Productos notables y factorización

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

Las siluetas de los objetos que nos rodean y los procesos que surgen en diferentes campos de aplicación de las ciencias, en algunos casos, se pueden modelar a partir de ecuaciones que son polinomios en una o varias variables. Es por ello que se hace necesario comprender las propiedades para operarlos correctamente.

El módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Utilizar los productos notables y algunas técnicas de factorización en las operaciones con polinomios.

Objetivos específicos

- Comprender las operaciones básicas con polinomios y sus relaciones.
- Utilizar las fórmulas básicas de factorización para encontrar los factores de polinomios, sus raíces o soluciones.
- Relacionar las propiedades de los polinomios con variaciones en longitudes, áreas y volúmenes de diferentes objetos.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados son básicos para comprender conceptos fundamentales del Cálculo y las Matemáticas en general.

El tiempo estimado para la solución del taller es de tres (3) horas.

En su estudio y solución le deseamos ¡muchos éxitos!

1. Factorización

Un monomio en una variable x es el producto de una constante por la variable, elevada a una potencia entera no negativa. Es decir, un monomio en la variable x tiene la forma ax^n, donde a es constante, x es variable y n es un entero no negativo. Se llaman semejantes a aquellos monomios que tienen las mismas variables, con iguales exponentes, en cuyo caso se pueden sumar o restar utilizando la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$3x^2+10x^2-2x^2=(3+10-2)x^2=11x^2$$

Para definir lo que es un polinomio P en la variable x, consideremos un entero no negativo n y constantes $a_0,a_1,\ldots,a_n$. Un polinomio en la variable x es una expresión algebraica que consiste en la suma de monomios, se da de la siguiente forma:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

Si en el polinomio $n\geq 0$ y $a_n\neq 0$, se dice que el polinomio es de grado n. Se le llama coeficientes a las constantes $a_0,a_1,\ldots,a_n$. En general, a los monomios que conforman a un polinomio se les llama términos, y se llama polinomio cero al polinomio cuyos términos son todos nulos, a este polinomio nulo no se le asigna grado.

Se dice que un polinomio está definido en $\mathbb{N}$, si todos sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{N}$. Así mismo, se dice que un polinomio está en $\mathbb{Z}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}^*,\mathbb{R},\mathbb{C})$, si todos sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{Z}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}^*,\mathbb{R},\mathbb{C})$, respectivamente.

De acuerdo a la terminología anterior, para el polinomio:

$$P(x)=6x^4-7x^3+9x+10$$

Tenemos que el grado de $P(x)$ es $n=4$, que $a_4=6$, $a_3=-7$, $a_2=0$, $a_1=9$ y $a_0=10$. De manera que $P(x)$ no se puede considerar como polinomio en $\mathbb{N}$ ya que $a_3=-7$ no pertenece a $\mathbb{N}$, pero $P(x)$ si es un polinomio en $\mathbb{Z}$.

Ejercicio

Para el polinomio $Q(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+4$, su grado y el conjuto númerico en el que está definido son

a. Grado 3 y pertenece a $\mathbb{Q}$.

b. Grado 2 y pertenece a $\mathbb{Z}$.

c. Grado 3 y pertenece a $\mathbb{N}$.

Ejercicio

Para el polinomio $Q(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4$, el coeficiente de la mayor potencia y el término independiente son, respectivamente

a. 4 y 2

b. $1/2$ y 4

c. 2 y 4

La suma de polinomios se efectúa sumando los términos (monomios) semejantes de cada uno de ellos. La multiplicación de polinomios se define mediante el uso de la propiedad distributiva. Cada uno de los polinomios que se multiplican se llaman factores del polinomio resultante.

Ejercicio

La suma de $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = \frac{1}{3}x - 2$ es, respectivamente

a. $3x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

b. $3x^2 + \frac{7}{3}x - 1$

c. $3x^2 + \frac{7}{3}x + 2$

Ejercicio El producto de $P(x) = x^2 - 2x + 1$ y $Q(x) = x - 3$ es

a. $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

b. $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

c. $x^3 - 6x^2 + 7x - 4$

Para factorizar polinomios es fundamental aplicar, apropiadadamente, la propiedad distributiva, como se ilustra a continuación.

1.1. Factor común

El factor común de un polinomio es lo que se repite en cada uno de sus términos, teniendo en cuenta que de las constantes se toma el máximo común divisor y de las variables repetidas, las que tengan menor potencia.

Fórmulas

$$ax + ay = a(x + y)$$
$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

Ejemplo

$$8x^2y + 4x^4z = 4x^2(2y + x^2z)$$

Ejercicio

Al factorizar $2x^2 + 4x$, se obtiene

a. $2x(x + 2)$

b. $x(2x + 4)$

c. $x(2x^2 + 4)$

1.2. Trinomio cuadrado perfecto

El trinomio cuadrado perfecto resulta de desarrollar el binomio $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ o $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Palabras $(x + y)^2$ se puede expresar de la siguiente manera: el desarrollo de un binomio al cuadrado resulta de elevar el primer término (x) al cuadrado, más dos veces el primer término por el segundo (y), más el segundo al cuadrado. Note que la fórmula es una equivalencia, es decir, lo que está a la izquierda se puede escribir como lo que está a la derecha y viceversa.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ejemplos

$$y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$$
$$a^8 - 18a^4 + 81 = (a^4 - 9)^2$$

Ejercicio

Al factorizar $9x^2 - 12x + 4$, se obtiene

a. $(x+9)^2$

b. $(3x+2)$

c. $(3x-2)^2$

1.3. Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ se puede expresar en palabras como: la diferencia de cuadrados es igual al producto de la raíz cuadrada del primer término (x) menos la raíz cuadrada del segundo término, por la raíz cuadrada del primer término más la raíz cuadrada del segundo. También es una equivalencia.

Ejemplos

$$x^2 - 64 = (x-8)(x+8)$$
$$x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$
$$x - 5 = (\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}-\sqrt{5})$$
$$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Ejercicio

Al factorizar $16x^2 - 9$, se obtiene

a. $(4x-3)(4x+3)$

b. $(2x-9)(2x+9)$

c. $(2x+9)(2x+3)$

1.4. Caso especial

Al expandir o factorizar un polinomio, en algunos casos, se pueden aplicar varias fórmulas a la vez. En el siguiente caso, se puede aplicar el trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados.

$$x^2 + 2xy + y^2 - a^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - a^2 = (x+y)^2 - a^2 = [(x+y) - a][(x+y) + a]$$

Ejemplo

Para factorizar x^2+2x-8, al sumarle 1 y restarle -1, se puede escribir como $x^2+2x+1-1-8$, que es equivalente a:

$$x^2+2x+1-9=(x^2+2x+1)-9=(x+1)^2-9=(x+1-3)(x+1+3)=(x-2)(x+4)$$

Note que para resolver el ejercicio se utilizaron las fórmulas del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados.

Ejercicio

Al factorizar $x^2+6x-16y^2+9$, se obtiene

a. $((x-4y)-3)((x-4y)+3)$

b. $((x+4y)-3)((x+4y)+3)$

c. $((x+3)-4y)((x+3)+4y)$

1.5. Trinomio de la forma x^2+bx+c

Cuando el coeficiente de x^2 es 1, en algunos casos éste trinomio se puede factorizar, encontrando dos números que al multiplicarlos se obtenga el término independiente c, y al sumarlos el coeficiente del término de grado uno, que es b. En la siguiente fórmula se tiene que $c=mn$ y $b=m+n$.

$$x^2+(m+n)x+mn=(x+m)(x+n)$$

Ejemplo

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

En este caso $-6=(-3)(2)$ y $-1=-3+2$

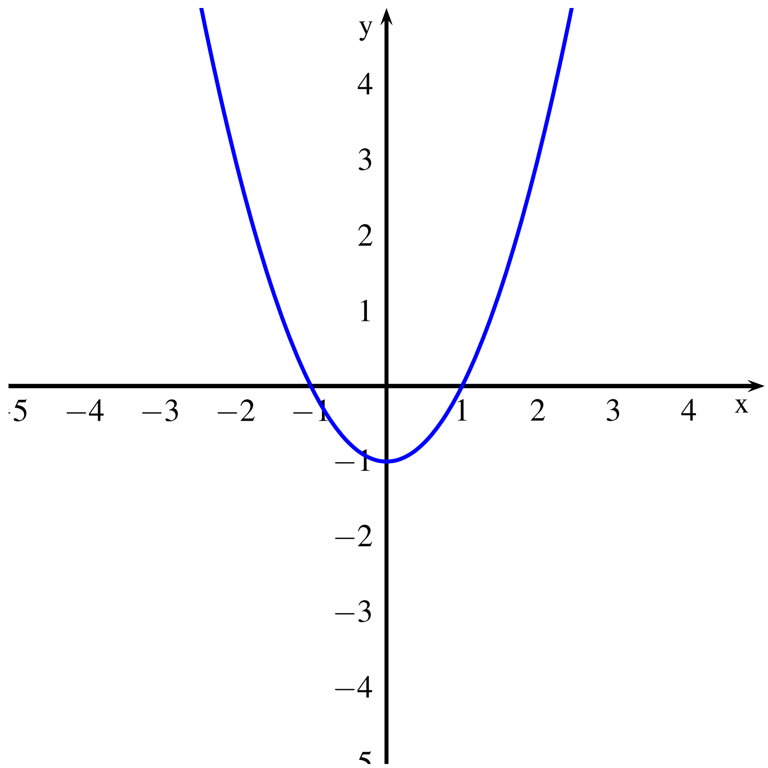
Para la ecuación $P(x)=0$ en donde $P(x)$ es un polinomio, si es posible encontrar factores en los números reales ($\mathbb{R}$), cada uno de sus factores se iguala a cero (0) y se obtienen las respectivas soluciones. Estas soluciones también se llaman raíces. Al graficar el polinomio en el plano cartesiano, las soluciones o raíces cortan el eje X.

Ejemplo

Para $P(x)=x^2-1=0$, al factorizarlo se obtiene $P(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)=0$. En este caso, $x-1$ y $x+1$ son los factores.

Al igualar cada factor a cero (0) se obtiene $x-1=0 \Rightarrow x=1$ y $x+1=0 \Rightarrow x=-1$. En este caso, 1 y -1 son las soluciones o raíces del polinomio.

Al graficar el polinomio $P(x)$ en el plano cartesiano, los cortes del polinomio con el eje X son -1 y 1, como se puede observar en la siguiente gráfica.



A partir de lo anterior, se puede ver claramente la importancia de la factorización. Por un lado, sirve para encontrar los factores de un polinomio y, por el otro, para encontrar las soluciones y raíces del mismo, que al graficarlo, resultan ser los puntos de corte con el eje X.

Ejercicio

Al factorizar x^2+x-12, se obtiene

a. $(x-4)(x-3)$

b. $(x-4)(x+3)$

c. $(x+4)(x-3)$

1.6. Solución general para un polinomio de segundo grado

Para aplicar la solución general a un polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, es importante tener claro cuáles son los factores y las raíces o soluciones de dicho polinomio. La fórmula que permite encontrar las soluciones de un polinomio de segundo grado está dada por

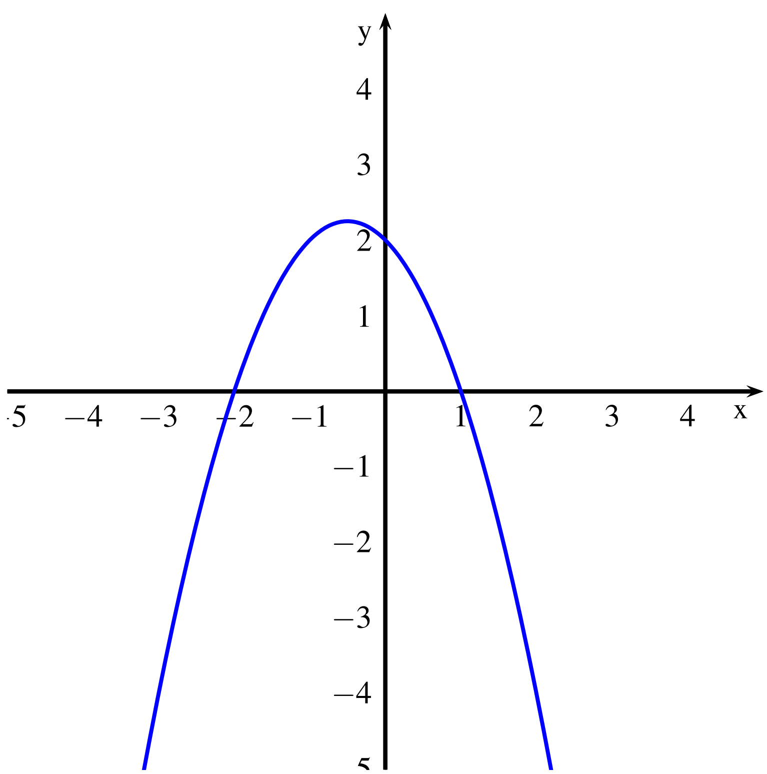
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La parte que se encuentra dentro del radical $b^2 - 4ac$ se denomina el discriminante y se denota por $d = b^2 - 4ac$. Este valor puede ser positivo, igual a cero o negativo.

a. Para $d > 0$, en este caso el polinomio tiene dos soluciones diferentes. Al gráficar la solución en el plano cartesiano, el polinomio corta el eje X en dos valores diferentes. Estos valores se llaman soluciones o raíces.

   Ejemplo

   El polinomio $P(x) = -x^2 - x + 2 = 0$, tiene como discriminante $d = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 9 > 0$. En este caso, el polinomio corta el eje X en dos partes diferentes, como se puede apreciar en la siguiente gráfica.

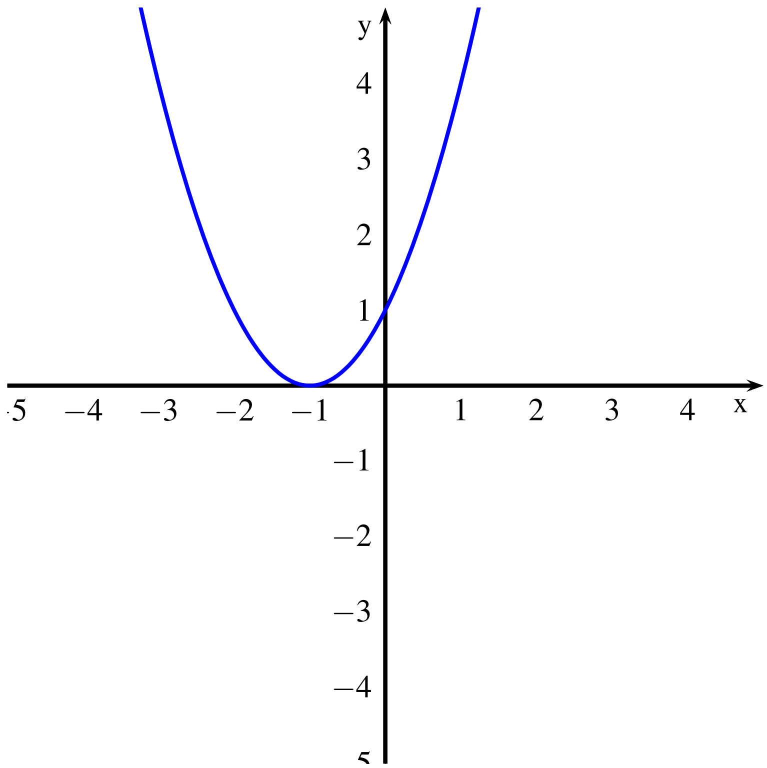


   Al leer la gráfica, se tiene que los cortes con el eje X son $x = -2$ y $x = 1$, que son, a su vez, las soluciones o raíces del polinomio.

De otro lado, los factores son $x+2$ y $x-1$ y, por lo tanto, el polinomio se puede escribir como $P(x) = -(x+2)(x-1)$.

b. Para $d = 0$, tiene una solución doble y, por lo tanto, toca el eje X en un sólo punto.

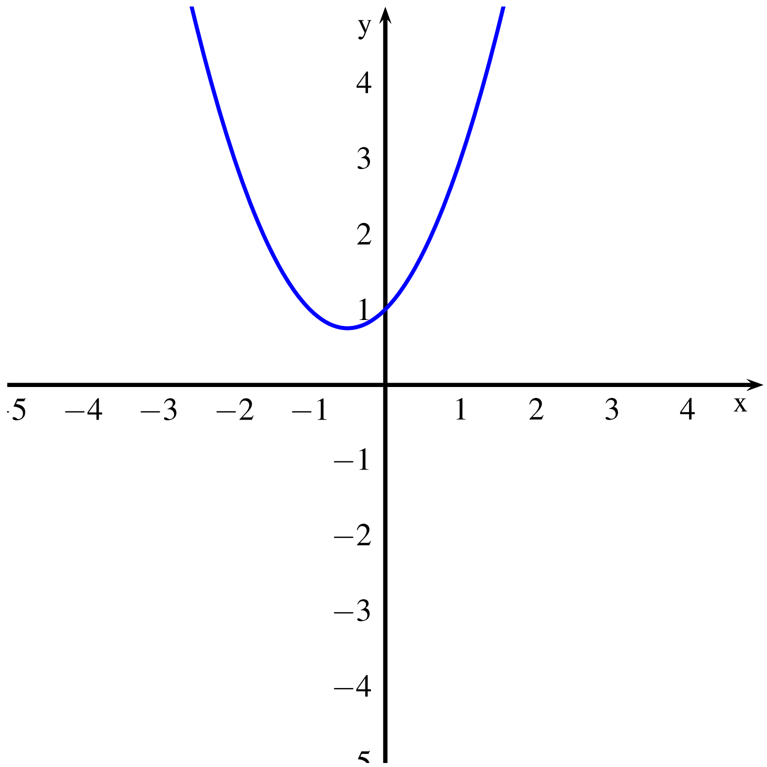
En este caso, un ejemplo es el polinomio $P(x) = x^2+2x+1$. El discriminante es $d = 2^2 - 4(1)(1) = 0$. La gráfica del polinomio dado se muestra a continuación.



A partir de la gráfica se observa que el polinomio toca el eje X en $x = -1$, por lo tanto, el factor doble es $x+1$ y se puede escribir como $P(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

c. Para $d < 0$, no tiene soluciones reales. En este caso no corta el eje X.

Para el polinomio $P(x) = x^2+x+1$, el discriminante es $d = 1^2 - 4(1)(1) < 0$. La gráfica del polinomio dado se muestra a continuación.



A partir de la gráfica se observa que el polinomio no corta el eje X para ningún valor del mismo, y por lo tanto, no se puede factorizar en los números reales.

Ejemplo

Aplicando la fórmula general de segundo grado para factorizar el polinomio $P(x) = x^2 - x - 6$, se tiene que $a = 1, b = -1$ y $c = -6$. Al sustituir en la fórmula general se obtiene:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

Al simplificar se obtiene:

$$x = \frac{(1 \pm \sqrt{25})}{2} = \frac{(1 \pm 5)}{2}$$

De donde x toma las valores de -2 y 3, que son las raíces o soluciones. Por lo tanto, el polinomio se puede expresar como $P(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x-(-2)) = (x-3)(x+2)$. Note que el discriminante es positivo; por lo tanto, el polinomio tiene dos soluciones reales.

Ejercicio

Al factorizar aplicando la fórmula general, al polinomio $x^2 + 2x - 8$ se obtiene

a. $(x-2)(x+4)$

b. $(x+2)(x+4)$

c. $(x-2)(x-4)$

1.7. Binomio al cubo o cubo perfecto

El cubo perfecto surge de expandir las fórmulas $(x+y)^3$ y $(x-y)^3$, que para el caso positivo se puede expresar en palabras como: el primer término al cubo, más tres veces el primer término al cuadrado por el segundo, más tres veces el primero por el segundo al cuadrado, más el segundo al cubo. Note que las fórmulas siguientes son equivalencias.

$$
\begin{aligned}
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= (x+y)^3 \\
x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 &= (x-y)^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

Al desarrollar $(3x^2 - 2y^3)^3$, se puede observar que el primer término es $3x^2$ y el segundo $2y^3$. Al aplicar la fórmula se obtiene:

$(3x^2 - 2y^3)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(2y^3) + 3(3x^2)(2y^3)^2 - (2y^3)^3$, que al realizar las operaciones indicadas se llega a

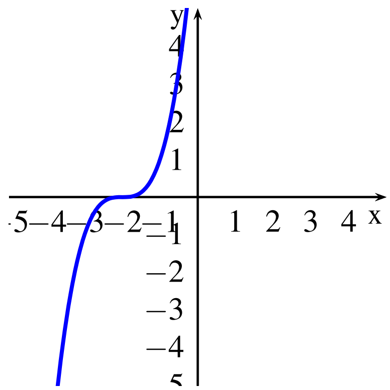
$(3x^2 - 2y^3)^3 = 27x^6 - 54x^4y^3 + 36x^2y^6 - 8y^9$. Observe que en el primer momento se identificaron los términos involucrados en la operación. En un segundo momento, se escribió la fórmula correspondiente teniendo en cuenta los términos dados. Por último, se realizaron las operaciones indicadas. Este tipo de procedimiento ayuda a agilizar los procesos y a evitar errores.

Ejemplo 2

Factorizar el polinomio $P(x) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$.

Una técnica que puede ayudar al factorizar polinomios, es organizarlos en forma decreciente de acuerdo con las potencias de la variable. En el polinomio dado, la variable es x y al ordenarlo se obtiene $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Se observa que la raíz cúbica del término de mayor potencia es x y que el término independiente tiene raíz cúbica 2. El término al cuadrado se puede escribir como $6x^2 = 3(x)(2)$ y el término $12x = 3(x)(2^2)$. Por lo tanto, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$. Note que el polinomio tiene un factor triple, que es x+2. La solución es $x = -2$, es decir que el polinomio corta el eje x en $x = -2$. La gráfica se puede observar a continuación.



Ejercicio

Al desarrollar $(3x-y)^3$ se obtiene

a. $27x^3 + 27x^2y - 9xy^2 + y^3$

b. $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$

c. $27x^3 - 27x^2y - 9xy^2 - y^3$

Ejercicio

Al factorizar $8x^6 - 12x^4y^2 + 6x^2y^4 - y^6$ se obtiene

a. $(2x^2 - y^2)^3$

b. $(2x^2 + y^2)^3$

c. $(2x^2 - y)^3$

1.8. Suma y diferencia de cubos

Las fórmulas $x^3 + y^3$ y $x^3 - y^3$, se llaman respectivamente, suma y diferencia de cubos. La suma de cubos $x^3 + y^3$, se puede expresar en palabras como el producto de la raíz cubica del primer término, más la raíz cudadradada del sugundo término, por la raíz cúbica del primer término al cuadrado, menos la raíz cúbica del primero por la raíz cúbica del segundo, más la raíz cúbica del segundo término al cuadrado. Simbólicamente, las fórmulas se expresan como sigue:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo

Factorizar $27x^3 + 8y^6$.

El primer término es $27x^3$ y su raíz cúbica es $(27x^3)^{1/3} = 3x$.

El segundo término es $8y^6$ y su raíz cúbica es $(8y^6)^{1/3} = 2y^2$. De donde,

$$27x^3 + 8y^6 = (3x+2y^2)[(3x)^2 - (3x)(2y^2) + (2y^2)^2] = (3x+2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4)$$

Ejercicio

Al factorizar $8x^3 - y^3$ se obtiene

a. $(2x+y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

b. $(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

c. $(2x-y)(4x^2 - 2xy - y^2)$

Ejercicio

Al factorizar $8x^3 + y^3$ se obtiene

a. $(2x+y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

b. $(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

c. $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

1.9. Suma y diferencia de potencias iguales

Cuando se tiene la suma o diferencia de pontencias iguales, enteras mayores o iguales a dos o tres, se pueden factorizar como generalizaciones de los casos cuando las pontencias son dos o tres.

Hay que tener en cuenta que la resta se puede efectuar en los casos cuando las potencias son iguales, bien sean pares o impares. Así, si $n \in \mathbb{Z}^+$, si n es par, se tiene que:

$$x^n - y^n = (x^{n/2} - y^{n/2})(x^{n/2} + y^{n/2})$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Si n es impar, se tiene:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Para los casos cuando la potencia es 2, 3 o 4 se tiene:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2) = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

Para el caso cuando n es impar, sólo se puede efectuar la suma de esta forma:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Para el caso cuando n es tres o cinco, la fórmula queda desarrollada de la siguiente manera:

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

Ejercicio

Al factorizar $x^5 + 32$ se obtiene

a. $(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

b. $(x+2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

c. $(x-2)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x + 16)$

Ejercicio

Al factorizar $x^4 - 81$ se obtiene

a. $(x-3)(x-3)(x^2+9)$

b. $(x-3)(x+3)(x^2+9)$

c. $(x-3)(x+3)(x^2-9)$

1.10. Factorización por división sintética

Partamos de que un polinomio de grado 4, puede factorizarse de la siguiente forma:

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

El término independiente del polinomio es el producto $a_1a_2a_3a_4$, luego a_1, a_2, a_3 y a_4 son divisores del término independiente del polinomio $P(x)$.

En el método de factorización por división sintética, se verifica para cada divisor de a del término independiente, si el residuo de dividir el polinomio entre $x-a$ es igual a cero, en tal caso $x-a$ es factor del polinomio.

Ejemplo

Factorizar $x^3 + 4x^2 + x - 6$

Los factores de -6 son el conjunto $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Por medio de la división sintética se divide el polinomio entre los binomios $(x+6)$, $(x+3)$, $(x+2)$, $(x+1)$, $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-6)$. Para probar si $x+6$ es factor del polinomio, se realiza la división.

Como el residuo no es cero, $x+6$ no es factor de x^3+4x^2+x-6. Para probar si $x+3$ es factor de dicho polinomio se realiza la división.

Como el residuo es cero, $x+3$ es factor del polinomio x^3+4x^2+x-6 y el cociente es x^2+x-2.

Por tanto $x^3+4x^2+x-6 = (x+3)(x^2+x-2)$

Aunque se podría seguir probando con la división sintética si los demás binomios son factores de x^3+4x^2+x-6, el trinomio x^2+x-2 se factoriza así:

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$$

Por tanto $x^3+4x^2+x-6 = (x+3)(x+2)(x-1)$. Desde luego, cuando se prueba mediante la división sintética si $x+2$ y $x-1$ son factores de x^3+4x^2+x-6 se obtiene como residuo cero, en cada uno de los casos.

Ejercicio

Al factorizar x^3+3x^2-x-3, se obtiene

a. $(x-1)(x+1)(x+3)$

b. $(x-1)(x+1)(x-3)$

c. $(x+1)(x+1)(x+3)$

2. Ejercicios sobre factorización

1. La factorización de $6x^5y^3 - 9x^3y^4 + 15x^2y$ es

   a. $3y\,(2x^5y^2 - 3x^3y^3 + 5x^2)$
   b. $3xy\,(2x^4y^2 - 3x^2y^3 + 5x)$
   c. $x^2y\,(6x^3y^2 - 9xy^3 + 15)$
   d. $3x^2y\,(2x^3y^2 - 3xy^3 + 5)$

2. La factorización de $2x^2 - 6xy - 6y + 2x$ es

   a. $(2x-6y)(x+1)$
   b. $(x-3y)(2x+2)$
   c. $2(x-3y)(x+1)$
   d. $2(x+3y)(x-1)$

3. La factorización de $x^2 - x + \frac{1}{4}$ es

   a. $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$
   b. $(x-\frac{1}{2})^2$
   c. $(x-\frac{1}{4})^2$
   d. $(x+\frac{1}{2})^2$

4. La factorización de $x^2 - 4xy + 4y^2$ es

   a. $(x-2y)^2$
   b. $(x-2y)(x+2y)$
   c. $(x-y)(x+4y)$
   d. $(x+y)(x-4y)$

5. La factorización de $4x^2 - y^2$ es

   a. $(2x-y)^2$
   b. $(x-2y)(x+2y)$
   c. $(2x-y)(2x+y)$
   d. $(4x+y)(4x-y)$

6. La factorización de $x^6 - y^{10}$ es

   a. $(x^3-y^5)(x^3+y^5)$
   b. $(x^3-y^5)^2$

c. $(x^4 - y^8)(x^4 + y^8)$
d. $(x^3 - y^5)(x^3 - y^5)$

7. La factorización de $x^4 - 25$ es

   a. $(x^2 - 5)^2$
   b. $(x^2 - 25)(x^2 + 25)$
   c. $(x^2 + 5)(x^2 + 5)$
   d. $(x^2 - 5)(x^2 + 5)$

8. La factorización de $x^6 - 9x^2$ es

   a. $x^2(x^4 - 9)$
   b. $x^2(x^2 - 3)(x^2 - 3)$
   c. $x^2(x^2 - 3)(x^2 + 3)$
   d. $x^2(x^2 + 3)(x^2 + 3)$

9. La factorización de $x^6 - y^8$ es

   a. $(x^3 - y^4)^2$
   b. $(x^3 + y^4)^2$
   c. $(x^3 - y^4)(x^3 + y^4)$
   d. $(x^4 - y^6)(x^4 + y^6)$

10. La factorización de $x^4 - 81$ es

    a. $(x^2 - 9)(x^2 + 9)$
    b. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
    c. $(x - 3)(x - 3)(x^2 + 9)$
    d. $(x + 3)(x + 3)(x^2 - 9)$

11. La factorización de $(2x - 1)^2 - 9$ es

    a. $4(x + 2)(x - 1)$
    b. $2(2x - 4)(x + 1)$
    c. $(2x - 4)(2x + 2)$
    d. $4(x - 2)(x + 1)$

12. La factorización de $x^3 - 8$ es

    a. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

b. $(x+2)(x^2+2x+4)$
c. $(x+2)(x^2-2x+4)$
d. $(x-2)(x^2-2x+4)$

13. La factorización de x^3+8 es

a. $(x+2)(x^2+2x+4)$
b. $(x+2)(x^2-2x+4)$
c. $(x-2)(x^2-2x+4)$
d. $(x-2)(x^2+2x+4)$

14. La factorización de x^3-27 es

a. $(x+3)(x^2+3x+9)$
b. $(x+3)(x^2-3x+9)$
c. $(x-3)(x^2-3x+9)$
d. $(x-3)(x^2+3x+9)$

15. La factorización de $x^2-2x-15$ es

a. $(x-15)(x+1)$
b. $(x-3)(x+5)$
c. $(x-5)(x+3)$
d. $(x+5)(x-3)$

16. La factorización de x^2-x-12 es

a. $(x-12)(x+1)$
b. $(x-4)(x+3)$
c. $(x+4)(x-3)$
d. $(x+6)(x-2)$

17. La factorización de $x^2-7x+10$ es

a. $(x-5)(x-2)$
b. $(x-5)(x+2)$
c. $(x+10)(x-1)$
d. $(x-10)(x-1)$

18. La factorización de $x^2-2xy-15y^2$ es

a. $(x-5y^2)(x+3)$
b. $(x-5y)(x-2y)$
c. $(x-5y)(x+3y)$
d. $(x-3y)(x+5y)$

19. La factorización de $x^2+xy-12y^2$ es

a. $(x+4y)(x+3y)$
b. $(x-4y)(x-3y)$
c. $(x+3y)(x-4y)$
d. $(x+4y)(x-3y)$

20. La factorización de $3x^2+5x-12$ es

a. $(3x-4)(x+3)$
b. $(3x+4)(x+3)$
c. $(3x-4)(x-3)$
d. $(x+4)(x+12)$

21. La factorización de $10x^2-13x-3$ es

a. $(2x+10)(5x-1)$
b. $(5x-1)(2x-3)$
c. $(5x-1)(2x+3)$
d. $(5x+1)(2x-3)$

22. La factorización de $5x^2+9x-2$ es

a. $(5x+1)(x+2)$
b. $(5x-1)(x-2)$
c. $(5x-1)(x+2)$
d. $(5x+1)(x-2)$

23. La factorización de $4x^2+11x-3$ es

a. $(2x+1)(2x+3)$
b. $(4x-1)(x-3)$
c. $(4x-1)(x+3)$
d. $(4x+1)(x-3)$

24. La factorización de x^3+3x-4 es

a. $(x+1)(x^2+x+4)$
b. $(x+1)(x^2-x+4)$
c. $(x-1)(x^2+x+4)$
d. $(x-4)(x^2-x+1)$

25. La factorización de x^3-x+6 es

a. $(x+2)(x^2+2x+3)$
b. $(x-2)(x^2-2x+3)$
c. $(x+2)(x^2-2x+3)$
d. $(x-3)(x^2-2x+2)$

26. La factorización de x^3+2x^2-2x+3 es

a. $(x+3)(x^2-x+1)$
b. $(x-3)(x^2-x+1)$
c. $(x+1)(x^2-x+3)$
d. $(x-1)(x^2-x-3)$

27. El polinomio x^3+ax^2+bx-5 (con a, b enteros) tiene como posibles divisores a

a. $(x-1)$, $(x-2)$
b. $(x+1)$, $(x-3)$
c. $(x-1)$, $(x+5)$
d. $(x+1)$, $(x-4)$

28. El polinomio x^3+ax^2+bx+7 (con a, b enteros) tiene como posibles divisores a

a. $(x+1)$, $(x-2)$
b. $(x+1)$, $(x-3)$
c. $(x-1)$, $(x-4)$
d. $(x-1)$, $(x-7)$

3. Bibliografía

1. Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). Precálculo con avances de cálculo. McGraw-Hill Interamericana.

2. James, S., Redlin, L., Watson, S., Vidaurri, H., Alfaro, A., Anzures, M. B. J., & Fragoso Sánchez, F. (2007). Precálculo: matemáticas para el cálculo. México: Thomson Learning, 847.

3. Leithold, L., & González, F. M. (1998). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Oxford University Press.

4. Sullivan, M. (1998). Precálculo. Pearson Educación.