



Método de Elementos Finitos - Wavelets en la solución numérica de la ecuación
Fisher-KPP

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Diego Armando Morales Mosquera

Director

Msc. Julio Cesar Duarte Vidal

Departamento de Ciencias Básicas
Escuela de Ciencias y Humanidades.
Universidad EAFIT
Medellín

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios y a mi familia por el constante ánimo brindado durante todo este tiempo, a mi director de tesis Julio Cesar Duarte Vidal, quien gracias a sus valiosos aportes, conocimiento y apoyo constante este proyecto se pudo desarrollar, a la Universidad EAFIT por su formación en la investigación, a los docentes de la maestría y a todos que de una u otra manera aportaron con su positivismo.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Introducción	5
1.2. Distribuciones y espacios de Sobolev	7
1.2.1. Convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$	8
1.2.2. Espacios de Sobolev	9
2. Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos	13
2.1. Introducción	13
2.2. Transformadas wavelets	14
2.2.1. Transformada wavelet continua	14
2.2.2. Transformada wavelet discreta	18
2.3. Análisis Multirresolución	20
2.4. Wavelet biortogonales	25
2.5. Método de Elementos Finitos	32
2.6. Formulación del método	34
3. La ecuación de Fisher-KPP	39
3.1. Introducción	39
3.2. Soluciones analíticas de la ecuación Fisher-KPP	41
3.2.1. Problema linealizado	41

3.2.2. Problema no linealizado	41
3.3. Solución de Onda Viajera	42
3.4. Método de Diferencias Finitas de la ecuación de Fisher-KPP	44
3.4.1. Problema linealizado	45
3.4.2. Problema no linealizado	47
3.5. Solución de la ecuación de Fisher por el método de la ecuación simple modificada	49
3.6. Solución de Perturbación de la Ecuación de Fisher-KPP	53
4. Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP	57
4.1. Introducción	57
4.2. Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP	58
4.2.1. Ecuación de Fisher-KPP No Lineal	58
4.2.2. Solución de la Ecuación de Fisher-KPP Linealizada	62
4.3. Algoritmo para el Cálculo de Integrales $I_1(K)$, $I_2(K)$ y $I_3(K, S)$	63
4.4. Implementación del Método y Resultados Numéricos	69
4.4.1. Solución numérica de la Ecuación de Fisher-KPP Linealizada	69
4.4.2. Solución numérica de la Ecuación de Fisher-KPP No Linealizada	71
4.4.3. Implementación en Matlab	73
Bibliografía	87

Introducción

Durante el último siglo, el uso de modelos matemáticos además de permitir plantear y resolver muchos problemas de la naturaleza [48], se ha fortalecido hasta el punto de generar teorías fuertes en diferentes campos aplicativos. Por ejemplo, la forma como se aglomeran las nubes, como se distribuye la polución, la disposición que genera el accionar del viento en la arena y muchos fenómenos más, son evidencias de ello. En 1952 Alan Turing [7] fue el primero en observar y atribuir a las reacciones químicas la formación de patrones en la naturaleza y estudia sistemas de reacción-difusión de modelos biológicos [42] y [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{f} + \nabla \cdot (D\nabla u) \quad (0.0.1)$$

Estos sistemas integran dos tipos de movimientos, la difusión [26], el cual es el fenómeno por el cual un grupo de partículas se mueven de acuerdo al movimiento irregular de cada una de ellas, pero que en grupo generan un movimiento regular [3]; la reacción es el fenómeno en donde las partículas pueden cambiar su estado [23], debido a interacciones o simplemente de manera espontánea.

Un caso particular de las ecuaciones de reacción-difusión es la ecuación de Fisher Kolmogorov, más conocida como la ecuación de Fisher KPP o simplemente ecuación de Fisher [4].

$$u_t - \alpha u_{xx} = f(u) \quad (0.0.2)$$

2 Introducción

Esta ecuación tiene una evolución no lineal y se presenta cuando $f(u) = \beta u(1 - \frac{u}{\theta})$; fue propuesta por Fisher (1936) como un modelo de propagación de un gen ventajoso en una población [8], donde $\alpha > 0$ es la constante de difusión, $\beta > 0$ es la tasa de crecimiento lineal y $\theta > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente. El término $f(u) = \beta u(1 - \frac{u}{\theta})$ representa la tasa de crecimiento no lineal que es proporcional a u para u pequeña, pero decrece cuando u aumenta y desaparece cuando $u = \theta$. Esto corresponde con el crecimiento de una población u cuando hay un límite θ en el tamaño de la población que el hábitat puede soportar; si $u > \theta$, entonces $f(u) < 0$ por lo que la población disminuye siempre que u es mayor que el valor límite de θ . Esta interpretación sugiere que el hábitat puede soportar una cierta población máxima, asíque

$$0 \leq u(x, 0) \leq \theta; \quad x \in \mathbb{R}. \quad (0.0.3)$$

En 1937, Kolmogorov realizó un estudio exhaustivo de dicha ecuación, logrando obtener algunas soluciones exactas [56]. Posteriormente la ecuación ha sido utilizada para modelar procesos de propagación de un gen en una población y de propagación de onda en química [27]. También podemos encontrar soluciones numéricas de la ecuación de Fisher-KPP usando el método de diferencias finitas [34]. Hay otros métodos como el método simple modificado usando ondas solitarias [32]. De acuerdo al estudio de la ecuación se encuentran soluciones de onda viajera estocástica a la ecuación Fisher estocástica [57].

Muchos resultados se han obtenido a partir de estudios elaborados acerca de esta ecuación, como su solución analítica para una velocidad de onda especial [38], solución exacta usando el método de la ecuación simple modificada [49] y [56], entre otros.

A la fecha se han logrado implementar diversos métodos para su solución numérica, obteniendo resultados como

$$u(z) = \frac{1}{\{1 - \operatorname{rexp}(\frac{z}{\sqrt{6}})\}^2} \quad (0.0.4)$$

Soluciones específicas utilizando métodos clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias con una velocidad especial de onda $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$ [38].

En este trabajo se utilizó el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual divide el dominio en un número finito de partes denominadas elementos,

cuyo comportamiento se define mediante parámetros llamados nodos. Estos últimos son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes [41]. El MEF transforma un problema de naturaleza continua en uno discreto y el comportamiento de lo que sucede en el interior de esta discretización se obtiene mediante la interpolación de los elementos llamados nodos [47]. Para realizar esta interpolación, utilizamos Wavelets que gracias a su naturaleza, comportamiento y propiedades, logran obtener una aproximación bastante precisa para el modelo [54], [52] y [53].

Sin lugar a dudas los métodos wavelets permiten desarrollar algoritmos eficientes y novedosos en el estudio del procesamiento de imágenes y señales. La idea de utilizar esta teoría en la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales se da en virtud a que algunas propiedades de las wavelets son importantes en la construcción de algoritmos adaptativos [51]. Un algoritmo de este tipo selecciona un conjunto minimal de aproximaciones en cada paso, de tal manera que la solución calculada sea lo suficientemente próxima a la solución exacta. Si queremos que la solución calculada sea suave en alguna región, sólo unos pocos coeficientes wavelet serán necesarios para obtener una buena aproximación de la solución en dicha región, es decir, solamente los coeficientes de bajas frecuencias cuyo soporte esté en esa región son los utilizados. De otro lado, los coeficientes grandes (en valor absoluto) se localizan cerca de las singularidades y esto nos permite definir criterios de adaptabilidad a través del tiempo de evaluación [15, 18, 43, 50]. El trabajo busca dar respuesta a problemas que surgen en diferentes áreas de las ciencias e ingeniería.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este corto capítulo se presentará alguna terminología necesaria para la lectura de esta monografía. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis funcional y distribucional omitiendo sus pruebas, las cuales se pueden encontrar en algunos de los siguientes textos [25], [52], [53].

Recuerde que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene $L_2(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones cuadrado-integrables, cuya norma es

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio se dota con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones

6 Preliminares

(clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, donde

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$. Otro espacio que se utilizará es $\ell_2(\mathbb{Z})$, el de las sucesiones (x_j) , $j \in \mathbb{Z}$, tal que $\sum_j |x_j|^2 < \infty$.

Sea $F = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , X y Y espacios normados (espacios vectoriales equipados con una norma). Un operador lineal es una función $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, para cada $a, b \in F$ y cada $u, v \in X$. El operador T es continuo en u_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|u - u_0\|_X < \delta \quad \text{entonces} \quad \|Tu - Tu_0\|_Y < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Si (1.1.1) se cumple para cada $u_0 \in X$ se dice que T es continuo en X . Si no depende del punto u_0 se dice que T es uniformemente continuo en X .

El operador T es acotado si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tu\|_Y \leq c\|u\|_X$ para cada $u \in X$.

Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la convolución de f y g , denotada $f * g$, se define por

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz.$$

Un sistema de funciones $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\phi_j \in L_2(\mathbb{R})$, se llama ortonormal si

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_j(t)\overline{\phi_k(t)}dt = \delta_{jk},$$

donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Es decir,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Un sistema ortonormal se llama una base en un subespacio V de $L_2(\mathbb{R})$ si cualquier función $f \in V$ tiene una representación de la forma

$$f(t) = \sum_j c_j \phi_j(t),$$

donde los coeficientes c_j satisfacen $\sum_j |c_j|^2 < \infty$. En lo que sigue se utilizará la notación $\sum_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}$, $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty}$, $\|f\|_{L_2} = \|f\|_2$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

La función característica del conjunto A , χ_A , se define por

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A; \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

También se utilizará la notación $I\{A\}$ para denotar esta función y la llaman función indicadora.

El soporte de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, denotado $\text{sop}f$, se define por $\text{sop}f = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$.

1.2. Distribuciones y espacios de Sobolev

En esta sección recogemos algunos resultados básicos sobre distribuciones. La teoría de distribuciones libera al cálculo diferencial de ciertas dificultades que provienen del hecho de que existen funciones no diferenciables. Este hecho extiende el cálculo a una clase de objetos llamados distribuciones o funciones generalizadas, que es mucho mayor que la clase de funciones diferenciables.

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop} \varphi \text{ es un compacto contenido en } \Omega\},$$

donde $\text{sop} \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. $\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio vectorial de las funciones de prueba.

Si K es un compacto de Ω entonces

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop} \varphi \subset K\}.$$

Una función típica de $\mathcal{D}(\Omega)$ es

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ c \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, la constante c se escoge de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$; $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y su soporte es la bola unitaria en \mathbb{R}^n , es decir, $\text{sop} \varphi = B_1(0)$.

Una expresión de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con α_i un entero no negativo, para cada $i = 1, \dots, n$, se llama un multi-índice. Para el multi-índice α definimos el orden de α , denotado $|\alpha|$, por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

8 Preliminares

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, entonces definimos

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

1.2.1. Convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$

Sea $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cuando $j \rightarrow \infty$ si:

- a) existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que para cada j $\text{sop} \varphi_j \subset K$
- b) $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en K , para cada multi-índice α .

La convergencia uniforme en K de la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j=1}^\infty$ significa que

$$\sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Una aplicación f es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$ significa que para cada sucesión $(\varphi_j)_1^\infty$ con límite φ , se tiene $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, cuando $j \rightarrow \infty$.

Definición 1.2.1. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . La aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ es una distribución si

- a) T es lineal.
- b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ y un entero no negativo m (depende de K) tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y para cada multi-índice α .

En otras palabras, una distribución es un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. El espacio de todas las distribuciones sobre Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Es decir, $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{C})$ es el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Un ejemplo típico de distribución es la delta de Dirac, esto es, considere el funcional lineal $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En efecto, si K es un compacto de \mathbb{R} y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

acá $C_K = 1$ y $m = 0$.

Algunas propiedades importantes de las distribuciones tales como la multiplicación de una función por una distribución y la derivada generalizada se definen a continuación.

Multiplicación de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ por una distribución T : Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se define uT por

$$\langle uT, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle,$$

uT está bien definida ya que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $u \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Derivada de una distribución: Si α un multi-índice y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la derivada de T para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Con el propósito de extender la transformada de Fourier a las distribuciones, definamos las funciones de decrecimiento rápido.

Definición 1.2.2. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. φ es una función de decrecimiento rápido si para cada α y β multi-índices, existe una constante positiva M tal que

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de todas las funciones de decrecimiento rápido forma un espacio vectorial real (o complejo) y lo denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y se llama espacio de Schwartz. Los elementos de este espacio se llaman *funciones de prueba de decrecimiento rápido*.

CONVERGENCIA EN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Una sucesión (φ_j) converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x) \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{R}^n cuando $j \rightarrow \infty$.

El dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ se llama espacio de las distribuciones temperadas.

El funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo si para cada sucesión (φ_j) tal que $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2. Espacios de Sobolev

En este apartado introducimos los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades más importantes. Si queremos estudiar la regularidad de una función de soporte compacto o de una distribución es usual analizar el comportamiento de su transformada de Fourier en el infinito. Una forma alterna

10 Preliminares

de hacer este análisis es midiendo la diferenciabilidad en términos de normas de L_2 . La razón son dos:

- i) L_2 es un espacio de Hilbert.
- ii) La transformada de Fourier, la cual convierte diferenciación en multiplicación por polinomios, es una isometría (isomorfismo que preserva normas).

Definición 1.2.3. Sea $m \geq 0$, $p \geq 1$ y Ω un dominio de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

Es un espacio vectorial normado equipado con la norma de Sobolev

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Propiedades

1. $W^{m,p}(\Omega) = \widetilde{C^m(\Omega)}$ (completado) en la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.
2. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.
3. $\overline{C_0^m(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \partial^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leq m-1\}$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$ (acá $\partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$ denota la extensión de $\partial^\alpha u$ a la frontera de Ω).
4. $(W_0^{m,p}(\Omega))' := W^{-m,q}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se llaman espacios de Sobolev negativos (si $p = 1$, $(W^{m,1}(\Omega))' = W^{-m,\infty}(\Omega)$).
5. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $v \in W^{-m,q}(\Omega)$ es integrable, entonces

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{-m,q}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

6. Si $m > k$ entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

en particular, $W^{0,p}(\Omega) = L_2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_{W^{0,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_p$.

Si $p = 2$, en lugar de $W^{m,2}(\Omega)$ escribiremos $H^m(\Omega)$, o sea,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\},$$

$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,$$

$u, v \in H^m(\Omega)$. La norma en $H^m(\Omega)$ es

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ se define por

$$H^s(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |\hat{f}(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier de f . $H^s(\mathbb{R})$ equipado con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

es un espacio de Hilbert. También se le asocia la norma

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

La notación O

La expresión $f(x) = O(g(x))$ significa que existe una constante positiva M tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, siempre que $x \rightarrow x_0$. Es decir, si $g(x) \neq 0$ entonces $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \rightarrow M$, cuando $x \rightarrow x_0$.

CAPÍTULO 2

Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

2.1. Introducción

El origen de la descomposición de una señal en wavelets está en la necesidad de conocer las características y particularidades de la señal en diferentes instantes de tiempo. La principal virtud de las wavelets es que permite modelar procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene porqué ser suave [2], [16]. Una de las ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia pero no en tiempo, esto es, el análisis en frecuencia obtenido del análisis de Fourier es insensible a perturbaciones que supongan variaciones instantáneas y puntuales de la señal como picos debidos a conmutaciones o variaciones muy lentas como tendencias. En otras palabras, si f es una señal (f es una función definida en todo \mathbb{R} y tiene energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$). La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ proporciona la información global de la señal en el tiempo localizada en frecuencia. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo

específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

y la integración es sobre todo tiempo (ver [25]). Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto.

En este capítulo se presenta una introducción a la teoría wavelets, en particular se estudiará la transformada wavelet y el análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$. Con este concepto se ilustra como construir otras bases wavelets, y además, permite analizar funciones (señales) en $L_2(\mathbb{R})$ en varias escalas (niveles de resolución) [14], [16], [19]. Para ello, se utiliza versiones escaladas de un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$. Para tal descomposición de una función $f \in L_2(\mathbb{R})$, sólo se necesitan los coeficientes de la expansión de f en dicho conjunto ortonormal.

2.2. Transformadas wavelets

El análisis wavelets es un método de descomposición de una función o señal usando funciones especiales, las wavelets. La descomposición es similar a la de la transformada de Fourier, donde una señal $f(t)$ se descompone en una suma infinita de armónicos $e^{i\omega t}$ de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$, cuyas amplitudes son los valores de la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

El análisis de Fourier tiene el defecto de la no localidad: el comportamiento de una función en un conjunto abierto, no importa cuán pequeño, influye en el comportamiento global de la transformada de Fourier. No se captan los aspectos locales de la señal tales como cambios bruscos, saltos o picos, que se han de determinar a partir de su reconstrucción.

2.2.1. Transformada wavelet continua

La teoría wavelets se basa en la representación de una función en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función

fija ψ , la wavelet madre que, en general, no es senoidal. Por ejemplo,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

Definición 2.2.1. *Una wavelet ψ es una función cuadrado integrable tal que la siguiente condición de admisibilidad se tiene*

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{2.2.1}$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de ψ .

Observación 2.2.1. Si además $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la condición (2.2.1) implica que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. En efecto, por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver p.e., [44]), $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ y la transformada de Fourier es continua, lo cual implica que $0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt$.

Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. La función dilatada y trasladada se define por

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Esta función se obtiene a partir de ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego, por traslación en b . Es claro que $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.

Definición 2.2.2. *Para $f, \psi \in L_2(\mathbb{R})$, la expresión*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \tag{2.2.2}$$

se llama la transformada wavelet de f .

16 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

Por la desigualdad de Cauchy, se ve que $\mathcal{W}_\psi f$ es una función acotada con $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$. Note también que

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle.$$

La transformada wavelet $\mathcal{W}_\psi f$ de f puede ser descrita en términos del producto de convolución. La convolución de dos funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ es dada por

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz.$$

Observe que esta fórmula está definida para al menos todo $t \in \mathbb{R}$, pero $f * g$ no necesariamente está en $L_2(\mathbb{R})$. Usando la notación $\tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(-t)}$, se tiene $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = (f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)$. Note también que $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|}\hat{\psi}(a\omega)e^{-i\omega b}$. Estos hechos se aplicarán en la prueba de la siguiente proposición, la cual establece la fórmula de Plancherel para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.1. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, las siguientes relaciones se tienen*

1. *Isometría*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}$$

2. *Fórmula de inversión*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b)\psi_{a,b}(t)db \frac{da}{a^2}$$

Demostración. 1. Es fácil verificar que $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\hat{\psi}(a\omega)\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)|^2 db \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a| |\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot)\hat{\psi}(a\cdot))(\omega)|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\ &= C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = C_\psi \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Observe que se utilizó el teorema de Fubini y la fórmula de Plancherel para la transformada de Fourier.

2. Para simplificar los cálculos en la fórmula de inversión, suponga que $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot) \tilde{\psi}(a \cdot))(\omega) \psi_{a,b}(t) d\omega \\ &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega) \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

donde $g(b) := \psi_{a,b}(t)$. Ahora, la transformada inversa de Fourier de g es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(b) e^{i\omega b} db \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-ia\omega z} e^{i\omega t} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo e integrando respecto a $a^{-2} da$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi f(t). \end{aligned}$$

□

Otro resultado de interés que se presentará en la siguiente proposición, es la fórmula de Parseval para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.2. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, se tienen*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2}$$

18 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

Demostración. Como $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)\}$ o de manera equivalente, $\mathcal{F}(f * \tilde{\psi}_{a,0})(\omega) = \sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db = |a| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega,$$

ahora, integrando respecto a $a^{-2} da$ se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\ &= C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) d\omega \\ &= C_{\psi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = C_{\psi} \langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Note que se aplicó el teorema de Fubini, y en el último renglón de la expresión anterior, la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier. \square

En la siguiente proposición se listan algunas propiedades.

Proposición 2.2.3. Sean ψ y φ wavelets y $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Entonces

1. $\mathcal{W}_{\psi}(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \beta \mathcal{W}_{\psi} g(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{W}_{\alpha\psi + \beta\varphi} f(a, b) = \alpha \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \beta \mathcal{W}_{\varphi} f(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{W}_{\psi}(\tau_c f)(a, b) = \mathcal{W}_{\psi} f(a, b - c)$, donde τ_c es el operador traslación definido por $\tau_c f(t) = f(t - c)$.
4. $\mathcal{W}_{\psi}(D_c f)(a, b) = \sqrt{c} \mathcal{W}_{\psi} f(ca, cb)$, donde D_c es el operador dilatación definido por $D_c f(t) = \sqrt{c} f(ct)$.

2.2.2. Transformada wavelet discreta

La transformada wavelet continua introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $\mathcal{W}_{\psi} f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en

el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia de wavelets será ahora dada por

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Se utilizará la notación ψ_{jk} para denotar la wavelet ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, observe que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre si. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [16].

Definición 2.2.3. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver [19] y [28] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (2.2.4)$$

o teniendo en cuenta (2.2.3) como

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

donde $c_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Definición 2.2.4. Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ el conjunto bidimensional de coeficientes

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$$

se llama la transformada wavelet discreta de f .

20 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

En consecuencia, la expresión (2.2.4) se puede escribir en forma alterna como

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t). \quad (2.2.5)$$

La serie (2.2.5) se llama representación wavelet de f .

Observación 2.2.2. $\psi_{jk}(t)$ es muy apropiada para representar detalles más finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $c_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuaciones sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .

Es interesante notar que $c_{j,k} = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre ψ .

2.3. Análisis Multirresolución

El sistema de Haar no es muy apropiado para aproximar funciones suaves. De hecho, cualquier aproximación de Haar es una función discontinua [19], [28]. Se puede probar que si f es una función muy suave, los coeficientes de Haar decrecerán muy lentamente. Por tanto se pretende construir wavelets que tengan mejor propiedades de aproximación, y una forma de hacerlo es a través del análisis multirresolución (AMR) [39], [37],[36], [35], [19].

Sea $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, la familia de trasladadas de φ ,

$$\{\varphi_{0k}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi_{0k}(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es un sistema ortonormal (con el producto interno de $L_2(\mathbb{R})$). Acá y en lo que sigue

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) = D_{2^j} \tau_k \varphi(t), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

recuerde que $D_a f(t) = a^{1/2} f(at)$ y $\tau_a f(t) = f(t - a)$ son los operadores dilatación y traslación, respectivamente.

Se definen los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t-k) : \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}, \\ V_1 &= \left\{ h(t) = f(2t) : f \in V_0 \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ h(t) = f(2^j t) : f \in V_0 \right\}, j \in \mathbb{Z} \\ &= \text{gen} \{ \varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Note que φ genera la sucesión de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Suponga que la función φ se escoge de tal forma que los espacios estén encajados $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, y $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, estos dos hechos fundamentales hacen parte de la definición de análisis multirresolución.

Definición 2.3.1. *Un análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, en $L_2(\mathbb{R})$,*

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

tales que

1. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$,
4. $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0$, $j \in \mathbb{Z}$,
5. Existe una función $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de funciones $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_0 .

La función φ se llama función de escala. En el espacio V_{j+1} las funciones (señales) se describen con más detalle que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio “más grande”. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución [16]. Es usual reunir estos “sintonizadores finos” en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$. Sin embargo, la elección de estos subespacios no es única. Pero se puede escoger a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Es decir,

$$W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp, \quad j \in \mathbb{Z},$$

22 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

o de manera equivalente

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

Informalmente, esto quiere decir que si se tiene una función (señal) f a resolución 2^{j+1} y se proyecta a resolución inferior 2^j entonces

$$f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

acá P_j representa la proyección ortogonal en el espacio V_j donde se recoge la versión “suavizada” de f y la diferencia $f - P_j f$ representa el “detalle” de f , que está en W_j y se expresa como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$. Recuerde que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j (ver p.e., [10]).

El conjunto de funciones linealmente independientes φ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son las wavelets.

Por definición, el subespacio W_j es cerrado. Note también que si $f \in V_0$, entonces por 5 de la definición anterior se tiene

$$f(t) = \sum_k \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi(t).$$

Además, por la ortogonalidad de $\{T_k \varphi(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\sum_k |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 = \|f\|_2^2.$$

Observe que al aplicar la descomposición (2.3.1) en cada V_j se obtiene

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} \oplus W_{N-1} = V_{N-2} \oplus W_{N-2} \oplus W_{N-1} \\ &= \cdots = V_{-N} \oplus \left(\bigoplus_{j=-N}^{N-1} W_j \right), \end{aligned}$$

y cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \oplus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j.$$

Usando las condiciones 1 y 2 de la definición de AMR se obtiene

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L_2(\mathbb{R}).$$

Por definición, también los subespacios W_j satisfacen las condiciones 3 y 4 de la definición de AMR o de manera directa como se prueba en el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR y $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$. Entonces*

- i) $f \in W_j \Leftrightarrow \tau_k f \in W_j$, para cada $k, j \in \mathbb{Z}$.
- ii) $f \in W_j \Leftrightarrow Df \in W_{j+1}$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f \in W_j$, esto significa que $f \in V_{j+1}$ y $\langle f, D_{2^j} \tau_k \varphi \rangle = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por la condición 3 y 4 de AMR, la primera relación es equivalente a $\tau_k f \in V_{j+1}$ y $Df \in V_{j+2}$. Además de la relación $\tau_k D_2 = D_2 \tau_k$, se sigue inmediatamente, que la segunda relación es equivalente a

$$\langle \tau_k f, \tau_k D_{2^j} T_k \varphi \rangle = \langle \tau_k f, D_{2^j} \tau_{k+2^j} \varphi \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto $\tau_k f \in V_{j+1} \cap V_{k+2^j}^\perp$, y así, $\tau_k f \in W_j$.

La segunda relación también es equivalente con

$$\langle Df, D_{2^{j+1}} \tau_k \varphi \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

de lo cual se sigue que $Df \in V_{j+1}^\perp$ que junto con $Df \in V_{j+2}$ se obtiene $Df \in W_{j+1}$. □

La siguiente proposición justifica los comentarios hechos arriba y es útil en futuros resultados.

Proposición 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un análisis multirresolución con función de escala φ . Entonces para cada $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto de funciones*

$$\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal para V_j .

24 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

Demostración. Para probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ genera a V_j , se debe ver que toda $f(t) \in V_j$ se puede escribir como combinación lineal de funciones de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. La propiedad 3 de la definición de AMR, implica que la función $f(2^{-j}t)$ pertenece a V_0 y por tanto $f(2^{-j}t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Haciendo la transformación $t \mapsto 2^j t$, se tiene que $f(t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Resta probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Para ello se debe ver que

$$\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jm} \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}$$

o

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \delta_{km}.$$

Para establecer esta igualdad, basta hacer el cambio de variable $z = 2^j t$, para obtener

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - k) \overline{\varphi(z - m)} dz = \delta_{km},$$

en virtud de la propiedad 5 de la definición de AMR. □

El siguiente lema contiene dos resultados utilizados en la existencia de los sistemas AMR, bajo hipótesis apropiadas. Por motivos de completitud se hará la prueba del primer apartado, la del segundo se puede encontrar en [52]. Recuerde que P_j es la proyección ortogonal sobre el espacio V_j .

Lema 2.3.2. *Para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$,*

i) $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0.$

ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f.$

Demostración. *i)* Puesto que $\|P_j\| = 1$, basta probar el resultado para funciones en $L_2(\mathbb{R})$ con soporte compacto. Si f tiene soporte en $[-a, a]$, entonces al aplicar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski

se tiene

$$\begin{aligned}
 \|P_j f\|_2^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \right\|_2^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk} \rangle|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-a}^a f(t) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) dx \right|^2 \\
 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \right) 2^{j/2} \left(\int_{-a}^a |\varphi(2^j t - k)| dt \right)^2 \\
 &= \|f\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-2^j a - k}^{2^j a - k} |\varphi(z)| dz \right)^2.
 \end{aligned}$$

Si $2^j a < 1/2$, entonces estas integrales están definidas sobre intervalos ajenos cuya unión se escribe $\Omega_j = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (-2^j a - k, 2^j a - k)$, con $\cap_j \Omega_j = \mathbb{Z}$, el cual tiene medida cero. Por tanto,

$$\|P_j f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{\Omega_j} |\varphi(z)|^2 dz \rightarrow 0, \quad j \rightarrow -\infty$$

por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. □

2.4. Wavelet biortogonales

A partir de las condiciones de ortogonalización de la función de escala $\varphi(t)$ y el hecho de que la función wavelet $\psi(t)$ surge de los complementos ortogonales de los espacios V_j se pudo establecer la descomposición y reconstrucción de una señal al construirse cuatro filtros estrechamente relacionados $h, l, \tilde{h}, \tilde{l}$ estableciéndose una reconstrucción perfecta de la señal. Se pueden establecer condiciones para los filtros finitos $h, l, \tilde{h}, \tilde{l}$ que permiten también una reconstrucción perfecta sin la condición de tomar los complementos ortogonales dando lugar a las wavelet biortogonales. El análisis multirresolución con el que se determinan estas wavelet se define a partir de dos espacios de aproximación

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$$

$$\dots \tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_{-2} \dots,$$

donde los W_j y \tilde{W}_j son los complementos no ortogonales de V_j en V_{j-1} y de \tilde{V}_j en \tilde{V}_{j-1} respectivamente, con $\tilde{W}_j \perp V_j$ y $W_j \perp \tilde{V}_j$. Se establecen los coeficientes para la descomposición y reconstrucción de una señal $c^0 = (c_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$. Descomposición con filtros h y g

$$c_n^1 = \sum_k h_{2n-k} c_k^0 \quad y \quad d_n^1 = \sum_k g_{2n-k+1} c_k^0. \quad (2.4.1)$$

Reconstrucción con filtros \tilde{h} y \tilde{g}

$$\tilde{c}_l^0 = \sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} c_n^1 + \tilde{g}_{2n-l+1} d_n^1 \right]. \quad (2.4.2)$$

Y se determinan las condiciones para la reconstrucción perfecta $\tilde{c}_0 = c_0$

$$\sum_n \left[\tilde{h}_{2n-l} h_{2n-k} + \tilde{g}_{2n-l+1} g_{2n-k+1} \right] = \delta_{lk}$$

la cual es equivalente a

$$\frac{1}{2} \left[h(z) \bar{\tilde{h}}(z) - g(z) \bar{\tilde{g}}(z) \right] = 1 \quad (2.4.3)$$

$$\frac{1}{2} \left[h(-z) \bar{\tilde{h}}(z) - g(-z) \bar{\tilde{g}}(z) \right] = 0,$$

donde $h(z) = \sum_n h_n z^n$ y $\bar{a} = \sum_n a_{-n} z^n = \sum_n a_n z^{-n}$ para $|z| = 1$. De donde $\bar{\tilde{h}}(z)$ y $\bar{\tilde{g}}(z)$ se pueden expresar como producto de polinomios en z

$$\bar{\tilde{h}}(z) = g(-z) p(z) \quad y \quad \bar{\tilde{g}}(z) = h(-z) p(z).$$

($h(-z)$ y $g(-z)$ no tiene ceros en común). Luego de (2.4.3) se obtiene

$$p(z) [h(z) g(-z) + h(-z) g(z)] = 2.$$

Esto sólo es posible si

$$p(z) = \alpha z^k \quad (2.4.4)$$

$$h(z) g(-z) + h(-z) g(z) = 2\alpha^{-1} z^{-k}$$

para $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\tilde{h}(z) = \alpha z^k g(-z) \text{ , } \tilde{g}(z) = \alpha z^k h(-z) \quad (2.4.5)$$

las condiciones (2.4.4), (2.4.5) son suficientes y necesarias para establecer la descomposición y reconstrucción de una señal a partir de (2.4.1), (2.4.2). Tomando $k = 0$ y $\alpha = -1$ se tiene

$$g_n = (-1)^{n+1} \tilde{h}_{-n} \text{ , } \tilde{g} = (-1)^{n+1} h_{-n}.$$

Además las condiciones (2.4.3) y (2.4.5) se transforma en

$$h(z) \tilde{h}(z) + h(-z) \tilde{h}(-z) = 2$$

$$\sum_k h_n \tilde{h}_{n+2k} = \delta_{k0}.$$

Si $h = \tilde{h}$, se obtiene las condiciones establecidas en el caso de las wavelet ortogonales. Para determinar los filtros h y \tilde{h} nos trasladaremos al dominio de la frecuencia considerando las ecuaciones de dilatación en este dominio

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi(2x - n) \longrightarrow \hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^j \xi)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x - n) \longrightarrow \hat{\tilde{\varphi}}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^j \xi)$$

con

$$m_0(2^j \xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi} \text{ y } \tilde{m}_0(2^j \xi) = 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}_n e^{-in\xi}$$

donde $m_0(0) = 1 = \tilde{m}_0(0)$ y $\sum_n h_n = h(1) = \sqrt{2} = \tilde{h}(1) = \sum_n \tilde{h}_n$.

Además,

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_{n+1} \varphi(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n \tilde{h}_{-n-1} \varphi(2x - n)$$

$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{g}_{n+1} \tilde{\varphi}(2x - n) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{-n-1} \tilde{\varphi}(2x - n)$. En el dominio de la frecuencia

$$\widehat{\psi}(x) = e^{i\xi/2} \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \tilde{\varphi}(\xi/2)$$

$$\widetilde{\psi}(x) = e^{i\xi/2} \overline{\tilde{m}_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \tilde{\varphi}(\xi/2),$$

esta función wavelet generaran una base Riesz si $m_0(\pi) = 0 = \widetilde{m}_0(\pi)$

$$\sum_n (-1)^n h_n = h(-1) = 0 = \widetilde{h}(-1) = \sum_n (-1)^n \widetilde{h}_n,$$

es decir, si $\psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$

$$\widetilde{\psi}_{jk}(x) = 2^{-j/2} \widetilde{\psi}(2^{-j}x - k)$$

entonces

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \widetilde{\psi}_{jk}$$

para $f \in L^2(\mathbb{R})$. El filtro h_n está determinado por los coeficientes del polinomio $m_0(\xi)$ que a su vez establece la función escala φ la cual es simétrica si $m_0(-\xi) = m_0(\xi)$ ó $m_0(\xi) = \text{polinomio en } \cos \xi$.

La función Haar, φ_{Haar} , es simétrica con respecto $x = 1/2$, $\varphi_{Haar}(1-x) = \varphi_{Haar}(x)$ le corresponde un polinomio trigonométrico $m_0(\xi)$ que satisface $m_0(-\xi) = e^{i\xi} m_0(\xi)$ ó $m_0(\xi) = e^{-i\xi/2} \cos(\xi/2)$ polinomio en $\cos \xi$. La condición para una reconstrucción perfecta está dada por $h(z) \overline{\widetilde{h}(z)} + h(-z) \overline{\widetilde{h}(-z)} = 2$ o equivalentemente

$$m_0(\xi) \overline{\widetilde{m}_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{\widetilde{m}_0(\xi + \pi)} = 1. \quad (2.4.6)$$

Así, si $\widetilde{m}_0(\xi)$ es solución de (2.4.6) para un m_0 fijo tal que $m_0(-\xi) = m_0(\xi)$ entonces $\widetilde{m}'_0 = \frac{1}{2}[\widetilde{m}_0(\xi) + \widetilde{m}_0(-\xi)]$ es también solución de (2.4.6) que satisface $\widetilde{m}'_0(\xi) = \widetilde{m}'_0(-\xi)$. La siguiente proposición resume algunas propiedades útiles en sistemas biortogonales

Proposición 2.4.1. *Sea $m_0(\xi)$ un polinomio trigonométrico con coeficientes reales*

- a) (i) Si $m_0(-\xi) = m_0(\xi)$ entonces $m_0(\xi) = (\cos \xi/2)^{2l} P_0(\cos \xi)$.
(ii) Si $m_0(-\xi) = e^{-i\xi} m_0(\xi)$ entonces $m_0(\xi) = e^{-i\xi/2} (\cos \xi/2)^{2l+1} P_0(\cos \xi)$, donde P_0 es un polinomio tal que $P_0(-1) \neq 0$ y $l \in \mathbb{N}$.

- b) Si \tilde{m}_0 es solución de (2.4.6) entonces $\tilde{m}_0(\xi) = (\cos \xi/2)^{2\tilde{l}} \tilde{P}_0(\cos \xi)$ (en el caso a. i) ó $\tilde{m}_0(\xi) = e^{-i\xi/2} (\cos \xi/2)^{2\tilde{l}+1} \tilde{P}_0(\cos \xi)$ (en el caso a. ii) con $\tilde{P}_0(-1) \neq 0$ y $\tilde{l} \in \mathbb{N}$, donde P_0 y \tilde{P}_0 son construidos por

$$\tilde{P}_0(\cos \xi) \tilde{P}_0(\cos \xi) = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} \left(\frac{\text{sen}^2 \xi}{2} \right)^n + \left(\frac{\text{sen}^2 \xi}{2} \right)^k R(\cos \xi)$$

con $k = l + \tilde{l}$ y R un polinomio impar.

Las funciones ${}_N\varphi$ B-spline de orden N proporcionan polinomios simétricos m_0

$$\text{B-spline constante } {}_1\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

$$\text{B-spline lineal } {}_2\varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

$$\text{B-spline cuadrática } {}_3\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^2/2, & -1 \leq x \leq 0 \\ -(x-1/2)^2 + 3/4, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Se verifica que ${}_{2L}\phi(-x) = {}_{2L}\phi(x)$ y ${}_{2L+1}\phi(1-x) = {}_{2L+1}\phi(x)$. El polinomio ${}_N m_0$ correspondiente a ${}_N\phi(x)$ esta dado por

$$\begin{aligned} {}_N m_0(\xi) &= \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2} \right) N e^{i\xi \lfloor N/2 \rfloor} = e^{-ik\xi/2} \left(\frac{\cos \xi}{2} \right)^N \\ &= \sum_{n=-\lfloor N/2 \rfloor}^{n=\lfloor N/2 \rfloor} 2^{-N} \binom{N}{n + \lfloor N/2 \rfloor} e^{-in\xi}, \end{aligned}$$

donde ${}_{2L}m_0(-\xi) = {}_{2L}m_0(\xi)$ y ${}_{2L+1}m_0(-\xi) = e^{i\xi} {}_{2L+1}m_0(\xi)$ (tomando $l = L$ y $P_0 = 1$). El polinomio simétrico ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0(\xi)$ asociado a ${}_N m_0(\xi)$ que satisface

30 Introducción a las wavelets y método de Elementos Finitos

la condición (2.4.6) está dado por

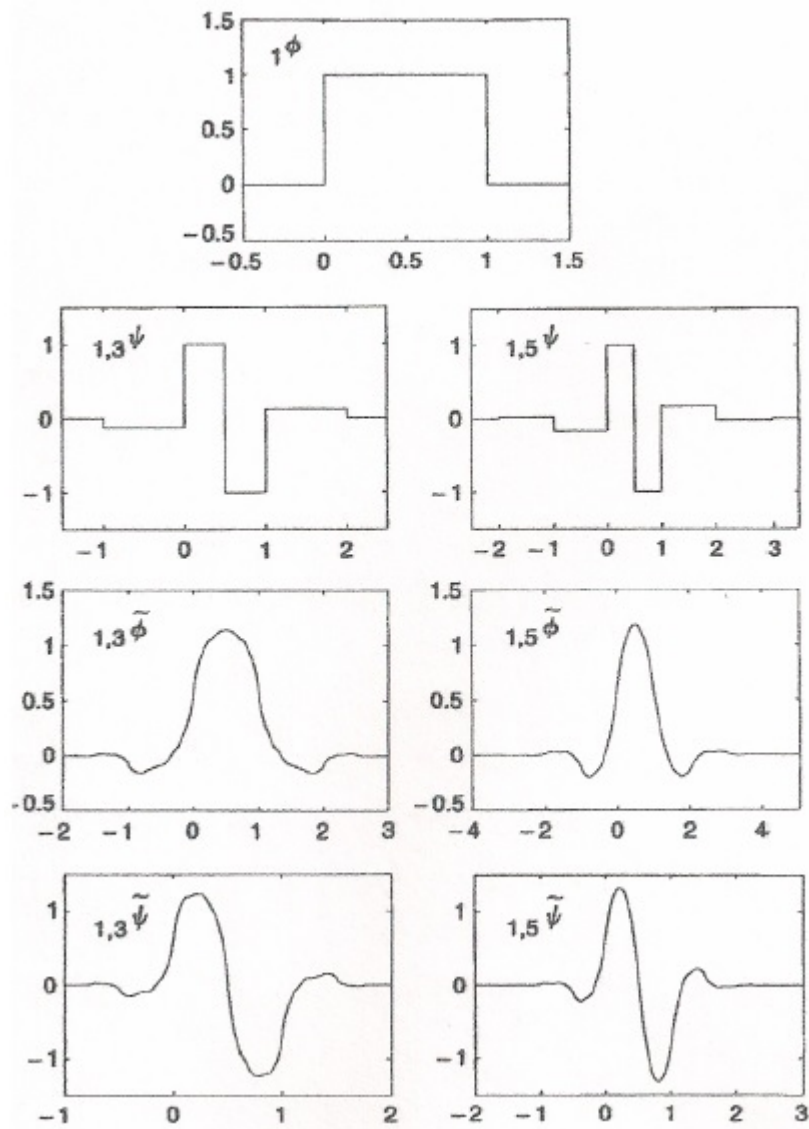
$${}_{N,\tilde{N}}m_0(\xi) = e^{-ik\xi/2} (\cos \xi/2)^{\tilde{N}} \left[\sum_{n=0}^{k-1} \binom{k-1+n}{n} (\sin \xi/2)^{2n} + (\sin \xi/2)^{2k} R(\cos \xi) \right],$$

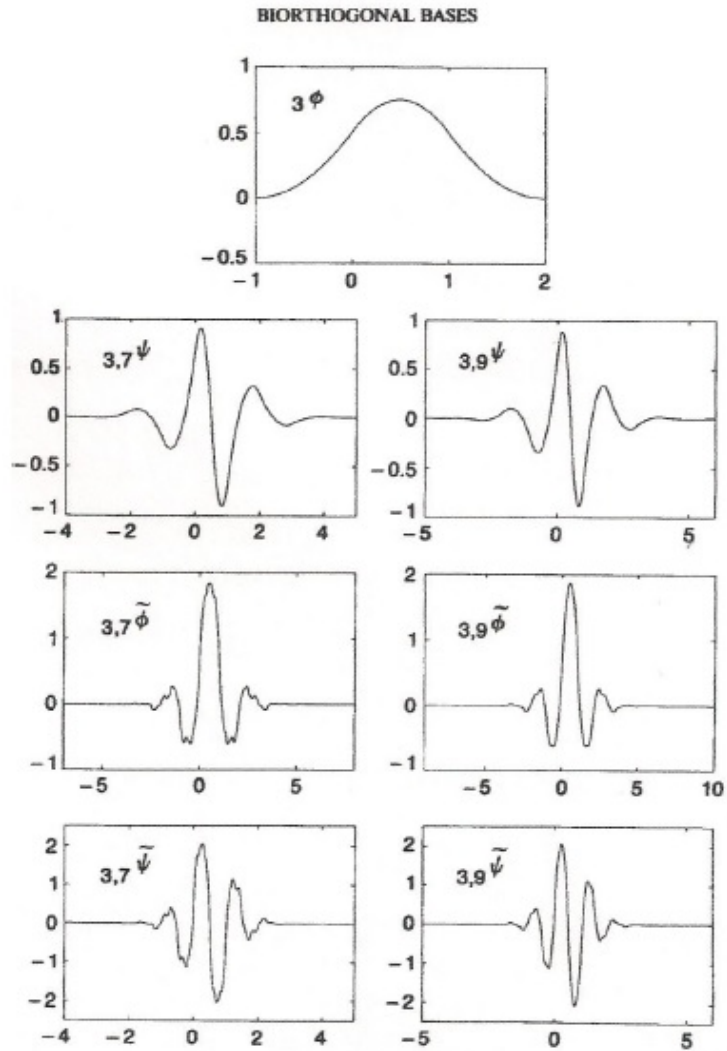
donde $\tilde{N} \geq 1$, $N + \tilde{N} = 2k$, y R es un polinomio par.

La siguiente lista muestra los coeficientes de los polinomios ${}_N m_0(\xi)$ y ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0(\xi)$ para los órdenes N y \tilde{N} de las funciones B -spline y las respectivas gráficas ${}_N \varphi(x)$, ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\varphi}(x)$, ${}_N \psi(x)$, ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}$. Los correspondientes términos de los filtros ${}_N h_k$ y ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{h}_k$ se obtiene multiplicando por $\sqrt{2}$ los coeficientes de z^k en ${}_N m_0$ y ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0$ respectivamente.

N	${}_N m_0$	\tilde{N}	${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0$
1	$\frac{1}{2}(1+z)$	1	$\frac{1}{2}(1+z)$
		3	$-\frac{z^{-2}}{16} + \frac{z^{-1}}{16} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{16} - \frac{z^3}{16}$
		5	$\frac{3z^{-4}}{256} - \frac{3z^{-3}}{256} - \frac{11z^{-2}}{128} + \frac{11z^{-1}}{128} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{11z^2}{128} - \frac{11z^3}{128} - \frac{3z^4}{256} + \frac{3z^5}{256}$
3	$\frac{1}{8}(z^{-1} + 3 + 3z + z^2)$	1	$-\frac{z^{-1}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3z}{4} - \frac{3z^4}{4}$
		3	$\frac{3z^{-3}}{64} - \frac{9z^{-2}}{64} - \frac{7z^{-1}}{64} + \frac{45}{64} + \frac{45z}{64} - \frac{7z^2}{64} - \frac{9z^3}{64} + \frac{3z^4}{64}$
		7	$2^{-14}(35z^{-7} - 105z^{-6} - 195z^{-5} + 865z^{-4} + 336z^{-3} - 3489z^{-2} - 307z^{-1} + 11025 + 11025z \dots)$

Los correspondientes términos de los filtros ${}_N h_k$ y ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{h}_k$ se obtiene multiplicando $\sqrt{2}$ los coeficientes de z^k en ${}_N m_0$ y ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{m}_0$ respectivamente.





2.5. Método de Elementos Finitos

El desarrollo de este método comienza en 1940, específicamente en el campo de la ingeniería estructural, en esta década se trato barras o vigas para el cálculo de esfuerzos en sólidos. En 1947 se desarrollaron métodos de rigidez el cual podría ser considerado como una alternativa viable para el análisis estático de estructuras de aeronaves. Sin embargo, sus ecuaciones

requerían de una gran dedicación y labor para su solución a mano.

En 1954 desarrollaron el análisis estructural por medio de matrices, este desarrollo marcaría una tendencia en el método de los elementos finitos (MEF). La primera vez que se trato de analizar cuerpos de 2 dimensiones, fué en 1956 logrando la implementación de matrices de rigidez, este método comunmente conocido como El Método Directo de Rigidez. Al mismo tiempo al desarrollo de las computadoras digitales a finales de los años cincuenta, trabajos como los de Turner, desarrollaron ecuaciones de rigidez fundada en el MEF, pero solo hasta los años 60 cuando la frase de Elementos Finitos fué introducida para describir este tipo de trabajos.

La frase de Elementos Finitos fué introducida por Clough, cuando por primera vez se usaron elementos triangulares y rectangulares para el análisis de esfuerzos. Hasta el año 1961 Martin aplicó el MEF a problemas tridimensionales con el desarrollo de matrices de rigidez tetraedricas. Trabajos adicionales realizados por Galagher en 1962, complementaron la técnica de matrices tetraédricas para el estudio de sólidos simétricos en los ejes.

La mayoría de trabajos desarrollados para el MEF se enfocaron en la modelización matemática de problemas mecánicos que complementarían únicamente deformaciones elásticas. Trabajos como los de Zienkiewicz complementaron aun mas el método extendiendo los alcances a problemas que involucran visco elasticidad en 1968.

En 1976 Belytschko mejoró las técnicas numéricas para la solución de sistemas de ecuaciones, a partir de los 80 la mejora en el hardware y el MEF viviría un auge sin precedentes. El rápido mundo de la computación empezó a construir software que implementaría el MEF y así empezó a revolucionar este método en todos los campos de la ingeniería de alimentos, mecánica, formula uno, aeroespacial, bioingeniería, hasta simular sistemas atmosféricos para predecir el estado del tiempo.

Ingenieros matemáticos y científicos continúan desarrollando nuevas aplicaciones para este método en diferentes disciplinas y áreas, ya que la necesidad de productos mas confiables, eficientes y optimizados está creando una tendencia para nuevos productos[58]. La industria automotriz es un ejemplo de la aplicación de estos sistemas de simulación para la optimización del desempeño de vehículos, ya que esto ha permitido a los diseñadores reducir costos y teniendo la certeza que el diseño es confiable [58].

El desarrollo de técnicas numéricas para la obtención de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se ha incrementado en las últimas

décadas. Entre estas técnicas están los métodos de elementos finitos, diferencias finitas y en forma más general el método de Galerkin [13]. Es claro que en cada método se realiza un estudio detallado de la eficiencia y convergencia del método. Esta moderna teoría ha experimentado un gran desarrollo en las dos últimas décadas mostrándose muy eficiente en donde otras técnicas, como por ejemplo, la transformada de Fourier no resultaban satisfactorias.

Al solucionar una ecuación diferencial parcial de forma analítica, se desea encontrar una función $u \in V$, dicho espacio V es de dimensión infinita y se quiere con el método de los Elementos Finitos aproximar el espacio V mediante otro espacio V_h de dimensión finita, para ello se arma una malla conformada generalmente por segmentos o triángulos u otro polinomio que se llama elemento, de este modo se construye el espacio aproximado [13].

2.6. Formulación del método

El método de los elementos finitos se utiliza en diferentes problemas. Para este trabajo el interés principal consiste en determinar una aproximación para la solución del problema variacional de frontera.

Definición 2.6.1. *Malla de elementos finitos: La malla de elementos finitos es el conjunto formado por E elementos finitos y G nodos que definen el dominio de definición. Los elementos finitos son el conjunto finito formado por los E subdominios $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_E$, que se obtienen al dividir el dominio de definición Ω del problema variacional $a(u, v) = \langle l, v \rangle$ para todo $v \in V$, de tal manera que no se superponen y su unión es igual al dominio inicial, esto es,*

$$\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset \quad y \quad \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e = \bar{\Omega} \quad (2.6.1)$$

Por otra parte, los nodos o puntos nodales son puntos que generalmente se ubican en los vértices de los elementos, aunque es posible ubicar nodos adicionales contenidos en los elementos [46].

Si el dominio Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^2 , entonces el dominio será una forma poligonal cuya frontera Γ está compuesta de segmentos de recta y los nodos son los puntos vértices de cada uno de los segmentos poligonales o en

sus puntos medios. En el caso en que el dominio de definición sea en \mathbb{R} , los elementos serán subintervalos, cuyos extremos serán los nodos.

Considérese una sucesión de subespacios de un espacio de Hilbert V , de dimensión finita $\{V^h\}_{n=1}^\infty$ que converge a V , tal que $\bigcup_{h=1}^\infty V^h = V$ donde $V^h \subset V^{h+1} \subset V$, cuya base son las funciones N_i , con $i = 1, \dots, G$, esto es $V^h = \text{gen}\{N_i\}_{i=1}^G$.

Las funciones base N_i , de V^h , deben satisfacer las condiciones de frontera esenciales y además cumplen las siguientes propiedades:

- Las funciones N_i son acotadas y continuas en el dominio de definición, es decir, $N_i \in C(\bar{\Omega})$.
- Hay un total de G funciones base, una por cada nodo. N_i es diferente de cero solamente en los elementos que están conectados al nodo i .
- N_i es igual a 1 en el nodo i , e igual a cero en los otros nodos:
$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
- La restricción $N_i^{(e)}$ de N_i para Ω_e es una función polinomial, esto es $N_i|_{\Omega_e} \equiv N_i^{(e)}$, con $N_i^{(e)} \in P_k(\Omega_e)$ para algún $k \geq 1$, donde $P_k(\Omega_e)$ es el espacio de los polinomios de grado mayor o igual a k sobre Ω_e .

Así el problema consiste en determinar la función aproximada $u_h \in V^h \subset V$ tal que satisface el problema

$$a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \text{para todo } v_h \in V^h \quad (2.6.2)$$

donde $u_h = \sum_{i=1}^G a_i N_i(x)$ y $v_h = \sum_{j=1}^G b_j N_j(x)$ por tanto al sustituir en (3.5.8) se obtiene

$$a\left(\sum_{i=1}^G a_i N_i, \sum_{j=1}^G b_j N_j\right) = \left\langle l, \sum_{j=1}^G b_j N_j \right\rangle \quad (2.6.3)$$

de donde por la bilinealidad de $a(\cdot, \cdot)$ y la linealidad de l se tiene que

$$\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^G a(N_i, N_j) a_i b_j = \sum_{j=1}^G \langle l, N_j \rangle b_j \quad (2.6.4)$$

al igualar a cero y reordenar

$$\sum_{j=1}^G b_j \left(\sum_{i=1}^G a(N_i, N_j) a_i - \langle l, N_j \rangle \right) = 0 \quad (2.6.5)$$

Si se define la matriz de rigidez K , con $K_{ij} = a(N_i, N_j)$ y el vector de carga F , con $F_j = \langle l, N_j \rangle$ se puede escribir a (3.5.12) como

$$\sum_{j=1}^G b_j \left(\sum_{i=1}^G K_{ij} a_i - F_j \right) = 0 \quad (2.6.6)$$

Teniendo en cuenta que b_j son coeficientes arbitrarios entonces para que la igualdad (3.5.13) se tenga se debe cumplir que

$$\sum_{i=1}^G K_{ij} a_i = F_j$$

el cual es un sistema de ecuaciones con incógnitas a_i .

Para calcular la solución aproximada se obtiene a $K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(N_i, N_j) dx$, la cual se puede escribir como una sumatoria de integrales sobre cada uno de los elementos finitos, por lo tanto

$$\begin{aligned} a(N_i, N_j) &= \int_{\Omega} \mathcal{F}(N_i, N_j) d\Omega \\ &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{F}(N_i, N_j) d\Omega_e \\ &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{F}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) d\Omega_e \\ &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}) \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

De manera similar se halla a F_j , así

$$\begin{aligned}
 F_j &= \langle l, N_j \rangle = \int_{\Omega} \mathcal{G}(N_j) d\Omega \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{G}(N_j) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \mathcal{G}(N_j^{(e)}) d\Omega_e \\
 &= \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \langle l^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

De (3.5.14) y (3.5.15) se puede concluir que para obtener la matriz K y el vector F es suficiente con sumar los aportes de las matrices $K^{(e)}$ y $F^{(e)}$ obtenidas para cada uno de los elementos considerados, esto es

$$K = \sum_{e=1}^E K^{(e)} \quad y \quad F = \sum_{e=1}^E F^{(e)} \tag{2.6.9}$$

en donde $K_{ij}^{(e)} = a^{(e)}(N_i^{(e)}, N_j^{(e)})$ y $F_j^{(e)} = \langle l^{(e)}, N_j^{(e)} \rangle$.

Dependiendo del tipo de funciones elegidas como funciones base, el método de elementos finitos será de diferente tipo. Si N_i y N_j son funciones del mismo tipo, entonces el método se denomina *Método de Galerkin*. Si se considera el problema (3.5.8) en donde $u_h \in U^h$ y $v_h \in V^h$ con U^h y V^h subespacios finito dimensionales del espacio de Hilbert V , con bases $\{N_i\}_{i=1}^G$ y $\{\phi_j\}_{j=1}^G$ tales que $K_{ij} = a(N_i, \phi_j)$ y $F_j = \langle l, \phi_j \rangle$ entonces el método toma el nombre de *Petrov - Galerkin*, en muchos artículos o textos de estudio se le denomina a las funciones N_i , como *funciones de forma* y a las funciones ϕ_j como *funciones base o de peso*.

CAPÍTULO 3

La ecuación de Fisher-KPP

3.1. Introducción

Este capítulo tiene como objetivo mostrar algunos resultados de la ecuación diferencial de Fisher-KPP [42]

$$u_t - \alpha u_{xx} = \beta u \left(1 - \frac{u}{\theta} \right) \quad (3.1.1)$$

Se considera la difusión en tres dimensiones espaciales. Sea S la superficie que encierra al Volumen V . La ecuación de conservación general dice que la tasa de cambio de la cantidad de material en un volumen V , es igual a la velocidad de flujo del material a través de la superficie S en V , más el material creado en V . Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c(x, t) dv = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_V f dv \quad (3.1.2)$$

Donde \mathbf{J} es el flujo de material y f representa la fuente del material, el cual puede ser una función de c , x y t . Aplicando el teorema de la divergencia de la integral de superficie y asumiendo que $c(x, t)$ es continua, la última ecuación se convierte en

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} - f(c, x, t) \right] dv = 0 \quad (3.1.3)$$

Dado que el volumen V es arbitrario, el integrando debe ser cero y así la ecuación de conservación para c es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = f(c, x, t) \quad (3.1.4)$$

Esta ecuación se cumple para un flujo de transporte general \mathbf{J} , ya sea por difusión o de algún otro proceso.

Si el proceso es de difusión clásica [42] entonces la generalización por ejemplo es

$$\mathbf{J} = -D\nabla c \quad (3.1.5)$$

Y la ecuación (3.1.4) se convierte en

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f + \nabla \cdot (D\nabla c) \quad (3.1.6)$$

Donde D puede ser una función de x y c y f una función de c , x y t . El término f en un contexto ecológico, por ejemplo, podría representar procesos de Nacimiento-Muerte y c es la densidad de la población. Con el crecimiento logístico poblacional $f = \beta u(1 - \frac{u}{\theta})$, donde β es la tasa de reproducción lineal, θ es la capacidad de carga del ambiente. Resultando la ecuación con D constante, es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta u(1 - \frac{u}{\theta}) + D\nabla^2 u \quad (3.1.7)$$

ahora la conocemos como la ecuación de Fisher-Kolmogoroff; después Fisher en (1937) propuso la versión unidimensional como un modelo para la propagación de un gen ventajoso [6] en una población y Kolmogoroff en (1937) estudió la ecuación en profundidad y obtuvo algunos de los resultados analíticos básicos [42].

3.2. Soluciones analíticas de la ecuación Fisher-KPP

Sea I un intervalo cerrado de \mathbb{R} y sea $u : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función, donde \mathbb{R}^+ representa los reales positivos. Sea α un número real positivo.

$$u_t - \alpha u_{xx} = f(u) \quad (3.2.1)$$

donde f es una función real continua tomando valores en algún intervalo cerrado.

3.2.1. Problema linealizado

Sea n un entero positivo. Consideremos la ecuación (3.2.1) definida la variable espacial sobre el intervalo $I = [0, 1]$ con la siguiente función f y el conjunto de condiciones Iniciales-Frontera:

$$f(u) = \beta u; \quad u(x, 0) = \sin(n\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Aplicando inmediatamente el método de separación de variables, se obtiene la solución exacta de este problema,

$$u(x, t) = e^{t(\beta - \alpha n^2 \pi^2)} \sin(n\pi x). \quad (3.2.3)$$

3.2.2. Problema no linealizado

Consideremos la ecuación (3.2.1) en la forma clásica y definida espacialmente en todo \mathbb{R} , esto es, asumimos que f es la expresión de la ecuación Logística generalizada $f(u) = \beta u(1 - u^p)$, con $p = 1$. Por simplicidad tomamos a $\alpha = 1$. Conociendo que el modelo tiene soluciones de onda viajera, de la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{[1 + C \exp(-\frac{5}{6}\beta t \pm \frac{1}{6}\sqrt{6\beta}x)]^2} \quad (3.2.4)$$

donde C es una constante arbitraria [45]. Esta formula es la expresión de un frente de onda viajera para una velocidad especial igual a $\frac{5}{\sqrt{6}}$ [38].

3.3. Solución de Onda Viajera

Una onda viajera es aquella que viaja sin cambiar de forma. Entonces se toma la función $u(x, t)$ de la siguiente manera

$$u(x, t) = u(x - ct) = u(z), \quad z = x - ct \quad (3.3.1)$$

Donde $u(x, t)$ es una onda viajera y se mueve a una velocidad constante c en la dirección positiva de x . Generalmente c se tiene que determinar.

Sea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(u - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3.2)$$

en la situación espacial homogénea los puntos de equilibrio son $u = 0$ que es inestable y $u = 1$ que es estable. Esto sugiere que podemos buscar soluciones de onda viajera para $0 \leq u \leq 1$.

Supongamos que existe una solución de onda viajera de la forma

$$u(x, t) = U(z), \quad z = x - ct, \quad (3.3.3)$$

donde c es la velocidad de onda. Como (3.3.3) es invariante si $x \rightarrow -x$, c debe ser positivo o no negativo. Para ser más específicos asumiremos que $c \geq 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.3.3) tenemos

$$U'' + cU' + U(1 - U) = 0, \quad (3.3.4)$$

donde las $U' = \frac{dU}{dz}$. Una solución de onda es cuando U es un estado estacionario para $z \rightarrow -\infty$ y el otro estado estacionario ocurre cuando $z \rightarrow \infty$. Así tenemos un problema de eigenvalores y un valor de c por determinar tal que la solución U de (3.3.4) existe y además satisface

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 1 \quad (3.3.5)$$

Entonces tenemos el sistema

$$U' = V, \quad V' = -cV - U(1 - U), \quad (3.3.6)$$

que origina trayectorias en el plano fase como soluciones de

$$\frac{dV}{dU} = \frac{-cV - U(1 - U)}{V} \quad (3.3.7)$$

Los puntos singulares para (U, V) son $(0, 0)$ y $(1, 0)$ que son los estados estacionarios. Un análisis de estabilidad lineal lleva a que los eigenvalores λ de los puntos singulares son

- Para $(0, 0)$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[-c \pm (c^2 - 4)^{\frac{1}{2}}] \quad (3.3.8)$$

Si $c^2 > 4$ el nodo es estable.
 Si $c^2 < 4$ el foco es estable.

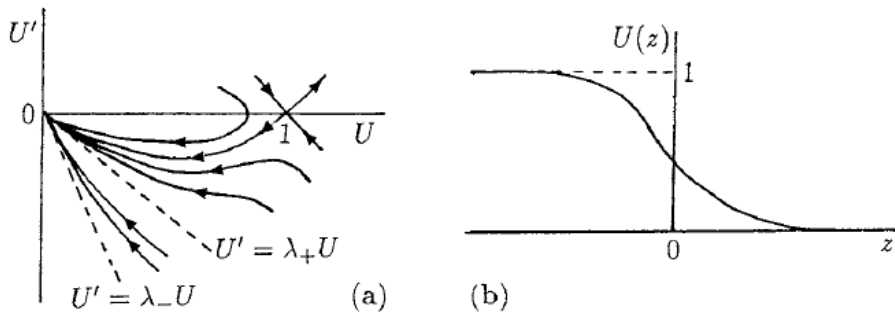


Figura 3.1: (a) Trayectorias en el plano fase de la ecuación(3.3.4) para la solución de onda viajera: aquí $c^2 > 4$. (b) Solución de onda viajera para la ecuación de Fisher (3.3.3) $c \geq 2$.

- Para $(0, 0)$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[-c \pm (c^2 + 4)^{\frac{1}{2}}] \quad (3.3.9)$$

Es un punto de silla para todo c .

La ecuación de Fisher tiene una solución de onda viajera para $c > 2$ y su estabilidad depende del comportamiento de la condición inicial para valores grandes de $|x|$.

3.4. Método de Diferencias Finitas de la ecuación de Fisher-KPP

Aproximamos soluciones de (3.2.1) en un intervalo espacial de la forma $[a, b]$, sobre el periodo de tiempo $[0, T]$ [33]. En efecto, tomamos la siguiente partición del intervalo $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$ de $[a, b]$, con norma $\Delta x = (b - a)/M$, y una partición regular de $[0, T]$, con norma $\Delta T = T/M$, de la forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$. Para denotar el valor aproximado de u en el punto x_n y el tiempo t_n se tomará u_n^k . En esos términos de esquema de diferencias finitas, usado para aproximar las soluciones de (3.2.1) está dada por

$$\delta_{t,\xi} u_n^k = k \hat{\delta}_x^{(2)} u_n^k + \frac{1}{2} [f(u_{n+1}^k) + f(u_{n-1}^k)], \quad (3.4.1)$$

donde ξ es un número real en el intervalo $[0, 1]$. La siguiente notación, se usa por simplicidad

$$\begin{aligned} \delta_{t,\xi} u_n^k &= (1 - \xi) \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\Delta t} + \xi \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k-1}}{2\Delta t}, \\ \hat{\delta}_x^{(2)} u_n^k &= \frac{u_{n+1}^k - (u_{n+1}^{k+1} + u_{n-1}^{k-1}) + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Sea f dada por $f(u) = \beta u$. Un simple análisis establece en el esquema de Diferencias-Finitas (3.4.1); en general, una aproximación consistente para las soluciones de (3.2.1) de orden $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$ es

$$\begin{aligned} \delta_{t,\xi} u_n^k &\approx \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_k) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_n, t_k), & \text{si } \xi = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t_k) + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_n, t_k), & \text{si } \xi = 1 \end{cases} \\ \hat{\delta}_x^{(2)} u_n^k &\approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_n, t_k) - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_n, t_k), \\ \frac{u_{n+1}^k + u_{n-1}^k}{2} &\approx u(x_n, t_k) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t_k). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

El esquema de diferencias finitas hacía adelante de (3.4.1), es presentado en la Figura 3.2. Finalmente, de este punto tenemos que

$$R = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{3.4.4}$$

Asumiendo que R es finita, podemos escribir $R\Delta t = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$. Entonces, se deduce que el siguiente método numérico es una aproximación consistente de (3.2.1) de orden

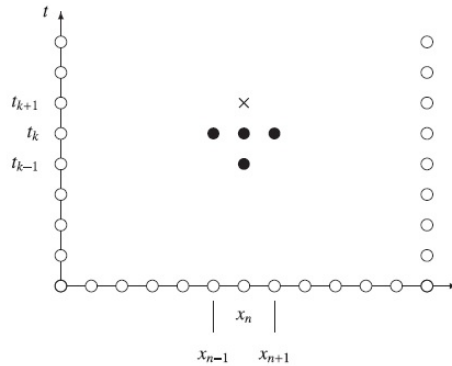


Figura 3.2: El esquema de diferencia adelantada para la aproximación de la ecuación diferencial parcial (3.2.1) en el tiempo t_k , usando el esquema (3.4.1). Los círculos negros representan aproximaciones a las soluciones en el tiempo t_{k-1} y t_k en el esquema (3.4.1), y las cruces indican la aproximación desconocida en el tiempo t_{k+1} .

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2 + (\Delta t/\Delta x)^2) = \left((1+R)\Delta t + (\Delta x)^2 \right) \equiv O(\Delta t + (\Delta x)^2) \tag{3.4.5}$$

3.4.1. Problema linealizado

Consideramos la ecuación diferencial parcial (3.2.1) con constante de difusividad igual a 0,1 con función f y condiciones de Inicial-Frontera establecidos por

$$f(u) = \beta u; \quad u(x, 0) = \sin(n\pi x), \quad x \in [0, 1]; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.4.6}$$

con $\beta = 0,5$ y $n = 1$, sobre el intervalo espacial $[0, 1]$. Los siguientes son valores computacionales: $\Delta x = 0,025$, $\Delta t = 0,001$ y $\xi = 0,4$, en tal

caso $R = 1,6$. Bajo estas condiciones, la figura 3.3 representa la solución aproximada a través del esquema de diferencias finitas de (3.4.1).

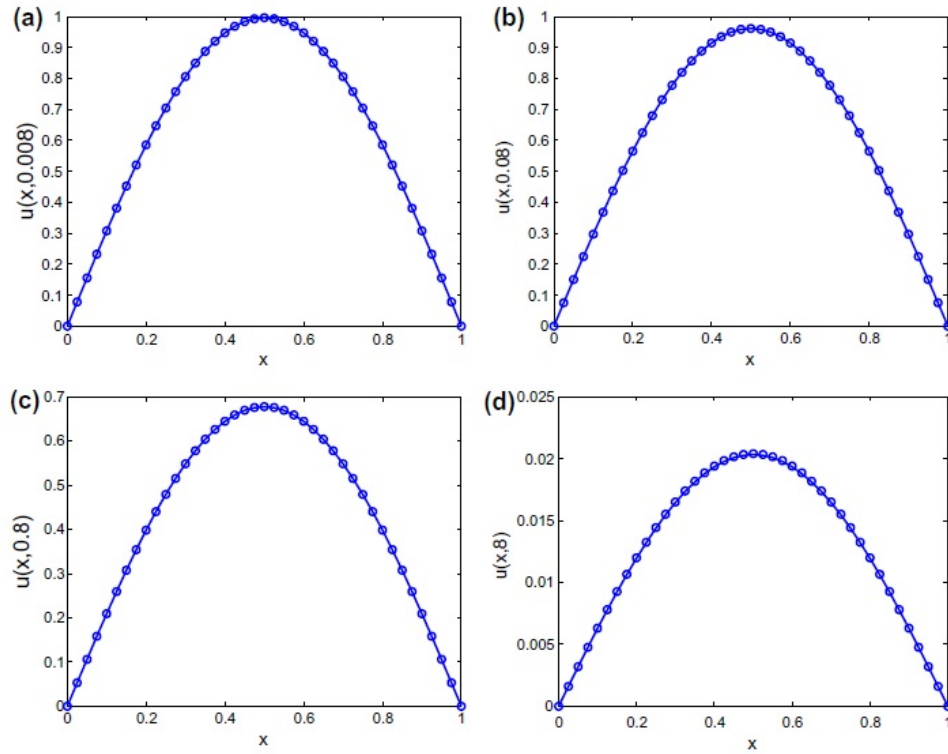


Figura 3.3: Los círculos es la Gráfica de las soluciones aproximadas y la línea continua representa las soluciones exactas de (3.2.1) con condiciones Iniciales-Frontera establecidas en 3.4.6, con $n = 1$ sobre el intervalo espacial $[0, 1]$ y $f(u) = 0,5u$, para cuatro tiempos diferentes: $t = 0,008, 0,08, 0,8$ y 8 . Una constante de difusividad $0,1$ y $\xi = 0,4$.

La tabla (3.1), representa las soluciones aproximadas respecto a las soluciones exactas para cada valor.

Tiempo	Diferencias relativas (%)		
	ρ_1	ρ_2	ρ_∞
0,008	$2,8044 \times 10^{-4}$	$2,8044 \times 10^{-4}$	$2,8044 \times 10^{-4}$
0,08	$3,1486 \times 10^{-3}$	$3,1486 \times 10^{-3}$	$3,1486 \times 10^{-3}$
0,8	$3,1835 \times 10^{-2}$	$3,1835 \times 10^{-2}$	$3,1835 \times 10^{-2}$
8	$3,1915 \times 10^{-1}$	$3,1915 \times 10^{-1}$	$3,1915 \times 10^{-1}$

Cuadro 3.1: Diferencias relativas (en porcentajes) de cuatro soluciones aproximadas presentadas en Fig. (3.3) respecto a sus correspondientes soluciones exactas para tres normas clásicas en \mathbb{R}^{N+1} .

3.4.2. Problema no linealizado

Considere la ecuación (3.2.1) definida espacialmente en la recta real, con un tiempo inicial $t = 0$ y velocidades provistas por

$$u(x, t) = \frac{1}{\left[1 + C \exp\left(-\frac{5}{6}\beta t \pm \frac{1}{6}\sqrt{6\beta}x\right)\right]^2} \quad (3.4.7)$$

alrededor del tiempo inicial. Tomando valores para los parámetros $C = 4$, $k = 1$ y $\beta = 2$ con $p = 1$. Numéricamente, tomamos un paso espacial igual a 1, un paso de tiempo de 0,001 y valor de $\xi = 0,4$.

Computacionalmente, se toma el dominio $[-100, 100]$ y se impone condiciones de frontera $u(-100, t) = 1$ y $u(100, t) = 0$ para periodos finitos de tiempo. En estas circunstancias, Fig. 3.4 presenta las soluciones aproximadas y las soluciones exactas del problema descrito anteriormente, para cuatro tiempos diferentes. Los resultados muestran una excelente aproximación entre las simuladas y las soluciones analíticas.

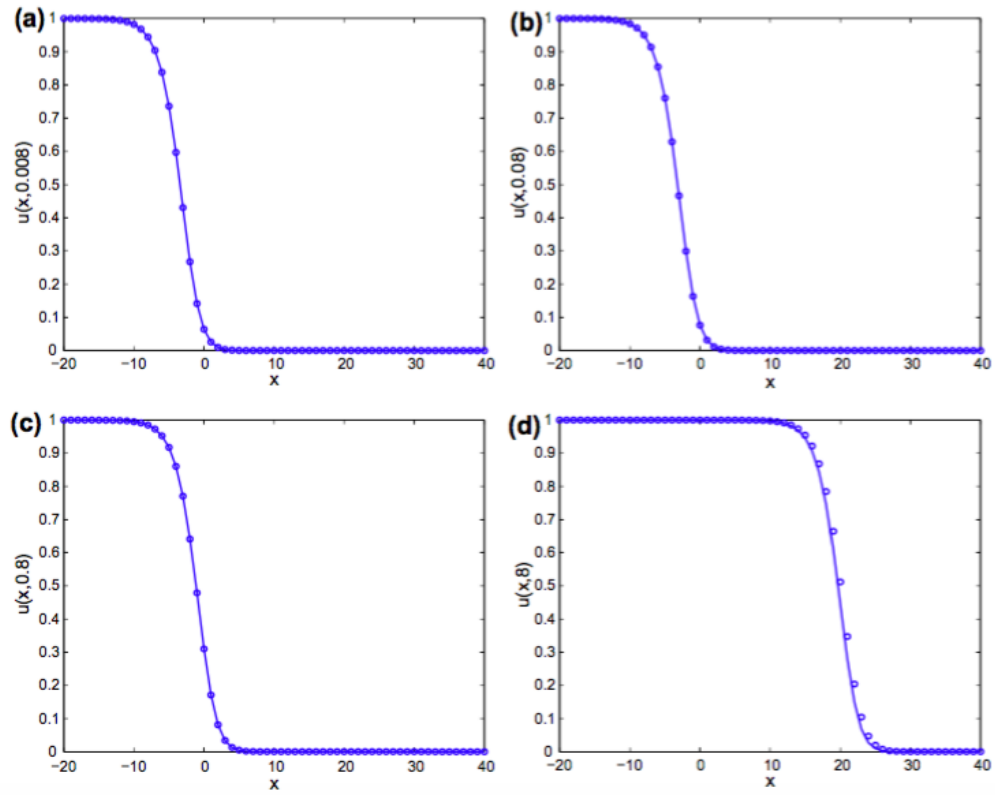


Figura 3.4: Los círculos representan la gráfica de las soluciones aproximadas y la línea continua representa las soluciones exactas sobre la recta real, de la ecuación (3.2.1) con condiciones iniciales dadas por (3.4.7) en $t = 0$, con $C = 4$ y $f(u) = 2u(1 - u)$, para cuatro tiempos diferentes: $t = 0,008$, $0,08$, $0,8$ y 8 .

3.5 Solución de la ecuación de Fisher por el método de la ecuación simple modificada 49

Tiempo	Diferencias relativas (%)			Tiempo de ordenador (s)
	ρ_1	ρ_2	ρ_∞	
0,008	$8,1676 \times 10^{-4}$	$1,6387 \times 10^{-3}$	$5,7222 \times 10^{-3}$	0,0096
0,08	$5,6647 \times 10^{-3}$	$8,4370 \times 10^{-3}$	$1,9819 \times 10^{-2}$	0,0264
0,8	$3,9346 \times 10^{-2}$	$6,5636 \times 10^{-2}$	$1,8993 \times 10^{-1}$	0,1018
8	1,0151	2,2171	6,7959	0,8921

Cuadro 3.2: Diferencias relativas (en porcentajes) y corriendo tiempos (en segundos) de cuatro soluciones aproximadas presentadas en Fig. 3.4 utilizando los mismos parámetros del modelo y el del ordenador empleado para producir la tabla 3.2.

3.5. Solución de la ecuación de Fisher por el método de la ecuación simple modificada

En esta sección aplicamos el método de la ecuación simple modificada para encontrar soluciones exactas de la ecuación KPP

$$u_t - u_{xx} + \mu u + \gamma u^2 + \delta u^3 = 0, \quad (3.5.1)$$

donde μ , γ y δ son constantes reales. Este método tiene cuatro pasos [56]:

1. Usando la transformación de onda

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad c = 1 \quad (3.5.2)$$

para reducir la ecuación (3.5.1) en una ODE.

2. Suponga que la ODE tiene soluciones de la forma

$$u(\xi) = \sum_{k=0}^N A_k \left[\frac{\Psi'(\xi)}{\Psi(\xi)} \right]^k \quad (3.5.3)$$

donde A_k son constantes a ser determinadas, tal que $A_N \neq 0$, y $\Psi(\xi)$ es una función desconocida que debe ser determinada después.

3. Para determinar el entero positivo N en la ecuación (3.5.3) consideramos el balance homogéneo entre el orden de las derivadas y el término no lineal en la ecuación ODE.
4. Sustituya la ecuación (3.5.3) en la ODE calculando todas las derivadas necesarias u', u'', \dots de la función desconocida $u(\xi)$ y para la función $\Psi(\xi)$. Como un resultado de esta sustitución se obtiene el polinomio $\frac{\Psi'(\xi)}{\Psi(\xi)}$ y sus derivadas. En este polinomio.

Balaceando u'' con u^3 se tiene $N = 1$. Consecuentemente, la ecuación (3.5.1) tiene soluciones de la forma

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \left[\frac{\Psi'(\xi)}{\Psi(\xi)} \right], \quad (3.5.4)$$

donde A_0 y A_1 son constantes para ser determinadas, tal que $A_1 \neq 0$. Es fácil ver que

$$u' = A_1 \left(\frac{\Psi''}{\Psi} - \frac{\Psi'^2}{\Psi^2} \right), \quad (3.5.5)$$

$$u'' = A_1 \left(\frac{\Psi'''}{\Psi} - 3 \frac{\Psi' \Psi''}{\Psi^2} + 2 \frac{\Psi'^3}{\Psi^3} \right) \quad (3.5.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.5.4) a la (3.5.6) en la ecuación (3.5.1) e igualando todos los coeficientes de $\Psi^0, \Psi^{-1}, \Psi^{-2}, \Psi^{-3}$ a cero, obtenemos respectivamente

$$A_0(\mu + \gamma A_0 + \delta A_0^2) = 0 \quad (3.5.7)$$

$$-A_1(\Psi'' + \Psi''') + A_1 \Psi'(\mu + 2\gamma A_0 + 3\delta A_0^3) = 0, \quad (3.5.8)$$

$$A_1 \Psi'^2(1 + \gamma A_1 + 3\delta A_0 A_1) + 3A_1 \Psi' \Psi'' = 0, \quad (3.5.9)$$

$$A_1 \Psi'^3(\delta A_1^2 - 2) = 0. \quad (3.5.10)$$

de las ecuaciones (3.5.7) y (3.5.10) se deduce que

3.5 Solución de la ecuación de Fisher por el método de la ecuación simple modificada 51

$$A_0 = 0, \quad \mu + \gamma A_0 + \delta A_0^2 = 0, \quad A_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{\delta}}, \quad \delta > 0. \quad (3.5.11)$$

Si A_0 , entonces las ecuaciones (3.5.8) y (3.5.9) respectivamente reduce a

$$\Psi'' + \Psi''' - \mu\Psi' = 0, \quad (3.5.12)$$

$$3\Psi'' + (1 + \gamma A_1)\Psi' = 0. \quad (3.5.13)$$

De las ecuaciones (3.5.12) y (3.5.13), se tiene

$$\frac{\Psi'''}{\Psi''} = - \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) \quad (3.5.14)$$

Integrando (3.5.14), se tiene

$$\Psi'' = C_1 \exp \left[- \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) \xi \right]. \quad (3.5.15)$$

de (3.5.13) y (3.5.15) se concluye que

$$\Psi' = - \frac{3C_1}{1 + \gamma A_1} \exp \left[- \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) \xi \right], \quad (3.5.16)$$

$$\Psi = C_2 + \frac{3C_1}{1 + 3\mu + \gamma A_1} \exp \left[- \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) \xi \right] \quad (3.5.17)$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración. La solución exacta tiene la forma:

$$u(x, t) = \pm \frac{3C_1}{(1 + \gamma A_1)} \sqrt{\frac{2}{\delta}} \left[\frac{\exp \left[- \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) (x - t) \right]}{C_2 + \frac{3C_1}{1 + 3\mu + \gamma A_1} \exp \left[- \left(1 + \frac{3\mu}{1 + \gamma A_1} \right) (x - t) \right]} \right]. \quad (3.5.18)$$

Si hacemos $C_2 = 1$, $C_1 = \pm \frac{1}{3}(1 + 3\mu + \gamma A_1)$ en la ecuación (3.5.18) tenemos respectivamente la solución de onda viajera:

$$u_1(x, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \left(1 + \frac{3\mu}{(1 + \gamma A_1)} \right) \left[1 - \tanh \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\mu}{(1 + \gamma A_1)} \right) (x - t) \right] \right], \quad (3.5.19)$$

$$u_2(x, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \left(1 + \frac{3\mu}{(1 + \gamma A_1)} \right) \left[1 - \coth \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\mu}{(1 + \gamma A_1)} \right) (x - t) \right] \right]. \quad (3.5.20)$$

Si $\mu + \gamma A_0 + \delta A_0^2 = 0$, entonces la ecuación (3.5.8) queda reducida a

$$\Psi'' + \Psi''' - \Psi'(\gamma A_0 + 2\delta A_0^2) = 0. \quad (3.5.21)$$

La ecuación (3.5.9) y (3.5.21) concluimos que

$$\frac{\Psi'''}{\Psi''} = -A/B, \quad (3.5.22)$$

Donde $A = (1 + \gamma A_1 + 3\delta A_0 A_1) + 3A_0(\gamma + 2\delta A_0)$, $B = 1 + \gamma A_1 + 3\delta A_0 A_1$.

Integrando la ecuación (3.5.22) se tiene

$$\Psi'' = C_1 \exp\left(-\frac{A}{B}\xi\right), \quad (3.5.23)$$

de las ecuaciones (3.5.9) y (3.5.23) se tiene

$$\Psi' = -\frac{3C_1}{B} \exp\left(-\frac{A}{B}\xi\right) \quad (3.5.24)$$

$$\Psi = C_2 + \frac{3C_1}{A} \exp\left(-\frac{A}{B}\xi\right), \quad (3.5.25)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Luego, la solución exacta tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\mu\delta}}{2\delta} \mp \frac{3C_1}{B} \sqrt{\frac{2}{\delta}} \left[\frac{\exp\left[-\frac{A}{B}(x-t)\right]}{C_2 + \frac{3C_1}{A} \exp\left[-\frac{A}{B}(x-t)\right]} \right]. \quad (3.5.26)$$

Si $C_2 = 1$, $C_1 = \pm \frac{A}{3}$ en (3.5.26), entonces tenemos las siguientes soluciones de onda

$$u_1(x, t) = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\mu\delta}}{2\delta} \mp \frac{A}{2B} \sqrt{\frac{2}{\delta}} \left[1 - \tanh\left[\frac{A}{2B}(x-t)\right] \right], \quad (3.5.27)$$

$$u_2(x, t) = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\mu\delta}}{2\delta} \mp \frac{A}{2B} \sqrt{\frac{2}{\delta}} \left[1 - \coth\left[\frac{A}{2B}(x-t)\right] \right]. \quad (3.5.28)$$

El método de la ecuación simple modificada presentada en este capítulo genera soluciones de onda solitaria.

3.6. Solución de Perturbación de la Ecuación de Fisher-KPP

La existencia de la solución de onda viajera de la ecuación de Fisher se había establecido mediante el uso de un argumento geométrico. Sin embargo, no ha sido posible determinar la representación exacta o aproximada de la solución. Ahora emplearemos el método de perturbación estándar para encontrar soluciones asintóticas del problema de valor en la frontera para $u(\xi)$ que satisface el sistema diferencial [20]

$$u'' + cu' + u(1-u) = 0, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (3.6.1)$$

$$u(-\infty) = 1, \quad u(+\infty) = 0 \quad (3.6.2)$$

Donde $c \geq 2$.

54 La ecuación de Fisher-KPP

Dado que la ecuación (3.6.1) es autónoma, la solución es una traslación invariante.

Elegimos el valor $u(\xi)$ en $\xi = 0$ para cualquier número en el rango de $u(\xi)$, tomamos $u(0) = \frac{1}{2}$, el cual es necesario para resolver el problema. Introducimos una nueva variable independiente $z = \frac{\xi}{c} = \sqrt{\varepsilon}\xi$, donde $\varepsilon = c^{-2}$ es un parámetro pequeño, para transformar (3.6.1) y tomando las condiciones de frontera a la forma

$$\varepsilon u''(z) + u'(z) + u - u^2 = 0, \quad -\infty < z < \infty \quad (3.6.3)$$

$$u(-\infty) = 1, \quad u(0) = \frac{1}{2}, \quad u(+\infty) = 0 \quad (3.6.4)$$

Vemos una perturbación de la expansión en series para $u(z)$ en potencias de ε como

$$u(z, \varepsilon) = u_0(z) + \varepsilon u_1(z) + \varepsilon^2 u_2(z) + \dots, \quad (3.6.5)$$

Donde $u_0(z)$, $u_1(z)$ y $u_2(z)$ deben ser determinados. Sustituyendo (3.6.5) en (3.6.3) y el conjunto de coeficientes de varias potencias de ε para ser cero, obtenemos

$$u_0' + u_0 + u_0^2 = 0, \quad (3.6.6)$$

$$u_0(-\infty) = 1, \quad u_0(0) = \frac{1}{2}, \quad u_0(+\infty) = 0 \quad (3.6.7)$$

Y

$$u_1' + u_1(1 - 2u_0) + u_0'' = 0 \quad (3.6.8)$$

$$u_1(-\infty) = u_1(0) = u_1(+\infty) = 0 \quad (3.6.9)$$

La solución general de (3.6.6) está dada por

$$u_0(z) = (1 - Ae^z)^{-1}, \quad (3.6.10)$$

Donde $A = -1$, ya que $u_0 = \frac{1}{2}$.

Por tanto la solución se reduce a la forma

$$u_0(z) = (1 + e^z)^{-1}, \quad (3.6.11)$$

solucionando a (3.6.8), se convierte en

$$u_1' + \left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right) u_1 - \frac{e^z}{(1 + e^z)^2} = 0, \quad (3.6.12)$$

Esto puede resolverse directamente por métodos elementales y la solución es dada por

$$u_1(z) = \frac{e^z}{(1 + e^z)^2} \log \left\{ \frac{4e^z}{(1 + e^z)^2} \right\} \quad (3.6.13)$$

Por tanto, la solución asintótica del problema original es dada por

$$u(z) \sim (1 + e^z)^{-1} + \frac{\varepsilon^2 e^z}{(1 + e^z)^2} \log \left\{ \frac{4e^z}{(1 + e^z)^2} \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (3.6.14)$$

Donde $z = \left(\frac{\xi}{c} \right) = \frac{1}{c}(x - ct)$

Esto representa una solución de onda viajera asintótica para $c \geq 2$. El presente problema no es un problema de perturbación singular porque u y $\frac{du}{dz}$ tienden a valores finitos cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la ecuación (3.6.3) tiene un límite uniforme y el método de perturbación genera una solución aproximada en todo el dominio [20].

CAPÍTULO 4

Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

4.1. Introducción

La ecuación de Fisher-KPP se ha venido desarrollando en ámbitos como la biomatemática para modelar el crecimiento poblacional de una especie. En este capítulo presentaremos soluciones numéricas a través del método de Wavelet-Elementos Finitos, usaremos las Wavelets Biortogonales que nos dan una muy buena aproximación y que éstas son especiales para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, además de realizar unos muy buenos cálculos computacionales, como la que estamos trabajando. La Ecuación de Fisher-KPP estudiada es

$$u_t - \alpha u_{xx} = \beta u \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) \quad (4.1.1)$$

con la condición inicial-frontera $u(x, 0) = \sin(n\pi x)$, $x \in [a, b]$, $u(a, t) = u(b, t) = 0$, para $t \geq 0$ y n un entero positivo, además α , β y θ son constantes positivas. El dominio del problema (4.1.1) es el intervalo $[a, b]$ los subíndices x y t indican las derivadas parciales de u respecto al espacio y tiempo respectivamente.

4.2. Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

Inicialmente se discretiza el tiempo mediante la expansión en serie de Taylor, luego discretizar el espacio mediante el método de Petrov-Galekin usando como funciones admisibles y de prueba las funciones wavelets Biortogonales.

4.2.1. Ecuación de Fisher-KPP No Lineal

Para la discretización del tiempo usamos la expansión en serie de Taylor [13]

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} u_{tt}^n - O(\Delta t^2) \quad (4.2.1)$$

Despejando a u_t de la ecuación (4.1.1) y haciendo la derivada parcial respecto a t se obtiene

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \left(\alpha u_{xx} + \beta u \left(1 - \frac{u}{\theta} \right) \right)_t \\ &= \alpha (u_{xx})_t + \beta u_t \left(1 - \frac{u}{\theta} \right) - \beta u \left(\frac{u_t}{\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Ahora, la función u en un paso de tiempo

$$\begin{aligned} u_{tt}^n &= \alpha (u_t^n)_{xx} + \beta u_t^n - \frac{\beta}{\theta} u_t^n u^n - \frac{\beta}{\theta} u_t^n u^n = \alpha (u_t^n)_{xx} + \beta u_t^n - 2 \frac{\beta}{\theta} u_t^n u^n \\ &= \alpha \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xx} + \beta \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) - 2 \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) u^n \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

al reemplazar u_t^n de (4.1.1) y u_{tt}^n de (4.2.3) en (4.2.1) y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} \alpha u_{xx}^n + \beta u^n \left(1 - \frac{1}{\theta} u^n \right) &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \alpha \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right)_{xx} \\ &\quad - \beta \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) + \frac{\beta}{\theta} \Delta t u^n \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

aplicando las derivadas respecto a x , haciendo un reordenamiento y multiplicando por Δt

$$\begin{aligned} \alpha \Delta t u_{xx}^n + \beta \Delta t u^n - \frac{\beta}{\theta} \Delta t u^n u^n &= u^{n+1} - u^n - \alpha \frac{\Delta t}{2} (u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n) \\ &\quad - \beta \frac{\Delta t}{2} (u^{n+1} - u^n) + \frac{\beta}{\theta} \Delta t u^n (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

al distribuir los términos para u^n y u^{n+1}

$$\left(1 - \beta \frac{\Delta t}{2}\right) u^{n+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^{n+1} + \frac{\beta}{\theta} \Delta t u^n u^{n+1} = \left(1 + \beta \frac{\Delta t}{2}\right) u^n + \alpha \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^n \quad (4.2.6)$$

La ecuación de Fisher-KPP (4.1.1) ha sido discretizada únicamente en el tiempo, de tal manera que la ecuación (4.2.6) ahora depende sólo del espacio. Aplicando el método de Petrov-Galerkin a la forma débil de la ecuación (4.2.6) con funciones admisibles $w(x)$ para discretizar el espacio.

Para la discretización del espacio realizamos unas particiones uniformes del dominio Ω para este caso h con $N + 1$ puntos nodales tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, siendo $\Omega_m = [x_m, x_{m+1}]$ y $h = x_{m+1} - x_m$.

Al aplicar la derivada débil al problema (4.2.6) por la función de carga $w(x)$ y haciendo $\eta = \left(1 - \beta \frac{\Delta t}{2}\right)$ y $\xi = \left(1 + \beta \frac{\Delta t}{2}\right)$ se tiene

$$\begin{aligned} \eta \int_a^b w u^{n+1} dx - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_a^b w u_{xx}^{n+1} dx + \frac{\beta}{\theta} \Delta t \int_a^b w u^n u^{n+1} dx \\ = \xi \int_a^b w u^n dx + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_a^b w u_{xx}^n dx \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Calculando las derivadas débiles de segundo orden respecto a x en el dominio Ω

$$\begin{aligned} \eta \int_{x_0}^{x_N} w u^{n+1} dx + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w' u_x^{n+1} dx + \frac{\beta}{\theta} \Delta t \int_{x_0}^{x_N} w u^n u^{n+1} dx \\ = \xi \int_{x_0}^{x_N} w u^n dx - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w' u_x^n dx \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

60 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

Sea V un espacio de Hilbert separable y H un subespacio denso en V . Si existen $u \in V$ tal que $(u, w) = 0$ para todo $w \in H$, entonces $u = 0$ en V , donde (\cdot, \cdot) es el producto interno en $L_2(\mathbb{R})$.

Para la solución de este problema, buscamos una solución aproximada $u_N \in V_N$ de la ecuación (4.1.1)

$$u_N(x, t) = \sum_K \phi_K(t) \psi_{N,K}(x) \quad (4.2.9)$$

donde $\psi_{N,K}(x) = N^{-1/2} \psi(N^{-1}x - K)$, $K \in Z$ es la función de prueba y $w = \psi_{N,L}^*(x) = N^{-1/2} \psi^*(N^{-1}x - L)$, $L \in Z$ funciones admisibles en las Wavelet Biortogonales.

En la formulación débil (4.2.8) reemplazamos u por por la solución (4.2.9)

$$\begin{aligned} & \eta \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi_{N,L}^*(x) \sum_K \phi_K^{n+1}(t) \psi_{N,K}(x) dx \\ & + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dx} \psi_{N,L}^*(x) \left(\sum_K \phi_K^{n+1}(t) \frac{d}{dx} \psi_{N,K}(x) \right) dx \\ & + \frac{\beta}{\theta} \Delta t \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi_{N,L}^*(x) \left(\sum_K \phi_K^n(t) \psi_{N,K}(x) \right) \left(\sum_S \phi_S^{n+1}(t) \psi_{N,S}(x) \right) dx \\ & = \xi \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi_{N,L}^*(x) \sum_K \phi_K^n(t) \psi_{N,K}(x) dx \\ & - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dx} \psi_{N,L}^*(x) \left(\sum_K \phi_K^n(t) \frac{d}{dx} \psi_{N,K}(x) \right) dx \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Usando las propiedades de las integrales, las sumatorias, haciendo por simplicidad $\phi_K(t) = \phi_K$ y reorganizando los términos de las integrales se tiene

$$\begin{aligned}
& \eta N^{-1} \sum_K \phi_K^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(N^{-1}x - L) \psi(N^{-1}x - K) dx \\
& + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \sum_K \phi_K^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dx} \psi^*(N^{-1}x - L) \frac{d}{dx} \psi(N^{-1}x - K) dx \\
& + \frac{\beta}{\theta} \Delta t N^{-3/2} \sum_K \sum_S \phi_K^n \phi_S^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(N^{-1}x - L) \psi(N^{-1}x - K) \psi(N^{-1}x - S) dx \\
& = \xi N^{-1} \sum_K \phi_K^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(N^{-1}x - L) \psi(N^{-1}x - K) dx \\
& - \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \sum_K \phi_K^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dx} \psi^*(N^{-1}x - L) \frac{d}{dx} \psi(N^{-1}x - K) dx
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Haciendo un cambio de variable $y = N^{-1}x - K$ a la ecuación anterior, la podemos escribir como

$$\begin{aligned}
& \eta \sum_K \phi_K^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(y + K - L) \psi(y) dy \\
& + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-2} \sum_K \phi_K^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dy} \psi^*(y + K - L) \frac{d}{dy} \psi(y) dy \\
& + \frac{\beta}{\theta} \Delta t N^{-1/2} \sum_K \sum_S \phi_K^n \phi_S^{n+1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(y + K - L) \psi(y) \psi(y + K - S) dy \\
& = \xi \sum_K \phi_K^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(y + K - L) \psi(y) dy \\
& - \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \sum_K \phi_K^n \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dy} \psi^*(y + K - L) \frac{d}{dy} \psi(y) dy
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Para escribir la ecuación (4.2.12) en forma matricial, las integrales Wavelets Biortogonales se escriben

$$\begin{aligned}
 I_1(K) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi(x) \psi^*(x+K) dx \\
 I_2(K) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{d}{dx} \psi^*(x+K) \frac{d}{dx} \psi(x) dx \\
 I_3(K, S) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \psi^*(x+K) \psi(x) \psi(x+S) dx
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

La forma matricial de (4.2.12) es

$$\begin{aligned}
 &\eta \sum_K \phi_K^{n+1} I_1(K-L) + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-2} \sum_K \phi_K^{n+1} I_2(K-L) \\
 &+ \frac{\beta}{\theta} \Delta t N^{-1/2} \sum_K \sum_S \phi_K^n \phi_S^{n+1} I_3(K-L, K-S) \\
 &- \xi \sum_K \phi_K^n I_1(K-L) + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \sum_K \phi_K^n I_2(K-L) = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

recogiendo las sumatorias se obtiene

$$\begin{aligned}
 \sum_k (\eta \phi_K^{n+1} - \xi \phi_K^n) I_1(K-L) + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \sum_K (N^{-1} \phi_K^{n+1} + \phi_K^n) I_2(K-L) \\
 + \frac{\beta}{\theta} \Delta t N^{-1/2} \sum_K \sum_S \phi_K^n \phi_S^{n+1} I_3(K-L, K-S) = 0
 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

4.2.2. Solución de la Ecuación de Fisher-KPP Linealizada

Ahora bien, si la ecuación (4.1.1) se presenta de la forma lineal

$$u_t - \alpha u_{xx} = \beta u. \tag{4.2.16}$$

La ecuación (4.2.16) discretizada en el tiempo es

$$\left(1 - \beta \frac{\Delta t}{2}\right) u^{n+1} - \alpha \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^{n+1} = \left(1 + \beta \frac{\Delta t}{2}\right) u^n + \alpha \frac{\Delta t}{2} u_{xx}^n \quad (4.2.17)$$

Aplicando la formulación débil y haciendo $\eta = \left(1 - \beta \frac{\Delta t}{2}\right)$ y $\xi = \left(1 + \beta \frac{\Delta t}{2}\right)$, se obtiene

$$\eta \int_{x_0}^{x_N} w u^{n+1} dx + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w' u_x^{n+1} dx = \xi \int_{x_0}^{x_N} w u^n dx - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w' u_x^n dx \quad (4.2.18)$$

Para la solución de este problema, se busca una solución aproximada $u \in V_N$ de la ecuación (4.2.16)

$$u_N(x, t) = \sum_K \phi_K(t) \psi_{N,K}(x) \quad (4.2.19)$$

Luego en la formulación débil de (4.2.18) y reemplazando u y w , por la solución (4.2.19) y realizando los mismos cálculos como en el caso de la no lineal, se tiene

$$\sum_k \left[(\eta \phi_K^{n+1} - \xi \phi_K^n) I_1(K - L) + \alpha \frac{\Delta t}{2} N^{-1} \left(N^{-1} \phi_K^{n+1} + \phi_K^n \right) I_2(K - L) \right] = 0 \quad (4.2.20)$$

donde las integrales $I_1(K - L)$ y $I_2(K - L)$, son las mencionadas en (4.2.13).

4.3. Algoritmo para el Cálculo de Integrales $I_1(K)$, $I_2(K)$ y $I_3(K, S)$

Es importante para este capítulo el cálculo de las integrales que involucran las Wavelets Biortogonales y se hacen resolviendo el problema de valor en la frontera periódico para la ecuación con coeficientes constantes

$$\sum_{s=0}^d a_t \frac{d^s(u)}{dx^s} = Pu = g \quad (4.3.1)$$

64 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

donde u y g son 1-periódicas en el espacio. Aplicando el método de Galerkin basado en el marco Biortogonal $\{V_j, V_j^*\}$, asociado a las funciones de escala Spline Biortogonales $\psi = \psi_N$ y $\psi^* = \psi_{N,N^*}$, con el correspondiente conjugado $\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^*\}$ donde

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \Psi_{N-1}(x) & \text{si } N \text{ es impar} \\ \Psi_{N-1}(x+1) & \text{si } N \text{ es par} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

$$\tilde{\psi}^*(x) = \begin{cases} \psi_{N-1,N^*+1}(x) & \text{si } N \text{ es impar} \\ \psi_{N-1,N^*+1}(x+1) & \text{si } N \text{ es par} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Las bases se utilizarán como funciones admisibles, digamos $\Psi_{j,k}(x)$ y su dual $\Psi_{j,k}^*(x)$ como funciones de prueba.

La solución aproximada para el problema de valor de la frontera dado es

$$u_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Theta_j(k) \Psi_{j,k}(x) \quad (4.3.4)$$

Donde $\Theta_j(k) = \Theta_j(k + 2^j)$ son los coeficientes periódicos que se deben determinar a través de la siguiente relación

$$\int_{\mathbb{R}} (Pu_j - g) \psi_{j,l}^*(y) dy = 0 \quad (4.3.5)$$

para cada $l \in \mathbb{Z}$.

Las funciones bases deben tener la suficiente regularidad para que esta integral tenga sentido.

Reemplazando la ecuación 4.3.4 en 4.3.5 se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{s=0}^d a_s \frac{d^s}{dy^s} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_j(k) \Psi_{j,k}(y) \right) - g \right] \psi_{j,l}^*(y) dy = 0 \quad (4.3.6)$$

Aplicando la linealidad en las sumatorias con la integral y despejando

$$\sum_{s=0}^d \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[a_s u_j(k) \int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,l}^*(y) \frac{d^s}{dy^s} \Psi_{j,k}(y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}} g \Psi_{j,l}^*(y) dy \quad (4.3.7)$$

reordenando este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\sum_{s=0}^d \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[a_s u_j(k) \int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,l}^*(y) \frac{d^s}{dy^s} \Psi_{j,k}(y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}} g \Psi_{j,l}^*(y) dy = \langle g, \Psi_{j,l}^* \rangle = G_j(l) \quad (4.3.8)$$

aplicando la derivada débil de orden p a la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,l}^*(y) \frac{d^s}{dy^s} \Psi_{j,k}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,l}^*(y) D^s \Psi_{j,k}(y) dy \quad (4.3.9)$$

donde $D^s = \frac{d^s}{dy^s}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{j,l}^*(y) D^s \Psi_{j,k}(y) dy &= (-1)^p \int_{\mathbb{R}} D^p \Psi_{j,l}^*(y) D^{s-p} \Psi_{j,k}(y) dy \\ &= (-1)^p \int_{\mathbb{R}} D^p (j^{-1/2} \Psi^*(j^{-1}y - l)) D^{s-p} (j^{-1/2} \Psi(j^{-1}y - k)) dy \\ &= (-1)^p j^{-1} \int_{\mathbb{R}} D^p \Psi^*(j^{-1}y - l) D^{s-p} \Psi(j^{-1}y - k) dy \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

haciendo un cambio de variable $x = j^{-1}y - k$

$$(-1)^p \int_{\mathbb{R}} D^p \Psi^*(x + k - l) D^{s-p} \Psi(x) dx = \Gamma_{s, N, N^*}(k - l) = \Gamma_s(k - l) \quad (4.3.11)$$

en general, la integral la podemos escribir como

$$\Gamma_s(m) = (-1)^p \int_{\mathbb{R}} D^p \Psi^*(x + m) D^{s-p} \Psi(x) dx \quad (4.3.12)$$

donde $0 \leq p \leq s$. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias toma la forma

$$\sum_{s=0}^d \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_s u_j(k) \Gamma_s(k - l) = G_j(l) \quad (4.3.13)$$

Para el cálculo de los coeficientes usamos la fórmula 4.3.12, para esto se hace uso de la función hat, con $0 \leq s \leq 3$

66 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

$$\Psi(x) = \Psi_2 = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (4.3.14)$$

y sus duales $\Psi^* = \Psi_{2,N^*}$ con $N^* \geq 4$, que tiene soporte sobre el intervalo $[-N^*, N^*]$.

Para el cálculo de $I_1(K)$, $I_2(K)$ y $I_3(L, K)$, se utiliza la ecuación 4.3.12 asignando valores a s , por ejemplo

$$\Gamma_0(m) = I_1(m) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\Psi^*(x+m)dx = \delta_{m,0} \quad (4.3.15)$$

Derivando la función hat se obtiene

$$\frac{d\Psi_2(x)}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (4.3.16)$$

entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_1(m) &= \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x+m)D\Psi(x)dx = I_4(m) \\ &= \int_{-1}^0 \Psi^*(x+m)dx - \int_0^1 \Psi^*(x+m)dx \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

en este caso $s = 1$, $p = 0$ y $N = 2$

$$\tilde{\Psi}^*(x) = \tilde{\Psi}_{2,N^*}(x) = \Psi_{1,N^*+1}(x+1) = \int_x^{x+1} \Psi_{2,N^*}(y)dy \quad (4.3.18)$$

aplicando estos cálculos se obtiene

$$\Gamma_1(m) = \int_{-1}^0 \Psi_{2,N^*}(x+m)dx - \int_0^1 \Psi_{2,N^*}(x+m)dx \quad (4.3.19)$$

hacemos un cambio de variable $z = y + m$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(m) &= \int_{m-1}^m \Psi_{2,N^*}(z)dz - \int_m^{m+1} \Psi_{2,N^*}(z)dz \\ &= \Psi_{1,N^*+1}(m) - \Psi_{1,N^*+1}(m+1) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

La segunda derivada de la función Hat en el sentido de las distribuciones es

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_2''(x), \varphi \rangle &= (-1)^2 \langle \Psi_2(x), \varphi''(x) \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \phi_2(x) \varphi''(x) dx = \int_{-1}^0 (1+x) \varphi''(x) dx + \int_0^1 (1-x) \varphi''(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 \varphi''(x) dx + \int_{-1}^0 x \varphi''(x) dx + \int_0^1 \varphi''(x) dx + \int_0^1 x \varphi''(x) dx \\
 &= \varphi'(x) \Big|_{-1}^0 + \left(x \varphi'(x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx \right) + \varphi'(x) \Big|_0^1 - \left(x \varphi'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi'(x) dx \right) \\
 &= (1+x) \varphi'(x) \Big|_{-1}^0 + (1-x) \varphi'(x) \Big|_0^1 + \varphi(x) \Big|_0^1 - \varphi(x) \Big|_{-1}^0 \\
 &= \varphi(1) - 2\varphi(0) + \varphi(-1) = \delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1)
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

con $s = 2$ y $p = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2(m) &= (-1) \int_{\mathbb{R}} D\Psi^*(x+m) D\Psi(x) dx = -I_2(m) \\
 &= - \int_0^1 D\Psi^*(x+m) dx + \int_0^1 D\Psi^*(x+m) x dx \\
 &= [\Psi^*(x+m)]_{-1}^0 + [\Psi^*(x+m)]_0^1 = -\Psi^*(m) + \Psi^*(-1+m) + \Psi^*(1+m) - \Psi^*(m) \\
 &= \Psi^*(-1+m) - 2\Psi^*(m) + \Psi^*(1+m) = \Psi_{2,N^*}(-1+m) - 2\Psi_{2,N^*}(m) + \Psi_{2,N^*}(1+m)
 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Note que $\Psi_{2,N^*}(x) = \int_x^{x+1} \Psi_{3,N^*+1}(y) dy$, y con $N = 3$ tenemos

$$\tilde{\Psi}^*(x) = \Psi_{2,N^*+1}(x) = \int_x^{x+1} \Psi^*(y) dy = \int_x^{x+1} \Psi_{3,N^*}(y) dy \tag{4.3.23}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 I_3(K, S) &= \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x+K) \Psi(x) \Psi(x+S) dx = \int_{\mathbb{R}} \Psi_{2,N^*}(x+K) \Psi_2(x) \Psi_2(x+S) dx \\
 &= \int_{-1}^0 \Psi_{2,N^*}(x+K) (1+x) \Psi_2(x+S) dx + \int_0^1 \Psi_{2,N^*}(x+K) (1+x) \Psi_2(x+S) dx
 \end{aligned}$$

68 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^0 \Psi_{2,N^*}(x+K)\Psi_2(x+S)dx + \int_{-1}^0 x\Psi_{2,N^*}(x+K)\Psi_2(x+S)dx \\
 &+ \int_0^1 \Psi_{2,N^*}(x+K)\Psi_2(x+S)dx - \int_0^1 x\Psi_{2,N^*}(x+K)\Psi_2(x+S)dx
 \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Haciendo el cambio de variable $y = x + K$ se tiene

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1+K}^K \Psi_{2,N^*}(y)\Psi_2(y-K+S)dy + \int_{-1+K}^K (y-K)\Psi_{2,N^*}(y)\Psi_2(y-K+S)dy \\
 &+ \int_K^{K+1} \Psi_{2,N^*}(y)\Psi_2(y-K+S)dy - \int_K^{K+1} (y-K)\Psi_{2,N^*}(y)\Psi_2(y-K+S)dy
 \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Aplicando la definición de la función $\Psi_2(x)$ y realizando operaciones, se tiene

$$\begin{aligned}
 I_3(K, S) &= \int_{-1+K-S}^{K-S} y^2\Psi_{2,N^*}(y)dy - 2 \int_{K-S}^{K-S+1} y^2\Psi_{2,N^*}(y)dy \\
 &+ \int_{K-S+1}^{K-S+2} y^2\Psi_{2,N^*}(y)dy + (2-2K+S) \int_{-1+K-S}^{K-S} y\Psi_{2,N^*}(y)dy \\
 &- (2+2K-S) \int_{K-S+1}^{K-S+2} y\Psi_{2,N^*}(y)dy + (2-2K+2KS) \int_{K-S}^{K-S+1} \Psi_{2,N^*}(y)dy \\
 &+ (K^2+2K-KS-S+1) \int_{K-S+1}^{K-S+2} \Psi_{2,N^*}(y)dy
 \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

4.4. Implementación del Método y Resultados Numéricos

Para la implementación del algoritmo se utilizó el software especializado Matlab, en el cuál se programaron la función principal y las funciones auxiliares que permitieron el desarrollo del algoritmo para el cálculo de la solución aproximada.

Cabe resaltar que en el desarrollo del MEF - Wavelets para la solución de 4.1.1 se obtuvieron como lo establecía la teoría las integrales 4.3.15 y 4.3.22; sin embargo la integral 4.3.26 se alejaba de lo ya establecido en la teoría, por lo cuál se debió programar una función especial para su solución.

4.4.1. Solución numérica de la Ecuación de Fisher-KPP Linealizada

Para la solución aproximada de $u_t - \alpha u_{xx} = \beta u$, se considera el intervalo $[x_{m-1}, x_m] = [0, 1]$ con un paso $\Delta x = 0,25$ tomando 4 puntos nodales en el dominio. Las condiciones de frontera establecidas para este caso son $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para $t \geq 0$ y la condición inicial $u(x, 0) = \sin(n\pi x)$, para n entero positivo. Los parámetros de la ecuación de Fisher-KPP $\alpha = 0,5$ y $\beta = 2$ son constantes positivas.

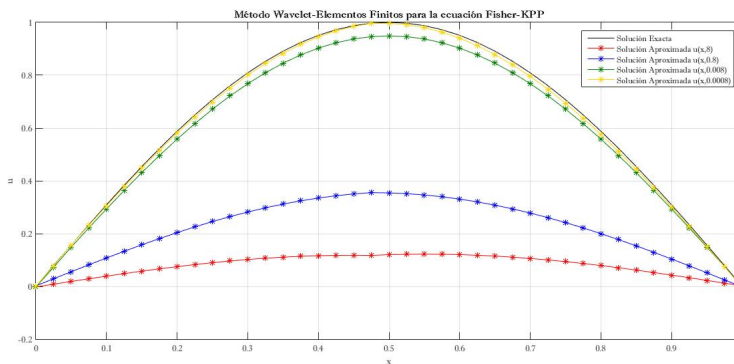


Figura 4.1: Solución Exactas y Aproximaciones para Diferentes Valores de t Caso Lineal

70 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

Tiempo	Exacto	Aproximado	Error
0	0	0.0002857	-0.0002857
0.1	0.078459	0.077077	0.0013817
0.2	0.23345	0.23155	0.0018977
0.3	0.30902	0.30572	0.0032988
0.4	0.45399	0.44833	0.0056609
0.5	0.5225	0.51585	0.006653
0.6	0.58779	0.5803	0.0074818
0.7	0.70711	0.69854	0.0085651
0.8	0.80902	0.75162	0.0087824
0.9	0.89101	0.80026	0.0087605
1	1	0.84416	0.0084842

Cuadro 4.1: Error para $\Delta t = 0,0008$ Caso Lineal

La tabla 4.1 muestra los errores generados para el valor de $\Delta t = 0,0008$. Cabe resaltar que entre más pequeño es el valor de t , el error se minimiza.

El siguiente gráfico representa los errores para diferentes aproximaciones ($\Delta t = 0,8; 0,08; 0,008; 0,0008$).

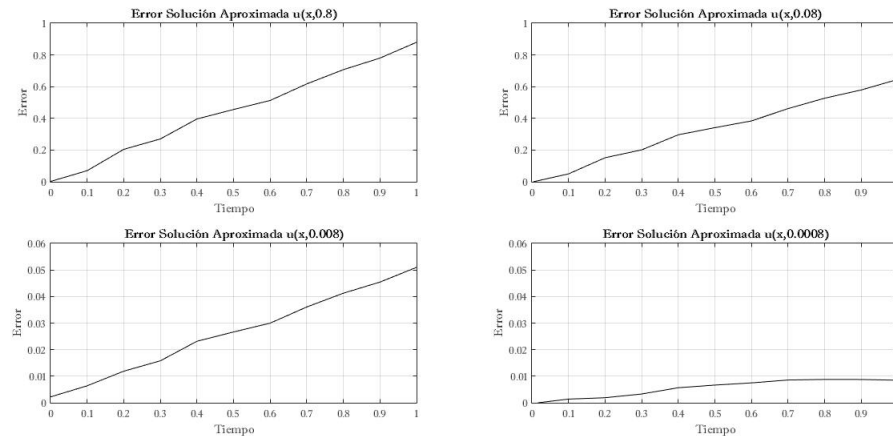


Figura 4.2: Error Caso Lineal Para Diferentes Valores de t

4.4.2. Solución numérica de la Ecuación de Fisher-KPP No Linealizada

Para el caso no lineal, se considera el intervalo $[x_{m-1}, x_m] = [-20, 20]$. Se tienen en cuenta las siguientes condiciones de frontera $u(-20, t) = 1$, $u(20, t) = 0$, para $t \geq 0$ y la condición inicial $u(x, 0) = 0$. Los parámetros de la ecuación de Fisher-KPP $\alpha = 0,5$, $\beta = 2$ y $\theta = 1$ son constantes positivas. También se tienen en cuenta los valores usados en las Wavelets Biortogonales, establecidos por $N^* \geq 4$, $N = 2^{-5}$, $L = -1, 0, 1$, $K = -1, 0, 1$ y $S = -1, 0, 1$.

De acuerdo a lo anterior, las soluciones están dadas de la siguiente forma:

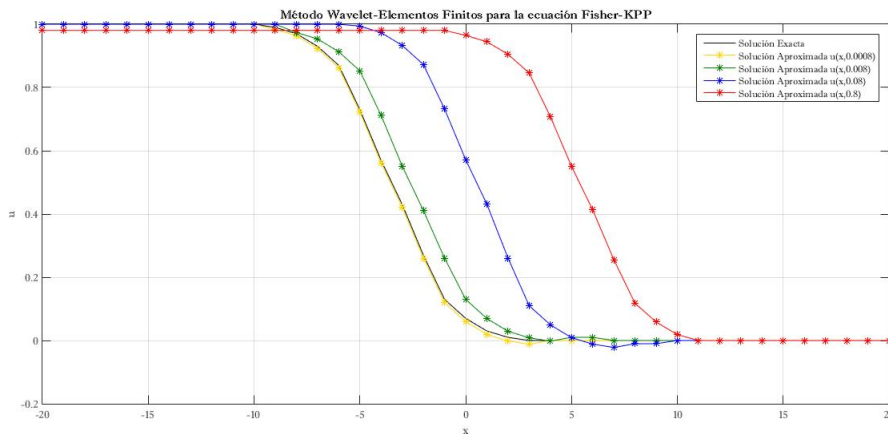


Figura 4.3: Diferentes Aproximaciones Para el Caso No Lineal

Como podemos ver en 4.3, el comportamiento de cada una de las aproximaciones obedece a los valores de $t = 0,0008$. Con lo anterior se puede apreciar la evolución de la curva a diferentes tiempos.

De la misma manera que en el caso linealizado, podemos observar el comportamiento del error con diferentes aproximaciones en 4.2, en donde se aprecia que entre más pequeño es el valor de t , el error se minimiza (Observese 4.4).

72 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

Tiempo	V. Exacto	V. Aproximado	Error
0	1	1	0
0.1	0.99	0.98402	0.0059758
0.2	0.97	0.96352	0.0064765
0.3	0.93	0.92302	0.0069774
0.4	0.87	0.86252	0.0074811
0.5	0.73	0.72202	0.0079849
0.6	0.57	0.56151	0.0084851
0.7	0.43	0.42101	0.0089893
0.8	0.27	0.26051	0.0094939
0.9	0.13	0.12001	0.0099936
1	0.01	-0.001499	0.011499

Cuadro 4.2: Error para $\Delta t = 0,0008$ Caso No Lineal

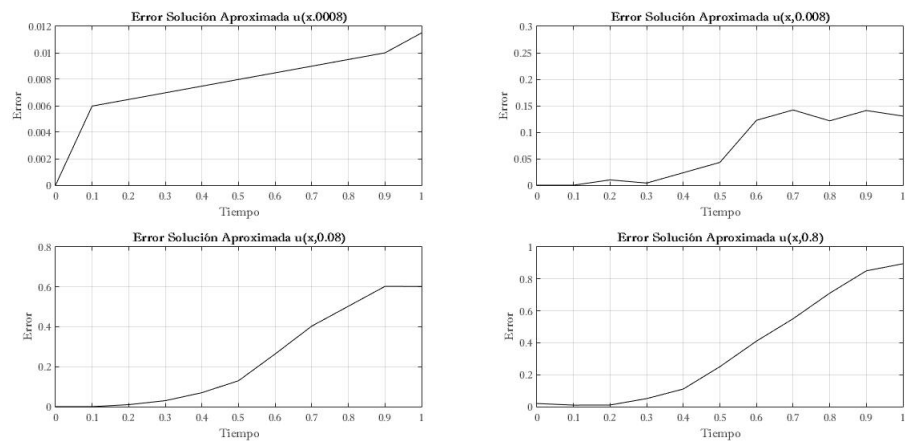


Figura 4.4: Error Caso No Lineal Para Diferentes Valores de t

4.4.3. Implementación en Matlab

Listing 4.1: Código Matlab Wavelets - Elementos Finitos

```

CODIGO PRINCIPAL SOLUCION APROXIMADA SISTEMA NO
LINEALIZADO
% Implementación del Método Petrov-Galerkin basado
% en Wavelets Biortogonales, para la ecuación Fisher -
% KPP No lineal
clc; clear all;

% Parámetros iniciales
delta_x=1;
delta_t=0.0008;
x=0:delta_x:40;
n_ast=4;
tam=length(x);
alfa=0.1;
beta=0.5;
teta=1;
epsilon = (1+ (beta*delta_t/2));

% empleamos Wavelet Biortogonal(N, n_ast)
[rf, df]= biorwavf ('bior2.4');

% Empleamos la función para construir 4 filtros en
% función de Wavelet
[h0, h1, f0, f1] = biorfilt (df, rf);

% creamos los puntos biortogonados del wavelet con la
% función biphivals
[x1, phi1, wp1, psi1, psitilde1] = biphivals (h0, h1,
f0, f1, 0);
x1=x1-4;

%----- %
% Empleamos Wavelet Biortogonal (1, n_ast+1)

```

74 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
[rf, df]= biorwavf ('bior1.5');
% Empleamos la función para construir 4 filtros en
  función de Wavelet
[h0, h1, f0, f1] = biorfilt (df, rf);
% Creamos los puntos biortogonados del wavelet con la
  función biphivals
[x2, phi2, wp2, psi2, psitilde2] = biphivals (h0, h1,
  f0, f1, 0);
x2=x2-4;

%----- %
% Procedemos a realizar el cálculo de las constantes
  I1, I2 e I3
% Cálculo de la integral Ic para el coeficiente de I3
Ic = cal_Ic (n_ast, x2, wp2);
% Calculamos el coeficiente de la integral I1
i1= @(x) x==0;
% Calculamos el coeficiente de la integral I2
i2 = @ (k) cal_I2 (k, x2, wp2);
% Calculamos el coeficiente de la integral I3
i3 = @ (k, s) cal_I3 (k, s, x2, wp2, Ic, n_ast);
% Calculamos la función hat
phi=@(x) hat(x);
coef_U=zeros (tam, 10);

% Involucramos los valores de condición de frontera
  inicial
y0=x*0; y0=y0';
For n=1:11
y0(n)=1;
End
y0 (12)=0.99;
y0 (13)=0.97;
y0 (14)=0.93;
y0 (15)=0.87;
y0 (16)=0.73;
y0 (17)=0.57;
y0 (18)=0.43;
```

```

y0 (19)=0.27;
y0 (20)=0.13;
y0 (21)=0.07;
y0 (22)=0.03;
y0 (23)=0.01;

%----- %
% C lculo de la constante de sumatorias
GG=@(U) cal_const_no (U, i2 , i3);
G=@(U) cal_Const (U, i2);
R0=zeros (tam);

% Soluci n aproximada de la Funci n de prueba
For i=1: tam
For k=0: tam-1
R0 (i , k+1)=delta_x ^ (-0.5)*phi ((delta_x ^ (-1))*x (i)-
k);
End
End

% Invertimos la matriz
coef_U (:,1)= ((R0'*R0)\R0'*y0);
% Resolvemos el sistema de ecuaciones
For j=2:9

% Calculamos la iteraci n anterior
D = cal_ant_no ( coef_U (:,j) , i2 , i3 , beta , teta , alfa ,
delta_x , delta_t );

% Se emplea la funci n bicgstabl para resoluci n de
un sistema matricial
coef_U (:,j)=coef_U (:,j-1)+bicgstabl(D,-(((1-(beta*
delta_t/2))*coef_U (:,j))
-((1+(beta*delta_t/2))*coef_U (:,j-1))
+ alfa*delta_t/2*(delta_x ^ (-1))*(((delta_x ^ (-1))*G(
coef_U (:,j)))+
G(coef_U (:,j-1))))+(beta/teta*delta_t*delta_x ^ (-0.5))*GG
(coef_U (:,j))*GG

```

76 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
(coef_U(:, j-1))));
End

% Graficamos toda las soluciones aproximadas
plot((x-20), y0, (x-20), coef_U(:, 1), '-*r', (x-20), coef_U
(:, 3), '-*b', (x-20), coef_U(:, 5), '-
*y', (x-20), coef_U(:, 7), '-*g')

% Calculamos el error dependiendo cada delta de tiempo
For p=1:10
For m=1: tam
error (p,m)= abs((y0(m)-coef_U(m,p)));
End
End
% Convertimos la matriz al formato que deseamos para
hacer operaciones
error=error ';

%----- %
% Creamos en formato de tabla para analisis del error
con delta_t=0.0008
Tiempo = [0;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1];
VE = [y0(11); y0(12); y0(13); y0(14); y0(15); y0(16);
y0(17); y0(18); y0(19); y0(20); y0(23)];
VA = [coef_U(11,1); coef_U(12,1); coef_U(13,1); coef_U
(14,1); coef_U(15,1); coef_U(16,1); coef_U(17,1);
coef_U(18,1); coef_U(19,1); coef_U(20,1); coef_U
(23,1)];
Error = [error(11,1); error(12,1); error(13,1); error
(14,1); error(15,1); error(16,1); error(17,1); error
(18,1); error(19,1); error(20,1); error(23,1)];

% Configuramos los parametros de la tabla
T = table (Tiempo, VE, VA, Error, 'VariableNames', {'
Tiempo' 'Exacto' 'Aproximado' 'Error'})
T.Properties.Description = 'Soluci n_Aproximada_
delta_t =_0.0008';
% Visualizamos los parametros de las tablas
```

Summary (T)

```

%----- %
% Creamos en formato de tabla para analisis del error
% con delta_t=0.008
Tiempo = [0;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1];
VE = [y0(10); y0(11); y0(12); y0(13); y0(14); y0(15);
      y0(16); y0(17); y0(18); y0(19); y0(20)];
VA = [coef_U(10,3); coef_U(11,3); coef_U(12,3); coef_U
      (13,3); coef_U(14,3); coef_U(15,3); coef_U(16,3);
      coef_U(17,3); coef_U(18,3); coef_U(19,3); coef_U
      (20,3)];
Error1 = [error(10,3); error(11,3); error(12,3); error
          (13,3); error(14,3); error(15,3);
          error(16,3); error(17,3); error(18,3); error
          (19,3); error
          (20,3)];

% Configuramos los parametros de la tabla
T1 = table (Tiempo, VE, VA, Error1, 'VariableNames', {'
          Tiempo' 'Exacto' 'Aproximado' 'Error'})
T1.Properties.Description = 'Soluci n_Aproximada_
          delta_t_=_0.008';
% Visualizamos los parametros de las tablas
Summary (T1)

```

```

%----- %
% Creamos en formato de tabla para analisis del error
% con delta_t=0.08
Tiempo = [0;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1];
VE = [y0(10); y0(11); y0(12); y0(13); y0(14); y0(15);
      y0(16); y0(17); y0(18); y0(19); y0(20)];
VA = [coef_U(10,5); coef_U(11,5); coef_U(12,5); coef_U
      (13,5); coef_U(14,5); coef_U(15,5); coef_U(16,5);
      coef_U(17,5); coef_U(18,5); coef_U(19,5); coef_U
      (20,5)];
Error2 = [error(10,5); error(11,5); error(12,5); error
          (13,5); error(14,5); error(15,5);
          error(16,5); error(17,5); error(18,5); error
          (19,5); error
          (20,5)];

```

78 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
(20,5)];
% Configuramos los par metros de la tabla
T3 = table (Tiempo, VE, VA, Error2, 'VariableNames', {'
    Tiempo' 'Exacto' 'Aproximado' 'Error'})
T3.Properties.Description = 'Soluci n_Aproximada_
    delta_t_=_0.08';
% Visualizamos los par metros de las tablas
Summary (T3)

%----- %
% Creamos en formato de tabla para analisis del error
    con delta_t=0.8
Tiempo = [0;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1];
VE = [y0(11); y0(12); y0(13); y0(14); y0(15); y0(16);
    y0(17); y0(18); y0(19); y0(20); y0(23)];
VA = [coef_U(11,7); coef_U(12,7); coef_U(13,7); coef_U
    (14,7); coef_U(15,7); coef_U(16,7); coef_U(17,7);
    coef_U(18,7); coef_U(19,7); coef_U(20,7); coef_U
    (23,7)];
Error3 = [error(11,7);error(12,7);error(13,7);error
    (14,7);error(15,7);error(16,7);
error(17,7);error(18,7);error(19,7);error(20,7);error
    (23,7)];

% Configuramos los par metros de la tabla
T4 = table (Tiempo, VE, VA, Error3, 'VariableNames', {'
    Tiempo' 'Exacto' 'Aproximado' 'Error'})
T4.Properties.Description = 'Soluci n_Aproximada_
    delta_t_=_0.8';
% Visualizamos los par metros de las tablas
Summary (T4)

%----- %
% Graficamos el tiempo vs error
Subplot (2, 2, 1); plot (Tiempo, Error)
Subplot (2, 2, 2); plot (Tiempo, Error1)
Subplot (2, 2, 3); plot (Tiempo, Error2)
Subplot (2, 2, 4); plot (Tiempo, Error3)
```

```

%----- %
FUNCI N BIPHIVALS
% function [x,phi,phitilde,psi,psitilde] = biphivals(h0
    ,h1,f0,f1,i)
% Generate biorthogonal scaling functions and their
    associated
% wavelets using the given filter coefficients
% Kevin Amaratunga
% 4 August, 1993
% h0, h1, f0, f1 = wavelet filters (from BIORFILT).
% i = discretization parameter. The number of points
    per integer
% step is 2^i. Thus, setting i = 0 gives the scaling
    function
% and wavelet values at integer points.
function [x,phi,phitilde,psi,psitilde] = biphivals(h0,
    h1,f0,f1,i)
[N,dum] = size(f0);
if N == 1
f0 = f0';
f1 = f1';
h0 = h0';
h1 = h1';
N = dum;
end
[tmp,dum] = size(h0);
if i < 0
error('biphivals: i must be non-negative')
end
[m,n] = size(f0);
[tmp,dum] = size(h0);
if m ~= tmp
error('biphivals: filters f0 and h0 must be the same
    length')
end
% Make sure the lowpass filters sum up to 2.
fac = 2/sum(h0);

```

80 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```

h0 = flipud(h0) * fac;
h1 = flipud(h1) * fac;
f0 = f0 * fac;
f1 = f1 * fac;
cf0 = [f0; zeros(m,1)];
rf0 = [f0(1), zeros(1,m-1)];
tmp = toeplitz(cf0, rf0);
M = zeros(m,m);
M(:) = tmp(1:2:2*m*m-1);
M = M - eye(m);
M(m,:) = ones(1,m);
tmp = [zeros(m-1,1); 1];
phi = M \ tmp; % Integer values of phi
ch0 = [h0; zeros(m,1)];
rh0 = [h0(1), zeros(1,m-1)];
tmp = toeplitz(ch0, rh0);
M = zeros(m,m);
M(:) = tmp(1:2:2*m*m-1);
M = M - eye(m);
M(m,:) = ones(1,m);
tmp = [zeros(m-1,1); 1];
phitilde = M \ tmp; % Integer values of phitilde
if i > 0
for k = 0:i-1
p = 2^(k+1) * (m-1) + 1; %No of rows in toeplitz
matrix
q = 2^k * (m-1) + 1; %No of columns toeplitz matrix
if (k == 0)
cf00 = [f0; zeros(p-1-m,1)];
cf0 = [cf00; 0];
ch10 = [h1; zeros(p-1-m,1)];
ch00 = [h0; zeros(p-1-m,1)];
ch0 = [ch00; 0];
cf10 = [f1; zeros(p-1-m,1)];
else
cf0 = zeros(p-1,1);
cf0(:) = [1; zeros(2^k-1,1)] * cf00';
cf0 = [cf0; 0];

```

```

ch0 = zeros(p-1,1);
ch0(:) = [1; zeros(2^k-1,1)] * ch00';
ch0 = [ch0; 0];
end
rf0 = [cf0(1), zeros(1,q-1)];
Tf0 = toeplitz(cf0,rf0);
rh0 = [ch0(1), zeros(1,q-1)];
Th0 = toeplitz(ch0,rh0);
if k == i-1
ch1 = [1; zeros(2^k-1,1)] * ch10';
ch1 = ch1(:);
ch1 = [ch1; 0];
rh1 = [ch1(1), zeros(1,q-1)];
Th1 = toeplitz(ch1,rh1);
cf1 = [1; zeros(2^k-1,1)] * cf10';
cf1 = cf1(:);
cf1 = [cf1; 0];
rf1 = [cf1(1), zeros(1,q-1)];
Tf1 = toeplitz(cf1,rf1);
psi = Tf1 * phi;
psitilde = Th1 * phitilde;
end
phi = Tf0 * phi;
phitilde = Th0 * phitilde;
end
elseif i == 0
ch10 = [h1; zeros(m-2,1)];
ch1 = [ch10; 0];
rh1 = [ch1(1), zeros(1,m-1)];
Th1 = toeplitz(ch1,rh1);
cf10 = [f1; zeros(m-2,1)];
cf1 = [cf10; 0];
rf1 = [cf1(1), zeros(1,m-1)];
Tf1 = toeplitz(cf1,rf1);
psi = Tf1 * phi;
psi = psi(1:2:2*m-1);
psitilde = Th1 * phitilde;
psitilde = psitilde(1:2:2*m-1);

```

82 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
end
[a,b] = size(phi);
x = (0:a-1)' / 2^i;
end

%----- %
% C lculo Integral I_1
Function Ic = cal_Ic (n_ast, x, wp)
% Cal_Ic es una funci n que calcula la integral
% n_ast: valor con el que se trabaja las wavelet
    Biortogonales
% x: vector con las posiciones
% wp: vector con los valores de la wavelet en los
    puntos x
Ic=zeros (n_ast*2+1,1);
Ic (n_ast+1)=encon (0, x, wp) -1/2;
For k=1:n_ast-1
Ic (n_ast+1-k)=-Ic (n_ast+1+k-1);
Ic (n_ast+1+k)=-Ic (n_ast+1-k) + (k+1)*encon (-k, x, wp)
    ) + (1-k)*encon (k, x, wp);
End
Ic (1)=-Ic (2*n_ast);
End

%----- %
% C lculo Integral I_2
Function [i] = cal_I2 (k, x1, wp1)
% CAL_I2 Funci n que calcula el coeficiente I2
% k: ser a el primer argumento de la funci n wavelet
% x1: vector con las posiciones en las que se calcul
    los valores wavelet
% wp1: vector con los valores de la wavelet en los
    puntos x
i=-(encon (-1+k, x1, wp1)-(2*encon (k, x1, wp1)) +
    encon (1+k, x1, wp1));
End

%----- %
```

```

% C c u l o   I n t e g r a l   I _ 3
Function [i3] = cal_I3 (s, k, x, wp, Ic, n_ast)
% CAL_I3 es una funci n que calcula el coeficiente de
  la integral i3
% s: argumento de la funci n
% k: argumento de la funci n
% x: vector con las posiciones en las que se calcul
  los valores
% wp: vector con los valores de la wavelet en los
  puntos x
% I: un vector con los valores de la integral I
% n_ast: valor con el que se trabaja las wavelet
  Biortogonales
If (k>=n_ast || k<=-n_ast)
i3=0;
Else
If (s<=-2 || s>=2)
i3=0;
Else if (s==-1)
i3=(Ic(n_ast+1+k)^2)-(2*(Ic(n_ast+1+k+1)^2))+((Ic(n_ast
+1+k+2))^2)+((1-(2*k))*(Ic(n_ast+1+k)))-((3+(2*k))
*(Ic(n_ast+1+k+2)))+(2-(4*k))*(encon(k+2,x,wp)))
+(((k^2)+(3*k)+2)*(encon(k+3,x,wp)));
Else if (s==0)
i3= ((Ic(n_ast+1+k-1))^2)-(2*(Ic(n_ast+1+k)^2))+((Ic(
n_ast+1+k+1))^2)+((2-
(2*k))*(Ic(n_ast+1+k-1)))-((2+(2*k))*(Ic(n_ast+1+k+1)))
+((2-(2*k))*(encon(k+1,x,wp)))+(((k^2)+(2*k)+1)*(
encon(k+2,x,wp)));
Else if (s==1)
i3=((Ic(n_ast+1+k-2))^2)-(2*(Ic(n_ast+1+k-1)^2))+((Ic(
n_ast+1+k))^2)+((3-(2*k))*(Ic(n_ast+1+k-2)))-((1+(2*
k))*(Ic(n_ast+1+k)))+(2*(encon(k+2,x,wp)))+
(((k^2)+(k))*(encon(k+1,x,wp)));
End
End
End

```

84 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
%----- %  
% Funcion Para el C lculo de la Constante Para la  
% Sumatoria Final  
Function [G] = cal_const_no (U, i2, i3)  
% Cal_Const es la funci n que calcula la constante  
% para la sumatoria final  
% U: Es el vector de los coeficientes  
% i2: funci n para el c lculo del Coeficiente de la  
% integral I2  
% i3: funci n para el c lculo del Coeficiente de la  
% integral I3  
G=zeros (length (U), 1);  
For l=0: length (U)-1  
sum1=0;  
sum2=0;  
For k=0: length (U)-1  
If abs (l-k) <=n_ast  
For s=0: length (U)-1  
sum1=sum1+i3 (s-k, l-k)*U (k+1)*U(s+1);  
End  
End  
sum2=sum2+i2 (l-k)*U (k+1);  
End  
G (l+1)=sum1 + sum2;  
End  
End  
  
%----- %  
% Funcion Para Encontrar Los Valores Correspondientes A  
% Un Vector  
% Function y0 = encon (x0, x, y)  
% ENCON es la funci n que encuentra el valor x0  
% correspondiente a un  
% vector y, busc ndolo en un vector x, en caso de no  
% encontrarlo  
% hace una interpolaci n lineal.  
% x0: valor a encontrar  
% x: vector de b squeda
```

```

%y: vector con los valores evaluados de x
If (x0<=x (1))
y0=y (1);
Else if (x0>= x (length(x)))
y0=y (length (y));
Else
For i=1: length (x)-1
If (x0>=x (i) && x0<=x (i+1))
Lambda =(x0-x (i))/(x (i+1)-x (i));
y0=lambda*y (i+1) + (1-lambda)*y (i);
End
End
End
End

%----- %
% Funci n Que Calcula La Iteraci n Anterior
Function D = cal_ant_no (U, i2, i3, beta, teta, alfa,
delta_x, delta_t)
% Cal_ant es la funci n que calcula la iteraci n
anterior
%U: seria el vector de los coeficientes
% alfa: par metro de la ecuaci n Fisher-KPP
% beta: par metro de la ecuaci n Fisher-KPP
% delta_x: el tama o de la malla de elementos finitos
% delta_t: Par metro de la ecuaci n Fisher-KPP
%i2: Funci n para el c lculo de los coeficientes de
la integral I2
%i3: Funci n para el c lculo de los coeficientes de
la integral I3
D=zeros (length (U));
For l=0: length (U)-1
For j=0: length (U)-1
Sumas = 0;
For s=0: length (U)-1
Sumas =sumas+i3 (s-j, l-j)*U(s+1);
If s==j
Sumas =sumas+i3 (s-j, l-j)*U(s+1);

```

86 Método Wavelet-Elementos Finitos para la ecuación de Fisher-KPP

```
End
End
D (l+1, j+1) = ((alfa*delta_t*delta_x ^ (-1)*i2 (l-j))
/2) + ((beta/teta)*delta_t*delta_x ^ (-0.5)*sumas);
End
End
D=D + eye (length (U));
End
```

Bibliografía

- [1] Abramsom G. *Cinética anómala en sistemas biomoleculares de reacción difusión*. Universidad Nacional de Cuyo. 1995.
1994.
- [2] Aldroubi, A. The wavelet transform: A surfing guide, pp 3-36 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
- [3] Anne-Charline Coulon. *Propagation in reaction-diffusion equations with fractional diffusion*. Université Paul Sabatier - Toulouse. 2014.
- [4] Arzu Ögün Ünal. *On The Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation*. Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1 Volume 62, Number 1, Pages 110 (2013)
- [5] Atkinson, K., and Han, W. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Second Edition. Tex. Appl. Math. 39 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2005.
- [6] Ávila V. Erick. *Ecuaciones de reacción-difusión*. Universidad Autónoma de Yucatan, Facultad de Matemáticas. SSM, México.
- [7] Begoña Peña Pellicer. *Inestabilidades de Turing en Sistemas de Reacción Difusión*. Universidad de Navarra. 2002.

-
- [8] Bengt Hakberg. *A Discrete Kpp-Theory For Fisher's Equation*. Volume 82, Number 282, April 2013, Pages 781 - 802.
- [9] Beylkin, G., Keiser, J. M. On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet bases, *Journal of Computational Physics.*, 132 (1997), 233-259.
- [10] Boggess, A., Narcowich, F. J. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [11] Braess, D. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics* 3^a edition. Cambridge University Press. New York, Inc 2007.
- [12] Brenner, S.C., Scott, L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* 3^a edition. Springer-Verlag: Texts in Applied Mathematics 15. New York, Inc 2008.
- [13] Buitrago García, lida. *Solución aproximada de la ecuación KdV por el método de los elementos finitos Taylor-Petrov-Galerkin*. Universidad Eafit. Medellín, Colombia 2014.
- [14] Burrus, C. S., Gopinath, R. A., Guo, H. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms A Primer*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [15] Chiavassa, G., Liandrat, J. A fully adaptive wavelet algorithm for parabolic partial differential equations, *Applied Numerical Mathematics*. 36 (2001), 333-358.
- [16] Chui, C. K. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997.
2003.
- [17] Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J. C. Biorthogonal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), 485-560.
- [18] Dahmen, W. Wavelet methods for PDEs-some recent developments, *Journal of Computational and Applied Mathematics.*, 128 (2001), 133-185.

-
- [19] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
- [20] Debnath, L. *Nonlinear Partial Differential Equations: for Scientists and Engineers*. Second Edition, Birkhäuser, Boston 2005.
- [21] Duarte V. Julio C.; Fierro Esper A. *Método Wavelet-Petrov-Galerkin en la solución numérica de la ecuación KdV*. Universidad EAFIT. 2008.
- [22] Ern, A., Guermond, J. L *Theory and Practice of Finite Elements*. Appl. Math. Sci. 159 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2010.
- [23] Fernández G. *Estructuras espacio-temporales en sistemas de reacción-difusión-advección*. Universidad Santiago de Compostela. 2008.
- [24] Fleet, P. V. *Discrete Wavelet Transformations: An Elementary Approach with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2008.
- [25] Folland, G. B. *Real Analysis*, 2nd Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.
- [26] González L. A.; J. C. Vanegas; D. A. Garzón. *Formación de Patrones en sistemas de reacción difusión en dominio*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2009.
- [27] Henri Berestycki; Grégoire Nadin; Benoit Perthame; Lenya Ryzhik. *The non-local Fisher-KPP equation: traveling waves and steady states*. 2009.
- [28] Hernández, E. Weiss, G. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [29] Hong, D., Wang, J., and Gardner, R. *Real Analysis with an Introduction to Wavelets and Applications*. El sevier Academic Press, Burlington, MA, 2005.
- [30] Izús G.; R. Deza. *Solitones en sistemas reacción difusión?*. Universidad Nacional de Mar de Plata. 1991.
- [31] Johnson, C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, Inc. New York, 2009.

- [32] Kamruzzaman Khan, M. Ali Akbar; Norhashidah Hj.Mohd. Ali. *The Modified Simple Equation Method for Exact and Solitary Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equation: The GZK-BBM Equation and Right-Handed Noncommutative Burgers Equations*. Hindawi Publishing Corporation. 2013.
- 348 (1996), 573-603.
- [33] Macias-Díaz J. E. Puri, A. *An explicit positivity-preserving Finite-Difference scheme for the classical Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov equation*. EL SEVIER. Applied Mathematics and computation 218 (2012) 5829-5837.
- [34] Macias J. E.; J. Ruiz. *Un esquema de diferencias finitas que conserva la positividad de una ecuación modificada de Fisher-KPP*. Universidad Autónoma de Aguascalientes. México. 2010.
- [35] Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Trans. of Amer. Math. Soc.* 315, (1989), 69-87.
- [36] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, (1989), 674-693.
- [37] Mallat, S. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New Yor, 1998.
- [38] Mark J. Ablowitz; Anthony Zeppetella. *Explicit Solutions Of Fisher's Equation For A Special Wave Speed*. Potsdam, New York. 1979.
- [39] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*. Herman, Paris, 1990.
- [40] Mizrak M.; A. Ertas. *The Modified Simple Equation Method for Solving Some Nonlinear Evolution Equation*. 2012.
- [41] Ph. Ciarlet. *The Finite Element Method*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay. 1975.
- [42] Murray J. D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Third Edition, Springer. 2002.

-
- [43] Pérez, C., Schneider, R. Wavelet Galerkin Methods for Boundary Integral Equations and the Coupling with Finite Element Methods, pp 145-179 in *Wavelets Transforms & Time-Frequency Signal Analysis*, L. Debnath (ed.), Birkhäuser, Boston, 2001.
- [44] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [45] Polyanin, A.D. Zaitsev, V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential equations*. first Edition, Chapman y Hall CRC Press, Boca Raton, Fla. 2004.
- [46] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis*. Tex. Appl. Math. 27 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1998.
- [47] Reddy, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3 edition. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, New York, 2005.
- [48] Sánchez J. A. *Formación de patrones biológicos: sistemas de Reacción-Difusión*. 2009.
- [49] Taghizadeh N. a, M. Mirzazadeh, A. Samiei Paghaleh , J. Vahidi. *Exact solutions of nonlinear evolution equations by using the modified simple equation method*. University of Guilan, Rasht. 2012.
- [50] Urban, K. *Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Oxford University Press Inc., New York, 2009.
- [51] Vasilyev, O., Kevlahan, N. K. An adaptive multilevel wavelet collocation method for elliptic problems, *Journal of Computational Physics.*, 206 (2005), 412-431.
- [52] Walnut, D. *An Introduction to Wavelets Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2002.
- [53] Walter, G. G., Shen, X. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [54] Wojtaszczyk, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, New York, 1997.

-
- [55] Zakia Hammouch; Toufik Mekkaoui. *Approximate analytical and numerical solutions to fractional KPP-like equations*. 2010. hal-00592483
- [56] Zayed E.M.E. ; S.A. Hoda Ibrahim. *Exact Solutions of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation Using the Modified Simple Equation Method*. Zagazig University. Egypt. 2014.
- [57] Zhehao Huang; Zhengrong Liu. *Stochastic traveling wave solution to stochastic generalized KPP equation*. Springer. 2014.
- [58] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. *El método de los elementos finitos: Formulación básica y problemas lineales*. Vol 1. Cuarta Edición. McGraw Hill. CIMNE. Barcelona. 1994.