



Vigilada Mineducación

**ARBITRAJE BASADO EN INEFICIENCIAS DE LA SONRISA DE VOLATILIDAD EN
OPCIONES EUROPEAS SOBRE EL S&P 500**

Arbitrage Based on Volatility Smile Inefficiencies in European Options on the S&P 500

JUAN GUILLERMO TORRES MORENO
SIMÓN LONDOÑO AGUDELO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de magíster en
Administración Financiera

Asesor
Michael Stepanian Silva

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE FINANZAS, ECONOMÍA Y GOBIERNO
MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA - MAF
MEDELLÍN
2025

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	3
ABSTRACT	4
INTRODUCCIÓN	5
MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	7
METODOLOGÍA	12
RESULTADOS.....	19
CONCLUSIONES	28
REFERENCIAS.....	34
ANEXOS	36

RESUMEN

Este estudio analiza el uso de la sonrisa de volatilidad implícita en opciones europeas sobre el S&P 500 para diseñar estrategias cuantitativas de arbitraje en mercados de derivados. Se examina cómo la forma de la sonrisa varía en distintos regímenes de volatilidad y su impacto en la rentabilidad ajustada por riesgo. En la investigación se emplean datos históricos de opciones sobre el SPX, estimaciones de volatilidad implícita y modelos cuantitativos, con el fin de encontrar estrategias que aprovechen desajustes en los precios de opciones para generar rendimientos consistentes en escenarios de volatilidad alta y baja. Los resultados contribuyen al desarrollo de metodologías de *trading* más eficientes en mercados de derivados.

Palabras clave:

- G13 - Opciones y derivados.
- C58 - Modelos cuantitativos y econometría financiera.
- G11 - Decisiones de inversión y estrategias de *trading*.
- G17 - Predicción financiera y simulaciones.
- G12 - Valoración de activos y estrategias de arbitraje.

ABSTRACT

This study analyzes the use of the implied volatility smile in European options on the S&P 500 to design quantitative arbitrage strategies in derivative markets. It examines how the shape of the smile varies under different volatility regimes and its impact on risk-adjusted profitability. The research will employ historical SPX options data, implied volatility estimates, and quantitative models. The goal is to identify strategies that take advantage of pricing mismatches in options to generate consistent returns in both high and low volatility scenarios. The results will contribute to the development of more efficient trading methodologies in derivative markets

Keywords:

- G13 - Contingent Pricing; Futures Pricing.
- C58 - Financial Econometrics.
- G11 - Portfolio Choice; Investment Decisions.
- G17 - Financial Forecasting and Simulation.
- G12 - Asset Pricing; Trading volume; Bond Interest Rates.

INTRODUCCIÓN

El mercado de opciones en Estados Unidos es uno de los más líquidos y profundos a nivel mundial, con una gran cantidad de contratos abiertos y un volumen de negociación considerable. Dado su dinamismo, es fundamental comprender los factores que influyen en la formación de precios de las opciones. Entre ellos, la volatilidad implícita es uno de los elementos más relevantes en la valoración de dichos derivados (Hull, 2022). Tradicionalmente, el modelo de Black-Scholes (Black y Scholes, 1973) asume que la volatilidad implícita es constante, lo cual no se ajusta a la realidad observada en los mercados. En la práctica, esta volatilidad varía con el precio de ejercicio y la madurez de las opciones, que da lugar a la sonrisa de volatilidad, un fenómeno ampliamente estudiado en las finanzas cuantitativas (Rubinstein, 1994).

La sonrisa de volatilidad surge como consecuencia de la no estacionariedad de la volatilidad implícita y la presencia de eventos de riesgo en los mercados. Al respecto, Hull (2022) menciona que este fenómeno se observa en la mayoría de los mercados de opciones y es especialmente notable en opciones sobre índices bursátiles como el S&P 500. Estudios empíricos han demostrado que la forma de la sonrisa puede cambiar en función del régimen de volatilidad del mercado, lo cual afecta la valoración de opciones y las estrategias de cobertura (Derman y Kani, 1994).

Este trabajo de grado tiene como propósito analizar la sonrisa de volatilidad en opciones europeas sobre el S&P 500 y evaluar su aplicabilidad en el diseño de estrategias cuantitativas de arbitraje. Para ello, se emplearon datos históricos extraídos de Yahoo Finance, que permiten construir modelos de valoración de opciones basados en metodologías cuantitativas como el célebre modelo de Black-Scholes. Posteriormente, se evaluó el desempeño de estas estrategias mediante *backtesting* bajo distintos regímenes de volatilidad, con el fin de medir su efectividad en términos de rentabilidad ajustada por riesgo.

Desde una perspectiva práctica, este estudio aporta tanto a la literatura académica como a la industria financiera, al proporcionar herramientas para la toma de decisiones en mercados de opciones. La optimización de estrategias basadas en la sonrisa de volatilidad puede generar ventajas competitivas en mesas de dinero y fondos de inversión que operan con opciones sobre índices bursátiles. Por otro lado, la comprensión de la sonrisa de la volatilidad en la valoración de opciones es esencial para mejorar la toma de decisiones estrategias en el mercado de opciones, ya que permite tener valoraciones más precisas de estas. A su vez, refleja las expectativas del mercado en eventos de mucha incertidumbre, algo que los modelos tradicionales como el de Black-Scholes no logra capturar. Además, su uso resulta crucial en la gestión de riesgos, ya que ofrece a los gestores la capacidad de ajustar sus estrategias de cobertura en función de la variabilidad de la volatilidad implícita. Las estrategias de arbitraje también se benefician de la sonrisa de la volatilidad en tanto permite identificar oportunidades de desajustes de precios que los gestores pueden explotar para maximizar el rendimiento ajustado por riesgo (Fedotov y Panayide, 2004).

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Las opciones son contratos de derivados financieros en los que la parte que adquiere el contrato (comprador de la opción) posee el derecho, pero no la obligación, de comprar (en el caso de las *calls*) o vender (en el caso de las *puts*) el activo subyacente a un precio acordado, conocido como el *strike*. Por otro lado, la parte que vende la opción asume la obligación de comprar o vender el activo subyacente si el comprador decide ejercer la opción. El precio en el que se activa la opción se denomina *strike*, y la fecha en la que se vence el contrato es conocida como fecha de vencimiento, expiración o maduración. Entre los tipos más comunes de contratos de opciones se encuentran las opciones americanas y europeas. Las primeras permiten el ejercicio anticipado en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, mientras que las segundas solo pueden ser llevadas a cabo en la fecha de vencimiento (Hull, 2022).

El valor de una opción también depende de su *moneyness*, es decir, de la relación entre el precio *spot* del subyacente y el *strike*. Si el *spot* es mayor que el *strike* para las *calls*, o menor para las *puts*, la opción está *in the money* (ITM). Si el precio del activo es igual al *strike*, la opción está *at the money* (ATM); y si el precio es inferior al *strike* en una *call*, o mayor en una *put*, la opción está *out of the money* (OTM). Estos estados de *moneyness* influyen en la probabilidad de que la opción sea ejercida y en su valor temporal (Hull, 2022).

En este punto, conviene acotar que en 1973 los autores Fischer Black y Myron Scholes publicaron su célebre investigación, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, en la revista *The Journal of Political Economy*. Ese mismo año, Robert C. Merton (1973) formalizó y extendió los resultados del modelo, incorporando herramientas del cálculo estocástico. Estos trabajos sentaron las bases del modelo de valoración de opciones que revolucionó las finanzas modernas y que, hasta hoy, continúa siendo el más popular entre los diferentes agentes del mercado.

El modelo se fundamenta en una serie de supuestos clave. Entre ellos, el precio del subyacente sigue un movimiento browniano geométrico, la volatilidad es constante a lo largo del tiempo, y los mercados son eficientes y libres de arbitraje. Dados estos supuestos, se derivan las siguientes fórmulas para valorar opciones europeas:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

donde N es la distribución normal acumulada y

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Una alternativa numérica al modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones es el de árboles binomiales, desarrollado por Cox et al. (1979). Este enfoque discreto permite simular la evolución del precio del activo subyacente mediante un proceso de caminata aleatoria, representado en una estructura de ramas. En cada nodo, el precio puede subir o bajar en un intervalo de tiempo Δt .

El modelo binomial calcula el valor de la opción mediante un procedimiento de valoración hacia atrás, a partir del vencimiento de la opción hasta llegar al nodo inicial. En términos generales, el valor de la opción en el nodo (i, j) se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$C_{i,j} = e^{-r\Delta t} (p \cdot C_{i+1,j+1} + (1-p) \cdot C_{i+1,j})$$

Una de las principales ventajas de este modelo es su flexibilidad, ya que permite incorporar características como el pago de dividendos y el ejercicio anticipado de la opción, lo cual lo hace especialmente útil para la valoración de opciones americanas. Además, a medida que el número

de pasos en el árbol binomial aumenta, el valor calculado converge al valor teórico obtenido mediante el modelo Black-Scholes.

El modelo de árboles binomiales representa una alternativa válida al modelo Black-Scholes para la valoración de opciones, especialmente por su flexibilidad y capacidad para incorporar características como el ejercicio anticipado. Sin embargo, es crucial reconocer que su simplicidad en la modelización de la volatilidad y la estructura del mercado puede no ser suficiente en todos los contextos. En particular, para mercados donde la volatilidad no es constante y sigue un proceso estocástico, es fundamental explorar modelos que puedan adaptarse mejor a estas condiciones dinámicas, como el modelo de volatilidad estocástica. Dichos modelos permiten una representación más precisa de las fluctuaciones de la volatilidad, lo cual mejora la precisión en la valoración de opciones, especialmente en escenarios de alta incertidumbre o mercados con volatilidad cambiante.

En consecuencia, se buscó retomar el paradigma del Black-Scholes para realizar algunas modificaciones. Sin embargo, dicho modelo presenta limitaciones, especialmente en lo que respecta a la constancia de la volatilidad. Uno de los principales supuestos que rara vez se mantiene en los mercados de derivados es la constancia de la volatilidad implícita para los diferentes *strikes* de las opciones dentro de un mismo contrato. Este supuesto ha sido refutado en diversas investigaciones. Kou (2000), por ejemplo, señala que la estructura de la volatilidad implícita del modelo Black-Scholes debe comportarse como una curva convexa, lo cual implica que las opciones *put* fuera del dinero (OTM) no se comportan de la misma manera que las opciones *call*. Por otro lado, Hull y White (1987), a diferencia de Black y Scholes (1973), proponen que la volatilidad sigue un proceso estocástico en lugar de ser constante. Los autores descubren que el modelo de Black Scholes subestima el precio de las opciones OTM y sobreestima el de las ATM.

Posteriormente, el modelo de Heston (1993) sugiere que la volatilidad sigue un proceso estocástico de reversión a la media. A diferencia del modelo de Hull y White, el enfoque de Heston proporciona una solución cerrada para los precios de las opciones europeas, lo cual, lo convierte en un modelo atractivo para la valoración de opciones de renta variable, renta fija y divisas. Por añadidura, en la investigación se menciona que el modelo permite incorporar correlaciones negativas entre la variación de los precios y la volatilidad. De esto, se deriva el efecto de apalancamiento, el cual sugiere que, cuando el precio de los activos baja, la volatilidad tiende a aumentar.

Fukuta y Ma (2013) también abordan el fenómeno conocido como sonrisa de la volatilidad o *volatility smile* para el mercado japonés, y usan como insumo las puntas de compra y venta para realizar un modelo Garch que pueda estudiar los efectos de las cotizaciones de los precios sobre la estructura de volatilidad implícita del mercado.

Similarmente, Peña et al. (1999), utilizando modelos de regresión simples y pruebas de causalidad de Granger, analizan el comportamiento de los patrones en la volatilidad implícita de los diferentes *strikes* para las opciones sobre el índice IBEX-35. Los autores encuentran que entre los factores determinantes del comportamiento de la sonrisa en la volatilidad implícita se incluyen los costos de transacción, el *spread* entre el BID y el ASK, el tiempo de expiración, el *momentum* del mercado y la incertidumbre.

Este trabajo propone la adaptación de este modelo incorporando volatilidad estocástica, con el objetivo de valorar opciones europeas de manera más certera. De la misma forma, Silva (2017) establece un precedente al adaptar el modelo de árboles de decisión trinomiales, incorporando volatilidades estocásticas para valorar títulos cero cupón. Este enfoque resalta la importancia de la flexibilidad en los modelos cuantitativos para ajustarse a las dinámicas de los mercados de capitales.

En esa misma línea, Orrell y Richards (2023) proponen el uso de un modelo de oscilador cuántico para derivar la sonrisa de volatilidad con el objetivo de adaptar el modelo de Black-Scholes. Esta adaptación mejora el proceso de valoración de opciones, ya que permite tener en cuenta las dinámicas cambiantes de la volatilidad en el mercado, lo cual incrementa la precisión de la estimación de precios en comparación con modelos que asumen una volatilidad constante.

METODOLOGÍA

El S&P 500 es un índice bursátil que agrupa a las 500 principales empresas de Estados Unidos, seleccionadas por su capitalización de mercado y su liquidez. Este índice se considera un referente del desempeño general del mercado accionario estadounidense y es ampliamente utilizado por analistas e inversionistas para evaluar la salud económica del país, así como la evolución de sectores clave dentro de la economía.

Con el objetivo de caracterizar estadísticamente el comportamiento del índice antes de proceder con la valoración de las opciones, se realizaron diversas validaciones econométricas para determinar el comportamiento del índice subyacente S&P 500. Estas pruebas fueron críticas para entender las propiedades de los log-retornos del índice e identificar las dinámicas del mercado que deben tenerse en cuenta para modelar la metodología de valoración. Adicionalmente, se realizaron una serie de pruebas econométricas fundamentales para el análisis de series de tiempo. Entre ellas se destacan las siguientes:

- La prueba de Dickey-Fuller Aumentada (ADF): Se utilizó para comprobar la estacionariedad de la serie de precios. La estacionariedad es una propiedad crucial en la modelización econométrica, ya que sugiere que las propiedades estadísticas de la serie (como la media y la varianza) son constantes a lo largo del tiempo, lo cual facilita la predicción futura.
- La prueba ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity): Sirve para detectar la presencia de heterocedasticidad condicional en los log-retornos. La heterocedasticidad se refiere a la variabilidad cambiante de la volatilidad a lo largo del tiempo, lo cual es común en los mercados financieros, donde los períodos de alta volatilidad pueden alternarse con

períodos de baja volatilidad. Identificar esto es clave para modelar correctamente la volatilidad en la valoración de opciones.

- La prueba de Ljung-Box: Se usó para estudiar la autocorrelación en la serie de retornos y errores. La autocorrelación indica si los valores pasados de la serie tienen influencia en los valores futuros. En los mercados financieros, esto puede ser relevante para prever patrones repetitivos en los precios y, por lo tanto, para mejorar la precisión del modelo de valoración.
- Las pruebas de normalidad, como Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling: Permiten evaluar la distribución de los retornos. En los mercados financieros, se asume frecuentemente que los retornos siguen una distribución normal, aunque la realidad puede ser diferente. Evaluar la normalidad ayuda a determinar si se pueden aplicar modelos de valoración tradicionales, o si se debe utilizar una distribución diferente que capture mejor la naturaleza de los retornos.

Los resultados de estas pruebas proporcionaron información clave sobre la naturaleza estocástica y dinámica del índice, lo cual justificó la necesidad de utilizar un modelo de volatilidad estocástica para la valoración de las opciones. La volatilidad estocástica, que permite modelar fluctuaciones impredecibles en la volatilidad, es especialmente importante para valorar opciones de manera precisa, ya que la volatilidad es uno de los factores más influyentes en el precio de las opciones.

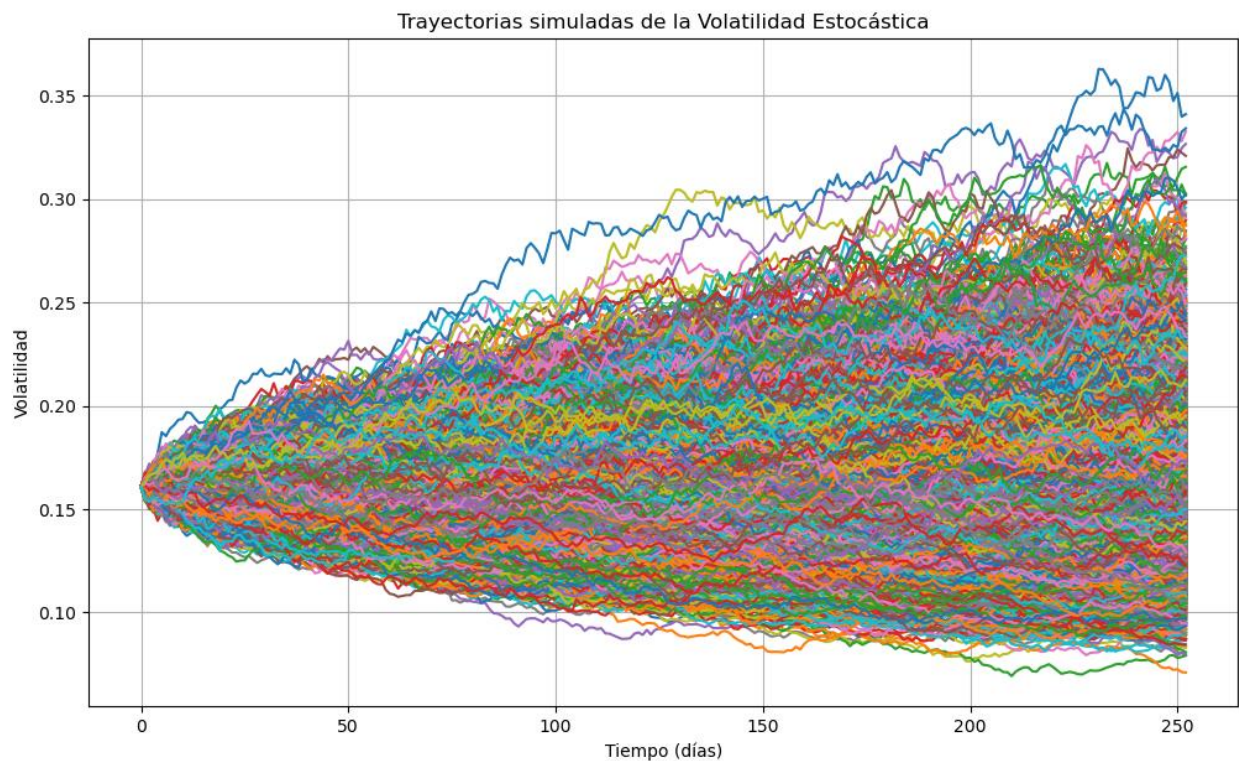
Para el proceso de valoración de opciones se utilizó la *API* de Yahoo Finance de Python, con el fin de descargar los datos históricos del índice S&P 500 correspondientes a los últimos 60 días, con una frecuencia diaria. El precio *spot* más reciente se definió como S_0 en el modelo propuesto.

A partir de la serie de retornos diarios, se calculó la desviación estándar histórica mediante una ventana de tiempo móvil de 21 días. Cabe señalar que este dato fue anualizado multiplicando la desviación estándar diaria por $\sqrt{252}$ para seguir el estándar de los mercados financieros.

Adicionalmente, se obtuvo la tasa libre de riesgo de los bonos del Tesoro estadounidense a 10 años a partir del ticket \wedge TNX. Esta tasa nominal anual fue transformada a tasa continua mediante la fórmula $r = \ln(1 + r_{nominal})$, con el fin de integrarla adecuadamente en los cálculos del modelo de valoración.

En consecuencia, se empleó la simulación de Montecarlo para modelar el comportamiento estocástico tanto del precio del activo como de su volatilidad. Con el fin de garantizar resultados robustos y representar adecuadamente la variabilidad de las variables, se estableció un total de 10.000 trayectorias (k) para la simulación.

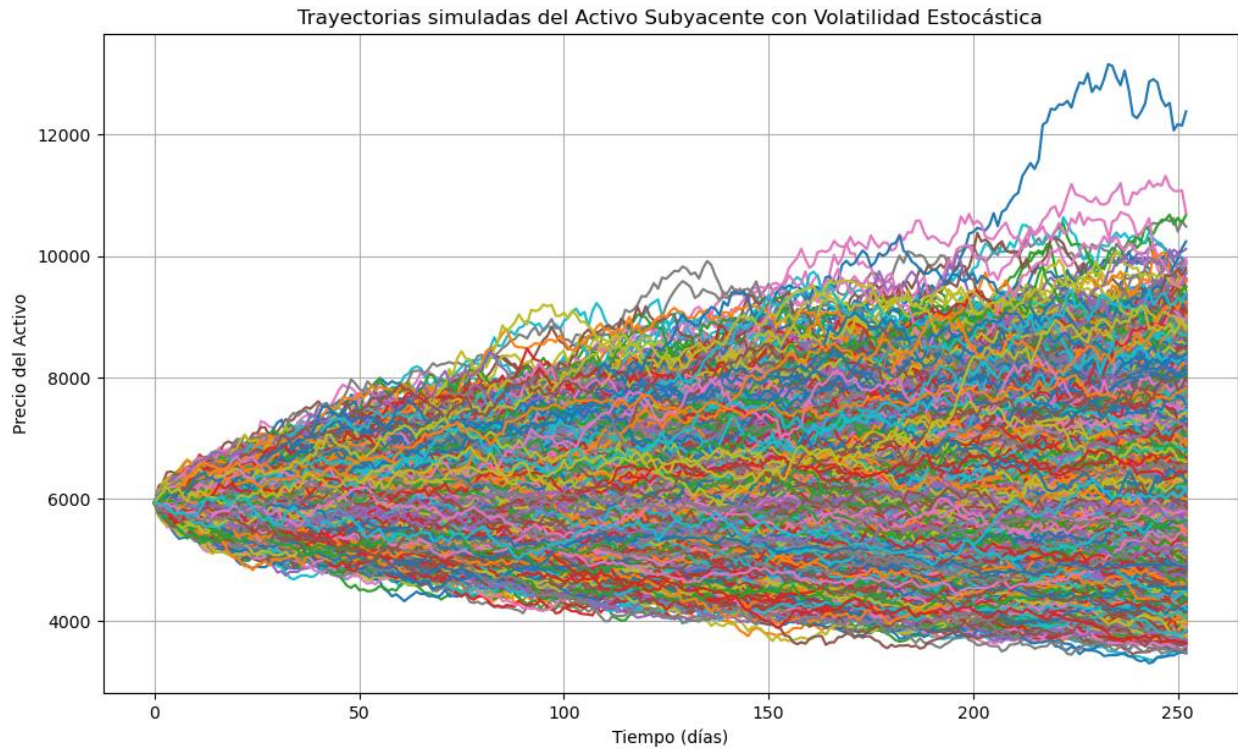
Figura 1. Simulación de la volatilidad del activo como un proceso estocástico



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa la trayectoria de la volatilidad siguiendo un proceso estocástico.

Figura 2. Simulación del precio del activo subyacente como un proceso estocástico



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa las trayectorias simuladas del precio del activo subyacente utilizando el método de Montecarlo con volatilidad estocástica.

En la primera fase del ejercicio, se fijó el tiempo de expiración (T) dentro de 1 año y el *strike* se definió como $K = S_0 * 1.05$ con la intención de trabajar con una opción cuyo estado de *moneyness* es OTM. Bajo estas condiciones, se valoraron las opciones utilizando tanto el modelo de Black-Scholes estándar como su adaptación con volatilidad estocástica, lo cual permitió evaluar las diferencias en los precios de las opciones y obtener una comparación robusta entre ambos enfoques.

Posteriormente, se realizó una modificación al vencimiento inicial de la opción para simular diferentes rangos de expiración, considerando vencimientos de 1 mes, 3 meses, 6 meses y 1 año. El propósito de este ajuste fue evaluar cómo varían las primas de las opciones bajo ambas metodologías de valoración en función del tiempo de expiración. Esta comparación buscó identificar diferencias significativas en los precios de las opciones, cuyas discrepancias entre las primas pueden generar oportunidades de arbitraje, lo cual permite aprovechar la ineficiencia de los precios para obtener beneficios sin riesgo.

Después, se implementó un enfoque basado en ventanas de tiempo para detectar oportunidades de arbitraje. Para esto, se dividió el conjunto de datos en intervalos temporales de 20 días. De esta forma, se analizaron las diferencias en las primas de las opciones calculadas por los dos enfoques de valoración.

Para cada ventana de tiempo, se simularon múltiples trayectorias del precio del activo subyacente y su respectiva volatilidad. También, se calcularon las primas de las opciones *call* para cada ventana mediante ambas metodologías. Dadas estas condiciones, se compararon los resultados en las primas y, si la diferencia superaba un umbral de arbitraje (1 unidad de precio), se consideró que existe una oportunidad de arbitraje. En el caso en que la opción estuviera sobrevalorada de acuerdo con la comparación de metodologías, se recomendó vender la opción *short call*. Si está subvalorada, se sugirió comprar *long call*. Luego, se procedió a acumular las diferentes oportunidades de arbitraje a lo largo de las ventanas de tiempo con el fin de obtener la utilidad total, lo cual permitió medir las pérdidas y ganancias de la estrategia de arbitraje.

A continuación, se explora el fenómeno de la sonrisa de volatilidad y su influencia en la metodología de valoración de opciones. Como se explicó, la sonrisa de volatilidad aclara cómo la volatilidad implícita varía según el *strike* de la opción, lo cual hace que este fenómeno sea un rasgo fundamental para comprender las ineficiencias del mercado. Paralelamente, para moldear esta

conducta, se usó una función que ajusta la volatilidad implícita de acuerdo con el nivel de *moneyness* de la opción, que se estima como la relación entre el *strike* y el *spot* del subyacente.

$$\text{Volatilidad} = \text{Base Volatilidad} + 0.15 \left(\frac{K - S_0}{S_0} \right)^2$$

Donde:

- Base volatilidad: Volatilidad implícita histórica.
- $\left(\frac{K - S_0}{S_0} \right)$: Es el *moneyness* de la opción.
- 0.15: El coeficiente fue elegido como un supuesto práctico para este ejercicio, ajustándose a la curvatura típica observada en el mercado para activos subyacentes con comportamientos similares. Este coeficiente se ajusta empíricamente en función de las características del activo y el comportamiento de su volatilidad implícita a lo largo del rango de *strikes*.

Una vez definido el modelo de sonrisa de volatilidad, se realizó la simulación para diferentes *strikes* dentro de un rango de precios que abarca desde 80% hasta 120% del *spot*, con la finalidad de contemplar cómo las diferencias en la volatilidad implícita afectan las primas de las opciones considerando diversas condiciones de *moneyness*.

En esta última fase del estudio se integraron tanto la metodología de las ventanas de tiempo como el análisis de la sonrisa de volatilidad, con el fin de detectar oportunidades de arbitraje en el mercado de opciones sobre el S&P 500. En este enfoque, se ejecutó una simulación que consideró ventanas de tiempo de 20 días, lo cual permitió evaluar el comportamiento de las opciones en intervalos de tiempo de corto plazo. Además, se contemplaron varios plazos de vencimiento para

las opciones, entre ellos, los vencimientos a 1 mes, 3 meses, 6 meses y 1 año. Estos fueron escogidos con el objetivo de analizar cómo los precios de las opciones varían en función del paso del tiempo y los diferentes regímenes de volatilidad. Al integrar estas variables y dinámicas, el modelo permitió estimar las primas de las opciones bajo diferentes condiciones y calcular ineficiencias de precios que pueden servir como oportunidades de arbitraje.

Este enfoque dual, que utiliza tanto la simulación de Montecarlo con volatilidad estocástica como la sonrisa de volatilidad, proporciona un análisis más robusto para detectar las mencionadas diferencias significativas en las primas de las opciones, especialmente cuando se compara con metodologías tradicionales como Black-Scholes. Adicionalmente, con él se pueden detectar desajustes de precios que, al ser adecuadamente identificados, pueden ser explotados mediante estrategias de arbitraje. De esta forma, se optimiza la capacidad de generar utilidades en los mercados de derivados altamente dinámicos.

RESULTADOS

A nivel general, las estadísticas descriptivas del S&P 500 indican que, en promedio, el índice presenta una rentabilidad anual de 9.68%, con una desviación estándar anualizada de 17.453%. En esa misma línea, en términos de distribución, los retornos exhiben un sesgo negativo de -0.765579 (*skewness*), lo cual sugiere una mayor probabilidad de caídas pronunciadas en comparación con subidas abruptas. Este fenómeno es consistente con la asimetría típica de los mercados financieros, en los cuales las desvalorizaciones suelen generar reacciones más intensas que las valorizaciones, tanto en términos de comportamiento de precios como de percepción de riesgo por parte de los inversionistas. Asimismo, la curtosis (13.031590) observada es leptocúrtica, que implica la existencia de colas pesadas y una frecuencia elevada de eventos extremos respecto a una distribución normal (ver tabla 4). En cuanto a las pruebas de normalidad de Jarque-Bera (P-value 0.0000) y Shapiro-Wilk (P-value 0.0000), estas permitieron rechazar la hipótesis nula de normalidad, confirmando que los rendimientos del S&P 500 no siguen una distribución normal (ver tabla 6).

Tras la aplicación de diversas pruebas econométricas orientadas a caracterizar la naturaleza estadística del índice S&P 500, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Prueba ADF: El p-valor obtenido fue de 0.9477, lo cual no permite rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria e indica que la serie de precios no es estacionaria en nivel (ver tabla 4).
- Prueba ADF: El p-valor obtenido es < 0.001 , lo cual permite rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria, confirmando la estacionariedad de los logs retornos (ver tabla 4).

- Prueba ARCH: El estadístico LM y el p-valor prácticamente nulo ($< 1e-200$) indican la presencia de heterocedasticidad condicional, lo cual significa que en la serie de log-retornos se presentan clústeres de volatilidad (ver tabla 5).
- Prueba de White: Los resultados del estadístico LM p-value: 0.1967 y F p-value: 0.1968 indican que no se debe rechazar la hipótesis nula de homocedasticidad, lo cual sugiere que los errores en el modelo de regresión son constantes (ver tabla 7).

Es importante resaltar que, si bien parece que los resultados de las dos pruebas anteriores (ARCH y White) podrían ser contradictorios, ambas analizan diferentes aspectos de la heterocedasticidad, dado que la primera está relacionada con la varianza de los logs retornos y la segunda se refiere a la varianza de los errores del modelo de regresión. De esta forma, la heterocedasticidad en los logs retornos puede ser independiente de la heterocedasticidad en los errores de un modelo de regresión. Además, se aplicaron otras pruebas utilizadas y estos fueron los resultados:

- Prueba de Ljung-Box: El p-valor ($1.426054e-37$) obtenido en la prueba sobre los log-retornos indica la existencia de autocorrelación significativa, lo cual significa que los retornos no son independientes entre sí (ver tabla 8).
- Prueba de Ljung-Box sobre los errores al cuadrado: El p-valor (0.0) respalda la presencia de autocorrelación en la varianza condicional, lo cual refuerza la presencia de clústeres de volatilidad (ver tabla 8).
- Prueba de Kolmogorov-Smirnov: El estadístico de 0.1018 y el p-valor nulo indican que los log-retornos no siguen una distribución normal, lo cual es característico en series financieras (ver tabla 9).

- Prueba de Anderson-Darling: El valor del estadístico es mayor que los valores críticos para los diferentes niveles de significancia, lo cual respalda la conclusión de que los retornos no siguen una distribución normal (ver tabla 9).
- Análisis de saltos significativos: La presencia de saltos significativos en la serie (retornos superiores al umbral de 3%) sugiere que se presentan datos extremos, lo cual refuerza la necesidad de modelos alternativos a los basados en normalidad (ver tabla 9).

Estos hallazgos sugieren que el S&P 500 puede modelarse como un proceso estocástico con componentes aleatorios que afectan su evolución en el tiempo. Aunque los log-retornos presentan propiedad de estacionariedad —con media, varianza y autocorrelación constantes en el tiempo—, la presencia de heterocedasticidad condicional implica que la volatilidad no es constante, sino que es dinámica en el tiempo.

Este comportamiento contradice dos supuestos fundamentales del modelo de Black-Scholes: la constancia de la volatilidad y la distribución normal de los retornos. En consecuencia, se hace necesario recurrir a modelos de valoración de opciones que incorporen una estructura de volatilidad estocástica, capaces de capturar de manera más realista la dinámica del subyacente y los riesgos asociados.

Al profundizar en el proceso de valoración de opciones, se realizó un análisis inicial considerando una opción *call* OTM con un plazo al vencimiento de un año. En este escenario, las primas calculadas fueron de 435.26 y 427.21 para los modelos de Black-Scholes tradicional y Black-Scholes con volatilidad estocástica, respectivamente. Estos resultados evidencian un descalce entre ambas metodologías y refleja cómo la incorporación de la volatilidad estocástica puede modificar la valoración y, por ende, impactar en la detección de oportunidades de arbitraje y en la precisión del modelo frente a las condiciones reales del mercado.

Al ampliar este análisis, se evaluaron distintos vencimientos: 1 mes, 3 meses, 6 meses y 12 meses para la misma opción, utilizando ambas metodologías. Los resultados se presentan en la tabla a continuación:

Tabla 1. Primas Black-Scholes y Black-Scholes con volatilidad estocástica con diferentes vencimientos

Vencimientos	Black-Scholes	Black-Scholes con volatilidad estocástica	Diferencias en primas
1 mes	27.06	28.09	1.03
3 meses	106.31	105.49	-0.82
6 meses	208.04	213.81	5.77
12 meses	378.80	388.42	9.62

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los diferenciales en primas derivados de las dos metodologías de valoración en donde se toma en cuenta una opción call europea con mismo precio strike, pero diferentes plazos de vencimiento.

Estos resultados sugieren que el modelo tradicional, con volatilidad constante, tiende a subestimar el valor de las opciones, especialmente las de corto plazo, debido a que no considera la dinámica y fluctuación real de la volatilidad en el mercado. La volatilidad estocástica, en cambio, captura de forma más adecuada la realidad del mercado con fluctuaciones impredecibles en la volatilidad, lo cual puede generar primas más altas y realistas.

Dicha diferencia es fundamental para inversionistas que operen con derivados en plazos cortos, debido a que un modelo simple de Black-Scholes puede inducir a decisiones subóptimas o incluso

subestimar riesgos. De esta forma, la incorporación de la volatilidad estocástica podría mejorar la precisión en la valoración y reflejar oportunidades de arbitraje basadas en descalces de precios.

Tabla 2. Ventanas de arbitraje

Ventanas de tiempo con oportunidades de arbitraje	
Ventana 0-20	No hay diferencia
Ventana 20-40	43.1
Ventana 40-60	78.78
Ventana 60-80	115.76
Ventana 80-100	148.2
Ventana 100-120	175.62
Ventana 120-140	210.12
Ventana 140-160	235.89
Ventana 160-180	258.8
Ventana 180-200	280.16
Ventana 200-220	298.55
Ventana 220-240	327.08
Utilidad total estimada por oportunidades de arbitraje: 2172.08	

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa la utilidad estimada acumulada para las diferentes ventanas de tiempo en donde se presentan oportunidades de arbitraje.

Ahora bien, durante la iteración temporal del modelo en la fase de detección de oportunidades de arbitraje se encontró que, para la primera ventana estudiada (0-20 días), no hubo una oportunidad significativa de arbitraje. No obstante, a partir de la segunda ventana comienzan a presentarse diferencias significativas en las primas de la opción, las cuales se amplían a medida que progresa el modelo en el tiempo. Esto implica que la opción simulada con volatilidad estocástica se encuentra regularmente sobrevalorada respecto al modelo de Black-Scholes, lo cual sugiere la posibilidad de elaborar estrategias de venta de opciones para aprovechar estos diferenciales.

En esa misma línea, la sumatoria de las utilidades presentadas durante las diferentes ventanas superan los 2172 dólares. Este hallazgo demuestra la importancia de implementar volatilidad estocástica en la valoración de opciones, con el objetivo de encontrar diferencias sustanciales y posibles descálces en los precios que pueden ser explotados para generar rendimientos adicionales en los mercados.

El ejercicio de la sonrisa de volatilidad se simuló considerando 15 niveles de *strikes* dentro de un rango que va desde el 80% hasta el 120% del precio *spot* del activo subyacente. Esto, con el objetivo de analizar la relación entre volatilidad implícita y el precio de ejercicio. Se obtuvieron resultados que reflejan la inestabilidad de la volatilidad en función del *strike*, lo cual permite analizar una tendencia atractiva: las mayores brechas a nivel de precios se encuentran en los extremos.

El comportamiento observado es consistente con la teoría de sonrisa de volatilidad, que sugiere que las opciones OTM e ITM suelen presentar volatilidades más altas en comparación con sus pares ATM. Esta tendencia podría ser fundamental para determinar oportunidades de arbitraje, debido a que los desajustes entre las primas mediante ambas metodologías se amplían en los extremos de la curva.

Dicho esto, a continuación, se presentan los resultados de los diferentes *strikes* para una opción con tiempo de ejercicio dentro de un plazo de un año:

Tabla 3. Diferencia en primas en base al *strike*

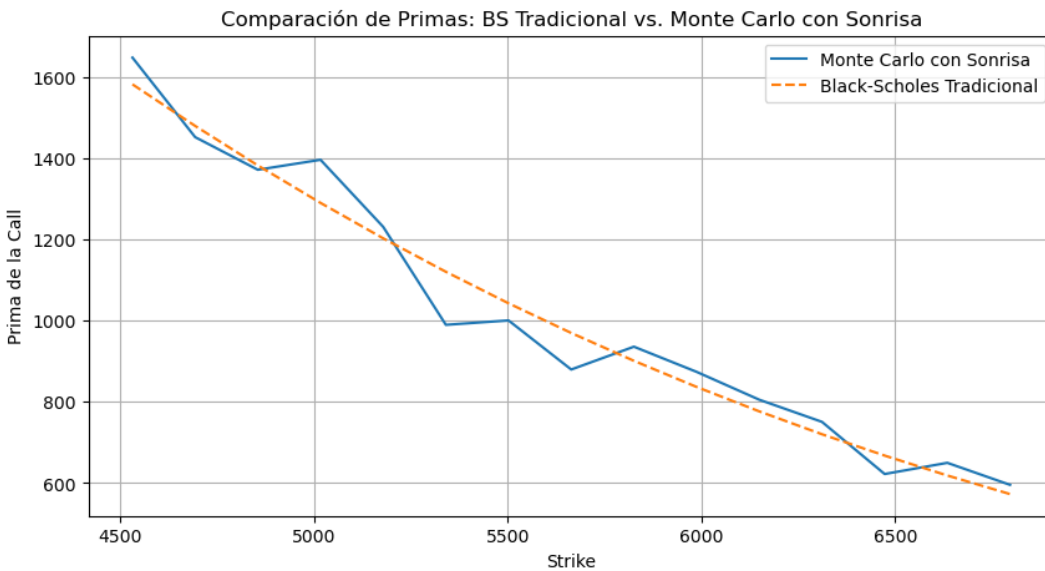
<i>Strike</i>	Diferencia
4770.88	17.8
4941.27	8.33
5111.66	7.32
5282.05	17.29

5452.43	13.16
5622.82	5.03
5793.21	2.37
5963.6	6.38
6133.99	6.69
6304.38	9.02
6645.15	8.58
6985.93	21.18
7156.32	11.74

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los diferenciales en precios entre las primas en base al strike de la opción.

Figura 3. Diferencia en primas en base al strike

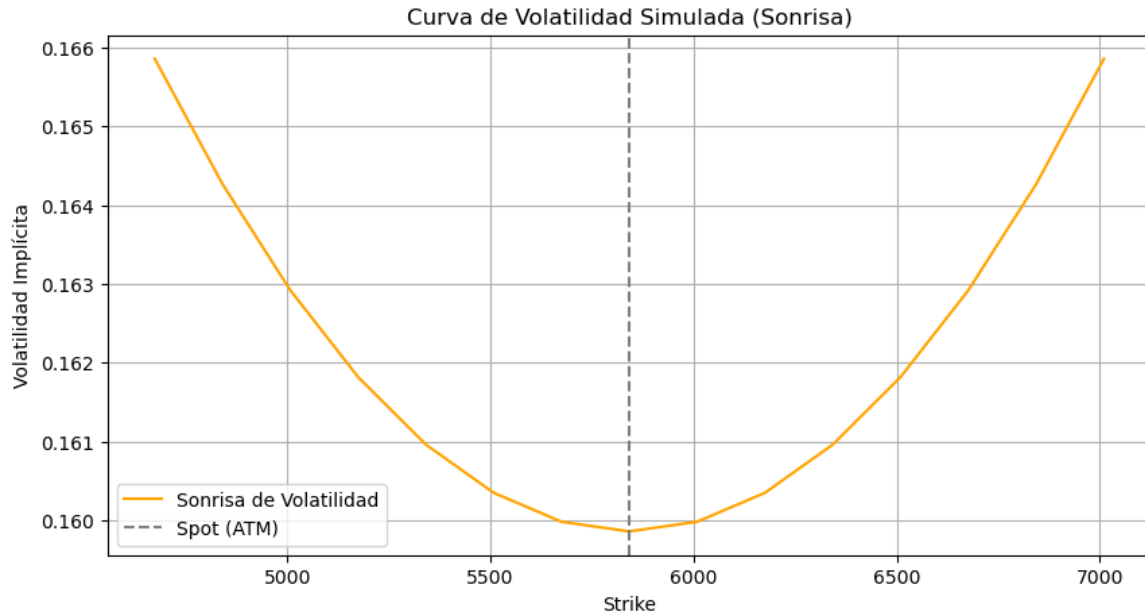


Fuente: elaboración propia.

Nota. La grafica muestra de forma visual las diferentes oportunidades de arbitraje a lo largo de los diferentes strikes de la opción debido a los diferenciales en los precios de las opciones.

Asimismo, se presenta la volatilidad obtenida en función de los diferentes precios de ejercicio para el activo analizado.

Figura 4. Sonrisa de volatilidad simulada



Fuente: elaboración propia.

Nota. La grafica representa la sonrisa de volatilidad que se presenta en el ejercicio y denota las variaciones en la volatilidad implícita en base al precio strike de la opción.

Estos resultados refuerzan la idea de que la volatilidad no es constante, como se supone en el modelo Black-Scholes, y varía en función del *strike* de la opción. Esto supone una implicación directa para las metodologías de valoración de opciones y gestión de riesgos financieros con derivados.

Por tanto, se considera que un ejercicio de modelación completo incorpora todas las características de las simulaciones. Es decir, una simulación general que comprende la iteración de las ventanas de arbitraje, los diferentes plazos de vencimiento, los diferentes *strikes* y la volatilidad implícita definida por la sonrisa de volatilidad. Esta perspectiva permite derivar una visión más robusta de

las oportunidades de arbitraje que pueden surgir en función de las dinámicas del mercado. Bajo estas premisas, la utilidad total estimada por las oportunidades de arbitraje detectadas a lo largo de todas las ventanas de tiempo y *strikes* fue de 52,119.19, lo cual refleja un valor significativo para cualquier persona interesada en aprovechar ineficiencias de mercado.

Adicionalmente, el promedio de la diferencia entre los precios calculados mediante la metodología de Black-Scholes con sonrisa y Black-Scholes estándar es de 73.98. La diferencia máxima fue de 274.90 y, la mínima, de -12.01, lo cual demuestra que a lo largo del ejercicio se podrían realizar estrategias largas y cortas de compraventa de opciones.

Mediante esta simulación, se encontraron principalmente oportunidades de venta de *call*, lo cual sugiere que en la mayoría de los casos las opciones se encuentran sobrevaloradas. Este descubrimiento refuerza la importancia de la sonrisa de volatilidad para el análisis y la toma de decisiones de inversión, puesto que proporciona una herramienta crítica para incorporar discrepancias de precios que no podrían haber sido identificadas a través de una perspectiva financiera tradicional con volatilidad constante.

Ahora bien, estos resultados tienen implicaciones significativas en el campo de la administración financiera y la gestión de riesgos. Las oportunidades de arbitraje que se detectaron podrían proporcionar un mecanismo para ajustar las estrategias de cobertura y optimizar los portafolios de derivados. Asimismo, se ofrece un marco para la toma de decisiones informadas para la negociación de opciones europeas con base en la información que nos proporciona el fenómeno de la sonrisa de volatilidad.

CONCLUSIONES

En este trabajo de grado se exploró el concepto de volatilidad estocástica como una extensión del modelo clásico de Black-Scholes, que asume una volatilidad implícita constante. En contraste, el fenómeno de la sonrisa de volatilidad muestra cómo la volatilidad implícita varía según el *strike*, adoptando una forma convexa similar a una sonrisa.

En el análisis realizado se calcularon las primas de las opciones *call* utilizando tanto el modelo de Black-Scholes clásico como la metodología modificada que incorpora la volatilidad estocástica. La comparación reveló diferencias significativas en la valoración de las opciones, especialmente en los *strikes* más alejados del precio *spot*. Estas discrepancias ofrecen oportunidades de arbitraje, ya que el modelo modificado permite identificar precios de opciones que no son completamente eficientes. Esto facilita la implementación de estrategias para explotar dichas diferencias a lo largo del tiempo.

Este estudio muestra que la sonrisa de volatilidad no solo mejora la precisión en la valoración de las opciones, sino que también abre la puerta a estrategias de arbitraje que pueden generar rendimientos ajustados por riesgo superiores, al aprovechar las ineficiencias de mercado derivadas de la fluctuación de la volatilidad implícita. Por lo tanto, la inclusión de este fenómeno en modelos cuantitativos de valoración de opciones puede ser una herramienta poderosa para los gestores de portafolio y operadores en mercados de derivados.

Por añadidura, en estudios futuros se podría replicar este ejercicio utilizando la convexidad de la curva de volatilidad con datos empíricos y aplicando regresiones lineales o no lineales para modelar con mayor precisión la relación entre volatilidad y *moneyness*. Este enfoque permitiría mejorar la robustez de los resultados e incrementar el PyG de las operaciones, ajustando mejor las estrategias de inversión. Además, podría ayudar a identificar patrones adicionales en la volatilidad y hacer los modelos de predicción más adaptativos a las condiciones del mercado.

Por consiguiente, la sonrisa de la volatilidad se puede usar en la gerencia financiera para los siguientes casos:

- **Mejorar la valoración de opciones:** La sonrisa de la volatilidad permite una valoración más precisa de las opciones, al reflejar las expectativas del mercado sobre movimientos extremos que no captura el modelo de Black-Scholes clásico (Derman y Miller, 2016). Al usar el modelo de Black-Scholes tradicional, se asume que la volatilidad es constante, y esto puede subestimar o sobrestimar el valor de las opciones (Natenberg, 2014), lo cual podría llevar a decisiones de inversión incorrectas por parte de los gestores de portafolio. Por ello, la consideración de la volatilidad implícita, que varía con el *strike* de las opciones, se vuelve clave para calcular de manera más precisa las primas de las opciones y para gestionar las carteras de derivados de manera eficiente.
- **Gestión de riesgos:** La sonrisa de la volatilidad es útil para gestionar el riesgo de las opciones. Los gestores financieros pueden ajustar sus estrategias de cobertura y selección de activos en función de la forma que adopte la sonrisa de la volatilidad. Según Gatheral (2006), comprender y modelar la superficie de la volatilidad —que incluye la sonrisa— es fundamental para implementar coberturas y tomar decisiones estratégicas informadas. Por ejemplo, si el mercado está experimentando una mayor volatilidad implícita en opciones OTM que en opciones ATM, los gestores pueden optar por estrategias de cobertura que aprovechen esas diferencias para gestionar el riesgo de cola (François y Stentoft, 2020).
- **Toma de decisiones de los recursos financieros:** Desde la perspectiva de aprovisionamiento y descalce, o la toma de decisiones de los recursos financieros, la sonrisa de la volatilidad ofrece un marco crucial para evaluar y anticipar los movimientos futuros del mercado. Esto influye directamente en la asignación de recursos financieros y en las estrategias de cobertura. En un contexto de aprovisionamiento y descalce, la sonrisa de la volatilidad se

convierte en un indicador que refleja las expectativas del mercado ante eventos de alta incertidumbre. Al comprender cómo la volatilidad varía con los *strikes* y cómo puede cambiar a lo largo del tiempo, los gestores financieros pueden tomar decisiones más informadas sobre cuándo comprar o vender opciones, y ajustar eventualmente las carteras de acuerdo con el comportamiento implícito de la volatilidad. La capacidad de predecir y entender los cambios de la volatilidad implícita, que se manifiestan de forma más pronunciada en los extremos de la curva OTM, proporciona una ventaja estratégica significativa en la gestión de portafolios. Según François y Stentoft (2020), las estrategias de cobertura que se basan en la sonrisa de la volatilidad son más eficaces frente a escenarios de incertidumbre, ya que permiten a los gestores anticipar posibles cambios extremos en los precios del activo subyacente. Esto mejora la precisión de las coberturas, permite a los inversores reducir el riesgo a movimientos extremadamente volátiles, y les brinda la capacidad de maximizar el valor del portafolio. A su vez, se minimizan los efectos adversos de los movimientos impredecibles de los precios, como aquellos producidos en mercados en alta volatilidad o eventos de crisis financieras.

- Oportunidad de arbitraje: Según Fedotov y Panayides (2004), las fluctuaciones estocásticas en los retornos de arbitraje pueden explicar la presencia de la sonrisa de la volatilidad e indicar posibles ineficiencias en el mercado. Los gestores de portafolio podrían implementar estrategias que les permitan aprovechar dichas diferencias sin asumir riesgos. Esto representa una ventaja competitiva y la posibilidad de maximizar el valor de la empresa. Además, la identificación de estas ineficiencias puede permitir a los gestores ajustar sus carteras en tiempo real, con el fin de aumentar las oportunidades de generar rendimientos positivos incluso en mercados volátiles. La capacidad de ejecutar estrategias de arbitraje, basadas en el análisis dinámico de la sonrisa de la volatilidad, no solo mejora

la rentabilidad a corto plazo, sino que también optimiza la estructura de los portafolios en el corto plazo. Por estos motivos, la sonrisa de la volatilidad se convierte en una herramienta clave para lograr una ventaja competitiva sostenible en los mercados financieros. Así, se permite que los gestores de portafolio maximicen las ganancias mientras aprovechan las oportunidades de arbitraje, incluso en entornos de incertidumbre económica o cambios de tendencia.

- Impacto en la asignación de capital: Un aspecto clave en la administración financiera es la asignación eficiente de capital para maximizar el rendimiento ajustado por el riesgo. Cuando se entiende la sonrisa de la volatilidad y su comportamiento en los mercados, los gestores de portafolio pueden tomar decisiones más informadas sobre la asignación de capital, la compra y venta de opciones y los ajustes en las posiciones de los instrumentos derivados. Como señalan Wilmott et al. (1995), una correcta modelización de la volatilidad implícita permite identificar oportunidades de optimización en la estructura de capital. Además, Taleb (2007) destaca que tener en cuenta la asimetría en la distribución de retornos —frecuentemente capturada por la sonrisa de la volatilidad— puede mejorar la toma de decisiones bajo incertidumbre. Esta comprensión permite a los gestores tomar decisiones más estratégicas y dinámicas, ajustando sus posiciones a medida que evolucionan las condiciones del mercado, lo cual es crucial en tiempos de alta volatilidad. El uso de la sonrisa de la volatilidad ofrece una ventaja para gestionar el riesgo en el horizonte temporal de la cartera y facilita una anticipación precisa sobre los posibles movimientos extremos en los precios de los activos. Esta capacidad de adaptación, junto con la optimización en la asignación en los recursos, asegura una mayor rentabilidad en situaciones complejas y cambiantes del mercado, lo cual permite a los gestores de

portafolios identificar oportunidades de arbitraje que de otro modo pasarían desapercibidas.

- Anticipación en los cambios de mercado: La sonrisa de la volatilidad no solo proporciona una medición precisa de la volatilidad implícita, sino que también actúa como una herramienta de prospectiva para prever movimientos significativos del mercado. Los cambios en la forma de la sonrisa, especialmente en la relación con los precios de ejercicio y los vencimientos, pueden señalar ajustes en las expectativas del mercado sobre futuros movimientos de precios. Este conocimiento permite a los gestores ajustar sus estrategias de cobertura o reestructurar sus portafolios para mitigar los riesgos derivados de eventos inesperados. De acuerdo con Cont y Tankov (2004), tales cambios pueden reflejar la anticipación de eventos extremos o fluctuaciones inesperadas en los precios de los activos. Además, Derman y Kani (1994) resaltan que las variaciones en la estructura de la volatilidad implícita proporcionan información valiosa para evaluar la estabilidad del mercado. De esta manera, se ayuda a los gestores a tomar decisiones informadas en periodos de alta incertidumbre y se mejora la protección contra movimientos abruptos de los precios.

La sonrisa de la volatilidad no solo representa un fenómeno observable en los mercados de opciones, también es una herramienta estratégica de utilidad para la administración financiera. La adecuada interpretación permite que los gestores se anticipen a escenarios adversos, optimicen recursos y diseñen estrategias de coberturas más eficaces. Los mercados financieros seguirán evolucionando en complejidad y volatilidad, e integrar análisis avanzados de volatilidad implícita se vuelve fundamental para tomar decisiones informadas y sostenibles. Por este motivo, incentivar

y aplicar este concepto entre los profesionales financieros constituye una ventaja competitiva esencial para afrontar los retos del mercado actual y del futuro.

REFERENCIAS

- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229-263.
- Derman, E., & Kani, I. (1994). Riding on a smile. *Risk Magazine*, 7(2), 32-39.
- Derman, E., & Miller, M. B. (2016). *The volatility smile*. Wiley.
- Fedotov, S., & Panayides, S. (2004). Volatility Smile and Stochastic Arbitrage Returns. *arXiv preprint*. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0405646>
- François, P., & Stentoft, L. (2020). Smile-Implied Hedging with Volatility Risk. *SSRN*. <https://ssrn.com/abstract=3681662>
- Fukuta, Y., & Ma, W. (2013). Implied Volatility Smiles in the Nikkei 225 Options. *Applied Financial Economics*, 23(9), 789-804. <https://doi.org/10.1080/09603107.2013.767975>
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and other Derivatives* (10th ed.). Pearson.
- Hull, J., & White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2), 281-300. <https://doi.org/10.2307/2328253>
- Kou, S. G. (2000). A jump diffusion model for option pricing with three properties: leptokurtic feature, volatility smile, and analytical tractability. *Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFER) (Cat. No.00TH8520)*, USA, 129-131. <https://doi.org/10.1109/CIFER.2000.844610>
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- Natenberg, S. (2014). *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.
- Orrell, D., & Richards, L. (2023). Keep on Smiling: Market Imbalance, Option Pricing, and the Volatility Smile. *Wilmott*, 124, 58-64.

- Peña, I., Rubio, G., & Serna, G. (1999). Why do we Smile? On the Determinants of the Implied Volatility Function. *Journal of Banking & Finance*, 23(8), 1151-1179.
- Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *Journal of Finance*, 49(3), 771-818.
<https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00086.x>
- Silva, M. (2017). *Valoración de bonos cero cupón con árboles de Hull-White con volatilidad estocástica* [Tesis de maestría]. Universidad Externado de Colombia.
- Taleb, N. N. (2007). *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. Random House.
- Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.

ANEXOS

Anexo 1. Estadísticas Descriptivas y Resultados de la Prueba ADF sobre Precios y Retornos

```
Estadísticas Descriptivas (Frecuencia diaria):
count      3774.000000
mean       0.000384
std        0.010983
min        -0.127657
25%        -0.003863
50%        0.000654
75%        0.005668
max        0.089671
skew       -0.765579
kurtosis   13.031590
Name: log_return, dtype: float64

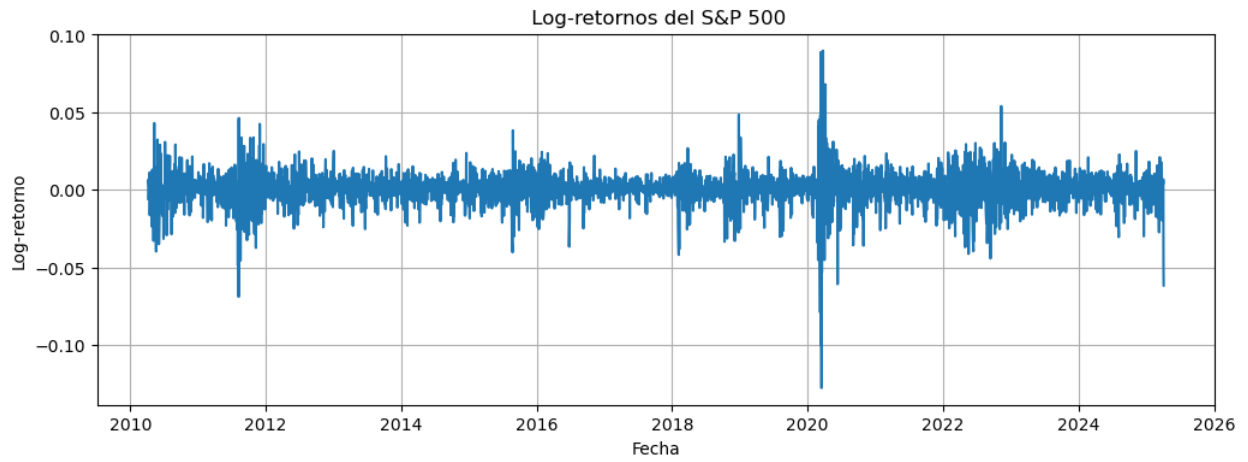
Media anualizada: 9.6867%
Volatilidad anualizada: 17.4351%
Sesgo (Skewness): -0.7656
Curtosis: 13.0316

ADF Test - Precios
p-value: 0.9477062930013032
ADF Test - Log-retornos
p-value: 4.693294212451948e-24
```

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa las estadísticas descriptivas de la serie de precios y retornos del índice S&P 500 junto con dos pruebas econométricas de estacionariedad.

Anexo 2. Serie de retornos del índice S&P 500



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa la variación histórica de la serie de retornos del S&P 500.

Anexo 3. Test de ARCH

```
ARCH Test (homocedasticidad):  
LM Statistic: 1364.0960787133688  
p-value: 5.596280379876886e-287
```

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los resultados de la prueba econométrica de ARCH.

Anexo 4. Pruebas de normalidad

```
Jarque-Bera Test - Estadística: 26995.7431  
p-value: 0.0000
```

Los log-retornos no siguen una distribución normal: Se rechaza la hipótesis nula de normalidad.

```
Shapiro-Wilk Test - Estadística: 0.8941  
p-value: 0.0000
```

Los log-retornos no siguen una distribución normal: Se rechaza la hipótesis nula de normalidad.

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los resultados de las pruebas de normalidad para la serie de tiempo de los retornos del S&P 500.

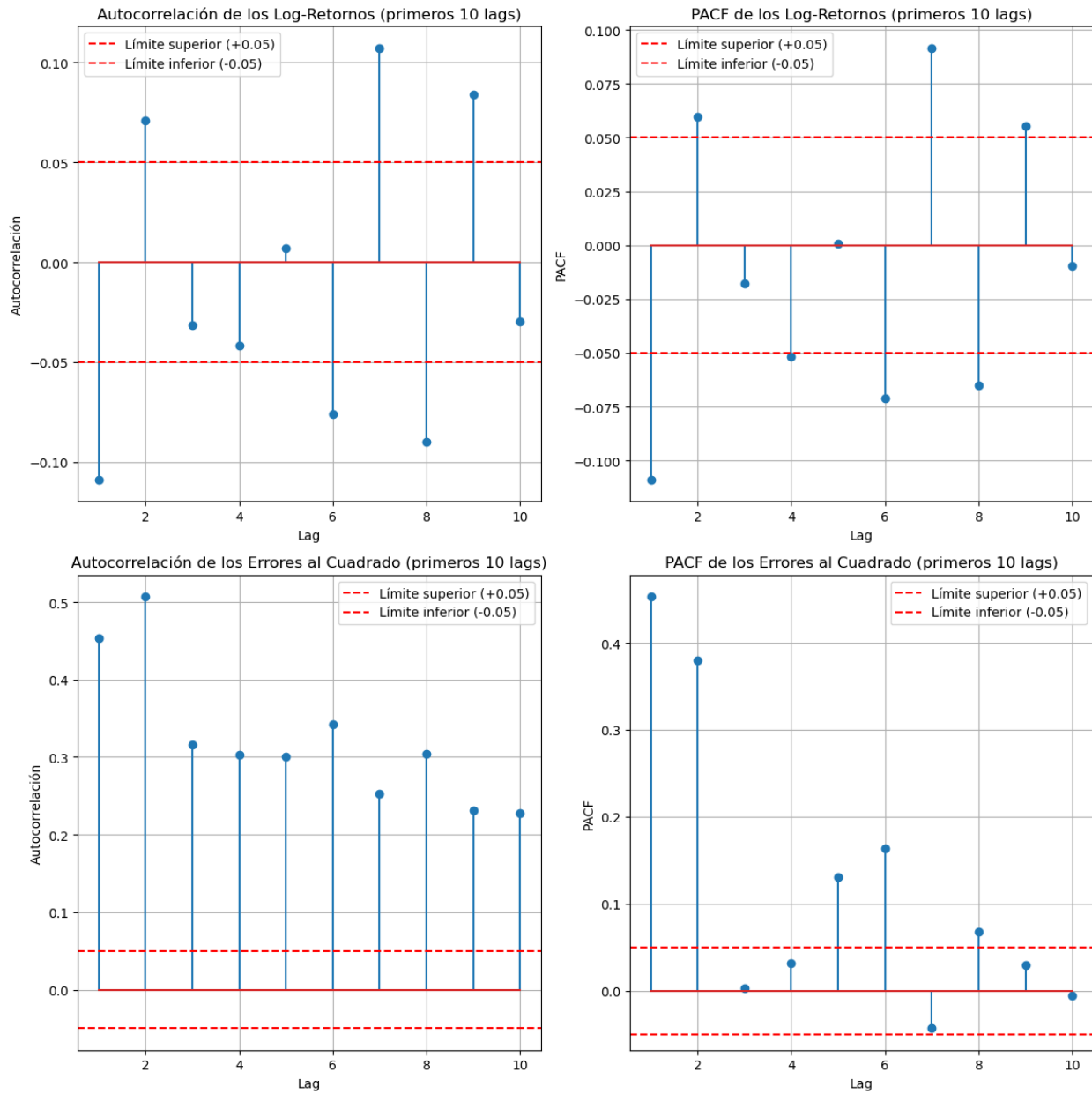
Anexo 5. Prueba de White

```
Test de White (heterocedasticidad):  
LM Statistic: 3.2523  
LM p-value: 0.1967  
F-statistic: 1.6262  
F p-value: 0.1968  
  
No se detecta heterocedasticidad: No se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad.
```

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los resultados de la prueba de White para detectar heterocedasticidad en la serie de retornos.

Anexo 6. Autocorrelogramas de la serie de retornos



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa las autocorrelaciones en la serie de retornos del S&P 500.

Anexo 7. Prueba de Ljung-Box

```
Ljung-Box Test para los Log-Retornos:  
  lb_stat    lb_pvalue  
10 200.25772 1.426054e-37  
  
Autocorrelación detectada en los log-retornos: Se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación.  
  
Ljung-Box Test para los Errores al Cuadrado:  
  lb_stat    lb_pvalue  
10 4247.39779      0.0  
  
Autocorrelación detectada en los errores al cuadrado: Se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación.
```

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los resultados de las pruebas de autocorrelación de Ljung Box.

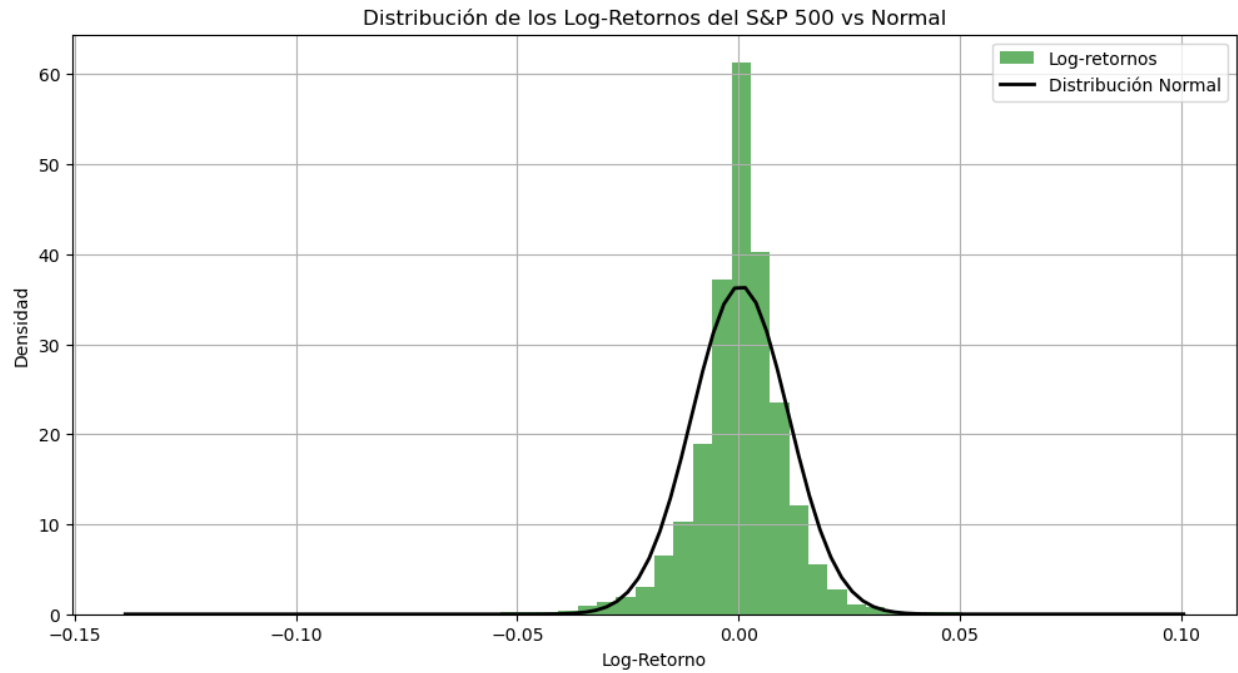
Anexo 8. Prueba de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling y saltos

```
Kolmogorov-Smirnov Test:  
Estadística: 0.1002  
p-value: 0.0000  
  
Anderson-Darling Test:  
Estadística: 69.5474  
Valores críticos: [0.575 0.655 0.786 0.917 1.091]  
Nivel de significancia: [15. 10. 5. 2.5 1. ]  
  
Cantidad de saltos detectados (mayores al umbral 3.0%): 74  
Ejemplos de saltos:  
22 -0.032888  
24 0.043035  
32 -0.039756  
37 0.032347  
42 -0.035017  
Name: log_return, dtype: float64
```

Fuente: elaboración propia.

Nota. La tabla representa los resultados de las pruebas estadísticas para identificar las distribuciones de frecuencia y el ejercicio empírico que captura los saltos en la serie de tiempo.

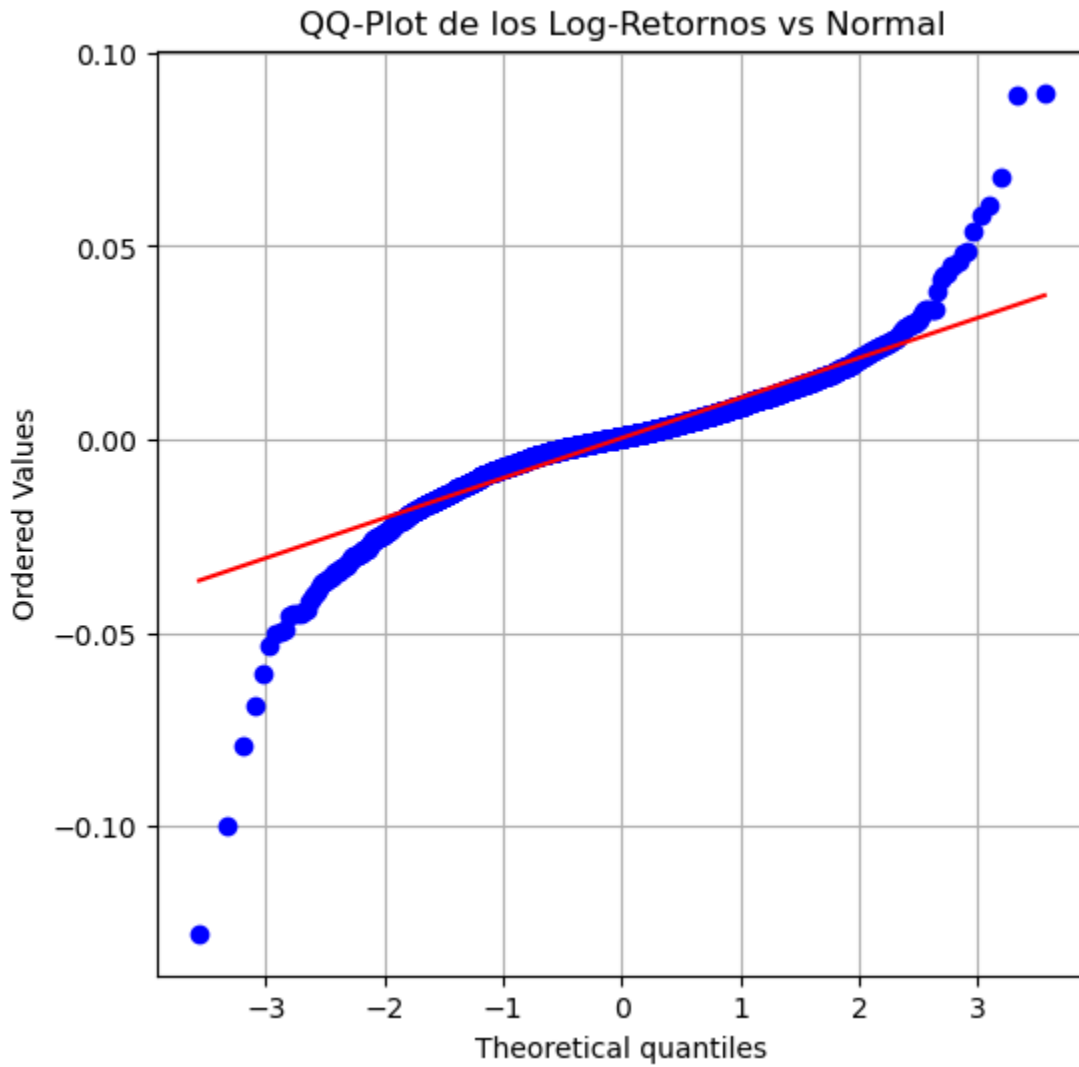
Anexo 9. Distribución de los retornos del S&P 500



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa la comparación entre la distribución normal y la distribución empírica de los retornos del índice.

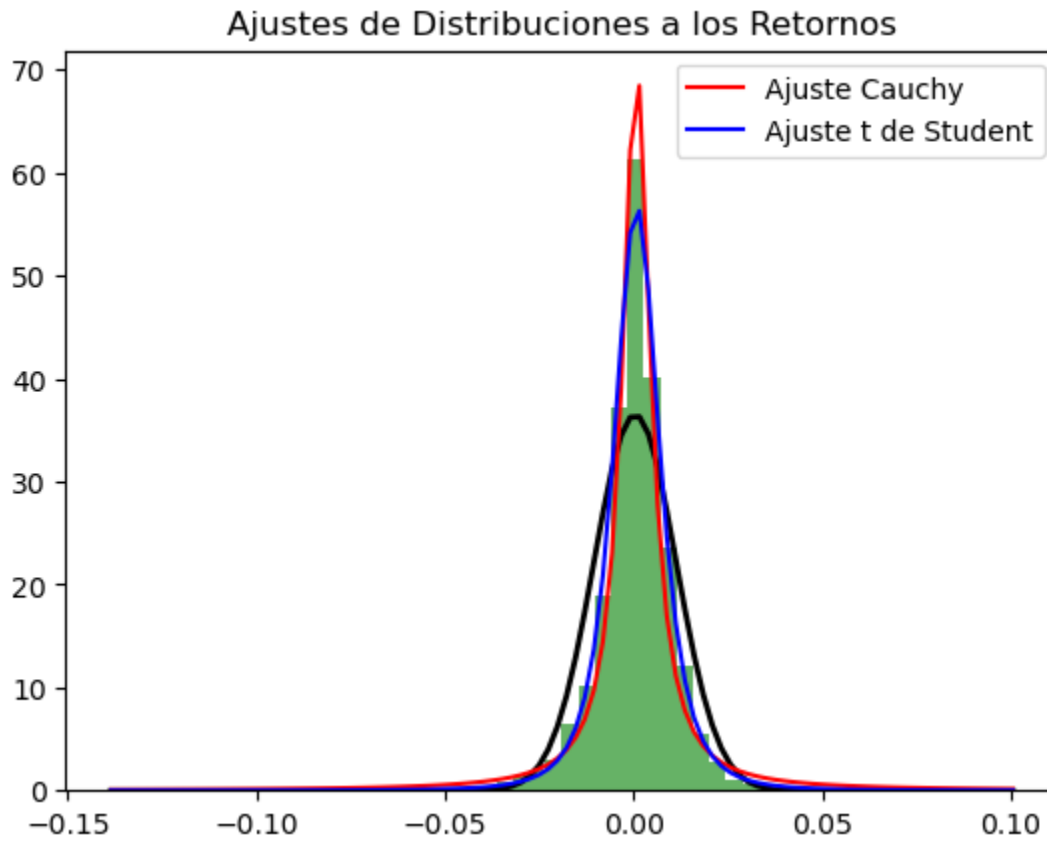
Anexo 10. QQ-Plot de los retornos del S&P 500



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa el QQ-plot de la distribución empírica y su comparación con la distribución normal.

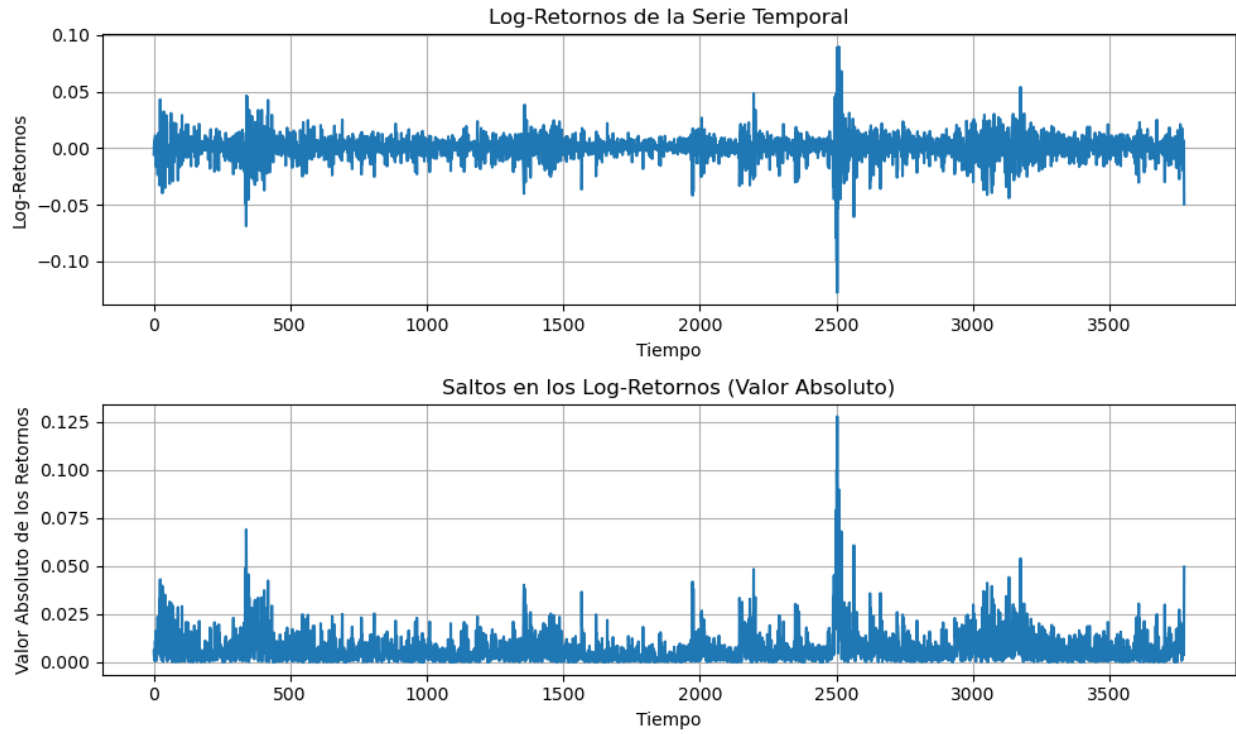
Anexo 11. Ajustes de distribuciones sobre la serie de los retornos



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa los ajustes de diferentes distribuciones de frecuencia sobre la distribución empírica de la serie de retornos.

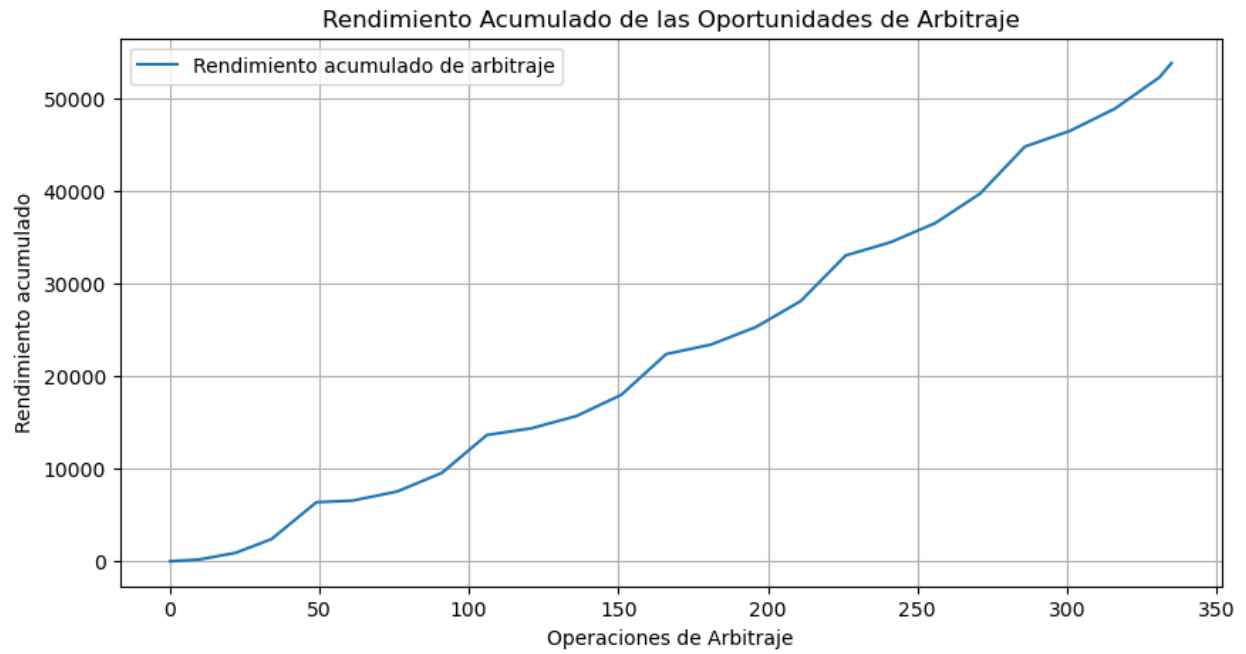
Anexo 12. Serie de retornos y serie de saltos en los retornos



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa la serie de tiempo de los retornos y los saltos que se presentan a lo largo del tiempo.

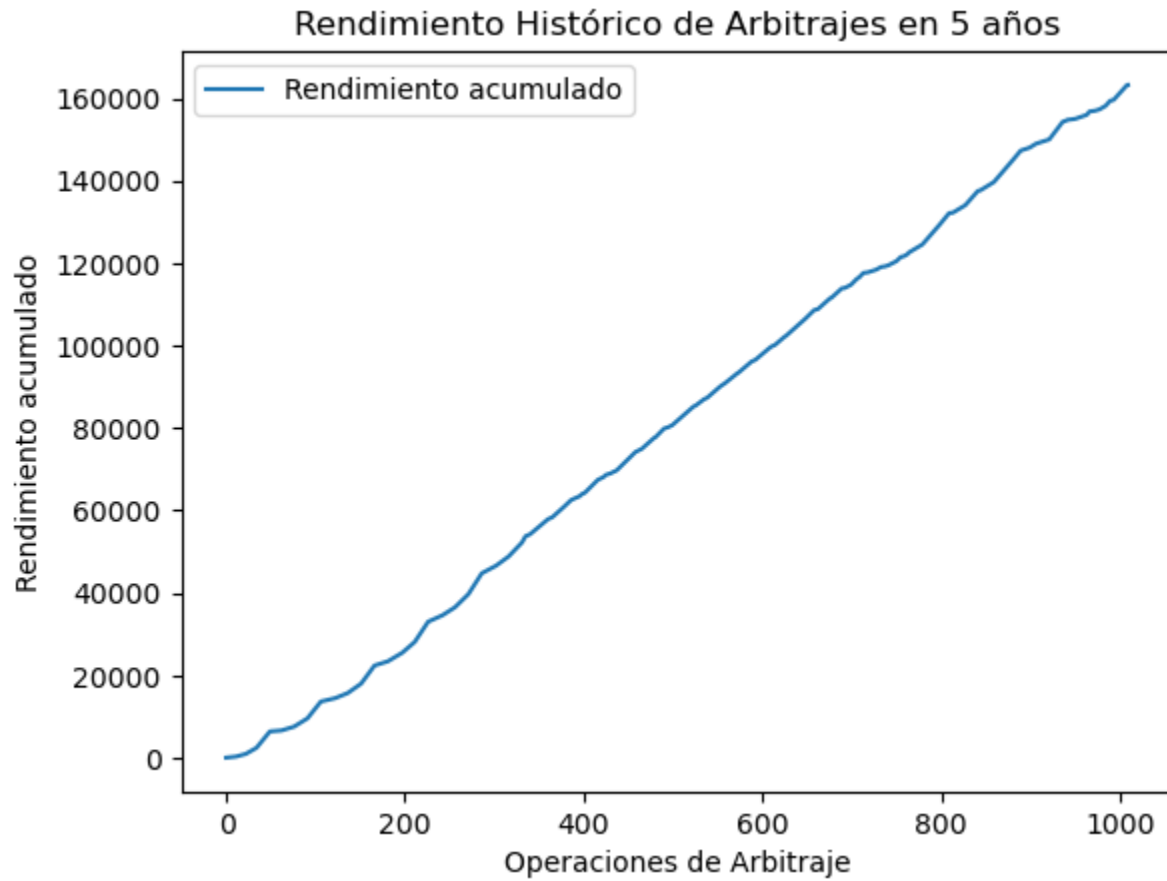
Anexo 13. PyG de la estrategia sobre la simulación



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa el PyG de la estrategia de arbitraje simulada dentro de un periodo comprendido por 252 días.

Anexo 14. Backtesting de la estrategia usando datos históricos de los últimos 5 años



Fuente: elaboración propia.

Nota. El gráfico representa el comportamiento empírico de la estrategia a lo largo de un periodo de 5 años en base a datos reales de mercado.