CALCULO DEL VALOR PRESENTE DE RENTAS VITALICIAS Y TEMPORALES DE UNA Y HASTA CUATRO VIDAS PARA EL SISTEMA PENSIONAL COLOMBIANO

RENAN ANTONIO MUÑOZ CASTIBLANCO [1]
JAIME ABEL HUERTAS CAMPOS [2]

Mayo 2015

[1] Estudiante de Maestría de Matemáticas Aplicadas Universidad Eafit
[2] Director

UNIVERSIDAD EAFIT DE MEDELLIN
FACULTAD DE CIENCIAS

CALCULO DEL VALOR PRESENTE DE RENTAS VITALICIAS Y TEMPORALES DE UNA Y HASTA CUATRO VIDAS PARA EL SISTEMA PENSIONAL COLOMBIANO

Renán Antonio Muñoz Castiblanco

Jaime Abel Huertas
(Director)

Mayo 2015

Dedicado a
Mis padres, Rafael, Margarita y mi hijo Sebastián

Agradecimientos

A Jaime por haber sido un excelente Director y un gran amigo, por haberme tenido la paciencia necesaria y por motivarme a seguir adelante en los momentos en que más necesite de su ayuda, tambien les doy las gracias a mis padres y mi hijo por ser constantes motivadores. Le agradezco a Dios por haberme acompañado, guiado y ser la luz constante en el camino de mi vida.

Índice general

1. Introducción

En cualquiera de los dos regímenes pensionales existentes en Colombia, es imprescindible poder establecer un cálculo preciso de la reserva individual que permita garantizar el pago de mesadas pensionales a un grupo familiar, hasta que cese la obligación con cada uno de ellos. La disposición legal puede generar una renta de una vida si el pensionado no tiene ningún beneficiario, o podría ser de hasta cuatro o cinco vidas, dependiendo del número de hijos que tenga.
Actualmente varias instituciones privadas y del sector público están administrando pensiones. En muchos casos dichas compañías sólo hacen el cálculo a dos vidas, situación que conllevaría a una deficiencia en las reservas, si sus obligaciones incluyen un considerable número de grupos familiares con rentas vitalicias en 3 o más vidas. Algunas tienen desarrollos que hacen los cálculos en tres vidas, pero estos trabajos reposan en los anaqueles de las empresas y de los entes de vigilancia y no son de dominio público. Hasta donde sabemos, no existe una publicación académica que sirva de referente y que permita establecer las variaciones existentes en los valores presentes en varias vidas, y que interpreten el sistema pensional colombiano. En este trabajo pretendemos llenar ese vacío con una publicación, estableciendo bajo varios escenarios de edad y sexo, las variaciones en los valores presentes de las rentas contemplando hasta cuatro vidas.

Para el desarrollo del trabajo realizamos la formulación del cálculo del valor presente de rentas contingentes de una y hasta cuatro vidas, interpretando la legislación colombiana sobre el régimen pensional. Dicha formulación detallada fue programada en lenguajes de programación estructurado, para presentar algunos resultados del valor presente bajo varios escenarios de edad y sexo.

2. OBJETIVOS

Objetivo General

Calcular y comparar el valor presente de rentas vitalicias y temporales de una y hasta cuatro vidas, con base en la legislación de seguridad social en Colombia.

Objetivos Específicos

1. Formular y calcular el valor presente de rentas vitalicias y temporales de una y hasta cuatro vidas.

2. Comparar el incremento del valor presente de las rentas temporales y vitalicias a medida que se aumenta el número de vidas en el cálculo, bajo varios escenarios de edad y sexo.

3. Analizar con simulación la probabilidad de obtener rentas vitalicias con cuatro o más vidas.

3. Justificación

En la actualidad muchos de los cálculos de las reservas pensionales en Colombia se hacen con base en dos vidas, pues los entes de control del estado solo exigen este cálculo con ese número de vidas. Algunas compañías hacen el cálculo con más de dos vidas, pero sus resultados son manejados internamente y no se hacen públicos, no están publicados ni están mencionados en ninguna referencia académica. Este trabajo puede servir de referencia tanto académica como de aplicación para las entidades que administran los ahorros pensionales de los Colombianos. También servirá de apoyo a personas que de alguna manera se ven enfrentadas a la necesidad de realizar cálculos de reservas pensionales; por citar un ejemplo, hay situaciones de resolución judicial sobre demandas laborales o de indemnizaciones por accidentes, en donde es necesario realizar dichos cálculos.

4. Estado del Arte

4.1. Marco Legal

El tema de las pensiones en Colombia se empezó trabajar a partir del siglo XIX, en donde se creó un sistema de pensiones exclusivo para un sector de las fuerzas militares y era otorgado para un grupo muy reducido y privilegiado de ellos. Posteriormente en el año 1946 se creó la Caja Nacional de Previsión Social para empleados públicos, en este sistema algunos empleados obtuvieron la pensión sin hacer ningún aporte al sistema Cardenas10, Giraldo07. En la década de los 60 se empiezan a realizar debates sobre el tema y para el año de 1967 se crea el Instituto de Seguros Social (ISS), en donde se utilizó el modelo pensional de reparto simple y prima media. En 1993 fue aprobada la ley de seguridad social más conocida como Ley 100 de 1993 ley100, que para el sistema general de pensiones tiene por objeto el garantizar a la población el amparo y protección cuando el ser humano llega a una edad madura o vejez o presenta alguna invalidez o muerte. Para dar cumplimiento a ese objeto la Ley 100/93 establece para el sistema general de pensiones dos regímenes:

- El solidario de prima media con prestación definida (art. 31, Ley 100/93). La filosofía es la de un sistema solidario que consiste en que la población más joven con sus aportes de ahorro pensional coadyuven al pago de la pensión de los actuales pensionados.
- El régimen de ahorro individual con solidaridad (art. 32, Ley 100/93). El valor de la pensión depende de los aportes de los afiliados y empleadores, sus rendimiento financieros, y de los subsidios del Estado cuando a ellos hubiere lugar. Una parte de los aportes de los afiliados se capitalizará en la cuenta individual de ahorro pensional de cada uno para garantizar la pensión de vejez, otra parte se destinará al pago de

primas de seguros (seguro previsional) para atender las pensiones de invalidez y de sobrevivencia, otra para financiar un Fondo de Solidaridad Pensional y otra para cubrir el costo de administración del Régimen.

De acuerdo con la Ley 100/93, los dos regímenes tendrán diferencias en los requisitos para la adquisición del derecho a una pensión de vejez, y serán similares en la adquisión del derecho a la pensión de invalidez y sobrevivencia. Los dos regímenes también serán similares en cuanto a los beneficiarios de una pensión en todos sus tipos.

Pensión de Vejez

Para el régimen de prima media el artículo de 33 de la Ley 100/93 establece que para tener derecho a la pensión de vejez, el afiliado deberá reunir las siguientes condiciones:

1. Haber cumplido cincuenta y cinco (55) años de edad si es mujer, o sesenta 60 años de edad si es hombre.

2. Haber cotizado un mínimo de 1.000 semanas en cualquier tiempo.

   Parágrafo 4. A partir del primero (1o.) de enero del año dos mil catorce (2014) las edades para acceder a la pensión de vejez se reajustarán a cincuenta y siete (57) años si es mujer y sesenta y dos (62) años si es hombre.

Los afiliados al Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad, tendrán derecho a una pensión de vejez, a la edad que escojan, siempre y cuando el capital acumulado en su cuenta de ahorro individual les permita obtener una pensión mensual, superior al 110 % del salario mínimo legal mensual vigente. Cuando a pesar de cumplir los requisitos para acceder a la pensión en los términos del inciso anterior, el trabajador opte por continuar cotizando, el empleador estará obligado a efectuar las cotizaciones a su cargo, mientras dure la relación laboral, legal o reglamentaria, y hasta la fecha en la cual el trabajador cumpla sesenta (60) años si es mujer y sesenta y dos (62) años de edad si es hombre (art. 64 Ley 100/93). Los afiliados que a los 62 años de edad si son hombres y 57 si son mujeres, no hayan alcanzado a generar la pensión mínima, y hubiesen cotizado por lo menos 1.150 semanas tendrán derecho a que el Gobierno Nacional les complete la parte que haga falta para obtener dicha pensión (art. 65 Ley 100/93).

Pensión de Invalidez

Par ambos regímenes se establece de acuerdo con el artículo 38 de la Ley 100/93, que se considera inválida a la persona que por cualquier causa de origen no profesional, no provocada intencionalmente, hubiere perdido el 50 % o más de su capacidad laboral. También se acuerda según el artículo 39 de la Ley 100/93, que tendrá derecho a pensión de invalidez el afiliado que sea declarado inválido y acredite las siguientes condiciones:

1. Que el afiliado se encuentre cotizando al regimen y hubiere cotizado por lo menos 26 semanas al momento de producirse el estado de invalidez.

2. Que habiendo dejado de cotizar al sistema, hubiere efectuado aportes durante por lo menos 26 semanas, al momento de producirse el estado de invalidez.

Pensión de Sobrevivencia

Comúnmente se menciona que una pensión de sobrevivencia se origina con la muerte de un afiliado y que una pensión de sustitución se origina con la muerte de un pensionado. En la Ley 100/93 ambos casos se definen como pensión de sobrevivientes y su artículo 39, establece que tendrá derecho a pensión de sobrevivientes:

1. Los miembros del grupo familiar del pensionado por vejez, o invalidez por riesgo común, que fallezca, y

2. Los miembros del grupo familiar del afiliado que fallezca, siempre que éste hubiere cumplido alguno de los siguientes requisitos:

   a) Que el afiliado se encuentre cotizando al sistema y hubiere cotizado por lo menos veintiséis (26) semanas al momento de la muerte;

   b) Que habiendo dejado de cotizar al sistema, hubiere efectuado aportes durante por lo menos 26 semanas del año inmediatamente anterior al momento en que se produzca la muerte.

Beneficiarios de la Pensión de Sobrevivientes

Son beneficiarios de la pensión de sobrevivientes:

1. En forma vitalicia, el cónyuge o la compañera o compañero permanente supérstite.

2. Los hijos menores de 18 años; los hijos mayores de 18 y hasta los 25 años, incapacitados para trabajar por razón de sus estudios y si dependían económicamente del causante al momento de su muerte; y, los hijos inválidos si dependían económicamente del causante, mientras subsistan las condiciones de invalidez.

3. A falta de cónyuge, compañero o compañera permanente e hijos con derecho, serán beneficiarios los padres del causante si dependían económicamente de éste;

4. A falta de cónyuge, compañero o compañera permanente, padres e hijos con derecho, serán beneficiarios los hermanos inválidos del causante si dependían económicamente de éste.

Lo hasta aquí citado de la Ley 100/93 es sólo una parte de su capítulo pensional que describe la parte más general de su contenido en cuanto a los regímenes que establece, los tipos de pensión, los requisitos para acceder a ellos y los beneficiarios. No se mencionan muchas cosas como por ejemplo lo relacionado con el valor de las mesadas, o sobre los regímenes especiales, pues no es fundamental a los propósitos del artículo. La Ley 100/93 ha sufrido varios cámbios por sentencias de la Corte Constitucional de Colombia y por la ley 797 de 2003. Únicamente se destaca el cambio sucedido en el cuadro de beneficiarios que es el eje central de este artículo: El artículo 13 de la ley 797 de 2003 Reforma Ley 100 y la sentencia C-1035 de 2008 de la Corte Constitucional de Colombia que modifica dicho artículo Corte08, permiten que la pensión de sobrevivencia pueda ser adquirida por varios cónyuges ante su existencia.

4.2. Descripción del problema

La principal diferencia entre los regímenes pensionales se encuentra en el periodo de cotización. En el régimen privado, la reserva generada con los ahorros y sus rendimentos del trabajador, establece el valor de la mesada que él se ganaría, pero en el de prima media, la mesada que es un porcentaje de sus últimos salarios devengados, dirá cuánto debe establecerse como reserva para garantizar esa mesada. En el régimen de ahorro individual la reserva necesaria para garantizar la pensión, salvo en condiciones especiales de pensión mínima, depende únicamente de la capacidad de cotización que tenga el trabajador en su vida laboral, pero en el de prima media, la reserva necesaria para proporcionar una mesada pensional ligada al valor de los últimos salarios devengados por el trabajador, no se puede garantizar que sea obtenida con exclusivamente las cotizaciones del trabajador.

En cualquiera de las dos situaciones, es imprescindible poder establecer un cálculo preciso de la reserva individual que permita garantizar el pago de mesadas pensionales a un grupo familiar, hasta que cese la obligación con cada uno de ellos. Los beneficiarios de una pensión son el cónyuge y sus hijos, a falta de cónyugue e hijos, serán los padres, y a falta de los anteriores, serán los hermanos inválidos si dependen económicamente del trabajador. En todos los casos la renta será vitalicia con excepción de la renta de hijos válidos, que irá hasta los 18 años o 25 si están estudiando. Si los hijos son inválidos la renta es vitalicia. Esta disposición legal puede generar una renta de una vida si el pensionado no tiene ningún beneficiario, o podría ser de hasta cuatro o cinco vidas, dependiendo del número de hijos que tenga.

La reserva pensional es un valor esperado de lo que se debería guardar para garantizar el pago de las mesadas. Al cesar la obligación, si se cumplen los supuestos de mortalidad e interés, se observará que lo realmente pagado para un grupo familiar, estará en algunos casos por debajo y en otros por encima de la reserva teórica, pero la reserva total será aproximadamente igual a la teórica, siempre y cuando se tenga un gran volumen de grupos familiares. Los supuestos de mortalidad están dados básicamente por las probabilidades de muerte y sobrevivencia de la población de referencia, y en este caso, de los pensionados colombianos. Pero en este supuesto también está envuelto la adecuada inclusión de los miembros del grupo familiar; la esperanza de vida estimada del grupo tendrá menor precisión si no se incluyen quienes deben estar, y con ello menor precisión en la expectativa de pagos. Algunas entidades menosprecian el incremento que da la inclusión de tres o más vidas a la reserva de una pensión, bajo el entendido que las reservas son más sensibles a los supuestos de rentabilidad. Para algunos casos de edad y sexo, las reserva de una pensión con tres vidas no varía mucho de una con dos vidas, lo que es particularmente cierto cuando la tercera vida es temporal, pero si las tres son vitalicias, la diferencia ya tiene una magnitud que no debe ser despreciada. Por tanto esto se debería tener en cuenta en los cálculos, para no incluir más factores que puedan desviar el resultado teórico del verdadero.

Actualmente no sólo el ISS y compañías de seguros están administrando pensiones, también las administran algunas instituciones privadas y del sector público que ya tenían generadas obligaciones pensionales con su trabajadores antes de la vigencia de la ley 100, y no los tenían afiliados al ISS. En muchos casos dichas compañías sólo hacen el cálculo a dos vidas, situación que conllevaría a una deficiencia en las reservas, si sus obligaciones incluyen un considerable número de grupos familiares con rentas vitalicias en 3 vidas.

Son varias las compañías de seguros que tienen sus desarrollos propios de formulaciones que contemplan los valores presentes de las rentas hasta con tres vidas. Pero estos trabajos son de conocimiento único dentro cada empresa, y hasta donde sabemos, no existe una publicación académica que sirva de referente y que permita establecer las variaciones existentes en los valores presentes en varias vidas, y que interpreten el sistema pensional colombiano. En este trabajo pretendemos llenar ese vacío con una publicación, estableciendo bajo varios escenarios de edad y sexo, las variaciones en los valores presentes de las rentas contemplando hasta cuatro vidas. El trabajo llega hasta cuatro vidas, pues como se analizará más adelante, es poco probable encontrar casos de cinco vidas vitalicias, y su diferencia en valor presente frente al caso de cuatro vidas, no sería muy grande.

4.3. Limitaciones de la Investigación

Si bien es posible determinar la diferencia en valores presentes cuando se contemplan diferentes números de vidas, para el presente trabajo no se podrá determinar el impacto que esto puede causar al sistema pensional colombiano, por la imposibilidad de contar con las información de las pensiones que actualmente se pagan. Aun cuando se tuvieran las bases de datos del ISS y de las demás instituciones que pagan pensiones, la información sería deficiente pues en la práctica en el régimen de prima media, los pensionados no siempre declaran bien su masa sucesoral, la que sólo aparece cuando éste fallece. Por tanto, como ya anotamos, si bien la diferencia en un valor presente entre rentas con dos y tres vidas vitalicias no se puede despreciar, el impacto no sería importante si son pocos los casos existentes a este respecto, cosa que no es conocida de forma precisa hasta por los entes de control. Para solventar en parte esta limitación haremos una simulación que nos permita develar de forma general cómo podría estar conformado un pasivo pensional en relación al número de vidas de las reservas pensionales individuales de acuerdo con los patrones de invalidez y muerte del país.

4.4. Marco Teórico

4.4.1. Distribuciones de sobrevivencia

Definición 1 *Dado que X Es la Variable aleatoria que representa el futuro de vida de un recién nacido, la función de supervivencia, $S(x)$, define la probabilidad de que un individuo experimente el evento de interés más allá de un tiempo x. Si $f(x)$ es la función de densidad, $S(x)$ se expresa de la siguiente forma:*

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t)dt \tag{4.1}$$

Definición 2 *Si T es la variable aleatoria que representa el tiempo futuro de vida de una persona de edad x, entonces ,la probabilidad de sobrevivir t años más dada una edad x se define como ${}_tp_x = P(T(x) > t)$,*

$${}_tp_x = P(T(x) > t|X > x) = S(x+t|X > x) = \frac{S_X(x+t)}{S_X(x)} \tag{4.2}$$

La probabilidad de muerte antes de t años dada una edad x es:

$${}_tq_x = P(T(x) \leq t) = P(X \leq x+t|X > t) \tag{4.3}$$

$$= \frac{S_X(x) - S_X(x+t)}{S_X(x)} = 1 -_t p_x \tag{4.4}$$

Definición 3 *Una tabla de Mortalidad es un instrumento o esquema teórico en forma tabular, que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población en función de la edad.*

En la tabla de mortalidad la función l_x, representa al número de personas que, alcanzan con vida la edad exacta x, procedentes de una generación l_0. El número de sobrevivientes a una edad x se expresa en términos de la función de sobrevivencia como $l_x = l_0 S(x)$, y las probabilidades ${}_kp_x$ y ${}_kq_x$ en términos de l_x quedan como:

$$ {}_kp_x = \frac{S(x+k)}{S(x)} = \frac{\frac{l_{x+k}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}} = \frac{l_{x+k}}{l_x} \tag{4.5} $$

$$ {}_kq_x = \frac{S(x) - S(x+k)}{S(x)} = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} \tag{4.6} $$

Definición 4 *Esperanza de Vida: Es el valor que representa el promedio futuro de vida de una persona de edad x. Para el tiempo futuro de vida en años enteros, se define como:*

$$ e_x = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \tag{4.7} $$

Definición 5 *La esperanza de vida de una persona en edad x previo a $x+n$ se define en términos de las probabilidades de sobreviviencia de la siguiente forma:*

$$ e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x \tag{4.8} $$

4.4.2. Rentas de Vida

Definición 6 *Valor Presente de una Renta: Una primera técnica para determinar el valor presente de una renta contingente se denomina técnica actual de pago y consiste en hacer los descuentos con riesgo de cada pago y sumarlos todos. Para el caso de una renta vencida y vitalicia se tiene:*

$$ a_x = E_x +_2 E_x +_3 E_x + \cdots = p_x \cdot v^1 +_2 p_x \cdot v^2 +_3 p_x \cdot v^3 + \cdots \tag{4.9} $$

$$ a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \tag{4.10} $$

Donde ${}_kE_x = {}_k p_x \cdot v^k$ representa el valor presente con riesgo y v^k es la función de valor presente, con $v = \frac{1}{(1+i)}$. Si la renta es temporal, el valor presente de la renta sólo cambia el límite de la suma, su notación y fórmula con pagos vencidos queda como (Bower, et al., 1997):

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x \tag{4.11}$$

Si la serie de pagos se efectúan al inicio de cada período, el valor presente de la renta de vida anticipada está dada por:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \tag{4.12}$$

La relación entre rentas de vidas vencidas y anticipadas está dada de la siguiente manera:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{4.13}$$

$$a_x = \ddot{a}_{x+1} \cdot E_x \tag{4.14}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=1}^{n} {}_kE_x + ({}_0E_x - {}_n E_x) = a_{x:\overline{n}|} + 1 - {}_n E_x \tag{4.15}$$

Definición 7 *Renta Vitalicia Fraccionaria: Una renta vitalicia fraccionaria es aquella en donde el pago de las unidades monetarias por periodo, se efectúa con m pagos de $\frac{1}{m}$ en cada subperíodo. Los valores presentes de las rentas vitalicias anticipadas y venciadas están dadas por:*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x \tag{4.16}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x \tag{4.17}$$

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \tag{4.18}$$

Con ${}_{\frac{k}{m}}E_x = v^{\frac{k}{m}} \cdot {}_{\frac{k}{m}}p_x$. Las rentas temporales anticipadas y vencidas cambian el límite superior de la sumatoria por $mn-1$ y mn respectivamente, las dos se relacionan de la siguiente manera:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{m}(1 -_n E_x) \tag{4.19}$$

Si la renta es diferida, los pagos comienzan después de m períodos y pueden ser vitalicios o temporales, el valor presente de la renta vencida diferida y de la renta vencida diferida y temporal son:

$$_{j/}a_x = \sum_{k=j+1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x = a_{x+j} \cdot {}_jE_x \tag{4.20}$$

$$_{j/}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=j+1}^{j+n} v^k \cdot {}_kp_x \tag{4.21}$$

$$\tag{4.22}$$

El cálculo de las rentas fraccionadas dada por la expresión (4.18) se puede llevar a una forma donde es más sencillo su cálculo, utilizando la aproximación de Woolhouse de la siguiente manera:

$$a^{(m)}_x \approx a_x + \frac{m-1}{2m} \tag{4.23}$$

Definición 8 *Interés Real: El interés real es el exceso que hay de un rendimiento bruto i sobre la inflación k.*

$$e = \frac{1+i}{1+k} - 1 \tag{4.24}$$

Definición 9 *Renta Anticipada con Crecimientos Geométricos: El siguiente es el valor presente (VP) de una renta vitalicia con pagos anticipados de una unidad monetaria crecientes en cada período en $k\,\%$ con relación a su anterior pago (crecimiento de factor geométrico).*

$$(VP) = 1 + (1+k) \cdot {}_1E_x + (1+k)^2 \cdot {}_2E_x + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^j \cdot {}_jp_x \tag{4.25}$$

$$\text{asignemos a } v_{(e)} = \frac{1}{1+e} = \left(\frac{1+k}{1+i}\right), \text{entonces,} \tag{4.26}$$

$$(VP) = \sum_{j=0}^{\infty} v_e^j \cdot {}_jp_x = \ddot{a}_{x(e)} \tag{4.27}$$

La notación $\ddot{a}_{x(e)}$ hace referencia a que la anualidad es similar a como se definió en (4.12), pero con la notación que la tasa de interés usada es una tasa de interés real. Este resultado se puede extender al caso de rentas fraccionarias de pago vencido crecientes cada periodo en un factor grométrico k, usando la aproximación de Woolhouse.

$$(VP) = \frac{1}{m} \cdot a_{x:\overline{1}|}^{(m)} + \frac{1}{m} \cdot {}_{1/}a_{x:\overline{1}|}^{(m)} + \frac{1}{m} \cdot {}_{2/}a_{x:\overline{1}|}^{(m)} + \cdots \tag{4.28}$$

$$(VP) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot (1+k)^j \cdot {}_{j/}a_{x:\overline{1}|}^{(m)} \tag{4.29}$$

$$(VP) = \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} \tag{4.30}$$

con (VP) denotando valor presente. La dedución del resultado (4.30) puede verse en (A.1), anexo A.I. El valor presente de una renta con 12 pagos regulares al año de valor R y una mesada adicional a fin de año por el mismo valor sería:

$$(VP) = 12 \cdot R \cdot \left(\frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot k\right) + \frac{11}{24}\right) + \left(\frac{a_{x(e)}}{(1+k)}\right) \cdot R \tag{4.31}$$

Las reservas se establecen a fin de año, luego la renta vitalicia anterior para una vida se puede establecer como:

$$(VP) = 12 \cdot R \cdot (1+k) \cdot \left(\frac{a_{x+1(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot k\right) + \frac{11}{24}\right) + \left(\frac{a_{x+1(e)}}{(1+k)}\right) \cdot R \cdot (1+k) \tag{4.32}$$

donde x es la edad actuarial del año donde se calcula la reserva. Aunque esta reserva no es aplicada en los análisis seguidos, la aclaración se hace pues su uso a veces causa confusiones en la valoración de los pasivos pensionales.

5. Resultados

El trabajo de investigación se basó en un método no experimental fundamentado en las teorías del cálculo actuarial, modelos de supervivencia y teoría general del interés. Con base en los modelos existentes sobre rentas vitalicias y temporales de una y dos vidas, se dedujo las fórmulas para calcular rentas vitalicias y temporales para tres y cuatro vidas como se muestra en el apéndice A, Anexo I. Este trabajo no necesitó de una recolección de información porque utiliza supuestos de mortalidad basados en las tablas colombianas de mortalidad de rentistas existentes en el país y supuestos de ley en la rentabilidad de las reservas. Para el cálculo de las rentas, desarrollamos un programa en R, el cual nos permite realizar los cálculos propuestos en los objetivos del trabajo.

5.1. Valores presentes

Para dar una idea de la magnitud de las reservas, a continuación presentamos algunos resultados de la formulación desarrollada en el anexo I. El valor de la tasa real para los cálculos depende del ente regulador que vigila dicho cálculo. En este trabajo se estableció una tasa real del 4 %. Las tablas de mortalidad utilizadas, son las reglamentadas por la Superintendencia Financiera de Colombia, en su resolución 1555 de 2010. Los resultados asumen 12 mensualidades regulares de una unidad monetaria con una adicional a final del año. Las edades de cálculo giran en torno a las edades de pensión del régimen de prima media vigentes a la fecha del presente trabajo que son, 60 años para las mujeres y 62 para los hombres, también presentamos para efectos comparativos los cálculos con otras edades. Para las edades tempranas es de suponerse que la pensión se ha generado por causa de invalidez. Siempre que se considere un causante de una pensión con cónyuge, a este le asumimos una edad de 5 años menos si el causante es hombre y 5 años más si el causante es mujer. Una vez presentados los valores de las rentas con diferentes vidas pasamos a hecer una comparación entre ellas.

5.2. Rentas Vitalicias

En el cuadro (5.1) se muestra el resultado del cálculo del valor presente de rentas de una vida vitalicia para hombres y mujeres a diferentes edades. Para que un hombre de 60 años reciba una renta de una unidad monetaria mensual, incluyendo una mesada extra al año durante el resto de su vida, debe tener una reserva de \$ 180,05 que respalda ; mientras que para el pago a una mujer con las mismas condiciones se debe tener un reserva de \$200,80. El aumento entre estos resultados del 11,5 %, es fiel reflejo que la mortalidad en hombres es mayor que en las mujeres.

Cuadro 5.1: Valor presente de una renta vitalicia con doce mesadas regulares y una adicional en diciembre

	UNA VIDA VITALICIA	
EDAD	HOMBRE	MUJER
30	\$ 269,10	\$279,02
50	\$ 217,95	\$235,06
60	\$ 180,05	\$200,80
62	\$ 171,46	\$192,79
70	\$ 135,60	\$157,33
80	\$ 91,80	\$108,35

En el cuadro (5.2) se puede observar el cálculo del valor presente de dos vidas vitalicias. En el caso de un hombre de 60 años con una conyuge de 55 años se debe tener una reserva de \$ 232,42 para que el grupo familiar reciba una renta de una unidad monetaria mensual con una mesada extra al finalizar año, hasta que se extinga el último miembro del nucleo familiar.

Para el caso de tres vidas vitalicias el valor presente de la renta se puede ver en el cuadro (5.3), considerando el ejemplo de un padre de 62 años con su conyuge de 57 años y un hijo de 10 años; la reserva que se debe tener es de

Cuadro 5.2: Valor presente de una renta vitalicia con doce mesadas regulares y una adicional en diciembre

DOS VIDAS VITALICIAS		
HOM CAUSANTE	MUJ CONYUGE	RENTA(COP)
30	25	$ 293,05
50	45	$ 260,13
60	55	$ 232,42
62	57	$ 225,70
70	65	$ 194,61
80	75	$ 147,38

$ 273,06. De igual forma para cuatro vidas vitalicias, se puede ver el cuadro (5.4), tomando como ejemplo un causante de 62 años con su conyuge de 57 años y dos hijos de 10 y 7 años que la reserva es de $ 278,75.

Cuadro 5.3: Valor presente de una renta con tres vidas vitalicias con doce mesadas regulares y una adicional en diciembre

TRES VIDAS VITALICIAS			
HOM CAUSANTE	CONYUGE	HIJO	RENTA
30	25	10	$ 298,03
50	45	10	$ 283,47
60	55	10	$ 274,85
62	57	10	$ 273,06
70	65	10	$ 265,92
80	75	10	$ 257,82

5.3. Rentas Temporales

A manera de ejemplo consideremos un grupo familiar compuesto por dos hermanos bajo el supuesto que adquieren el derecho a recibir una pensión temporal hasta que cumplan 25 años. Los cálculos de la renta para edades

Cuadro 5.4: Valor presente de una renta de cuatro vidas vitalicias con doce mesadas regulares y una adicional en diciembre

CUATRO VIDAS VITALICIAS				
CAUSANTE	CONYUGE	HIJO	HIJO	RENTA
30	25	10	7	$ 298,22
50	45	10	7	$ 285,80
60	55	10	7	$ 279,85
62	57	10	7	$ 278,75
70	65	10	7	$ 274,80

diferentes las podemos ver en el cuadro (B.1). En el caso particular que las edades sean de 10 años para el mayor y 7 años para el hermano menor, el valor presente de la renta es $162,66. Otro caso que se puede considerar es el de un grupo familiar compuesto por tres hermanos, los cálculos de las rentas temporales para este escenario se pueden ver en el cuadro (B.2), si las edades de los tres miembros de la familia son 10 años, 7 años y 5 años, la renta es de $ 200,51. De igual manera para el escenario, formado por un grupo familiar compuesto por cuatro hermanos, el cálculo de la renta se puede ver en el cuadro (B.3),en el caso de que las edades sean de 10 años, 7 años, 5 años, 3 años, la renta es de $185,76.

5.4. Rentas de vidas vitalicias y temporales

El primer escenario a considerar es el de un grupo familiar que está compuesto por un padre y un hijo, el resultado de los cálculos se pueden ver en los cuadros (B.4), (B.5) respectivamente. Un segundo escenario se puede presentar con padres y un hijo, este caso corresponde a dos vidas vitalicias y una temporal, el cálculo del valor presente de la renta se puede ver el cuadro (B.6). De la misma manera se pueden presentar otros grupos familiares con características de tres integrantes beneficiarios de la pensión y un integrante menor de edad, el que recibe la pensión hasta que cumpla 25 años, o todas las posibles combinaciones que se pueden generar en términos del género o edad. Los cálculos para un caso particular se pueden observar en el cuadro (B.7). Para el caso de rentas de dos vidas vitalicias y dos temporales, tenemos un caso particular en el cuadro (5.5)

Cuadro 5.5: Valor presente de la renta para dos vidas vitalicias y dos temporales con doce mesadas regulares y una adicional en diciembre

DOS VITALICIAS Y DOS TEMPORALES				
CAUSANTE	CONYUGE	HIJO	HIJO	RENTA
30	25	10	7	$ 289,22
50	45	10	7	$ 255,12
60	55	10	7	$ 228,45
62	57	10	7	$ 222,37
70	65	10	7	$ 197,11
80	75	10	7	$ 171,70

5.5. Comparaciones

En términos generales podemos ver en los cuadros anteriores que hay diferencias sustanciales en los valores de la reserva al pasar de una vida vitalicia a dos vidas vitalicias y de dos a tres, pero al pasar de tres a cuatro vitalicias los valores de la reserva no sufren mayores cambios. Se puede dar el caso que al pasar de una vida vitalicia a dos el aumento sea grande si la que llega tiene una edad baja y el causante una edad alta, por ejemplo si una persona de 70 años tuviera o adopte un hijo de 9 años con invalidez, pero esto serían casos excepcionales.

El segundo caso considerado es el de pensiones que sólo tienen vidas temporales, sucedidas por sustituciones de una pensión en donde no hay padres vivos y todos los sustitutos son válidos. De acuerdo a la legislación colombiana actual, y asumiendo que los hijos estudian hasta más haya de los 25 años, la temporalidad contemplada para las reservas individuales de una persona de edad x es de: "$x - 25$" años. Por otra parte, los cálculos pensionales siempre ponen como primera vida, la del causante por ser quien genera la obligación, y sucesivamente se va agregando al cálculo las vidas con mayor esperanza de vida. En este caso al no haber un causante, se contempla en el cálculo en primer lugar, la vida con mayor expectativa de pago. Aun cuando todas las vidas tengan una alta expectativa de pago, la inclusión de más de dos vidas en el cálculo de reservas, no presenta variaciones importantes. Esto es debido a la alta probabilidad de sobrevivencia de cada una de las vidas, que hace que la probabilidad de no disolución del grupo sea casi igual a la de sobrevivencia de la vida con menor edad. Como el factor de descuento financiero de los pagos no cambia en los cálculos pensionales ante la variación del número de vidas, entonces la variación en la reserva estaría determinado fundamentalmente por la variación en las probabilidades de disolución de los grupos. Por ejemplo al pasar de una vida a dos vidas, la variación en en la reserva determinada por $(VP)^{(m)}_{\overline{xy}}/(VP)^{(m)}_{x}$ puede evaluarse bajo independencia en el recorrido de la renta por medio de ${}_kp_{\overline{xy}}/k_{px} = k_{qy} + k_{py}/k_{px}$. Obsérvese que si las vidas involucradas son jóvenes de la misma edad, la variación estaría gobernada por la probabilidad de muerte de alguno de ellos, que sería muy baja por su edad.

En términos generales se puede concluir que existiendo dos vidas en un cálculo actuarial de reserva pensional que tienen una alta expectativa de pago, la adición de una tercera vida tiene un incremento importante siempre y cuando la vida adicionada tenga una gran diferencia de edades a las dos iniciales y también una alta expectativa de pago. No es una demostración rigurosa, pero si está valorada para la legislación colombiana ante muchos rangos de edad y sexo. Esta es la conclusión manejada por muchos actuarios, aunque también algunos consideran que no es necesario incluir más de dos vidas en los cálculos. Aquí se afirma que la adición de una tercera puede tener variaciones importantes, y que una cuarta adicionada a un cálculo hecho con tres vidas, no varía practicamente en nada la reserva. Otra situación para no considearar el cálculo con más de dos vidas es si los casos de tres vidas que varían considerablemente del cálculo con dos, es si tienen una baja probabilidad de presentarse, que es lo que se evalúa más adelante.

De otro lado, una forma en que los entes reguladores exigen el cálculo de pasivos pensionales, es asumir el reparto de la mesada pensional sobre cada una de las personas que tienen derecho en la proporción que les ampara la ley, para luego hacer el cálculo de reserva individual. Luego no entra en consideración el cálculo en varias vidas pues a cada uno se le hace el cálculo por separado con base en la formulación de una vida. En Colombia esto es aplicable a pensiones de sustitución y sobrevivencia, pues es en estos casos donde se conoce el cuadro de beneficiarios por las reclamaciones de derechos a tal pensión. Si la obligación del pago de mesada no se extingue con la muerte de un beneficiario en su parte correspondiente, y pasa a ser repartido en los demás miembros del grupo que sobreviven, entonces el procedimiento descrito de cálculos individuales, también subestima el valor de la reserva, como también se da cuando el cálculo se hace a dos vidas sin incluir otras con derecho. Para el caso de dos vidas es fácil comprobarlo dado que $a_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{\overline{xy}}$, siendo ${}_k p_{\overline{xy}}$ mayor o igual a $0,5({}_k p_x +_k p_y)$. Por ejemplo si se trata de una pensión de sobrevientes para una mujer de 30 años con una hija inválida de 15 años, entonces la reserva fraccionaria de una unidad monetaria con crecimiento geométrico para dos vidas es de \$301,1 y las reservas individuales serían de \$279,0 para la mujer y \$296,9 para su hija. Como la mesada estaría repartida en partes iguales para cada una, entonces la suma de reservas de media unidad mensual para cada una, da una reserva total de \$288,0, que es equivalente al promedio simple de reservas y menor a la reserva de dos vidas. Se tendría un valor más aproximado a la reserva en dos vidas si se calculara esta con la formulación de una vida con base en la persona de menor edad. En otro ejemplo para reservas temporales de dos hombres de 10 y 15 años, sus reservas calculadas de forma individual serían \$142,74 y \$104,18 respectivamente, y la reserva con base en la formulación de dos vidas temporales de \$142,76. Aquí es más cercana la aproximación de la reserva a dos vidas usando la formulación de una vida calculada sobre la vida de menor edad.

En términos generales, una reserva en k vidas puede ser calculada con un buen grado de aproximación, con base en una reserva sobre las $k-1$ vidas que tengan la mayor esperanza de vida o expectativa de pago. En las reservas temporales que en el caso colombiano, tienen un horizonte máximo de expectativa de pago a 25 años sobre personas con alta probabilidad de sobrevivencia, los cálculos de una renta de dos o más vidas temporales son muy aproximados si se hacen con base en la formulación de una vida temporal sobre la de menor edad. Reemplazar una reserva en varias vidas con una mesada particular, con el agregado de reservas de una vida para cada miembro del grupo con una porción de mesada en la proporción de ley que le corresponde a cada una, subestima la reserva total. Aunque se puede obtener buena precisión el cálculo de una reserva con base en la vida de mayor expectativa de pago, asignándole a ella toda la mesada pensional, lo procedente es hacer el cálculo en varias vidas como corresponde.

6. Simulación

Aplicar los resultados de la tesis a una base de datos real sobre un conjunto de pensionados y determinar cuál es la diferencia entre reservas por efecto de calcularse solo a dos o tres vidas, no es posible por el secreto circunscrito a la información pensional. Por esto se hace una simulación para dar una idea de cómo sería el perfil de la conformación de grupos (familias) para la determinación de un pasivo tipo en Colombia. La idea general de la simulación es partir de un conjunto de personas válidas no pensionadas y que están dentro del sistema general de pensiones, para luego en varios escenarios de tiempo, poder determinar cómo sería la conformación de grupos familiares beneficiarios de una pensión. La simulación comienza con la asignación del número de integrantes del grupo familiar, que fue tomada con base en los resultados del censo de 2005 publicado por el DANE, para la cual se obtuvo que las familias se componen de un promedio de 4 miembros. Con la simulación definimos grupos con una composición que va desde los unipersonales hasta familias de siete personas con dos cabezas de familia y cinco hijos, donde el cabeza de familia es hombre con edad promedio de 35 años. Si la asignación aleatoria corresponde a una familia de más de un miembro, entonces dependiendo del número determinado, así mismo se asignan sus edades; para el cónyuge se asigna una edad promedio de 30 años, y para los hijos, edades medias de 10, 7, 5, 3 y 1 año, con selección aleatoria del sexo. Como la asignación es independiente, no necesariamente se obtienen edades separadas por una distancia igual a los promedios, podemos por ejemplo obtener que las dos cabezas de familia sean de la misma edad, o que el hombre cabeza de familia sea menor que su cónyuge.

La proyección de familias que serían beneficiarias de una pensión, se proyecta con un patrón de mortalidad tomado de las tablas de mortalidad de población general del DANE, y las cifras de invalidez de activos del estudio de discapacidad en Colombia de Gómez (2010), complementado con estudios de discapacidad en Chile y España. Tenemos un escenario de proyección a corto plazo y otro a largo plazo. En cada año de la proyección a cada persona le es asignado un número aleatorio, que si resulta menor a la probabilidad de muerte que le corresponde por edad y sexo, se considerará entonces como muerto. También se asigna un número aleatorio para determinar si es o no inválido. Asumiendo que los dos cabezas de familia trabajan, entonces las pensiones se generan por vejez, invalidez o muerte de alguno de ellos. Este procedimiento lo desarrollamos a lo largo de 35 años para estimar la conformación de grupos pensionales en ese tiempo.

El número de familias simuladas debe ser bastante grande de tal forma que permita determinar cómo sería la distribución de los grupos pensionales que se conformarían al cabo de un tiempo. La simulación se realizó con base en un número de cinco millones de familias seguidos en los periodos de 10 y 35 años, aunque sólo se ilustra las tablas (6.6) y (6.7), los resultados del seguimiento a 10 años. Repetir la simulación con base en ese mismo número de familias, prácticamente no cambia los resultados, prueba de ello, son los errores estándar de las estimaciones obtenidas con la metodología bootstrap (Efron (1982)). Si la simulación es con base en diez millones de familias, no sería necesario la estimación de errores estándar pues son prácticamente iguales a cero, de todas formas a manera didáctica, se ilustra el caso de cinco millones. El procedimiento de simulación para generar la base de cinco millones de personas tarda 20 minutos (procesador 2.8GHz, memoria RAM 4 GB), y la generación de 10.000 réplicas para evaluar los errores estándar bootstrap, aproximadamente 14 horas.

Es importante aclarar que las probabilidades señaladas en las tablas (6.6) y (6.7), no son probabilidades estimadas para la situación actual de Colombia sobre la distribución del tipo de pensiones según el número de vidas que las componen, pero de ellas se puede deducir si la magnitud de la probabilidad de obtener grupos pensionales con más de tres vidas vitalicias es baja, como para poder ignorar algunas de ellas en los cálculos sin causar grandes sesgos en la determinación de los pasivos pensionales, lo que es, el propósito fundamental del trabajo.

En el escenario de corto plazo a 10 años se obtienen solo pensiones por invalidez y sobrevivencia, y dado que aún las familias tienen hijos menores, las pensiones resultantes pertenecen a grupos con gran número de vidas. Las tablas (6.6) y (6.7), muestran el porcentaje que cada grupo representa del total de familias simuladas. Después de diez años el 7,44 % de las familias son beneficiarias de una pensión de invalidez o sobrevivencia. También se tiene que del total de pensiones generadas, corresponden a rentas de una vida el 6,3 %; pensiones de dos vidas (22,4 %), de tres vidas (35,4 %), de cuatro vidas el (25,5 %), de cinco vidas el (8,8 %), de seis vidas el (1,5 %) y de siete vidas el (0,1 %). Aunque hay muchas vidas en las pensiones generadas, solo un pequeño porcentaje corresponde a pensiones con más de tres vidas vitalicias: del total de pensiones generadas, el 0,9 % son temporales sin envolver ninguna vida vitalicia, el 73,8 % envuelve una vida vitalicia, el 24,7 % dos vidas vitalicias, el 0,6 % tres vidas vitalicias, y sólo el 0,01 % cuatro vidas vitalicias. No se obtuvieron casos de cinco o más vidas vitalicias.

El escenario a largo plazo de 35 años se hace pretendiendo que la mayoría de las familias alcancen con al menos uno de sus integrantes cabeza de familia la pensión de vejez. En ese escenario tenemos que el 0,4 % de los grupos familiares ha desaparecido por causa de muerte, el 2,4 % no goza de una pensión y el restante 97,2 % si goza de una pensión. Dentro de las familias pensionadas, tenemos que el 29,9 % envuelven una vida vitalicia, el 68,4 % dos vidas vitalicias, el 1,8 % tres vidas vitalicias y sólo el 0,02 % cuatro vidas vitalicias. Las pensiones de cuatro vidas representan un menor porcentaje en este escenario en gran parte porque entran en juego las pensiones de vejez, pero también se observa una reducción por la mortalidad de parte de sus miembros.

En escenarios de corto plazo una población genera grupos o familias con una pensión cuya reserva debe ser calculada con formulaciones que tienen que considerar muchas vidas. No obstante tanto a corto como largo plazo, se obtuvo en la simulación que las reservas que envuelven hasta dos vidas vitalicias se llevan el 98 % de los casos. Aunque la simulación no incluye la posibilidad de sustituciones a padres o hermanos inválidos, al hacerlo, no se cambiaría la tendencia que al menos el 98 % de los casos contemplaría hasta dos vidas vitalicias. Tampoco se contempló la situación de sustituciones o sobrevivencias con dos o más cónyuges, que podría generar pensiones de más de tres vidas vitalicias si existieran también beneficiarios hijos inválidos, pero dado que es la confluencia de eventos con baja probabilidad (varios cónyuges e invalidez de hijos), entonces la inclusión tampoco alteraría la tendencia del 98 % de grupos con hasta dos vidas vitalicias.

Como conclusión general tenemos que a corto o largo plazo el porcentaje de pensiones que incluyan cuatro o más vidas vitalicias es muy pequeño en relación con el total de pensiones, y si además tenemos en cuenta según las comparaciones de los apartados anteriores, que el exceso de reserva al pasar de tres a cuatro vidas tampoco es muy grande, tenemos entonces que la subes-

Cuadro 6.6: Distribución del número de grupos pensionales en un escenario simulado a diez años de una población joven afiliada al sistema de pensiones.

		SOBREVIVIENCIA			
Vidas	**Tipo**	**MeS**	**SdS**	**LI**	**LS**
Una	**Una Temporal**	0,0161401 %	0,0005742 %	0,0161396 %	0,0161406 %
	Una Vitalicia	0,4363287 %	0,0029457 %	0,4363261 %	0,4363313 %
				0,0000000 %	0,0000000 %
Dos	**Dos Temporales**	0,0255113 %	0,0007155 %	0,0255107 %	0,0255119 %
	Una Temporal Una Vitalicia	1,4226924 %	0,0053451 %	1,4226877 %	1,4226971 %
	Dos Vitalicias	0,0226403 %	0,0006756 %	0,0226397 %	0,0226408 %
Tres	**Tres Temporales**	0,0160374 %	0,0005621 %	0,0160369 %	0,0160379 %
	Dos Temporales Una Vitalicia	2,0398208 %	0,0063013 %	2,0398153 %	2,0398264 %
	Una Temporal Dos Vitalicia	0,0552111 %	0,0010500 %	0,0552102 %	0,0552120 %
	Tres Vitalicias	0,0003596 %	0,0000846 %	0,0003595 %	0,0003597 %
Cuatro	**Cuatro Temporales**	0,0049206 %	0,0003144 %	0,0049203 %	0,0049209 %
	Tres Temporales Una Vitalicia	1,1860077 %	0,0048285 %	1,1860034 %	1,1860119 %
	Dos Temporales Dos Vitalicias	0,0453147 %	0,0009509 %	0,0453139 %	0,0453156 %
	Una Temporal Tres Vitalicias	0,0005823 %	0,0001088 %	0,0005822 %	0,0005824 %
	Cuatro Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
Cinco	**Cinco Temporales**	0,0006382 %	0,0001127 %	0,0006381 %	0,0006383 %
	Cuatro Temporales Una Vitalicia	0,2788910 %	0,0023681 %	0,2788889 %	0,2788931 %
	Tres Temporales Dos Vitalicias	0,0132447 %	0,0005162 %	0,0132442 %	0,0132451 %
	Dos Temporales Tres Vitalicias	0,0003008 %	0,0000778 %	0,0003007 %	0,0003009 %
	Una Temporal Cuatro Vitalicias	0,0000201 %	0,0000204 %	0,0000201 %	0,0000202 %
	Cinco Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
Seis	**Seis Temporales**	0,0000201 %	0,0000200 %	0,0000201 %	0,0000201 %
	Cinco Temporales Una Vitalicia	0,0266900 %	0,0007303 %	0,0266893 %	0,0266906 %
	Cuatro Temporales Dos Vitalicias	0,0014190 %	0,0001682 %	0,0014189 %	0,0014192 %
	Tres Temporales Tres Vitalicias	0,0000403 %	0,0000282 %	0,0000403 %	0,0000404 %
	Dos Temporales Cuatro Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Una Temporal Cinco Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Seis Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
Siete	**Siete Temporales**	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Seis Temporales Una Vitalicia	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Cinco Temporales Dos Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Cuatro Temporales Tres Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Tres Temporales Cuatro Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Dos Temporales Cinco Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Una Temporal Seis Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	Siete Vitalicias	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %	0,0000000 %
	TOTAL	5,59 %			

Cuadro 6.7: Distribución del número de grupos pensionales en un escenario simulado a diez años de una población joven afiliada al sistema de pensiones.

		INVALIDEZ			
Vidas	**Tipo**	**MeI**	**SdI**	**LI**	**LS**
Una	**Una Temporal**	0,000179 %	0,000059 %	0,000179 %	0,00018 %
	Una Vitalicia	0,014036 %	0,000531 %	0,014036 %	0,01404 %
Dos	**Dos Temporales**	0,000519 %	0,000102 %	0,000519 %	0,00052 %
	Una Temporal Una Vitalicia	0,026068 %	0,000717 %	0,026067 %	0,02607 %
	Dos Vitalicias	0,172688 %	0,001868 %	0,172686 %	0,17269 %
				0,000000 %	0,00000 %
Tres	**Tres Temporales**	0,000401 %	0,000089 %	0,000401 %	0,00040 %
	Dos Temporales Una Vitalicia	0,037522 %	0,000871 %	0,037521 %	0,03752 %
	Una Temporal Dos Vitalicia	0,473052 %	0,003044 %	0,473049 %	0,47305 %
	Tres Vitalicias	0,008300 %	0,000405 %	0,008300 %	0,00830 %
Cuatro	**Cuatro Temporales**	0,000159 %	0,000057 %	0,000159 %	0,00016 %
	Tres Temporales Una Vitalicia	0,021527 %	0,000657 %	0,021527 %	0,02153 %
	Dos Temporales Dos Vitalicias	0,619149 %	0,003523 %	0,619146 %	0,61915 %
	Una Temporal Tres Vitalicias	0,016604 %	0,000573 %	0,016603 %	0,01660 %
	Cuatro Vitalicias	0,000220 %	0,000066 %	0,000220 %	0,00022 %
				0,000000 %	0,00000 %
Cinco	**Cinco Temporales**	0,000020 %	0,000020 %	0,000020 %	0,00002 %
	Cuatro Temporales Una Vitalicia	0,004921 %	0,000314 %	0,004920 %	0,00492 %
	Tres Temporales Dos Vitalicias	0,345949 %	0,002622 %	0,345946 %	0,34595 %
	Dos Temporales Tres Vitalicias	0,013362 %	0,000521 %	0,013362 %	0,01336 %
	Una Temporal Cuatro Vitalicias	0,000120 %	0,000049 %	0,000120 %	0,00012 %
	Cinco Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
Seis	**Seis Temporales**	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Cinco Temporales Una Vitalicia	0,000482 %	0,000099 %	0,000482 %	0,00048 %
	Cuatro Temporales Dos Vitalicias	0,080859 %	0,001278 %	0,080858 %	0,08086 %
	Tres Temporales Tres Vitalicias	0,004043 %	0,000284 %	0,004043 %	0,00404 %
	Dos Temporales Cuatro Vitalicias	0,000080 %	0,000040 %	0,000080 %	0,00008 %
	Una Temporal Cinco Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Seis Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
Siete	**Siete Temporales**	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Seis Temporales Una Vitalicia	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Cinco Temporales Dos Vitalicias	0,007408 %	0,000378 %	0,007407 %	0,00741 %
	Cuatro Temporales Tres Vitalicias	0,000339 %	0,000082 %	0,000339 %	0,00034 %
	Tres Temporales Cuatro Vitalicias	0,000020 %	0,000020 %	0,000020 %	0,00002 %
	Dos Temporales Cinco Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Una Temporal Seis Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	Siete Vitalicias	0,000000 %	0,000000 %	0,000000 %	0,00000 %
	TOTAL	1,84 %			

timación de un pasivo al realizar las reservas a tres vidas no sería tan grande.

7. Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

Las conclusiones relevantes podemos expresarlas de forma general como sigue:

- Reemplazar una reserva en varias vidas con una mesada particular, con el agregado de reservas de una vida para cada miembro del grupo con una porción de mesada en la proporción de ley que le corresponde a cada uno, subestima la reserva total. Aunque se puede obtener mayor precisión si se hace con el cálculo con la vida de mayor expectativa de vida asignándole a ella toda la mesada pensional, lo procedente es hacer el cálculo en varias vidas como corresponde.

- Se pueden encontrar diferencias sustanciales en los valores de reserva cuando se pasa de cálculos de una vida a cálculos de dos vidas, y de dos vidas a tres vidas, pero la diferencia entre un valor de reserva con tres vidas frente a otras con cuatro o más no es muy grande. Si se trata de pasar de dos vidas vitalicias a dos vitalicias con una temporal, las diferencias no son grandes a menos que se trate de dos vitalicias con edades muy avanzadas y una temporal con una edad muy baja, situación que es poco probable. Por ejemplo, la reserva de un hombre de 65 con un cónyuge mujer de 60 es de 214,8 que aumenta un 3 % si se suma al grupo un niño valido de 4 años. Si las vitalicias son de edades 75 y 70 en su orden, la reserva seria de $ 172,0 y aumenta un 14 % al agregar el niño válido de 4 años.

- Una reserva en k vidas puede ser calculada con un buen grado de aproximación, con base en una reserva sobre las $k-1$ vidas que tengan la mayor esperanza de vida o expectativa de pago. En las reservas temporales que en el caso colombiano, tienen un horizonte máximo de expectativa de pago a 25 años (personas con alta probabilidad de sobrevivencia), los cálculos de una renta de dos o más vidas temporales son muy aproximados si se hacen con base en la formulación de una vida temporal sobre la de menor edad.

- En escenarios de corto plazo una población genera grupos o familias con una pensión cuya reserva debe ser calculada con formulaciones que deban considerar muchas vidas. No obstante tanto a corto como largo plazo, obtuvimos en nuestra simulación que las reservas que envuelven hasta dos vidas vitalicias se llevan el 98 % de los casos. Aunque la simulación no incluye la posibilidad de sustituciones a padres o hermanos inválidos, al hacerlo, no se cambiaría en tendencia al menos el 98 % de los casos con hasta dos vidas vitalicias. Tampoco se contempló la situación de sustituciones o sobrevivencias con dos o más cónyuges, que podría generar pensiones de más de tres vidas vitalicias si existieran también beneficiarios hijos inválidos, pero dado que es la confluencia de eventos con baja probabilidad (varios cónyuges e invalidez de hijos), entonces la inclusión tampoco alteraría la tendencia del 98 % de grupos con hasta dos vidas vitalicias.

- Dado que si una reserva envuelve más de tres vidas, esta se puede aproximar en un alto grado con un cálculo a tres vidas con aquellas que tengan la mayor expectativa de vida o de pago, entonces los pasivos pensionales quedarían con precisión suficientemente si las reservas se hicieran con formulación de tres vidas. Pero ante el hecho que sólo un 2 % de los grupos envolverían tres o más vidas vitalicias, entonces los pasivos que sean calculados con formulaciones de dos vidas dan buena aproximación al total de la obligación pensional.

7.2. Discusión Final y Recomendaciones

Es necesario recalcar que los valores de reserva de las rentas citados son valores esperados, y que serán suficientes para responder por las obligaciones adquiridas en la medida que se cumplan los supuestos de mortalidad e interés de su cálculo. Esto es, que en la medida que los patrones de mortalidad se mantengan a largo plazo conforme a los expresados en las tablas de mortalidad, y que la institución responsable del pago de las mesadas ponga a rentar las reservas mínimo a cuatro puntos reales por encima de inflación, entonces se garantizaría la suficiencia de las mismas. No sobra indicar que también se debe garantizar el no cambio en las condiciones de ley de las pensiones, por ejemplo, que los aumentos en las mesadas se realicen por encima de lo establecido. A este respecto también es importante aclarar que en Colombia las pensiones de salario mínimo se incrementan en un porcentaje que resulte mayor entre el porcentaje de aumento del salario mínimo y la variación del Índice de Precios al Consumidor del año anterior (inflación). En este trabajo no se consideró ese aspecto y cualquier impacto de un aumento diferente al de la inflación debe ser considerada por aparte en otro trabajo.

Además de los supuestos anteriores también es importante tener en cuenta que los valores de reserva calculados son asumidos como una estimación del valor esperado a partir de una muestra en particular, que convergerá al parámetro si la muestra es grande. En el caso que no se tenga esta condición, como cuando se tienen pocos casos como el de grupos con 4 vidas vitalicias, es recomendable hacer un ajuste a la estimación de la reserva con base en la varianza de los estimadores conforme lo plantea Huertas (2000, pág. 101).

Las condiciones de cómputo no son una limitante que antes existía como para hacer los cálculos de las pensiones con formulaciones que envuelvan muchas vidas. Luego de acuerdo con las conclusiones se recomienda hacer los cálculos de los pasivos pensionales con tres vidas. No obstante, la precisión que se pierde en la valoración del pasivo con un cálculo en dos vidas no es mucha si se hace con las vidas que tengan mayor expectativa de vida (vitalicia o temporal).

Dado que el estudio no contempla variaciones en las probabilidades de sobrevivencia, y que las reservas son muy sensibles al cambio de tasa de interés, un estudio similar a este debe examinarse como investigación futura, donde se contemple una tasa de interés continua, y tablas dinámicas de mortalidad.

Apéndice A

Anexo I: Deducción del Valor presente para varias vidas

A.1. Valor presente de una renta vitalicia fraccionada con crecimientos geométricos

La notación dada es una asignada por los autores del presente documento, debido a que no existe en la notación clásica actuarial.
sustituimos "a" propia de las rentas por "VP" valor presente.

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_x &= \sum_{j=0}^{\infty} {}_{j/}a^{(m)}_{x:\overline{1}|} \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{(m)}_{x+j:\overline{1}|} \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_{x+j:\overline{1}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - E_{x+j}) \right) \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} E_{x+j} \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{\infty} (1 - E_{x+j}) \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} {}_{j+1}E_x \cdot (1+k)^j + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{\infty} {}_jE_x \cdot (1+k)^j - \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{\infty} {}_{j+1}E_x \cdot (1+k)^j \\
&= \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{a_{x_{(e)}}}{(1+k)} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left(a_{x_{(e)}} + 1) \right) \\
&= \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k \right) + \frac{m-1}{2m}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

De forma similar se deduce el valor presente a primero de enero de una renta vitalicia mensual de un peso pagadero a y en m pagos con la muerte de x:

$$(VP)^{(m)}_{x|y} = \frac{a_{y(e)} - a_{xy(e)}}{1+k} \left(1 + \frac{m-1}{2m} k \right) \tag{A.2}$$

$$a^m_{xy(e)} = \frac{a_{xy(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k \right) + \frac{m-1}{2m} \tag{A.3}$$

$$\text{donde} \tag{A.4}$$

$$a_{xy(e)} = \sum_{k=1}^{L} v^k_{(e)} \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y \tag{A.5}$$

$$\tag{A.6}$$

a_{xy} es el valor presente de una renta que paga hasta la muerte de (x) o (y), es decir, paga hasta que suceda la primera muerte.

A.2. Rentas temporales fraccionarias crecientes geométricas con un factor k

La deducción de la fórmula para la rentas temporales fraccionarias crecientes geométricas con un factor k, temporales a un periodo n es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{j|}a^{(m)}_{x:\overline{1}|} \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a^{(m)}_{x+j:\overline{1}|} \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{x+j:\overline{1}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - E_{x+j}) \right) \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} E_{x+j} \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - E_{x+j}) \cdot {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{j+1}E_x \cdot (1+k)^j + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot (1+k)^j - \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} {}_{j+1}E_x \cdot (1+k)^j \\
&= \frac{m+1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} {}_{j+1}E_x \cdot (1+k)^j + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x \cdot (1+k)^j \\
r &= j+1 \\
&= \frac{m+1}{2m} \sum_{r=1}^{n} \frac{{}_rE_x \cdot (1+k)^r}{1+k} + \frac{m-1}{2m} \sum_{j=0}^{n-1} {}_jE_x (1+k)^j \\
&= \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{a_{x:\overline{n}|(e)}}{1+k} + \frac{m-1}{2m} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|(e)} \\
&= \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|(e)} - 1 +_n E_{x(e)}}{1+k} + \frac{m-1}{2m} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|(e)} \\
&= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|e}}{1+k} \cdot \left(\frac{m+1}{2m} + \frac{m-1}{2m}(1+k) \right) + \frac{m+1}{2m(1+k)} (-1 +_n E_{x(e)}) \\
&= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|e}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k \right) - \frac{m+1}{2m(1+k)} \cdot (1 -_n E_{x(e)})
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Otra expresión equivalente es:

$$(VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{x:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{x(e)}) \tag{A.8}$$

Además $(VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|}$ es:

$$(VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|} = \frac{a_{xy:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xy(e)}) \tag{A.9}$$

A.3. Rentas de dos Vidas

A.3.1. Dos vidas vitalicias

Para el caso de dos vidas vitalicias se tiene la siguiente relación:

$$(VP)^{(m)}_{\overline{xy}} = (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{y} - (VP)^{(m)}_{xy} \tag{A.10}$$

$$(VP)^{(m)}_{x|y} = (VP)^{(m)}_{y} - (VP)^{(m)}_{xy} \tag{A.11}$$

$$(VP)^{(m)}_{\overline{xy}} = (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{x|y} \tag{A.12}$$

${}_kp_x \cdot {}_kp_y$: Probabilidad que el grupo xy sobrevivan k años más (ninguno muera antes de k años), asumiendo que los tiempos de supervivencia de las vidas x y y, son independientes.
Reemplazando (A.1),(A.3) en (A.10),se obtiene el valor presente para dos vidas vitalicias fraccionaria con crecimientos geométricos,

$$(VP)_{\overline{xy}} = \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} + \frac{a_{y(e)} - a_{xy(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \tag{A.13}$$

A.3.2. Una vida vitalicia y una vida temporal

El valor presente para dos vidas, una vida vitalicia fraccionaria con crecimientos geométricos y otra temporal fraccionaria con crecimientos geométricos se expresa de la siguiente forma reemplazando (A.1),(A.8),(A.9) en (A.10):

$$(VP)_{\overline{xy:\overline{n}|}} = \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} + \frac{a_{y:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right]$$
$$+ \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{y(e)}) - \frac{a_{xy:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xy(e)}) \tag{A.14}$$

A.4. Rentas de Tres Vidas

A.4.1. Tres vidas vitalicias

Para tres vidas vitalicias la relación es:

$$\begin{aligned}(VP)_{\overline{xyz}} &= (VP)_x^{(m)} + (VP)_y^{(m)} + (VP)_z^{(m)} \\ &\quad - (VP)_{xy}^{(m)} - (VP)_{xz}^{(m)} - (VP)_{yz}^{(m)} + (VP)_{xyz}^{(m)} \\ (VP)_{\overline{xyz}} &= (VP)_x^{(m)} + (VP)_{x|y}^{(m)} + (VP)_{xy|z}^{(m)} \\ \text{donde, } (VP)_{x|y} &= (VP)_x^{(m)} - (VP)_{xy}^{(m)} \\ \text{y, } (VP)_{xy|z} &= (VP)_z^{(m)} - (VP)_{xz}^{(m)} - (VP)_{yz}^{(m)} + (VP)_{xyz}^{(m)}\end{aligned} \tag{A.15}$$

$(VP)_{\overline{xyz}}$ es el valor presente de una renta que se paga hasta la muerte del último sobreviviente, $a_{x|y}$ es el valor presente de la renta que se paga a (y) con la muerte (x), $(VP)_{xy|z}$ es la renta que se paga a (z) con la muerte de (x) y (y) , $(VP)_{xyz(e)}$ es el valor presente de una renta que se paga hasta que ocurra la primera muerte de las vidas x o y o z. En forma análoga a (A.3) se obtiene $(VP)_{xyz}^{(m)}$:

$$(VP)_{xyz}^{m} = \frac{a_{xyz(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} \tag{A.16}$$

Reemplazando (A.1),(A.3),(A.16) en (A.15) se obtiene:

$$(VP)_{\overline{xyz}} = \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} + \frac{a_{y(e)} - a_{xy(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right)$$
$$+ \frac{a_{z(e)} - a_{xz(e)} - a_{yz(e)} + a_{xyz(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \tag{A.17}$$

donde $a_{xyz(e)}$ se expresa como:

$$a_{xyz(e)} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_{xyz} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y \cdot {}_kp_z \qquad \text{(A.18)}$$

${}_kp_x \cdot {}_kp_y \cdot {}_kp_z$: Es la Probabilidad que el grupo xyz sobrevivan k años más (ninguno muera antes de k años), los tiempos de supervivencia de las vidas x , y y z se asumen independientes.

A.4.2. Dos vidas vitalicias y una vida temporal

La relación para dos vidas vitalicias y una vida temporal es:

$$(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:\overline{n}|}} = (VP)^{(m)}_x + (VP)^{(m)}_y + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n}|}$$

$$- (VP)^{(m)}_{xy} - (VP)^{(m)}_{xz:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{yz:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xyz:\overline{n}|}$$

$$(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:\overline{n}|}} = (VP)^{(m)}_x + (VP)^{(m)}_{x|y} + (VP)^{(m)}_{xyz:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{xz:\overline{n}|}$$

donde,

$$(VP)^{(m)}_{xyz:\overline{n}|} = (VP)^{(m)}_{z:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{yz:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xyz:\overline{n}|}$$

$$\text{y, } (VP)^{(m)}_{x|y} = (VP)^{(m)}_y - (VP)^{(m)}_{xy} \qquad \text{(A.19)}$$

Sustituyendo (A.1),(A.3),(A.9) en (A.19), se obtiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:\overline{n}|}} = {} & \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} + \frac{a_{y(e)} - a_{xy(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\
& + \frac{a_{z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{z(e)}) \\
& - \frac{a_{xz:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{xz(e)}) \\
& - \frac{a_{yz:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{yz(e)}) \\
& + \frac{a_{xyz:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m} k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{xyz(e)}) \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

A.4.3. Una vida vitalicia y Dos vidas temporales

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|} = {} & (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|} \\
& - (VP)^{(m)}_{xz:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|} \qquad (A.21)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (A.1),(A.9) en (A.21), se obtiene la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|} = {} & \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} \\
& + \frac{a_{y:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{y(e)}) \\
& + \frac{a_{z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{z(e)}) \\
& - \frac{a_{xy:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xy(e)}) \\
& - \frac{a_{xz:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xz(e)}) \\
& - \frac{a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{yz(e)}) \\
& + \frac{a_{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyz(e)}) \qquad (A.22)
\end{aligned}
$$

A.4.4. Tres Vidas Temporales

El valor presente para tres vidas temporales es:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|} = {} & (VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|} \\
& - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|z:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|} \qquad (A.23)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (A.9),(A.8) en (A.23), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|}} = \frac{a_{x:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot & \left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{x(e)}) \\
&+\frac{a_{y:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{y(e)}) \\
&+\frac{a_{z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{z(e)}) \\
&-\frac{a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{xy(e)}) \\
&-\frac{a_{x:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{xz(e)}) \\
&-\frac{a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{yz(e)}) \\
&+\frac{a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-{}_{n}\,E_{xyz(e)}) \qquad (A.24)
\end{aligned}
$$

A.5. Rentas de Cuatro Vidas

A.5.1. Cuatro vidas vitalicias

La relación para cuatro vidas es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{xyzw}} &= (VP)^{(m)}_{x}+(VP)^{(m)}_{y}+(VP)^{(m)}_{z}+(VP)^{(m)}_{w}-(VP)^{(m)}_{xy} \\
&-(VP)^{(m)}_{xz}-(VP)^{(m)}_{xw}-(VP)^{(m)}_{yz}-(VP)^{(m)}_{yw} \\
&-(VP)^{(m)}_{zw}+(VP)^{(m)}_{xyz}+(VP)^{(m)}_{xyw}+(VP)^{(m)}_{yzw} \\
&+(VP)^{(m)}_{xzw}-(VP)^{(m)}_{xyzw} \\
(VP)^{(m)}_{\overline{xyzw}} &= (VP)^{(m)}_{x}+(VP)^{(m)}_{x|y}+(VP)^{(m)}_{xy|z}+(VP)^{(m)}_{xyz|z} \\
\text{donde, } (VP)^{(m)}_{x|y} &= (VP)^{(m)}_{y}-(VP)^{(m)}_{xy} \\
(VP)^{(m)}_{xy|z} &= (VP)^{(m)}_{z}-(VP)^{(m)}_{xz}-(VP)^{(m)}_{yz}+(VP)^{(m)}_{xyz} \\
(VP)^{(m)}_{xyz|w} &= (VP)^{(m)}_{w}-(VP)^{(m)}_{xw}-(VP)^{(m)}_{yw}-(VP)^{(m)}_{zw}+(VP)^{(m)}_{xyw} \\
&+(VP)^{(m)}_{xzw}+(VP)^{(m)}_{yzw}-(VP)^{(m)}_{xyzw} \qquad (A.25)
\end{aligned}
$$

$(VP)^{(m)}_{xyzw}$ es el valor presente de la renta con crecimiento geométrico que se paga hasta que ocurra la primera muerte de (x) o (y) o (z) o (w), $(VP)^{(m)}_{xyz|w}$ es la renta que se paga a (w) con la muerte de (x), (y), z , $(VP)^{(m)}_{xyzw(e)}$ es el valor presente de una renta que se paga hasta que ocurra la primera muerte de las vidas (x) o (y) o (z) , $(VP)^{(m)}_{\overline{xyzw}}$ es el valor presente de una renta que se paga hasta la muerte del último sobreviviente.

En forma análoga a (A.16) se obtiene $(VP)^{(m)}_{xyzw}$:

$$(VP)^{m}_{xyzw} = \frac{a_{xyzw(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} \tag{A.26}$$

donde $a_{xyzw(e)}$ se define de la siguiente forma:

$$a_{xyzw(e)} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_{xyzw} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x \cdot {}_kp_y \cdot {}_kp_z \cdot {}_kp_w \tag{A.27}$$

${}_kp_x \cdot {}_kp_y \cdot {}_kp_z \cdot {}_kp_w$: Es la Probabilidad que el grupo $xyzw$ sobrevivan k años más (ninguno muera antes de k años), los tiempos de supervivencia de las vidas x , y , z y w son independientes.
Reemplazando (A.1),(A.3),(A.16),(A.26) en (A.25), se obtine:

$$\begin{aligned}(VP)_{\overline{xyzw}} = {} & \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} + \frac{a_{y(e)} - a_{xy(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\ & + \frac{a_{z(e)} - a_{xz(e)} - a_{yz(e)} + a_{xyz(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\ & + \frac{a_{w(e)} - a_{xw(e)} - a_{yw(e)} - a_{zw(e)} + a_{xyw(e)} + a_{yzw(e)} - a_{xyzw(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right)\end{aligned} \tag{A.28}$$

A.5.2. Tres vidas vitalicias y una vida temporal

El valor presente para una renta con tres vidas vitalicias y una temporal es el siguiente:

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:w:\overline{n}|}} &= (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{y} + (VP)^{(m)}_{z} + (VP)^{(m)}_{w:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{xy} \\ &- (VP)^{(m)}_{xz} - (VP)^{(m)}_{xw:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{yz} - (VP)^{(m)}_{yw} \\ &- (VP)^{(m)}_{zw:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xyz} + (VP)^{(m)}_{xy:w:\overline{n}|} \\ &+ (VP)^{(m)}_{yz:w:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xzw:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{xyz:w:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{xyzw:\overline{n}|}} &= (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{x|y} + (VP)^{(m)}_{xy|z} + (VP)^{(m)}_{xyz|z} \\ \text{donde, } (VP)^{(m)}_{x|y} &= (VP)^{(m)}_{y} - (VP)^{(m)}_{xy} \\ (VP)^{(m)}_{xy|z} &= (VP)^{(m)}_{z} - (VP)^{(m)}_{xz} - (VP)^{(m)}_{yz} + (VP)^{(m)}_{xyz} \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{xyz|w} &= (VP)^{(m)}_{w:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{x:w:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{y:w:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{z:w:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{xy:w:\overline{n}|} \\ &+ (VP)^{(m)}_{xz:w:\overline{n}|} + (VP)^{(m)}_{yz:w:\overline{n}|} - (VP)^{(m)}_{xyz:w:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{A.31}$$

$(VP)_{xyzw:\overline{n}|}$ es el valor presente de la renta que se paga temporalmente a (w) si ocurre las muertes de (x) o (y) o (z).
Sustituyendo (A.1),(A.3),(A.9),(A.14),(A.19) en (A.29), reduciendo términos se obtiene:

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:w:\overline{n}|}} &= \frac{a_{x(e)} + a_{y(e)} + a_{z(e)} - a_{xy(e)} - a_{xz(e)} - a_{yz(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\ &+ \frac{a_{w:\overline{n}|(e)} - a_{x:w:\overline{n}|(e)} - a_{y:w:\overline{n}|(e)} - a_{z:w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\ &+ \frac{a_{xyz(e)} + a_{xy:w:\overline{n}|(e)} + a_{yz:w:\overline{n}|(e)} + a_{xz:w:\overline{n}|(e)} - a_{xyz:w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\ &+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xyzw(e)} -{}_n E_{xzw(e)} -{}_n E_{xyw(e)} +{}_n E_{zw(e)} +{}_n E_{yw(e)}\right) \\ &+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xw(e)} -{}_n E_{w(e)} + 1\right) \end{aligned} \tag{A.32}$$

A.5.3. Dos vidas vitalicias y dos vidas temporales

El valor presente para una renta con dos vidas vitalicias y dos vidas temporal es el siguiente:

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:\overline{n|}w:\overline{n|}}} &= (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{y} + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xy} \\ &- (VP)^{(m)}_{xz:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xw:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{yz:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{yw:\overline{n|}} \\ &- (VP)^{(m)}_{z\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{xy:z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{xy:w:\overline{n|}} \\ &+ (VP)^{(m)}_{y:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} \end{aligned} \tag{A.33}$$

$(VP)^{(m)}_{\overline{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}}}$ se puede escribir así:

$$\begin{gathered}(VP)_{\overline{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} = (VP)^{(m)}_{x} + (VP)_{x|y} + (VP)_{xy|z} + (VP)_{xyz|z} \\ \text{donde, } (VP)_{x|y} = (VP)^{(m)}_{y} - (VP)^{(m)}_{xy} \\ (VP)_{xy|z} = (VP)^{(m)}_{z} - (VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{xy:z:\overline{n|}} \\ (VP)_{xyz|w} = (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{xy:\overline{n|}w:\overline{n|}} \\ +(VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{y:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}}\end{gathered}$$

$(VP)^{(m)}_{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}}$ es el valor presente de la renta que se paga temporalmente a (z), (w) si ocurre las muertes de (x) o (y).
Sustituyendo (A.1),(A.3),(A.9),(A.14),(A.19) en (A.33), reduciendo términos se obtiene:

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{xy:z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} &= \frac{a_{x(e)} + a_{y(e)} - a_{xy(e)+a_{w:\overline{n|}(e)}+a_{z:\overline{n|}(e)}}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\ &+ \frac{a_{x:z:\overline{n|}(e)} - a_{x:w:\overline{n|}(e)} - a_{yz:\overline{n|}(e)} - a_{y:w:\overline{n|}(e)} - a_{z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\ &+ \frac{a_{xy:z:\overline{n|}(e)} + a_{xy:w:\overline{n|}(e)} + a_{y:z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} + a_{x:z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} - a_{xyz:w:\overline{n|}(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\ &+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xyzw(e)} -_n E_{xyz(e)} -_n E_{xzw(e)} -_n E_{xyw(e)} -_n E_{yzw(e)}\right) \\ &+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{zw(e)} +_n E_{yw(e)} +_n E_{xw(e)} +_n E_{yz(e)} +_n E_{xz(e)}\right) \\ &+ \frac{m-1}{2m}\left(1 + -_nE_{w(e)} -_n E_{z(e)} -_n E_{y(e)}\right)\end{aligned} \tag{A.34}$$

A.5.4. Una vida vitalicia y tres vidas temporales

El valor presente para una renta con una vida vitalicia y tres vidas temporales es el siguiente:

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{\overline{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} &= (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xy:\overline{n|}}\\ &- (VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}w:\overline{n|}}\\ &- (VP)^{(m)}_{z\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}\\ &+ (VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}\end{aligned} \tag{A.35}$$

$(VP)^{(m)}_{\overline{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}}$ se puede escribir así:

$$(VP)^{(m)}_{\overline{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} = (VP)^{(m)}_{x} + (VP)^{(m)}_{x|y} + (VP)^{(m)}_{xy|z} + (VP)^{(m)}_{xyz|z}$$

$$\text{donde, } (VP)^{(m)}_{x|y} = (VP)^{(m)}_{y} - (VP)^{(m)}_{xy}$$

$$(VP)^{(m)}_{xy|z} = (VP)^{(m)}_{z} - (VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}z:\overline{n|}}$$

$$\begin{aligned}(VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}z|w} &= (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:y:\overline{n|}w:\overline{n|}}\\ &+(VP)^{(m)}_{x:z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{xy:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}\end{aligned}$$

Sustituyendo (A.1),(A.3),(A.9),(A.14) en (A.35)

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|}} = {} & \frac{a_{x(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) + \frac{m-1}{2m} \\
& + \frac{a_{y:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{y(e)}) \\
& + \frac{a_{z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{z(e)}) \\
& + \frac{a_{w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{w(e)}) \\
& - \frac{a_{xy:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xy(e)}) \\
& - \frac{a_{xz:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xz(e)}) \\
& - \frac{a_{xw:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xw(e)}) \\
& - \frac{a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{yz(e)}) \\
& - \frac{a_{y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{yw(e)}) \\
& - \frac{a_{z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{zw(e)}) \\
& + \frac{a_{xy:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyz(e)}) \\
& + \frac{a_{x:y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyz(e)}) \\
& + \frac{a_{x:y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyz(e)}) \\
& + \frac{a_{x:z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] + \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyz(e)}) \\
& - \frac{a_{x:y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left[\left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right)\right] - \frac{m-1}{2m}(1 -_n E_{xyzw(e)})
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

reduciendo (A.36) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&(VP)^{(m)}_{\overline{xy:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} = \frac{a_{x(e)} + a_{y:\overline{n|}(e)} - a_{xy:\overline{n|}(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\
&+\frac{a_{z:\overline{n|}(e)} + a_{w:\overline{n|}(e)} - a_{xz:\overline{n|}(e)} - a_{xw:\overline{n|}(e)} - a_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}(e)} - a_{y:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} - a_{z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\
&+\frac{a_{xy:\overline{n|}z:\overline{n|}(e)} + a_{xy:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} + a_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} + a_{xz:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)} - a_{xy:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\
&\quad + \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xyzw(e)} -_n E_{xyz(e)} -_n E_{xzw(e)} -_n E_{xyw(e)} -_n E_{yzw(e)}\right) \\
&+\frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{zw(e)} +_n E_{yw(e)} +_n E_{xw(e)} +_n E_{yz(e)} +_n E_{xz(e)} -_n E_{w(e)} -_n E_{z(e)} + 1\right)
\end{aligned} \tag{A.37}
$$

A.5.5. Cuatro vidas temporales

El valor presente para una renta con cuatro vidas temporales es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} &= (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}} \\
&-(VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}w:\overline{n|}} \\
&-(VP)^{(m)}_{z\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}w:\overline{n|}} \\
&+(VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}
\end{aligned} \tag{A.38}
$$

$(VP)^{(m)}_{\overline{xyz:\overline{n|}w:\overline{n|}}}$ se puede escribir así:

$$
\begin{gathered}
(VP)^{(m)}_{\overline{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}} = (VP)^{(m)}_{x} + (VP)_{x|y} + (VP)_{xy|z} + (VP)_{xyz|z} \\
\text{donde, } (VP)^{(m)}_{x|y} = (VP)^{(m)}_{y} - a^{(m)}_{xy} \\
(VP)^{(m)}_{xy|z} = (VP)^{(m)}_{z} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}z:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}} \\
(VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z|w} = (VP)^{(m)}_{w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}w:\overline{n|}} - (VP)^{(m)}_{z:\overline{n|}w:\overline{n|}} \\
+(VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}} + (VP)^{(m)}_{y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}} \\
-(VP)^{(m)}_{x:\overline{n|}y:\overline{n|}z:\overline{n|}w:\overline{n|}}
\end{gathered}
$$

Reeemplazando (A.3),(A.9),(A.14) en (A.38) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&(VP)^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|}}\\
&= \frac{a_{x:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{x(e)})\\
&+ \frac{a_{y:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{y(e)})\\
&+ \frac{a_{z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{z(e)})\\
&+ \frac{a_{w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{w(e)})\\
&- \frac{a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xy(e)})\\
&- \frac{a_{x:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xz(e)})\\
&- \frac{a_{x:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xw(e)})\\
&- \frac{a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{yz(e)})\\
&- \frac{a_{y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{yw(e)})\\
&- \frac{a_{z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{zw(e)})\\
&+ \frac{a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xyz(e)})\\
&+ \frac{a_{x:\overline{n}|:y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xyz(e)})\\
&+ \frac{a_{x:\overline{n}|:y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xyz(e)})\\
&+ \frac{a_{x:\overline{n}|:z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]+\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xyz(e)})\\
&- \frac{a_{x:\overline{n}|:y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k}\cdot\left[\left(1+\frac{m-1}{2m}k\right)\right]-\frac{m-1}{2m}(1-_n E_{xyzw(e)}) \qquad (A.39)
\end{aligned}
$$

reduciendo (A.39),se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(VP)^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|}} &= \frac{a_{x:\overline{n}|(e)} + a_{y:\overline{n}|(e)} - a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|(e)}}{(1+k)} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot k\right) \\
&+ \frac{a_{z:\overline{n}|(e)} + a_{w:\overline{n}|(e)} - a_{x:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)} - a_{x:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)} - a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\
&+ \frac{-a_{y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)} - a_{z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)} + a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|(e)} + a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\
&+ \frac{a_{y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)} + a_{x:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)} - a_{x:\overline{n}|y:\overline{n}|z:\overline{n}|w:\overline{n}|(e)}}{1+k} \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m}k\right) \\
&+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xyzw(e)} -_n E_{xyz(e)} -_n E_{xzw(e)} -_n E_{xyw(e)} -_n E_{yzw(e)}\right) \\
&+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{zw(e)} +_n E_{yw(e)} +_n E_{xw(e)} +_n E_{yz(e)}\right) \\
&+ \frac{m-1}{2m}\left({}_nE_{xz(e)} -_n E_{w(e)} -_n E_{z(e)} -_n E_{y(e)} -_n E_{x(e)}\right) \qquad \text{(A.40)}
\end{aligned}
$$

Apéndice B

Anexo II: tablas

Cuadro B.1:

DOS VIDAS TEMPORALES		
HOMBRE	HOMBRE	RENTA
10	7	\$ 162,66
10	5	\$ 174,52
10	3	\$ 185,48
10	1	\$ 195,61

Cuadro B.2:

TRES VIDAS TEMPORALES			
HOMBRE	HOMBRE	HOMBRE	RENTA
10	7	5	$ 200,51
10	7	3	$ 185,64
10	7	1	$ 195,77
10	5	3	$ 185,76
10	5	1	$ 195,88
7	5	3	$ 200,74
7	5	1	$ 200,87
5	3	1	$ 195,99

Cuadro B.3:

CUATRO VIDAS TEMPORALES				
HOMBRE	HOMBRE	HOMBRE	HOMBRE	RENTA
10	7	5	3	$ 185,7632
10	7	5	1	$ 195,8835
10	5	3	1	$ 195,999
7	5	3	1	$ 195.999

Cuadro B.4:

VITALICIA Y TEMPORAL		
HOM CAUSANTE	HIJO	RENTA
30	10	$ 270,18
50	10	$ 222,68
60	10	$ 191,52
62	10	$ 185,30
70	10	$ 163,24
80	10	$ 146,87

Cuadro B.5:

VITALICIA Y TEMPORAL		
MUJ CUSANTE	HIJA	RENTA
30	10	$ 279,63
50	10	$ 237,74
60	10	$ 207,25
62	10	$ 200,60
70	10	$ 174,25
80	10	$ 149,90

Cuadro B.6:

DOS VITALICIAS Y UNA TEMPORAL			
HOM CAUSANTE	CONYUGE	HIJO	RENTA
30	25	10	$ 293,05
50	45	10	$ 260,22
60	55	10	$ 232,96
62	57	10	$ 226,47
70	65	10	$ 197,80
80	75	10	$ 162,70

Cuadro B.7:

TRES VITALICIAS Y UNA VIDA TEMPORAL				
HOM CAUSANTE	CONYUGE	HIJO	HIJO	RENTA
30	25	10	7	$ 302,58
50	45	10	7	$ 298,59
60	55	10	7	$ 297,44
62	57	10	7	$ 297,25
70	65	10	7	$ 296,61
80	75	10	7	$ 296,04

Bibliografía

[1] BOWERS, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt. Actuarial Mathematic. Itasca: *The society of actuaries USA*, 1997.

[2] CARDENAS, Mauricio, Introducción a la Economía Colombiana. primera edición. Bogotá: *Alfa Omega 2010.* P 490-499.

[3] CHESTER, Wallace J. Life Contingencies, Segunda edición *Published by The Society of the actuaries* (1975).

[4] EFRON, Bradley. the Bootstrap and Other Resampling Plans, Segunda edición *Society for Industrial and Applied Mathematics.* (1982).

[5] GÓMEZ, Julio C. Discapacidad en Colombia Reto para la Inclusión en Capital Humano. *Colombia Líder, Fundación Saldarriaga Concha.* (2010).

[6] COLOMBIA. Ley seguridad social 12/1993, de 23 de diciembre, Fecha de Entrada en Vigencia: 23/12/1993. *Medio de Publicación: Diario Oficial 41.148 del 23 de Diciembre de 1993*. Vigencia, abril de 1994.

[7] COLOMBIA. Reforman algunas disposiciones del sistema general de pensiones previsto en la Ley 100 de 1993 y se adoptan disposiciones sobre los Regímenes Pensionales exceptuados y especiales. Ley 797 de 2003, de enero 29, *Medio de Publicación: Diario Oficial No. 45.079 de 29 de enero de 2003*.

[8] GIRALDO, César. Protección o desprotección social, primera edición. Bogotá: *Desde abajo Fundación Cesde Unal 2007.* P 185-207.

[9] HUERTAS, Jaime . Cálculo Actuarial: contingencias de vida individual, primera edición. Bogotá: *Unibiblos 2001*, 243 p.

[10] SENTENCIA C-1035 DE 22 DE OCTUBRE 2008; Bogotá: *Corte Constitucional de Colombia.*