)$ , entonces  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x$  y la desviación estándar,  $\sigma' = \sigma_x \sqrt{2(1 - \rho_x)}$ . La esperanza matemática del incremento se convierte en

$$E\{|\Delta|\} = 2 \int_0^{+\infty} \Delta p_\Delta(\Delta) d\Delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma', \quad (5.19)$$

Y finalmente

$$L_x(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T\sigma_x}{\tau} \sqrt{1 - \rho_x(\tau)} \quad (5.20)$$

De este modo la dimensión Fractal  $D_x$  para el proceso  $\{x_t\} \quad t \geq 0$  puede ser definida como

$$D_x = 1 - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln(L_x(\tau))}{\ln(\tau)} \quad (5.21)$$

ó alternativamente

$$D_x = 2 - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\ln(1 - \rho_x(\tau))}{\ln(\tau)} \quad (5.22)$$

Ver [16] para más detalles.

## 5.2. Resultados numéricos experimentales

En esta sección se presentan algunos resultados numéricos experimentales asociados al cálculo de la longitud y dimensión fractal para Procesos Estocásticos Gaussianos que incluyen el Movimiento Browniano Estándar, el Proceso Aleatorio de Ornstein Uhlenbeck usando los resultados de la sección anterior, el esquema numérico de Euler Aleatorio y las aproximaciones de la función de correlación descritas en el capítulo 3.

### 5.2.1. Cálculo de la longitud y dimensión fractal para el movimiento browniano estándar

#### 5.2.1.1. Movimiento browniano estándar unidimensional

Un proceso estocástico  $\{x_t\} \quad t \geq 0$  se conoce como Movimiento Browniano Estándar o Proceso de Wiener unidimensional si cumple las siguientes condiciones:

- 1)  $x_0 = 0$ . El proceso comienza en cero.
- 2) Para cada  $t \geq 0$ ,  $x_t$  tiene una distribución normal  $N(0, t)$ .
- 3) El proceso  $\{x_t\} \quad t \geq 0$  tiene incrementos estacionarios, es decir,  $x_t - x_s = x_{t+h} - x_{s+h}$  para toda  $s, t \in T$  y para toda  $(s+h), (t+h) \in T$ .
- 4) El proceso  $\{x_t\} \quad t \geq 0$  tiene incrementos independientes, es decir, para cada elección de  $t_i \in T$  con  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  y  $n \geq 1$ , los incrementos  $x_{t_2} - x_{t_1}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$  son variables aleatorias independientes.

- 5) Para  $0 \leq s < t < \infty$ , el incremento  $x_t - x_s$  sigue una distribución normal  $N(0, t - s)$ .
- 6)  $\{x_t\}$   $t \geq 0$  tiene trayectorias continuas “sin saltos” y es en ningún punto diferenciable.

**Proposición:** La función de covarianza para el movimiento Browniano Estándar está dada por  $\text{cov}(x_t, x_s) = E \{x_t x_s\} = \min \{s, t\}$  ;  $s < t$

**Demostración:**

Se tiene que

$$\text{cov}(x_t, x_s) = E \{(x_t - E \{x_t\})(x_s - E \{x_s\})\} \text{ como } E \{x_t\} = 0$$

$$E \{x_t x_s\} = E \{(x_t - x_s + x_s) x_s\} = E \{(x_t - x_s) x_s + x_s^2\}$$

por incrementos independientes

$$E \{x_t x_s\} = E \{x_t - x_s\} E \{x_s\} + E \{x_s^2\} = s = \min \{s, t\}.$$

en consecuencia

$$\rho(x_t, x_s) = \frac{E \{x_t x_s\}}{\sqrt{E \{x_t^2\} E \{x_s^2\}}} = \frac{\min \{s, t\}}{\sqrt{s.t}}, \text{ para } s < t$$

$$\rho(x_t, x_s) = \frac{s}{\sqrt{s.t}} = \sqrt{\frac{s}{t}}$$

Ahora considere las variables  $x_1 = B_t$  y  $x_2 = B_{t-\tau}$  se tiene que  $\rho_B(\tau) = \text{corr}(B_t, B_{t-\tau}) = \sqrt{\frac{t-\tau}{t}} = \sqrt{1 - \frac{\tau}{t}}$  como  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso Gaussiano y  $\sigma_B = \sqrt{t}$

$$L_B(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{\tau} \sigma_B \sqrt{1 - \rho_B(\tau)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{\tau} \sqrt{t} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{\tau}{t}}} \quad (5.23)$$

Además

$$D_B = 1 - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln(L_B(\tau))}{\ln(\tau)} \quad (5.24)$$

Por otro lado, el Movimiento Browniano puede escribirse como una ecuación diferencial aleatoria de la forma

$$\dot{X}(t) = b(t) \text{ con la condición inicial } X(0) = X_{t_0}. \quad (5.25)$$

donde  $b(t) = \frac{dB(t)}{dt}$  es un ruido blanco y  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional con  $t \in [0, T]$ .

Observe que la ecuación (5.25) puede reescribirse en la forma discretizada (3.5.1) como

$$X_{t_n} = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \tau a(t_i)) X_{t_0} + \tau \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 + \tau a(t_j)) \right) b(t_i)$$

$$X_{t_n} = \prod_{i=0}^{n-1} X_{t_0} + \tau \sum_{i=0}^{n-1} (1) b(t_i) \quad \text{para} \quad a(t) = 0 \quad (5.26)$$

como  $X_{t_0} = 0$  y  $\tau b(t_i) = \Delta B_i \sim N(0, \tau)$  la ecuación (5.26) toma la forma

$$X_{t_n} = \sqrt{\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{t_i}; \quad \text{donde} \quad \xi_{t_i} \sim N(0, 1) \quad (5.27)$$

Note que de forma inmediata

$$E \{X_{t_n}\} = \sqrt{\tau} \sum_{i=0}^{n-1} E \{\xi_{t_i}\} = 0$$

Ahora

$$X_{t_n}^2 = \tau \left( \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{t_i} \right)^2 = \tau \left( \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{t_i}^2 + 2 \sum_{i < j}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{t_i} \xi_{t_j} \right)$$

luego

$$E \{X_{t_n}^2\} = \tau \left( \sum_{i=0}^{n-1} E \{\xi_{t_i}^2\} + 2 \sum_{i < j}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} E \{\xi_{t_i} \xi_{t_j}\} \right) = n\tau$$

ya que

$$E \{\xi_{t_i} \xi_{t_j}\} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El valor esperado cruzado  $E \{X_{t_n} X_{t_m}\}$  puede calcularse como sigue

$$E \{X_{t_n} X_{t_m}\} = E \left\{ \sqrt{\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{t_i} \sqrt{\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \xi_{t_j} \right\} = \tau \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} E \{\xi_{t_i} \xi_{t_j}\} = \tau \min \{n, m\}.$$

Así

$$\rho \{X_{t_n} X_{t_m}\} = \frac{E \{X_{t_n} X_{t_m}\}}{\sqrt{E [X_{t_n}^2] E [X_{t_m}^2]}} = \frac{\tau \min \{n, m\}}{\sqrt{(n\tau)(m\tau)}} = \frac{\min \{n, m\}}{\sqrt{mn}} \quad (5.28)$$

de este modo si  $n = m + 1$  la longitud  $L_B(n)$  y la longitud  $D_B(n)$  para el movimiento Browniano pueden ser aproximadas de la siguiente manera: como  $\tau = \frac{T}{n}$  entonces  $T = \tau n$  y se tiene

$$L_B(n) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{n} \sqrt{n\tau} \sqrt{1 - \frac{m}{\sqrt{nm}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n \sqrt{T} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \quad (5.29)$$

$$D_B(n) = 1 - \frac{\log(L_B(n))}{\log(\frac{T}{n})} + \frac{\log(K)}{\log(\frac{T}{n})} \quad \text{para alguna constante } K \text{ positiva} \quad (5.30)$$

A continuación se encontrará la longitud y dimensión límites para el Movimiento Browniano

### 5.2.1.2. Longitud límite para el movimiento browniano estándar

Observe que la ecuación (5.29) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_B(n) &= \frac{2n\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}})}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}} = \frac{2n\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 - (1 - \frac{1}{n}))}{(\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}})(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \\ &= \frac{2n\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{n}}{(\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}})(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \end{aligned}$$

luego

$$L_B(n) = 2\sqrt{\frac{T}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}})(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \infty$$

lo que sugiere que la longitud del Movimiento Browniano Estándar Unidimensional es infinita a escala infinitesimal.

### 5.2.1.3. Dimensión fractal límite para el movimiento browniano estándar

La ecuación (5.30) puede escribirse como

$$D_B(n) = 1 - \frac{\log(\frac{2}{\sqrt{\pi}} n \sqrt{T} (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}})^{\frac{1}{2}})}{\log(\frac{T}{n})} + \frac{\log(k)}{\log(\frac{T}{n})}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{\left(\log\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}T\sqrt{T}\right) + \log\left(\frac{n}{T}\right) + \log\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} + \frac{\log(k)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} \\
 &= 2 - \frac{1}{2} \frac{\log\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} + \frac{\log\left(\frac{k}{2T}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)}
 \end{aligned}$$

pero  $1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$  por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 D_B(n) &\approx 2 - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\log(T)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} - \frac{\log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} \right] + \frac{\log\left(\frac{k}{2T}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} D_B(n) &= 2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{\log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{k\sqrt{\pi}}{2T}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)}
 \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{k\sqrt{\pi}}{2T}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} = 0$$

$$D_B(n) = 2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{\log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\log\left(\frac{T}{n}\right)} \right] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \tag{5.31}$$

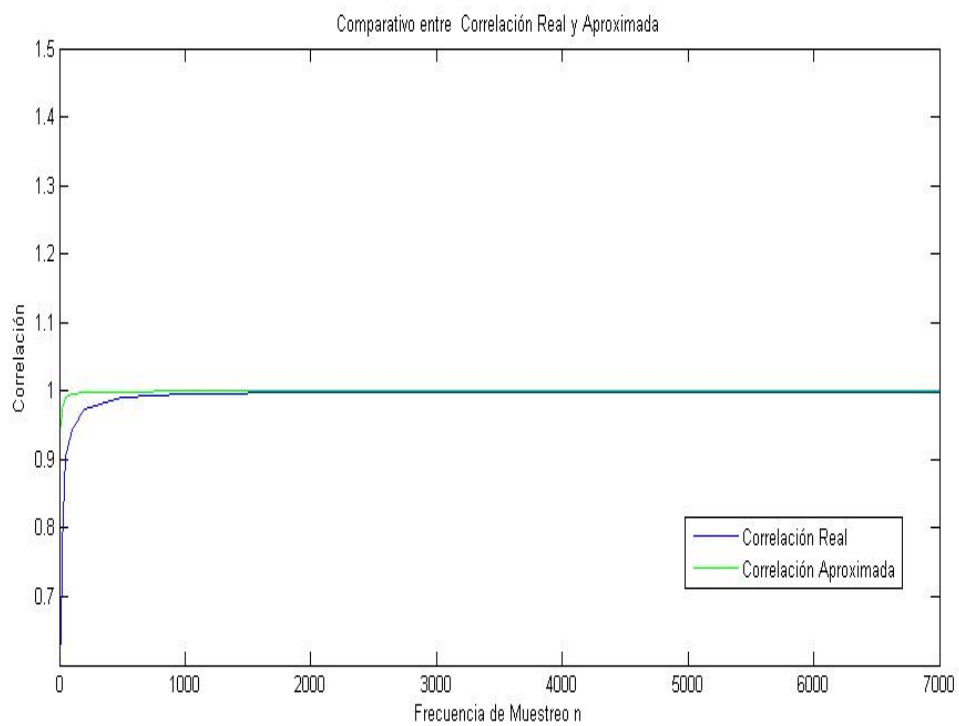
En consecuencia, puede concluirse que la dimensión fractal límite para el Movimiento Browniano es  $\frac{3}{2}$ . Este resultado está en consonancia con la dimensión que se obtiene considerando el enfoque asociado con el exponente de Hurst, es decir,  $D_x = 2 - H_x$  ver (Girault et al.) para más detalles. Como el movimiento Browniano es 0.5 autosimilar ver [28] entonces  $H_x = 0,5$  por tanto  $D_x = \frac{3}{2}$ .

En la gráfica 5.1 se muestra una comparación entre la correlación real promedio de 2000 trayectorias del Movimiento Browniano y la correlación analítica obtenida en la ecuación (5.28) para diferentes valores de n.

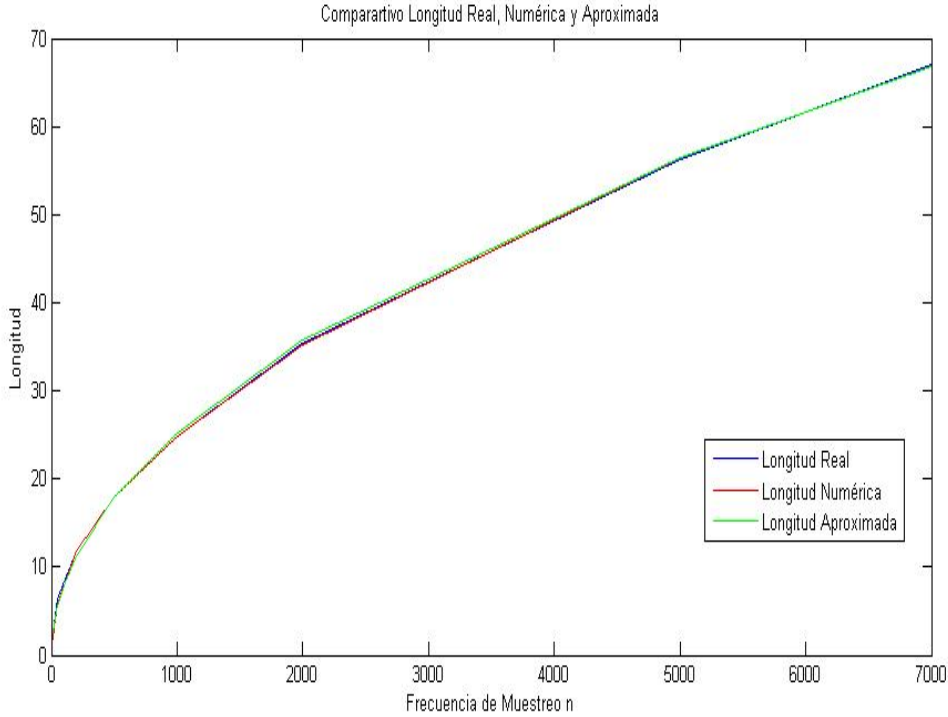
En la gráfica 5.2 se muestra una comparación entre la longitud real promedio de 2000 trayectorias del Movimiento Browniano, la longitud aproximada sugerida en [11] dada por la ecuación (5.20) y la longitud numérica que se propone en la ecuación 5.29 para diferentes valores de n.

En la gráfica 5.3 se muestra una comparación entre la dimensión fractal promedio aproximada de 2000 trayectorias del Movimiento Browniano como lo sugiere [11] dada

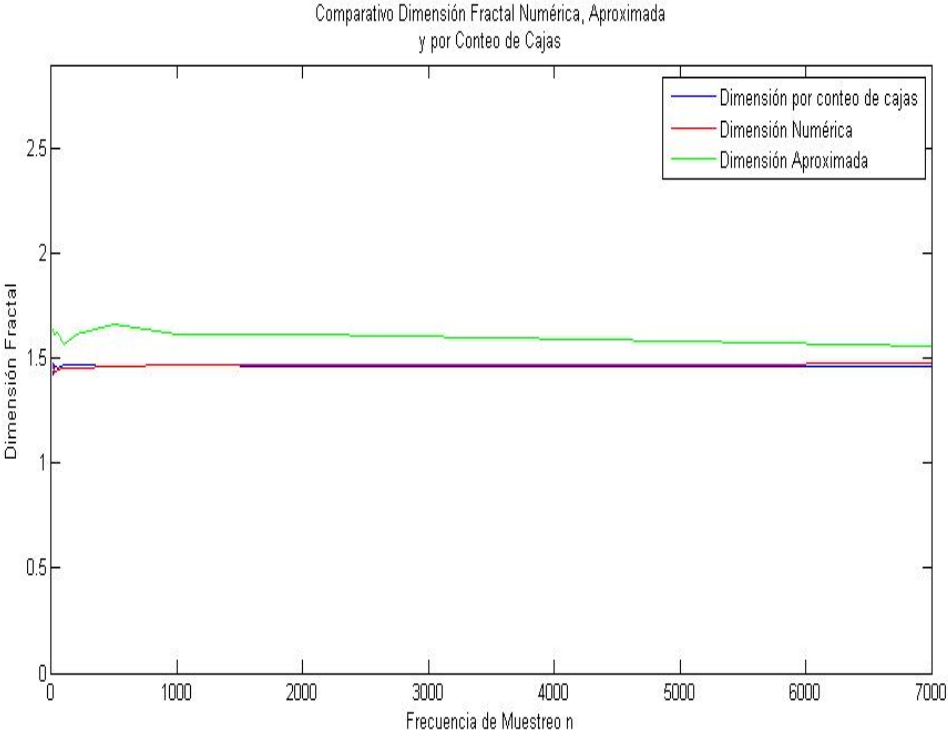
por la ecuación (5.22), la dimensión fractal numérica que se propone en la ecuación 5.31 y la dimensión estimada usando el teorema de conteo de cajas descrita en el capítulo 4 para diferentes valores de  $n$ .



Gráfica 5.1



Gráfica 5.2



Gráfica 5.3

En la gráfica 5.1 se aprecia que la convergencia para el Movimiento Browniano entre la correlación real promedio y la correlación analítica aumenta a medida que  $n$  se hace más grande, a su vez en la gráfica 5.2 se observa una alta convergencia entre la longitud real promedio y la longitud numérica propuesta y la longitud aproximada dada por la ecuación (5.20) para diferentes valores de  $n$ .

Con respecto a la dimensión fractal para el Movimiento Browniano se observa que tanto la dimensión fractal aproximada la dimensión fractal numérica se acercan más a medida que  $n$  aumenta, por otro lado se observa que los valores de la dimensión fractal convergen a  $\frac{3}{2}$  como era de esperarse por (5.34).

## 5.2.2. Cálculo de la dimensión fractal para el proceso de Ornstein Uhlenbeck aleatorio

Considere el problema de valor inicial dado por

$$\dot{X}(t) = \alpha(\mu - X(t)) + \sigma W(t) \quad (5.32)$$

$$X(0) = X_0$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $W(t)$  es un ruido blanco gaussiano y  $X_0 \sim N(\mu, 1)$ .

La ecuación (5.36) puede escribirse como

$$\dot{X}(t) = -\alpha X(t) + b(t); \quad b(t) = \alpha\mu + \sigma W(t) \quad (5.33)$$

como  $b(t)$  es ruido blanco,  $b(t) \stackrel{d}{=} \frac{dB(t)}{dt}$  donde  $\{B(t)\} \ t \geq 0$  es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional, además  $dB(t) \sim N(0, dt)$  en consecuencia,  $b(t) dt \stackrel{d}{=} \sqrt{dt}\xi_t; \quad \xi_t \sim N(0, 1)$ .

Bajo el esquema numérico de Euler aleatorio (3.5.1) la ecuación (5.33) puede expresarse como

$$\begin{aligned} X_{t_n} &= \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha\tau) X_{t_0} + \tau \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 - \alpha\tau) \right) (\alpha\mu + \sigma W(t_i)); \quad n \geq 1. \quad (5.34) \\ &= (1 - \alpha\tau)^n X_{t_0} + \tau \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha\tau)^{n-1-i} \left( \alpha\mu + \frac{\sigma \Delta B_i}{\tau} \right) \quad \text{con } \Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \end{aligned}$$

donde  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un Movimiento Browniano Estándar Unidimensional .

Sean  $\beta = \alpha\mu\tau$  y  $\rho = 1 - \alpha\tau$ , así  $0 < \rho < 1$ . Se tiene que

$$X_{t_n} = \rho^n X_{t_0} + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{n-i-1} + \sigma \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{n-1-i} \sqrt{\tau} \xi_{t_i}; \quad \xi_{t_i} \sim N(0, 1).$$

De ese modo

$$X_{t_n} = \beta \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{n-i-1} + \rho^n X_{t_0} + \sigma \sqrt{\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{n-1-i} \xi_{t_i}; \quad n \geq 1.$$

Además por la ecuación (3.54) se sigue que

$$\begin{aligned} E \{X_{t_n}^2\} &= \left( \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha\tau) \right)^2 E \{X_{t_0}^2\} + 2\tau \left( \prod_{i=0}^{n-1} (2 - \alpha\tau) \right) \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 - \alpha\tau) \right) E \{X_{t_0}\} E \{\alpha\mu + \sigma W(t_i)\} + \\ &+ \tau^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left( \prod_{j=i+1}^{n-1} (1 - \alpha\tau) \right) \right)^2 E \{(\alpha\mu)^2 + 2\alpha\mu\sigma W(t_i) + \sigma^2 W^2(t_i)\} \\ &= (1 - \alpha\tau)^{2n} E \{X_{t_0}^2\} + 2(1 - \alpha\tau)^n \sum_{i=0}^{n-1} (2 - \alpha\tau)^{n-1-i} \beta E \{X_{t_0}\} + \\ &+ \tau^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \alpha\tau)^{n-1-i} \right)^2 (\alpha^2 \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\tau^2} E \{\Delta B_i^2\}) \\ &= \rho^{2n} E \{X_{t_0}^2\} + 2\rho^n \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \beta E \{X_{t_0}\} + \beta^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sigma E \{\xi_{t_i}\} \sqrt{\tau} \rho^{n-1-i} \right)^2 \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$E \{X_{t_n}^2\} = \beta^2 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \right)^2 + \rho^{2n} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2(n-1-i)} + 2\beta \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \rho^n E \{X_{t_0}\}.$$

Observe que  $E \{\xi_i\} = 0$ ,  $E \{\xi_i \xi_j\} = 0$  para  $i \neq j$ . Por otro lado para  $\rho < 1$  sea  $S = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{n-1}$  luego  $S\rho = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^n$  restando término a término  $S - S\rho = 1 - \rho^n$ , así se obtiene  $S = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$ .

Se tiene que

$$E \{X_{t_n}^2\} = \beta^2 \left( \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right)^2 + \rho^{2n} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \left( \frac{1 - \rho^{2n}}{1 - \rho^2} \right) + 2\beta \rho^n \left( \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right) E \{X_{t_0}\}$$

Además,

$$\begin{aligned} E \{X_{t_n} X_{t_m}\} &= \beta^2 \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \rho^i \rho^m E \{X_{t_0}\} + \rho^n E \{X_{t_0}\} \beta \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j + \\ &+ \rho^{n+m} E \{X_{t_0}^2\} + E \left\{ \sigma^2 \tau \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{n-1-i} \xi_i \sum_{j=0}^{m-1} \rho^{m-1-j} \xi_j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta^2 \left( \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right) \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \beta \left( \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right) \rho^m E \{X_{t_0}\} + \rho^n E \{X_{t_0}\} \beta \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \\
&\quad + \rho^{n+m} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \left( \frac{1 - \rho^{2\min\{n,m\}}}{1 - \rho^2} \right)
\end{aligned}$$

Observe que

$$E \{X_{t_n}\} = \beta \left( \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right) + \rho^n E \{X_{t_0}\}$$

Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_n}\} = \frac{\beta}{1 - \rho} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho^n) + E \{X_{t_0}\} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n, \quad \text{pero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n = 0$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_n}\} = \frac{\beta}{1 - \rho}; \quad \text{pero} \quad \beta = \alpha \mu \tau \quad \text{y} \quad 1 - \rho = \alpha \tau$$

en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_n\} = \mu$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_n}^2\} &= \frac{\beta^2}{(1 - \rho)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho^n)^2 + E \{X_{t_0}^2\} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^{2n} + \\
&\quad + \frac{\sigma^2 \tau}{1 - \rho^2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho^{2n}) + \frac{2\beta}{1 - \rho} E \{X_{t_0}\} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \rho^n) \rho^n \\
&= \frac{\beta^2}{(1 - \rho)^2} + \frac{\sigma^2 \tau}{1 - \rho^2} = \\
&= \frac{(\alpha \mu \tau)^2}{(\alpha \tau)^2} + \frac{\sigma^2 \tau}{1 - (1 - \alpha \tau)^2} \\
&= \mu^2 + \frac{\sigma^2 \tau}{1 - \tau(1 - 2\alpha \tau - \alpha^2 \tau^2)} = \mu^2 + \frac{\sigma^2 \tau}{\tau(2\alpha - \alpha^2 \tau)}
\end{aligned}$$

por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_n}^2\} = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{(2\alpha - \alpha^2 \tau)}$$

Note que para  $n = m + 1$  se obtiene

$$E \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = \beta^2 \sum_{i=0}^m \rho^i \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j + \beta \sum_{i=0}^m \rho^i \rho^m E \{X_{t_0}\} + \rho^{m+1} E \{X_{t_0}\} \beta \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j + \rho^{2m+1} E \{X_{t_0}^2\} +$$

$$+ E \left\{ \sigma^2 \tau \sum_{i=0}^m \rho^{m-i} \xi_i \sum_{j=0}^{m-1} \rho^{m-1-j} \xi_j \right\}$$

sea

$$S^* = \sum_{i=0}^m \rho = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^m = 1 + \rho (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-1}) = 1 + \rho \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right)$$

se sigue que

$$E \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = \beta^2 \left( \left( 1 + \rho \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) \right) \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) \right) + \beta \left( 1 + \rho \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) \right) \rho^m E \{X_{t_0}\} +$$

$$+ \rho^{m+1} E \{X_{t_0}\} \beta \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \rho^{2m+1} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \rho \left( \frac{1 - \rho^{2m}}{1 - \rho^2} \right)$$

$$= \beta^2 \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \beta^2 \rho \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right)^2 + \beta \rho^m E \{X_{t_0}\} + \beta \rho \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) \rho^m E \{X_{t_0}\} + \rho^{m+1} E \{X_{t_0}\} \beta \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) +$$

$$+ \rho^{2m+1} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \rho \left( \frac{1 - \rho^{2m}}{1 - \rho^2} \right)$$

$$E \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = \rho \left[ \beta^2 \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right)^2 + 2\beta E \{X_{t_0}\} \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) \rho^m + \rho^{2m} E \{X_{t_0}^2\} + \sigma^2 \tau \left( \frac{1 - \rho^{2m}}{1 - \rho^2} \right) \right] +$$

$$+ \beta^2 \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \beta \rho^m E \{X_{t_0}\}$$

$$= \rho E \{X_m^2\} + \beta \left( \left( \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \right) + \rho^m E \{X_{t_0}\} \right)$$

$$= \rho E \{X_m^2\} + \beta E \{X_m\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = \rho \lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_m^2\} + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_m\}$$

$$= (1 - \alpha \tau) \left( \mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2 \tau} \right) + \alpha \mu \tau \mu$$

$$E \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = \left( \mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2 \tau} \right) (1 - \alpha \tau) + \alpha \mu^2 \tau.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \text{corr} \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} &= \frac{\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau}\right) (1 - \alpha\tau) + \alpha\mu^2\tau}{\sqrt{\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau}\right) \left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau}\right)}} \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau} (1 - \alpha\tau) + \mu^2 (1 - \alpha\tau + \alpha\tau)}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau}} = \frac{\frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau} (\alpha\tau)}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau}} \end{aligned}$$

$$\text{Si se denota } \rho_x(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{corr} \{X_{t_{m+1}} X_{t_m}\} = 1 - \frac{\frac{\sigma^2 \alpha \tau}{2\alpha - \alpha^2 \tau}}{\frac{\sigma^2 + \mu^2 (2\alpha - \alpha^2 \tau)}{2\alpha - \alpha^2 \tau}}$$

Finalmente

$$\rho_x(\tau) = 1 - \frac{\sigma^2 \alpha \tau}{\sigma^2 + \mu^2 (2\alpha - \alpha^2 \tau)} \quad (5.35)$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \{X_{t_m}\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \{X_{t_n}^2\} - \lim_{n \rightarrow \infty} (E \{X_{t_n}\})^2 \\ &= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2\tau} - \mu^2 \end{aligned}$$

de ese modo la desviación estándar límite para  $X_{t_m}$  puede ser escrita como

$$\sigma_x(\tau) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha - \alpha\tau}}$$

así,

$$\begin{aligned} L_x(\tau) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{\tau} \sigma_x(\tau) \sqrt{1 - \rho_x(\tau)} \\ &= \frac{2T\sigma}{\sqrt{\pi}\tau\sqrt{2\alpha - \alpha^2\tau}} \sqrt{\frac{\sigma^2 \alpha \tau}{\sigma^2 + \mu^2 (2\alpha - \alpha^2 \tau)}} \\ &= \frac{2T\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\tau\sigma^2 (2 - \alpha\tau) + \tau\mu^2\alpha (2 - \alpha\tau)^2}} \\ L_x(\tau) &= \frac{2T\sigma}{\sqrt{\pi}\tau} \sqrt{\frac{\tau}{\sigma^2 (2 - \alpha\tau) + \mu^2\alpha (2 - \alpha\tau)^2}} \quad (5.36) \end{aligned}$$

$$D_x = 1 - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(L_x(\tau))}{\log(\tau)}$$

$$= 1 - \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{\log \left( \frac{2T\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \right) - \frac{1}{2} \log \left( \tau\sigma^2 (2 - \alpha\tau) + \tau\mu^2\alpha (2 - \alpha\tau)^2 \right)}{\log(\tau)} \right)$$

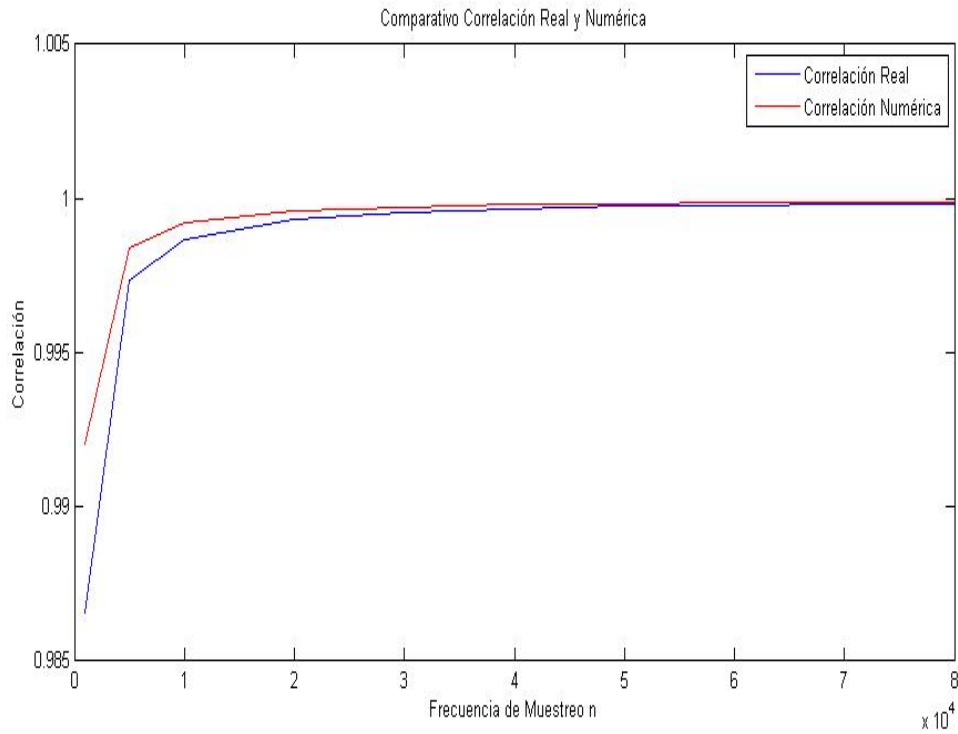
Finalmente

$$D_x = 1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{\log \left( \tau\sigma^2 (2 - \alpha\tau) + \tau\mu^2\alpha (2 - \alpha\tau)^2 \right)}{\log(\tau)} \right) - \quad (5.37)$$

Las graficas siguientes se obtuvieron a partir de los parámetros  $\alpha = 5$ ,  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 250$ , por ejemplo en la gráfica 5.4 se muestra una comparación entre la correlación real promedio de 2000 trayectorias para el Proceso de Ornstein Uhlenbeck aleatorio y la correlación analítica obtenida en la ecuación (5.39) para diferentes valores de n.

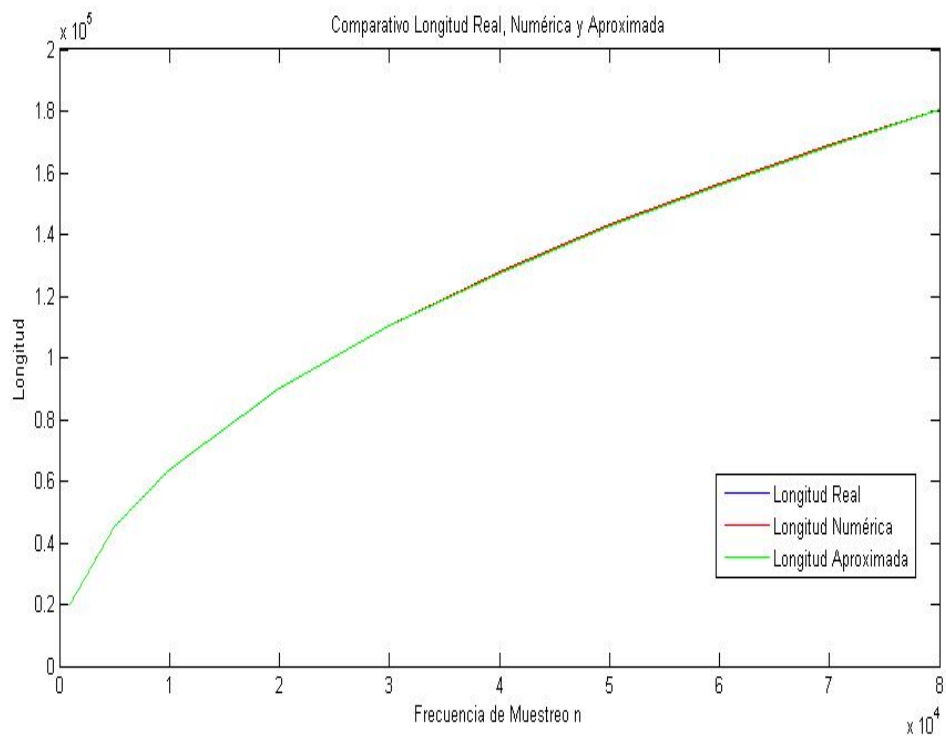
En la gráfica 5.5 se muestra una comparación entre la longitud real promedio de 2000 trayectorias para el Proceso de Ornstein Uhlenbeck aleatorio, la longitud aproximada sugerida en [11] dada por la ecuación 5.20 y la longitud numérica que se propone en la ecuación 5.40 para diferentes valores de n.

En la gráfica 5.6 se muestra una comparación entre la dimensión fractal promedio aproximada de 2000 trayectorias para el Proceso de Ornstein Uhlenbeck Aleatorio como lo sugiere [16] dada por la ecuación 5.22, la dimensión fractal numérica que se propone en la ecuación 5.41 y la dimensión estimada usando el teorema de conteo de cajas descrita en el capítulo 4 para diferentes valores de n.

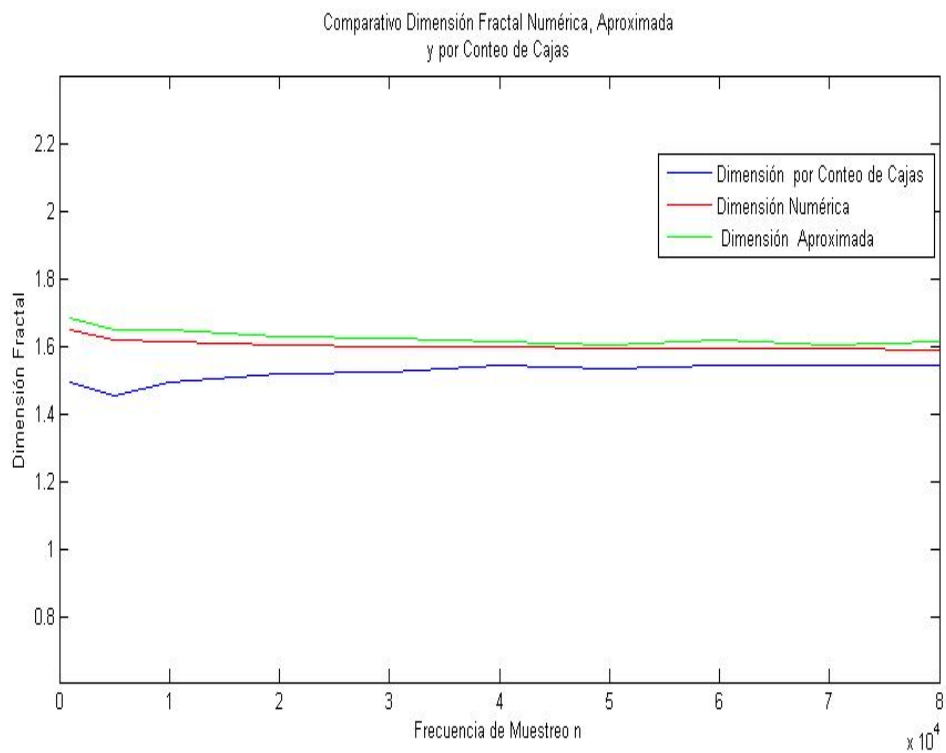


Gráfica 5.4

## 5.2 Resultados numéricos experimentales



Gráfica 5.5



Gráfica 5.6

Como puede apreciarse para el Proceso de Ornstein Uhlenbeck Aleatorio en la gráfica 5.4 la correlación real promedio y la correlación analítica convergen a medida que  $n$  aumenta, a su vez en la gráfica 5.5 se observa que la longitud real, la longitud aproximada y la longitud numérica propuesta presentan alta convergencia para diferentes valores de  $n$ .

En cuanto a la dimensión fractal para el Proceso de Ornstein Uhlenbeck Aleatorio en la gráfica 5.6 se muestra que la dimensión fractal aproximada y la dimensión fractal numérica propuesta convergen a medida que  $n$  aumenta, de igual manera para la dimensión por conteo de cajas.

## 6 Conclusiones

Diversas aplicaciones en campos de la ingeniería y ciencias hacen necesario el estudio y desarrollo de métodos numéricos con parámetros de características aleatorias, sus aplicaciones permiten simular fenómenos que involucran niveles de incertidumbre en el tratamiento de los datos, a fin de generar con confianza aproximaciones a la solución exacta de los fenómenos estudiados. En el presente estudio se realizó la construcción numérica de ecuaciones diferenciales aleatorias y se establecieron nuevas condiciones bajo las cuales el esquema aleatorio de Euler Aleatorio es m.s convergente a la solución exacta de un problema de valor aleatorio específico.

A partir los resultados numéricos de (Jodar, Lucas. Cortéz, y J. L. Villafuerte) [19] y [20] se calculan numéricamente el valor esperando y la varianza del proceso de aproximación, y se muestra que con las nuevas condiciones propuestas se obtienen resultados similares y se extienden los resultados de convergencia a las funciones de Correlación y Covarianza que en los trabajos mencionados no se desarrollan.

Se aplicó el enfoque de J. Girault, D. Kouame y A. Ouahabi para la determinación analítica de la dimensión fractal para señales estocásticas filtradas, a fin de calcular numéricamente la dimensión fractal y la longitud para Procesos Estocásticos Gaussianos como el Movimiento Browniano Estándar y el Proceso de Ornstein Uhlenbeck, a partir del esquema aleatorio de Euler, se verifica que la longitud de procesos Gaussianos es infinita a escala infinitesimal y en particular que la dimensión fractal límite coincide con la calculada según el enfoque asociado con el exponente de Hurst.

Un trabajo posterior permitirá la simulación de algunas geoformas de la superficie terrestre, [3, 5, 6, ?] y la simulación de mapas irregulares con un número predefinido de polígonos como los descritos en [4] y el cálculo numérico de dimensiones fractales y longitudes de geomorfologías costeras longitudinales con datos tomados de imágenes satelitales con buena resolución usando software como Arcgis y usando herramientas de fotogrametría digital.



# Bibliography

- [1] A. Blachowski and K. Ruebenbauer, “Roughness Method to Estimate Fractal Dimension”, *Acta Physica Polonica A*, Vol. 115, No 3, 2009, pp. 636-640.
- [2] A. Den Outer, J.F. Kaashoek, H. R. G. K. Hack. “Difficulties whit using continuous fractal theory for discontinuity surfaces”, *Sci. y Geomech.* Vol. 32, No. 1,1995, pp. 3-9.
- [3] A. Beauvais, D. Montgomery, “Influence of Valley Type on the Scaling Properties of River Planforms,”*Water Resources Research*, Vol. 32, No. 5, 1996, pp. 1441-1448.
- [4] A. Betancourt., “An algorithmic approach for simulating realistic irregular lattices”, tesis de maestria, Universidad Eafit, 2012.
- [5] B. Mandelbrot, “How Long is the Coast of Britain Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension,” *Science*, New Series, American Association for the Advancement of Science, Vol. 156, No. 3775, 1967, pp. 636-638.
- [6] B. Mandelbrot, “Stochastic Models for the Earth’s Relief, the Shape and the Fractal Dimension of the Coastlines, and the Number-Area Rule for Islands,” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 72, No. 10, 1975, pp. 3825-3828.
- [7] B. Mandelbrot, , “The Fractal Geometry of Nature,” W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1982.
- [8] Bedford, T. J., “Dimension and Dynamics for Fractal Recurrent Sets,” *Journal of the London Mathematical Society* 2(33),1986, pp.89-100 .
- [9] C. Taylor and S. J. Taylor, “Estimating the Dimension of a Fractal,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 53, No. 2, 1991, pp. 353-364.
- [10] D. Hardin., “Hyperbolic Iterated Function Systems and Applications,” Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1985.
- [11] E. Hille, and R. Phillips., “Functiond Analysis and Semi-Groups.American mathematical Society.” *Colloq. Publ.*, No. 31, Providence, Rhode Island, 1957.
- [12] G. Grimmett, D. Stirzaker., “Probability and Random Processes”, Clarendon Press, Oxford, 2001.

- [13] H. Federer., “Geometric Measure Theory”, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [14] J. Hutchinson., “Fractals and Self-Similarity,” *Indiana University Journal of Mathematics*, No. 30,1981, pp. 713-747.
- [15] J. Lambert, “Numerical Methods for Ordinary Differential Systems”, Wiley, Chichester, 1991.
- [16] J. Girault, D. Kouame and A. Ouahabi, “Analytical Formulation of the Fractal Dimension of Filtered Stochastic Signals,” *Signal Processing*, 90,9, 2010, pp. 2690–2697.
- [17] J. Strand., “Stochastic Ordinary Differential Eqnations,” Ph. D. Thesis, Univ. of Calilornia, Berkeley, California, 1967.
- [18] K. Montgomery, “Sinuosity and Fractal Dimension of Meandering Rivers,” Blackwell Publishing and The Royal Geographical Society (With the Institute of British Geographers). Vol. 28, No. 4, 1996, pp. 491-500.
- [19] L. Jodar, J. Cortéz and L. Villafuerte, “Mean Square Numerical Solution of Random Differential Equations: Facts and Possibilities,” *Computers and Mathematics with Applications*, 53, 2007, pp. 1098–1106.
- [20] L. Jodar and L. Villafuerte, “Numerical Solution of Random Differential Equations: A Mean Square Approach, ” *Mathematical and Computer Modelling*, 45, 2007, pp. 757–765.
- [21] L. Burlaga, L. Klein , “Fractal structure of the interplanetary magnetic field,” *J. Geophys. Res.* 91 1986, 347 – 350.
- [22] L. Serge.“Complex Analysis,” Springer-Verlag. Usa 1993.
- [23] L.Richardson, “The Problem of Contiguity: An Appendix of Statistic of Deadly Quarrels,” *General Systems Year book*, 61, 1961, pp.139–187.
- [24] M. Loève, *Probability Theory*. D. Van N. Company, London, 1963.
- [25] M. Allen, G. J. Brown and N. J. Miles, “Measurement of Boundary Fractal Dimensions: Review of Current Techniques,” *Powder Technology*, Vol. 84, No.1, 1995, pp. 1-14.
- [26] M. F. Barnsley, “Fractals Everywhere,” Academic Press, London, 1988.
- [27] P. Henrici, “Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations,” John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [28] T. Mikosch. “Elementary Stochastic Calculus. Whit Finance In View,” First Edition. World Scientific Publishing. 1999.
- [29] P. Flandrin., “On the spectrum of fractional Brownian motions,” *IEEE Trans. Inform. Theory* 35 (1989) 197 – 199.

- [30] L. Reuter., "Rendering and Magnification of Fractals Using Iterated Function Systems," Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1987.
- [31] R. J. Adler, "Some Erratic Patterns Generated by the Planar Wiener Process," *Advances in Applied Probability*, Vol. 10, 1978, pp. 22-27.
- [32] S. Dutch. "Linear Richardson Plots from Non-Fractal Data Sets," *Mathematical Geology*, Vol. 25, No. 6, 1993. pp.737-751.
- [33] T.T. Soong, "Random Differential Equations in Science and Engineering," Academic Press, New York, 1973.
- [34] W. Blackburn, M. Segui Prieto, and A. Schuster. "Interpretation of the Richardson Plot in Time Series Representation," *Lecture Notes in Computer Science* Vol. 1983 2000. pp 206-211
- [35] W. E. Cullin and M. Datko, "The Fractal Geometry of the Soil-Covered Landscape: Earth Surf," *Proc. Landforms*, Vol. 12, 1987, pp. 369-385.
- [36] W. E. Cullin, "Dimension and Entropy in the Soil-covered Landscape: Earth Surf," *Proc. Landforms*, Vol. 13, 1988, pp. 619-648.