

**MEDIDAS DE RIESGO COHERENTES Y SU APLICACIÓN SOBRE LA  
ASIGNACIÓN ESTRATÉGICA DE ACTIVOS BAJO EL ESQUEMA *RISK*  
*PARITY*: CASO RESERVAS INTERNACIONALES DE COLOMBIA**

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar por el título de Magíster en  
Matemáticas Aplicadas

Julián David García Pulgarín

Asesor

PhD. Ricardo Restrepo

Universidad EAFIT

Departamento de Ciencias Básicas

Medellín

2015

## Resumen

Este trabajo explora las medidas de riesgo coherentes, analizando sus propiedades, sus principales tipos y su aplicación a la asignación de activos para el caso puntual de las reservas internacionales de Colombia con el fin de mejorar la medición y evaluación de su riesgo de mercado y determinando si es posible de esta manera obtener un índice de referencia que se ajuste mejor a las necesidades del Banco de la República en comparación con el establecido actualmente. La estimación de las medidas de riesgo estudiadas se realiza a través de la metodología *filtered bootstrap* y la construcción de los portafolios de referencia propuestos se realiza con base en un esquema *risk parity* (RP) que usa medidas de riesgo coherentes en su construcción, el cual es comparado al esquema basado en el modelo Black Litterman (BL) implementado actualmente por el Banco.

Se explicaron y probaron los axiomas de coherencia para varios grupos de medidas de riesgo y se mostraron los axiomas que no cumplen las medidas tradicionales. También, se encontró que para el espectro de activos permisibles para inversión en las reservas internacionales el esquema RP propuesto, bajo ciertas medidas coherentes, provee portafolios menos riesgosos a futuro que los provistos bajo el esquema BL para el mismo nivel de riesgo actual, aunque estos últimos parecieran ser más cercanos al óptimo bajo los criterios tradicionales de retorno ajustados por nivel de riesgo. Históricamente, al realizar un ejercicio de *backtesting*, se encontró que los portafolios RP habrían respondido mejor a momentos de alta volatilidad en el mercado. Por otra parte, cuando ambos esquemas son limitados por una restricción tipo VaR, los resultados no arrojan diferencia significativa entre los portafolios encontrados.

## Índice General

1. Introducción.....	1
2. Portafolio de Reservas Internacionales de Colombia.....	3
2.1. Metodología para la asignación estratégica de activos.....	4
3. Medidas de Riesgo Coherentes.....	12
3.1. Axiomas para medidas de riesgo coherente.....	12
3.1.1. Invarianza Traslacional.....	12
3.1.2. Subaditividad.....	14
3.1.3. Homogeneidad positiva.....	15
3.1.4. Monotonicidad.....	16
3.2. Algunas medidas de riesgo coherentes.....	18
3.2.1. <i>Expected Shortfall</i> o <i>Tail Conditional Expectation</i> (TailVaR).....	18
3.2.2. Medias de riesgo espectrales.....	20
3.2.3. <i>Entropic Value at Risk</i> .....	22
4. <i>Risk parity</i> .....	24
4.1. Media-varianza versus <i>Risk Parity</i> .....	25
5. Métodos de estimación.....	29
6. Datos y Resultados.....	34
7. Conclusiones.....	40
Referencias.....	42
Anexos.....	45
A1. Universo de índices de activos utilizado.....	45
A2. Portafolios RP de acuerdo a cada medida de riesgo, establecidos con el valor del portafolio actual y el de máxima utilidad para un 95 % de confianza.....	46
A3. Comparación de las medidas de retorno ajustadas por nivel de riesgo para los portafolios encontrados.....	50

A4. Códigos de los programas y funciones implementadas en Matlab.....53

## Índice de Figuras

Figura 1. Composición de los portafolios de inversión restringido y de máxima utilidad ...	11
Figura 2. Distribuciones ejemplo aplicación de axioma de monotonidad .....	17
Figura 3. Funciones de peso aplicadas para el cálculo del PH risk y el Wang risk.....	35
Figura 4. Evolución de los retornos anuales para los portafolios de máxima utilidad.....	37
Figura 5. Evolución de los retornos anuales para los portafolios con restricción de riesgo..	38

## Índice de Cuadros

Cuadro 1. Indicadores de desempeño pronosticados para los portafolios estimados .....	35
Cuadro 2. Riesgo estimado para los portafolios encontrados .....	36
Cuadro 3. Estadísticas comparativas para portafolios de máxima utilidad .....	38
Cuadro 4. Estadísticas comparativas para portafolios con restricción de riesgo .....	39

## 1. Introducción

Cuantificar el riesgo asociado a la incertidumbre en el valor futuro de un portafolio es una de las principales tareas que se deben realizar en el ámbito de la administración de inversiones, principalmente cuando se trata de portafolios que deben ser manejados bajo estrictos criterios de seguridad y liquidez tal como el portafolio de reservas internacionales de un país. Usualmente, esta cuantificación se realiza mediante la modelación de los retornos del portafolio como una variable aleatoria a la que se le aplica una función, la cual es conocida como medida de riesgo.

El resultado de esta cuantificación le muestra al inversionista que tan grandes pueden llegar a ser sus pérdidas, que tan diversificado está su portafolio y le permite comparar su perfil de riesgo frente a otros inversionistas, entre otros usos. Lo anterior lleva a que la cuantificación del riesgo sea generalmente un parámetro de entrada en la decisión de asignación de activos.

Las medidas de riesgo utilizadas regularmente en la industria, la desviación estándar y el valor en riesgo (VaR), son a menudo criticadas por encubrir riesgos de cola en algunos escenarios particulares, lo que ha llevado a la búsqueda de alternativas más apropiadas, especialmente para portafolio con alta aversión al riesgo, los cuales son bastante sensibles a las fuentes de riesgo. Para esto, en la literatura se han establecido ciertas propiedades deseables que deben satisfacer las medidas de riesgo, de las cuales se desprenden las medidas de riesgo coherentes (Artzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1999) y otros grupos de medidas que se clasifican de diferente forma de acuerdo a las propiedades que cumplen.

Como se mencionó anteriormente, las medidas de riesgo pueden ser aplicadas a la construcción de portafolios. Bajo el enfoque clásico media-varianza (MV) propuesto por Markowitz (1952) se utiliza la desviación estándar de tal forma que la asignación en el grupo de activos optimice la mezcla entre retorno y la volatilidad esperados, establecida a través de una función de utilidad. A partir del enfoque MV se han diseñado múltiples técnicas para la asignación de activos, tales como el modelo Black Litterman (BL) (Black & Litterman, 1991), el cual se basa en la idea de equilibrio en el mercado para estimar los retornos esperados implícitos que se usan en el ejercicio de optimización.

Otro enfoque existente para la construcción de portafolios que utiliza las medidas de riesgo es el enfoque *risk parity* (RP) (Chaves, Hsu, Li, & Shakernia, 2011), el cual busca asignar la misma cantidad de riesgo a cada activo dentro del portafolio y por lo tanto no requiere ni implica optimalidad alguna. Esta lógica surge de la idea de que un portafolio que concentra la mayor parte de sus riesgos en pocos activos generalmente es un portafolio poco diversificado y por lo tanto asume riesgos que podrían ser evitados, por esta razón este enfoque busca nivelar la participación de cada activo en el riesgo total del portafolio. Como principal desventaja, al aplicar esta metodología se tiende a sacrificar el retorno esperado del portafolio para obtener un menor riesgo, aunque este efecto se podría mitigar si se permite el apalancamiento del portafolio encontrado frente a un activo que pueda ser considerado libre de riesgo (Kunz, 2011).

En este documento se hace una revisión de los conceptos anteriores analizando el caso del portafolio de inversión de las reservas internacionales de Colombia con el fin de evaluar si es posible mejorar la forma como se evalúa su riesgo de mercado a partir de medidas de riesgo coherentes y si un enfoque alternativo de asignación de activos como el RP puede ser factible en su aplicación con respecto al modelo BL implementado, buscando sus supuestos sean más realistas y sustentables y que el portafolio tenga un mejor comportamiento en la práctica ante eventos de aumento en la volatilidad o crisis.

El documento está organizado de la siguiente forma, el primer capítulo es esta introducción. En el segundo capítulo se hace una introducción a los conceptos de reservas internacionales, su portafolio de inversión y se explica de forma resumida como se realiza el proceso de asignación de activos para este portafolio. En el tercer capítulo se muestran los axiomas que debe satisfacer una medida de riesgo para ser considerada como coherente, se explica porque la desviación estándar y el VaR no pueden serlo y se presentan algunos tipos de medidas de riesgo que sí lo son. El cuarto capítulo sirve para describir el enfoque RP y hacer una comparación de sus ventajas y desventajas frente a los enfoques MV y BL. En el quinto capítulo se presenta un esquema sugerido para la estimación de las medidas de riesgo coherentes y el procedimiento para estimar un índice de referencia basado en RP aplicable al portafolio de inversión de las reservas internacionales. El sexto capítulo describe los datos utilizados en la evaluación de la aplicación de los modelos y muestra los resultados encontrados. El séptimo capítulo está dedicado a las principales conclusiones del trabajo.

## 2. Portafolio de Reservas Internacionales de Colombia

De acuerdo al informe de administración de las reservas internacionales elaborado por el Banco de la República (2015): «Las reservas internacionales son los activos en el exterior controlados por la autoridad monetaria. Para que un activo externo se considere un activo de reserva debe cumplir con las siguientes condiciones: en primer lugar, debe estar bajo el control directo y efectivo de la autoridad monetaria y, segundo, debe tener una disponibilidad de uso inmediata. Las reservas internacionales de Colombia están conformadas por: i) el portafolio de inversión, el cual representa la mayor parte de las reservas, y está constituido por instrumentos financieros en el mercado internacional; ii) las inversiones en oro; iii) los aportes a entidades supranacionales, tales como el Fondo Monetario Internacional (FMI) y el Fondo Latinoamericano de Reservas (FLAR), y iv) los convenios internacionales.» La aplicación estudiada en este documento se enfocará en el portafolio de inversión.

Para el caso colombiano, los objetivos de mantener reservas internacionales son (Banco de la República, 2015):

- Intervención cambiaria: “En Colombia, la intervención en el mercado cambiario es uno de los instrumentos de los que dispone el Banco Central para cumplir con el objetivo básico de mantener una tasa de inflación estable dentro del rango meta de largo plazo (2 a 4 %) y lograr que el producto crezca alrededor de su tendencia de largo plazo; por ejemplo, cuando una depreciación rápida del peso amenaza el logro de las metas de inflación, el Banco puede mitigar las presiones cambiarias mediante la venta de divisas en el mercado, evitando recargar el ajuste exclusivamente en la tasa de interés. Asimismo, el Banco puede intervenir en el mercado cambiario con el propósito de controlar movimientos atípicos o bruscos de la tasa de cambio, caracterizados por una alta volatilidad y por la ampliación significativa del margen entre el precio de compra y de venta de la divisa, los cuales pueden influir sobre el desempeño de otros activos financieros conectados con el mercado cambiario y comprometer el objetivo del funcionamiento adecuado de los pagos internos y externos.

Cabe resaltar que en su intervención el Banco no tiene una meta específica de tasa de cambio; sus principales objetivos son la inflación, la actividad económica y el

comportamiento ordenado del mercado cambiario. De igual forma, el Banco reconoce que no siempre la intervención cambiaria es conveniente o efectiva, razón por la cual esta no es constante ni indiscriminada”.

- Acceso al mercado internacional de capitales: “Un monto suficiente de reservas internacionales facilita el acceso del Gobierno y del sector privado a los mercados internacionales de capitales. El nivel de las reservas internacionales es un factor determinante en la percepción de la capacidad de pago de los prestatarios nacionales. Las agencias calificadoras de riesgo y los prestamistas externos consideran que un nivel adecuado de reservas permitiría que los residentes puedan atender las obligaciones en moneda extranjera, tales como el pago de importaciones y el servicio de la deuda externa en el momento en que el país enfrentara dificultades de acceso al financiamiento externo. El uso que dan los agentes en los mercados internacionales de capitales a los indicadores de capacidad de pago de las reservas, como medida de liquidez del país, resalta la importancia de mantener un nivel adecuado de reservas internacionales.

En este contexto, el Banco de la República busca mantener un nivel adecuado de activos denominados en monedas extranjeras de libre convertibilidad, disponibles para cumplir de forma eficiente con los objetivos mencionados. El Banco de la República evalúa distintos indicadores de reservas para estimar su nivel adecuado”.

Al igual que otros bancos centrales, el Banco de la República hace especial énfasis en garantizar la seguridad y liquidez de sus inversiones de reservas, sin que esto signifique que la generación de retorno deje de ser también un fin importante. Así, de acuerdo con los objetivos de acumulación de reservas internacionales, el portafolio de inversión de las reservas se ha invertido en activos financieros con niveles altos de seguridad y liquidez, los cuales se caracterizan por un amplio mercado secundario.

### 2.1. Metodología para la asignación estratégica de activos

El Banco de la República de Colombia administra las reservas internacionales guiado por un portafolio teórico o índice de referencia (Banco de la República, 2015). El índice de referencia de las reservas es el portafolio teórico que refleja la máxima rentabilidad esperada dentro de los estrictos criterios de riesgo definidos por Banco de la República. Este índice sirve como base para medir la gestión de cada uno de los portafolios.

El primer paso que utiliza para establecer el índice de referencia es la definición de su composición cambiaria, la cual se constituye buscando que el índice replique los egresos de la balanza de pagos de Colombia siguiendo la filosofía establecida por el Banco de la República en (Banco de la República, 2012), de tal forma que las reservas acumuladas puedan ser utilizadas para atender las obligaciones en moneda extranjera tanto del comercio de bienes y servicios como el de los flujos de capitales cuando se requiera. Adicionalmente, se imponen restricciones sobre la participación en los mercados, con el fin de garantizar una alta liquidez de las inversiones. En la actualidad la composición del portafolio de referencia es la siguiente: 87 % dólares estadounidenses, 5 % dólares canadienses, 4 % dólares australianos, 2 % libras esterlinas, 1 % coronas suecas y 1 % dólares neozelandeses.

Luego se define el tipo y la madurez de los instrumentos que hacen parte del portafolio de referencia. En este proceso, se escogen instrumentos que cumplan con las condiciones de seguridad y liquidez requeridas por las reservas. En la actualidad, los únicos instrumentos elegibles para el índice de referencia son: títulos de los gobiernos de países desarrollados con altas calificaciones crediticias y emisores que cuentan con soporte de dichos gobiernos. En este documento se utilizan los instrumentos presentados en el Cuadro A1 (ver anexos).

Para realizar el proceso de asignación de activos, se aplica el modelo de equilibrio de Black-Litterman (BL) (Black & Litterman, 1991) con algunos ajustes que son propuestos por León & Vela (2011). El modelo BL es un enfoque media-varianza que estima el retorno esperado de los activos por medio de su matriz de covarianzas y las capitalizaciones e indicador de aversión al riesgo del mercado. Además permite incorporar perspectivas específicas del inversionista (de ahora en adelante *views*) sobre el comportamiento futuro de los activos de acuerdo a las probabilidades de ocurrencia que éste considere.

El propósito principal del modelo es maximizar una función de utilidad  $U_p(\boldsymbol{\omega})$  con respecto al vector de cantidades asignadas en cada activo del portafolio  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$  donde  $n$  es el número de activos permitidos, que considera los primeros dos momentos de la distribución de retornos de los activos y tiene en cuenta un parámetro de aversión al riesgo  $\lambda$ . Siendo  $\mu_p(\boldsymbol{\omega})$  y  $\sigma_p^2(\boldsymbol{\omega})$  el retorno esperado y la varianza del portafolio respectivamente, la función de utilidad aplicada en la optimización es la siguiente:

$$\max U_p(\boldsymbol{\omega}) = \mu_p(\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2} \lambda \sigma_p^2(\boldsymbol{\omega})$$

Para estimar  $\mu_p$  y  $\sigma_p^2$  se deben estimar los retornos individuales de cada activo ( $\mu_i$ ), donde  $i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{R}$  y la matriz de covarianza entre ellos ( $\boldsymbol{\Sigma}$ ). Entonces, para estimar los retornos

individuales y la matriz de covarianza individuales se asume que las capitalizaciones de mercado de los activos se encuentran en equilibrio y por medio de un proceso de optimización inversa se obtiene un vector ( $\mathbf{\Pi}_{mkt}$ ) de dimensión  $n$  con los excesos de retorno esperados implícitos en el mercado. Para esto, se parte de la función de utilidad cuadrática, esta se maximiza cuando la primera derivada con respecto a los pesos del portafolio ( $\omega$ ) es igual a cero, de esta forma las se estiman las asignaciones óptimas ( $\omega^*$ ) del portafolio así:

$$U_p(\omega) = \mu_p(\omega) - \frac{1}{2}\lambda\sigma_p^2(\omega) = \mathbf{\Pi}\omega^T - \frac{1}{2}\lambda\omega\Sigma\omega^T$$

donde  $\mathbf{\Pi}$  es el vector de excesos de retorno esperados para cada activo y  $\Sigma$  es la matriz de covarianzas entre estos. Derivando con respecto al vector de asignaciones ( $\omega$ ), igualando a cero y despejando:

$$\begin{aligned} U_p^*(\omega) &= \mathbf{\Pi} - \frac{1}{2}(2)\lambda\omega\Sigma \rightarrow \mathbf{\Pi} - \lambda\omega^*\Sigma = \mathbf{0} \\ &\rightarrow \omega^* = \mathbf{\Pi}(\lambda\Sigma)^{-1} \end{aligned}$$

Assumiendo que las capitalizaciones de mercado de los activos se encuentran en equilibrio se obtiene el vector ( $\mathbf{\Pi}_{mkt}$ ):

$$\mathbf{\Pi}_{mkt} = \lambda_{mkt}\Sigma\omega_{mkt}$$

donde  $\mathbf{\Pi}_{mkt}$  es el vector con los excesos de retorno esperados asumiendo que todos los actores del mercado tienen las mismas perspectivas de retorno. Las asignaciones de mercado ( $\omega_{mkt}$ ) son estimadas como la capitalización de mercado actual de los activos incluidos en el ejercicio. El parámetro de aversión al riesgo ( $\lambda_{mkt}$ ) es estimado a partir del aumento histórico sobre cada unidad de riesgo adicional<sup>1</sup>. Además, la matriz de covarianza entre los retornos de los activos es estimada con base en observaciones históricas semanales sobre la que se realizan los siguientes ajustes:

---

<sup>1</sup> De acuerdo a Bodie, Kane & Marcus (2001), sea una función de utilidad cuadrática expresada en términos de excesos de retorno:

$$U_p = \mu_{rf} + (\mu_r - \mu_{rf})\Phi - 0.5\lambda_{mkt}(\Phi_{mkt}^2\omega_r\Sigma_r\omega_r')$$

donde la utilidad del portafolio es una función del retorno esperado de los activos ( $\mu_r$ ), el retorno de mercado de los activos libres de riesgo ( $\mu_{rf}$ ), la matriz de covarianza de los retornos de los activos riesgosos ( $\Sigma_r$ ) las asignaciones de activos riesgosos en el portafolio de mercado ( $\omega_r$ ), el parámetro de aversión al riesgo del mercado ( $\lambda_{mkt}$ ) y la preferencia del mercado (asignación) por activos riesgosos ( $\Phi_{mkt}$ ). El problema de maximización de la utilidad es resuelto haciendo la primera derivada con respecto a  $\Phi_{mkt}$  igual a cero, la cual es convenientemente resulta para  $\lambda_{mkt}$ :

$$\lambda_{mkt} \cong \frac{\mu_r - \mu_{rf}}{\Phi_{mkt}\omega_r\Sigma_r\omega_r'}$$

i) Decaimiento exponencial: A los datos más recientes se les da más peso siguiendo un modelo EWMA *Exponentially Weighted Moving Average* con factor de decaimiento ( $\eta$ ) igual a 0.99, el cual minimiza el error cuadrático medio entre la covarianza estimada con el modelo EWMA y una medida de varianza observada con los retornos cuadrados para una frecuencia semanal. Luego, dado un número total de observaciones  $T$  y la última observación  $t$ , cada elemento de la matriz de covarianza, está dado por:

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sum_{s=1}^T (r_{i,t+s} - \bar{r}_i)(r_{j,t+s} - \bar{r}_j)\eta^{T-s}}{\sum_{s=1}^T \eta^{s-1}}$$

donde

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T r_{i,t+s},$$

los subíndices  $i$  y  $j$  indican la posición en cada fila y cada columna de los elementos en la matriz de covarianzas respectivamente y el segundo subíndice de la variable  $r$  corresponde al tiempo de dicho retorno observado.

La ventaja de realizar este ajuste es que permite reflejar en el cálculo de las covarianzas el efecto de los cambios más recientes en el mercado, sin descartar el comportamiento en los ciclos económicos previos.

ii) Ajuste de dependencia de largo plazo: Consiste en la aplicación de una versión ajustada del exponente de Hurst (Hurst, 1951) propuesta por León & Reveiz (2010) que corrige el hecho de asumir de forma inapropiada independencia entre los retornos de largo plazo. El exponente de Hurst es una medida de la independencia de la serie de tiempo y es utilizado para estimar la dependencia serial de largo plazo de los retornos y ajustar la matriz de covarianzas estimada con datos semanales de acuerdo al horizonte de inversión anual. Como muestran León & Vela (2011), el estimador de covarianza de alta frecuencia entre los activos  $i$  y  $j$  ( $\hat{\sigma}_{\{(i,j),hf\}}^2$ ) es escalado a un estimador de baja frecuencia ( $\hat{\sigma}_{\{(i,j),lf\}}^2$ ) con la estimación respectiva de los exponentes de Hurst ajustados para dicho activos ( $\check{H}_i$  &  $\check{H}_j$ ) como sigue:

$$\hat{\sigma}_{\{(i,j),lf\}}^2 = (m^{\check{H}_i + \check{H}_j})(\hat{\sigma}_{\{(i,j),hf\}}^2)$$

Donde  $m$  es el número de períodos de alta frecuencia que componen un período de baja frecuencia (por ejemplo, 52 semanas en un año).

iii) Ajuste de contracción: De acuerdo a Ledoit & Wolf (2004) el ajuste de contracción que se aplica sobre la matriz de covarianzas consiste en la media ponderada óptima de dos estimadores, la matriz de covarianza muestral con los ajustes explicados en los dos primeros puntos ( $\mathbf{S}$ ) y una matriz de covarianzas de un conjunto más simple de índices (por ejemplo, los índices de bonos del tesoro de los Estados Unidos) ( $\mathbf{F}$ ). Este estimador tiene en cuenta la covarianza extra-mercado sin tener que especificar una estructura multifactor arbitraria, luego es un estimador más eficiente pues combina un estimador insesgado muy variable con un estimador sesgado poco variable. La matriz de covarianza estimada es:

$$\hat{\Sigma} = \delta * \mathbf{F} + (1 - \delta)\mathbf{S}$$

donde  $\delta$  denota la intensidad de la contracción que resulta de minimizar una función de pérdida, la cual consiste en una medida cuadrática de la distancia entre las matrices de covarianza real y la estimada basadas en la norma de Frobenius<sup>2</sup>. Por otra parte, la matriz  $\mathbf{F}$  está dada por:

$$f_{ii} = s_{ii} \quad y \quad f_{ij} = \bar{\hat{q}} \sqrt{s_{ii}s_{jj}}$$

donde  $\bar{\hat{q}}$  está dado por la correlación promedio de la muestra:

$$\bar{\hat{q}} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{q}_{ij}$$

Una vez es estimada la matriz de covarianza, los excesos de retorno implícitos de mercado ( $\mathbf{\Pi}_{mkt}$ ) pueden ser calculados. Estos son los utilizados para la realización de la optimización media varianza, considerando que, como se explica en (Zimmermann, Drobetz, & Oertmann, 2003), reflejan el comportamiento normal de un inversionista promedio y representan así, un hipotético administrador pasivo. Entonces, la distribución de equilibrio de los excesos de retorno esperados ( $\mathbf{\Pi}$ ) está dada por:

$$\mathbf{\Pi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{\Pi}_{mkt}, \tau \Sigma)$$

donde  $\tau$  representa como una media escalar, el grado de certeza del equilibrio del mercado como una referencia neutral<sup>3</sup>.

Además, el modelo BL permite incorporar perspectivas específicas de los inversionistas sobre los retornos de equilibrio con un grado de confianza propio. Esto es hecho a través de un

---

<sup>2</sup> Para un matriz de  $m \times n$  se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados absolutos de sus elementos.

<sup>3</sup> Un valor pequeño de  $\tau$  corresponde a una alta confianza en el retorno de equilibrio estimado bajo el CAPM. De acuerdo a Idzorek (2004) lo usual es utilizar un valor de  $\tau$  cercano a cero (por ejemplo,  $0.01 < \tau < 0.5$ ). La metodología actualmente implementada utiliza  $\tau = 0.025$ .

enfoque Bayesiano, donde los excesos de retorno esperados son revisados de la siguiente manera:

$$\bar{\Pi} = [(\tau\Sigma)^{-1} + \mathbf{P}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{P}]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\mathbf{\Pi}_{mkt} + \mathbf{P}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Q}]$$

donde  $\mathbf{\Omega}$  denota la matriz de covarianza ( $k \times k$ ) de los errores en los *views*<sup>4</sup>;  $\mathbf{P}$  representa los *views* sobre el portafolio y es definida como una matriz ( $k \times n$ ) donde un elemento de  $\mathbf{P}$  es diferente de cero si el activo respectivo está involucrado en el *view* y cero en otro caso<sup>5</sup>;  $\mathbf{Q}$  es un vector ( $k \times 1$ ) que contiene los *views* de los inversionistas sobre los retornos esperados de cada activo. Es de destacar que actualmente no se incorporan *views* específicos dentro del ejercicio de definición del índice de referencia del tramo de inversión, a menos que los retornos esperados encontrados con la información de mercado sean claramente incongruentes con la coyuntura del momento.

El resultado de la optimización es una frontera eficiente de donde es posible maximizar la función objetivo de acuerdo con las restricciones definidas. De esta manera, el índice de referencia es el portafolio de ese conjunto que maximiza la función de utilidad esperada. Como restricción adicional, todas las soluciones admisibles deben contar con una probabilidad esperada de tener rentabilidad positiva en el horizonte de inversión de un año mayor o igual a 95 %, excluyendo el efecto cambiario (de Beaufort & Berkelaar, 2009). Para esto se utiliza como medida de restricción el Valor en Riesgo (VaR), que es una medida que define el potencial de pérdida de un portafolio o de un activo sobre un período de tiempo y un nivel de confianza determinados<sup>6</sup>. Así, la condición mencionada es equivalente a establecer que todas las soluciones admisibles deben tener un VaR superior a cero para un nivel de confianza del 95 % en el horizonte de inversión.

El tiempo de cómputo es cercano a dos minutos, por lo que se considera bastante flexible para la realización de pruebas dado que el ejercicio se actualiza con una periodicidad mensual, momento en el que se analiza la conveniencia de un posible rebalanceo, el cual depende de la variación del índice de referencia encontrado frente al que esté implementado con respecto

---

<sup>4</sup> El modelo BL original asume que todos los *views* son independientes unos de otros, lo cual resulta en que  $\mathbf{\Omega}$  sea una matriz diagonal donde los términos diferentes de cero corresponden a la varianza de los errores de cada *view*.

<sup>5</sup> Cuando es expresado un *view* relativo, los elementos de una fila deben sumar cero (un *view* relativo es, por ejemplo, los bonos del tesoro de 1-3 años de Estados Unidos rendirán 20 % más que los bonos de gobierno de 5-7 años de Japón); cuando es expresado un *view* absoluto, debe haber un uno en el lugar correspondiente al activo sobre el que se realiza el *view* y ceros en las demás posiciones de la fila (un *view* absoluto es, por ejemplo, los bonos del tesoro de 0-1 años de Estados Unidos rendirán 5 % durante el período).

<sup>6</sup> En el próximo capítulo se realizará una revisión más detallada de esta medida de riesgo.

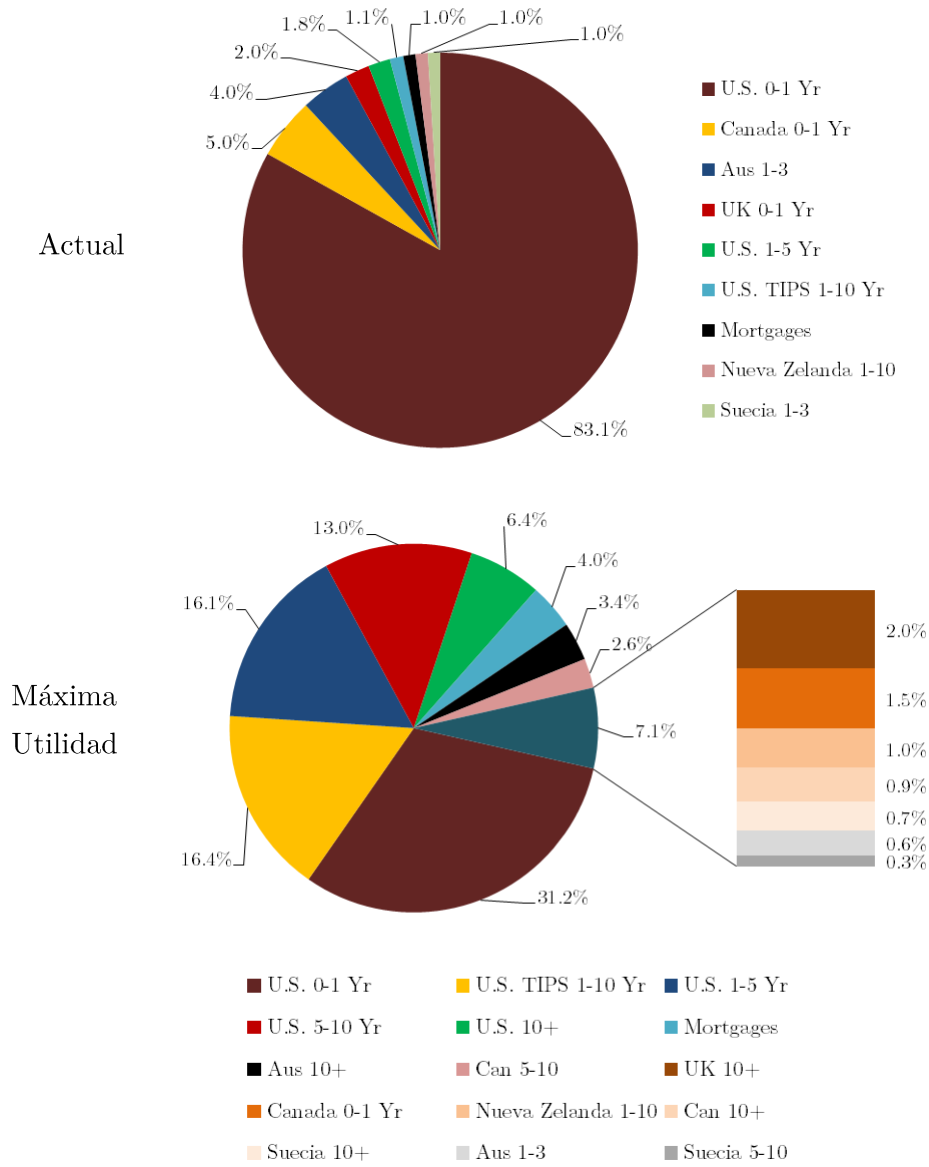
al costo de rebalanceo y de la probabilidad esperada de tener rentabilidad positiva en el horizonte de inversión, la cual debe ser mayor o igual a 90 %

Al aplicar la metodología descrita, se obtienen las estimaciones de las composiciones de los portafolios de inversión con la restricción tipo VaR y el portafolio de máxima utilidad<sup>7</sup>, los cuales se presentan en la Figura 1. Cabe destacar que estos portafolios pueden diferir ligeramente de los estimados internamente por el Banco de la República.

---

<sup>7</sup> El portafolio de máxima utilidad es aquel determinado usando la metodología descrita sin considerar la restricción relacionada con el nivel del VaR al 95 % de confianza.

Figura 1. Composición de los portafolios de inversión restringido y de máxima utilidad



Fuente. Elaboración propia

### 3. Medidas de Riesgo Coherentes

Una medida de riesgo es el resultado de un mapeo sobre una variable aleatoria  $X$  definida sobre un espacio de probabilidad fijo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , generalmente relacionada con el retorno de un activo o de un portafolio que tiene como resultado un valor real  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\mathcal{A} = \{X|X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$  denota el conjunto de retornos posibles del portafolio.

Estas pueden ser usadas por los reguladores del mercado financiero para establecer requerimientos de capital sobre los participantes del mercado, como traders o aseguradores; así como en la asignación de capital sobre portafolios.

#### 3.1. Axiomas para medidas de riesgo coherente

Dentro del amplio espacio de medidas de riesgo conocidas, a finales de la década de los 90 surgieron las medidas de riesgo coherentes, llamadas así por Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999), quienes establecen una serie de propiedades estadísticas deseables que debe satisfacer una medida de riesgo para que sea en su juicio razonable y así presentan una caracterización completa de estas propiedades a través de una formulación axiomática.

El cumplimiento de dichos axiomas permite contar con medidas de riesgo más sensibles que las tradicionales, que capturan mejor la información de las distribuciones de los retornos en las colas brindando así información más precisa sobre posibles pérdidas extremas.

De acuerdo a lo establecido por Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999), una medida de riesgo es coherente si satisface los siguientes axiomas:

##### 3.1.1. Invarianza Traslacional

Para todo  $X \in \mathcal{A}$ , y  $m \in \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\rho(X + m) = \rho(X) - m$$

Este axioma asegura que si al activo o portafolio riesgoso se le añade una porción de capital invertida en un activo libre de riesgo, el riesgo del portafolio compuesto debería disminuir en la cantidad invertida en el activo libre de riesgo.

Una medida usada históricamente por los actores del mercado para la medición del riesgo es la desviación estándar que es una posible aproximación a la volatilidad de los retornos y cuando un activo tiene una alta volatilidad su resultado presenta mayor incertidumbre.

Definición. *Varianza.* La varianza está definida como:

$$\rho_v(X) = V(X) \equiv E(X^2) - [E(X)]^2$$

donde  $E(\cdot)$  es el valor esperado de  $X$ . La desviación estándar  $\sigma$  se define como la raíz cuadrada de la varianza.

Esta medida no satisface el axioma de invarianza traslacional puesto que:

$$\begin{aligned} \rho_v(X + m) &= V(X + m) = E((X + m)^2) - [E(X + m)]^2 \\ &= E(X^2 + 2mX + m^2) - [E(X) + m]^2 \\ &= E(X^2) + 2mE(X) + m^2 - ([E(X)]^2 + 2mE(X) + m^2) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = V(X) \neq V(X) - m = \rho_v(X) - m \end{aligned}$$

El VaR es una de las medidas de riesgo más utilizadas actualmente por las instituciones financieras a nivel global.

Definición. *Valor en Riesgo (VaR).* Para un  $\alpha \in (0, 1)$ , el VaR se define como:

$$VaR_{1-\alpha}(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

De esta manera,  $VaR_{1-\alpha}(X)$  es el cuantil  $\alpha$  de  $P(X > x)$  y representa el peor valor de un portafolio en un período de tiempo dado en un intervalo de confianza del  $100(1 - \alpha) \%$ .

El VaR satisface el axioma de invarianza traslacional puesto que:

$$\begin{aligned} \rho_{VaR}(X + m) &= VaR_{1-\alpha}(X + m) = -\inf\{x + m \in \mathbb{R}: P(X + m \leq x + m) \geq \alpha\} \\ &= -\inf\{x + m \in \mathbb{R}: P_X(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= -(\inf\{x \in \mathbb{R}: P_X(X \leq x) \geq \alpha\} + m) \\ &= -(\inf\{x \in \mathbb{R}: P_X(X \leq x) \geq \alpha\}) - m = VaR_\alpha(X) - m \\ &= \rho_{VaR}(X) - m \end{aligned}$$

### 3.1.2. Subaditividad

Para todo  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ , se tiene que:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

Este axioma establece que la mezcla de dos activos o portafolios riesgosos “no crea” riesgo, es decir, siempre que se adicionen dos instrumentos riesgosos habrá beneficio por diversificación a menos que tengan el mismo comportamiento, caso en el cual el riesgo total será equivalente a la adición de los riesgos de cada instrumento. Este axioma se puede generalizar para más instrumentos, así, si  $n \in \mathbb{N}$ , se debe cumplir que:

$$\rho(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) + \dots + \rho(X_n)$$

La varianza tampoco cumple el axioma de subaditividad en todos los casos dado que:

$$\begin{aligned} \rho_v(X_1 + X_2) &= V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= \rho_v(X_1) + \rho_v(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

donde  $Cov(X_1, X_2)$  es la covarianza entre las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$ .

Por lo tanto, el cumplimiento o no del axioma depende del signo de  $Cov(X_1, X_2)$ .

El VaR no satisface el axioma de subaditividad. Para mostrarlo, se toma el siguiente ejemplo propuesto por Daniélsson, Jorgensen, Samorodnitsky, Sarma & de Vries (2005). Considere dos activos,  $X$  y  $Y$ , que usualmente están normalmente distribuidos, pero están sujetos a choques independientes ocasionales, así:

$$X = \epsilon + \eta, \quad \eta = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad de } 0.991 \\ -10 & \text{con probabilidad de } 0.009 \end{cases}$$

Con  $\epsilon$  independiente e idénticamente distribuida a una variable aleatoria  $\mathcal{N}(0,1)$ . En este caso, el VaR al 1 % es 3.1, pues la probabilidad de que  $\eta$  sea  $-10$  es menor que 1 %. Suponga que  $Y$  tiene la misma distribución independientemente de  $X$  y que se formula un portafolio con ponderaciones iguales de  $X$  y  $Y$ . En este caso, el VaR al 1 % del portafolio es 9.8, porque para  $(X + Y)$  la probabilidad de obtener  $-10$  de  $X$  o de  $Y$  es mucho mayor. Entonces:

$$VaR(X + Y) = 9.8 > VaR(X) + VaR(Y) = 3.1 + 3.1 = 6.2$$

Así pues, el VaR ha sido bastante criticado pues no es una medida de riesgo coherente ya que no cumple con el axioma de Subaditividad. Al no poseer esta propiedad, se pueden dar situaciones en las que el VaR penalice la diversificación en lugar de fomentarla.

Por otro lado, es importante destacar que de la definición se aprecia que el VaR controla la probabilidad de pérdida pero no provee información alguna acerca de la severidad de dicha pérdida, en caso de que esta ocurra. De esta manera, otro problema que puede surgir es que al momento de hacer optimización de portafolios con respecto al VaR, la solución podrá conducir a un portafolio concentrado en un sólo activo con una probabilidad de pérdida pequeña, pero con exposición a pérdidas grandes (Larsen, Mausser, & Uryasev, 2000).

El axioma de Subaditividad es posiblemente el más característico de lo que se percibe debe ser una medida de riesgo. El riesgo global de un portafolio debe ser igual a la suma de los riesgos de los activos que lo componen sólo si estos últimos tienen el mismo comportamiento ante la ocurrencia de cualquier evento, es decir, si la fuentes de riesgo de cada componente actúan simultáneamente, en todos los demás casos el riesgo global del portafolio deberá ser estrictamente inferior a la suma de los riesgos parciales gracias al beneficio de diversificación. Este axioma captura como se debe comportar una medida de riesgo ante la adición o composición de portafolios y si no es satisfecho, la diversificación puede producir un incremento en el riesgo.

### 3.1.3. Homogeneidad positiva

Para todo  $m \geq 0$  y todo  $X \in \mathcal{A}$ :

$$\rho(mX) = m\rho(X)$$

Esto quiere decir que si el tamaño de la posición aumente o disminuye, su riesgo deberá aumentar o disminuir de forma proporcional al cambio. De aquí, se puede derivar la condición de normalidad, que establece que para todo  $X \in \mathcal{A}$  con  $X = 0$  entonces:

$$\rho(X) = 0$$

Esta propiedad ha sido criticada por varios autores pues no penaliza la concentración de riesgos. Si la penalizara, para valores grandes de  $m$ , se debería cumplir que  $\rho(mX) > m\rho(X)$ , lo que no es posible para una medida que cumpla esta propiedad.

Esto ha llevado a algunos autores al estudio de medidas convexas (Föllmer & Schied, 2010), en las cuales sustituyen los axiomas de subaditividad y homogeneidad positiva por una condición más débil, esto es, para  $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$  y  $m \in [0, 1]$  se debe satisfacer que:

$$\rho(mX_1 + (1 - m)X_2) \leq m\rho(X_1) + (1 - m)\rho(X_2)$$

La varianza no satisface el axioma de homogeneidad positiva ya que:

$$\rho_v(mX) = m^2\rho_v(X) \neq m\rho_v(X)$$

El VaR satisface el axioma de homogeneidad positiva pues:

$$\begin{aligned} \rho_{VaR}(mX) &= VaR(mX) = -\inf\{mx \in \mathbb{R}: P(mX \leq mx) \geq \alpha\} \\ &= -\inf\{mx \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\} = -m \times \inf\{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= mVaR(X) = m\rho_{VaR}(X) \end{aligned}$$

#### 3.1.4. Monotonicidad

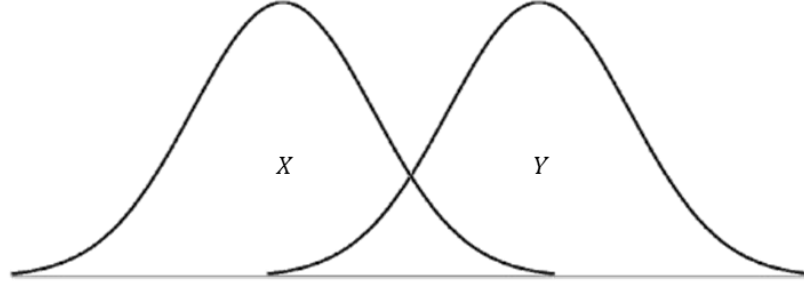
Para todo  $X, Y \in \mathcal{A}$ , con  $X \leq Y$ , se tiene que:

$$\rho(Y) \leq \rho(X)$$

Este axioma determina que si la distribución de los retornos de un activo o portafolio es en general superior a la de otro, su riesgo debería ser inferior, como se puede apreciar en las distribuciones presentadas en la figura 2.

Claramente la varianza no cumple este axioma dado que esta medida se estima a partir de las desviaciones de los retornos con respecto a la media de su distribución, sin importar el valor de dicha media.

Figura 2. Distribuciones ejemplo aplicación de axioma de monotonicidad



Fuente. Elaboración propia

El VaR satisface el axioma de monotonicidad puesto que para  $X \leq Y$  se tiene que:

$$P(Y \leq z) \leq P(X \leq z)$$

para todo  $z \in \mathbb{R}$  y ya que si  $\omega \in \Omega$  es tal que  $Y(\omega) \leq z$ , entonces  $X(\omega) \leq Y(\omega) \leq z$ , luego,  $X(\omega) \leq z$ .

Por lo tanto, si  $z$  es tal que  $\alpha \leq P(Y \leq z)$ , como  $\alpha \leq P(Y \leq z) \leq P(X \leq z)$ , se obtiene que  $\alpha \leq P(X \leq z)$ . Seguidamente:

$$\{y \in \mathbb{R}: P(Y \leq y) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

De esta manera:

$$\inf\{y \in \mathbb{R}: P(Y \leq y) \geq \alpha\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \rho_{VaR}(Y) = VaR(Y) &= -\inf\{y \in \mathbb{R}: P(Y \leq y) \geq \alpha\} \leq -\inf\{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= VaR(X) = \rho_{VaR}(X) \end{aligned}$$

Aunque no existe un consenso sobre las propiedades que deben tener las medidas de riesgo es deseable el uso de medidas de riesgo coherentes sobre las medidas tradicionales, puesto que el cumplimiento de los axiomas descritos anteriormente asegura que las medidas de riesgo coherentes tengan características que son deseables para la medición del riesgo, como la sensibilidad ante la posibilidad de ocurrencia de eventos extremos y beneficiar la diversificación entre diferentes activos.

### 3.2. Algunas medidas de riesgo coherentes

A partir los axiomas enunciados por Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999) se han desarrollado múltiples medidas de riesgo coherentes durante los últimos años. En este documento se pretende revisar y aplicar las medidas que se explican a continuación.

#### 3.2.1. *Expected Shortfall* o *Tail Conditional Expectation* (TailVaR)

Como se mencionó anteriormente, el VaR no proporciona información sobre la severidad que podría tener un evento que lo exceda. El *Expected Shortfall* (ES) o *Tail Conditional Expectation* (TailVaR) es la medida propuesta por Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999) e indica cual es el valor esperado de la pérdida dado que ésta es mayor que el VaR. Para los retornos de un activo  $X$  y un nivel de confianza  $100(1 - \alpha) \%$ , el ES está definido por:

$$ES_{1-\alpha}(X) = -E(X|X < -VaR_{1-\alpha}(X))$$

El ES puede ser entendido como el promedio de los peores posibles eventos y puede ser calculado a través del promedio de los valores que exceden el VaR con un nivel de confianza  $100(1 - \alpha) \%$ , por lo tanto, proporciona información sobre la severidad de los posibles eventos riesgosos. Esta es una medida de riesgo coherente dado que cumple con los axiomas descritos anteriormente como se muestra a continuación:

1. Invarianza traslacional: Sean  $m \in \mathbb{R}$  y  $X \in \mathcal{A}$ , entonces

$$\begin{aligned} \rho_{ES}(X + m) &= ES(X + m) = -E(X + m|X + m < -VaR_{1-\alpha}(X + m)) \\ &= E(-X - m|X + m < -VaR_{1-\alpha}(X + m)) \\ &= E(-X - m|X + m < -VaR_{1-\alpha}(X) - m) \\ &= E(-X - m|X < -VaR_{1-\alpha}(X)) \\ &= E(-X|X < -VaR_{1-\alpha}(X)) - E(m|X < -VaR_{1-\alpha}(X)) \\ &= E(-X|X < -VaR_{1-\alpha}(X)) - m = -E(X|X < -VaR_{1-\alpha}(X)) - m \\ &= ES(X) - m = \rho_{ES}(X) - m \end{aligned}$$

2. Subaditividad: Sean  $X, Y \in \mathcal{A}$ , luego

$$\begin{aligned}
E(X|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) &= -VaR(X)_{1-\alpha} + E(X + VaR(X)_{1-\alpha}|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) \\
&= -VaR(X)_{1-\alpha} + \frac{E[(X + VaR(X)_{1-\alpha})1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}]}{P(X < -VaR(X)_{1-\alpha})} \\
&= -VaR(X)_{1-\alpha} + \frac{E[(X + VaR(X)_{1-\alpha})1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}1_{\{X+Y < -VaR(X+Y)_{1-\alpha}\}}]}{P(X < -VaR(X)_{1-\alpha})} \\
&\quad + \frac{E[(X + VaR(X)_{1-\alpha})1_{\{X+VaR(X)_{1-\alpha} < 0\}}1_{\{X+Y \geq -VaR(X+Y)_{1-\alpha}\}}]}{P(X < -VaR(X)_{1-\alpha})} \\
&\leq -VaR(X)_{1-\alpha} + \frac{E[(X + VaR(X)_{1-\alpha})1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}1_{\{X+Y < -VaR(X+Y)_{1-\alpha}\}}]}{\alpha} \\
&\leq -VaR(X)_{1-\alpha} + \frac{E[(X + VaR(X)_{1-\alpha})1_{\{X+Y < -VaR(X+Y)_{1-\alpha}\}}]}{P(X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha})} = \\
&= -VaR(X)_{1-\alpha} + E(X + VaR(X)_{1-\alpha}|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha}) \\
&= E(X|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha})
\end{aligned}$$

Por simetría en los cálculos también se tiene que

$$E(Y|Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}) \leq E(Y|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha})$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\rho_{ES}(X + Y) &= ES(X + Y) = -E(X + Y|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha}) \\
&= -E(X|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha}) - E(Y|X + Y < -VaR(X + Y)_{1-\alpha}) \\
&\leq -E(X|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) - E(Y|Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}) = ES(X) + ES(Y) \\
&= \rho_{ES}(X) + \rho_{ES}(Y)
\end{aligned}$$

3. Homogeneidad positiva: Sean  $m \geq 0 \in \mathbb{R}$  y  $X \in \mathcal{A}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{ES}(mX) &= ES(mX) = -E(mX|mX < -VaR(mX)_{1-\alpha}) = -E(mX|mX < -mVaR(X)_{1-\alpha}) \\
&= -E(mX|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) = -mE(X|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) = m \times ES(X) \\
&= m \times \rho_{ES}(X)
\end{aligned}$$

4. Monotonicidad: Sean  $X, Y \in \mathcal{A}$  con  $X \geq Y$ , luego

$$\begin{aligned}
E(Y|Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}) &= -VaR(Y)_{1-\alpha} + E(Y + VaR(Y)_{1-\alpha}|Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}) \\
&= -VaR(Y)_{1-\alpha} + \frac{E[(Y + VaR(Y)_{1-\alpha})1_{\{Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}\}}]}{P(Y < -VaR(Y)_{1-\alpha})} \\
&= -VaR(Y)_{1-\alpha} + \frac{E[(Y + VaR(Y)_{1-\alpha})1_{\{Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}\}}1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}]}{\alpha} \\
&\quad + \frac{E[(Y + VaR(Y)_{1-\alpha})1_{\{Y + VaR(Y)_{1-\alpha} < 0\}}1_{\{X \geq -VaR(X)_{1-\alpha}\}}]}{\alpha} \\
&\leq -VaR(Y)_{1-\alpha} + \frac{E[(Y + VaR(Y)_{1-\alpha})1_{\{Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}\}}1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}]}{\alpha} \\
&\leq -VaR(Y)_{1-\alpha} + \frac{E[(Y + VaR(Y)_{1-\alpha})1_{\{X < -VaR(X)_{1-\alpha}\}}]}{P(X < -VaR(X)_{1-\alpha})} \\
&= -VaR(Y)_{1-\alpha} + E(Y + VaR(Y)_{1-\alpha}|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) \\
&= E(Y|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) \leq E(X|X < -VaR(X)_{1-\alpha})
\end{aligned}$$

La primera desigualdad se debe a que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. La segunda desigualdad se obtiene a partir de que la intersección de dos eventos está contenida en cada uno de los eventos. Así,

$$\begin{aligned}
\rho_{ES}(X) = ES(X) &= -E(X|X < -VaR(X)_{1-\alpha}) \leq -E(Y|Y < -VaR(Y)_{1-\alpha}) \\
&= \rho_{ES}(Y) = ES(Y)
\end{aligned}$$

### 3.2.2. Medias de riesgo espectrales

Las medidas de riesgo espectrales (MRE) son una generalización del ES (Acerbi, 2002). Mientras el ES asigna un peso igual a todos los VaRs con  $\alpha \leq \beta \leq 1, \beta \in \mathbb{R}$  y cero a los demás, una MRE permite que estos pesos puedan ser elegidos más libremente. Estas son implementadas a través de una función de peso  $\phi$  (también se conoce como función de aversión al riesgo o de espectro), la cual es válida para la generación de medidas coherentes si satisface los siguientes criterios:

- $\phi$  es positiva
- $\phi$  es creciente
- $\int_0^1 \phi(p) dp = 1$

Así, una MRE es definida como:

$$MRE(X) = \int_0^1 \phi(u) VaR_u(X) du$$

El ES es un caso especial de una MRE, donde  $\phi(u) = (1 - \alpha)^{-1} 1_{\{\alpha \leq u \leq 1\}}$ .

Por otra parte, la condición de que  $w$  debe ser una función creciente que grandes pérdidas son tomadas más seriamente que pequeñas pérdidas y de allí que a esta función se le relacione también con la aversión al riesgo.

Otra característica de este grupo de medidas es que, a diferencia del ES, no es necesario definir un solo nivel de confianza. De tal forma se puede elegir una función  $w$  que crezca continuamente con las pérdidas y así haga que la medida de riesgo reaccione a cambios en la distribución de pérdidas más suavemente, evitando que un punto en la distribución ligeramente por encima o por debajo del nivel de confianza tenga un gran efecto sobre el riesgo estimado.

Para probar que una MRE es una medida de riesgo coherente, Acerbi (2002) parte del hecho de que la combinación convexa de medidas de riesgo coherentes es una medida de riesgo coherente y muestra que las MRE se pueden expresar como una combinación de ES. Este resultado concuerda con el resultado de Kusuoka (2001), el cual prueba que la clase de medidas de riesgo:

$$\rho(X) = \int_0^1 \phi(u)ES(X)du$$

donde  $\phi$  pertenece al conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre  $(0, 1]$  y  $X$  es distribuido de forma continua, cumple con los criterios de coherencia. A este resultado se le conoce como Representación de Kusuoka.

i. Medida de riesgo proporcional de Hazard

La medida de riesgo proporcional de Hazard (PH *risk*) es una MRE, propuesta por Wang (1995) en la cual la función de peso está dada por:

$$\phi(u) = \xi u^{\xi-1}$$

donde  $\int_0^1 \phi(u) = 1$ ,  $\phi(u) \geq 0$  para todo  $u$  y  $\xi \in \mathbb{R}^+$ .

Esta es una medida de riesgo coherente cuando  $\xi > 1$ , caso en el que las pérdidas extremas tienen una ponderación mayor en el cálculo de la medida. A la constante  $\xi$  se le denomina parámetro de aversión al riesgo y entre mayor sea su valor, esta medida le dará una ponderación mayor a los extremos de la distribución de pérdidas.

ii. Medida de riesgo de Wang

La medida de riesgo de Wang (Wang *risk*) es también llamada medida de riesgo de la transformada normal. Fue propuesta por Wang (2000) y su función de peso está dada por la siguiente derivada:

$$d\phi(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)$$

donde  $\Phi$  denota la función de distribución Gaussiana y  $0 < \theta < 1$ , lo cual asegura que la función sea creciente para  $0 < u < 1$ .

3.2.3. *Entropic Value at Risk*

Con el fin de hacer frente a debilidades relacionadas con la dificultad en el cálculo del ES y las MRE, las cuales pueden generar limitantes principalmente en problemas de optimización puesto que generalmente sólo se pueden estimar mediante métodos de muestreo, surgió la siguiente medida. El *Entropic Value at Risk* (EVaR) es una medida propuesta por Ahmadi-Javid (2012) que se define como el menor límite superior obtenido de la desigualdad de Chernoff para el VaR.

La desigualdad de Chernoff<sup>8</sup> para cualquier constante  $c$  y  $X \in \mathcal{G}$  es como sigue:

$$P(X \geq c) \leq e^{-zc} M_X(z), \forall z > 0$$

Resolviendo la ecuación  $e^{-zc} M_X(z) = \alpha$  con respecto a  $c$  para  $\alpha \in [0, 1]$  se obtiene que:

$$c_X(\alpha, z) := z^{-1} \ln(M_X(z)/\alpha)$$

Para la cual se tiene que  $P(X \geq c_X(\alpha, z)) \leq \alpha$ . En efecto, para cada  $z > 0$ ,  $c_X(\alpha, z)$  es un límite superior para  $VaR_{1-\alpha}(X)$ . Ahora, se considera el mejor límite superior de este tipo como una medida de riesgo que limita el  $VaR_{1-\alpha}(X)$  usando momentos exponenciales. Así, el EVaR de  $X$  con un nivel de confianza  $1 - \alpha$  se define como:

$$EVaR_{1-\alpha} := \inf_{z>0} \{c_X(\alpha, z)\} = \inf_{z>0} \{z^{-1} \ln(M_X(z)/\alpha)\}$$

---

<sup>8</sup> La desigualdad o límite de Chernoff (Chernoff, 1952) da límites exponenciales decrecientes sobre las colas de las distribuciones de sumas de variables aleatorias independientes. Tiene aplicaciones muy usadas en balanceo de conjuntos asociado al diseño de experimentos y al enrutamiento de paquetes sobre redes dispersas.

Además, Ahmadi-Javid (2012) prueba que el EVaR satisface los cuatro axiomas propuestos por Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999) y por lo tanto es una medida de riesgo coherente.

Una de las propiedades más importantes propiedades que satisface el EVaR es que, por su definición, esta medida es un límite superior para el ES si se usan los mismos niveles de confianza, es decir:

$$ES_{1-\alpha} \leq EVaR_{1-\alpha}$$

Por esta razón, puede ser recomendable para inversionistas con una aversión al riesgo alta, tal como el Banco del República en el proceso de administración del portafolio de reservas internacionales.

#### 4. *Risk parity*

Un portafolio se dice que está en *risk parity* (RP), ‘paridad de riesgos’, si la contribución al riesgo total del portafolio por parte de cada uno de sus activos o tipos de activos es la misma. La contribución al riesgo de cada activo indica la variación causada en el riesgo del portafolio por un cambio infinitesimal en la asignación en el activo.

Así, para un portafolio con posibles asignaciones  $\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  de  $n$  activos riesgosos, se satisface que:

$$C_i = C_j = w_i \rho_i \quad \text{con } i \neq j$$

donde  $C_i$  es la contribución al riesgo del portafolio del activo  $i$  y  $\rho_i$  es su riesgo.

La lógica RP surge de la idea de que un portafolio mal diversificado tiene mucho riesgo proveniente de pocos activos y poco riesgo de otros, así, busca nivelar la participación de cada activo dentro del riesgo total del portafolio.

Hay un par de consideraciones importantes que se deben tener en cuenta a la hora de establecer un portafolio bajo esta filosofía:

- Se debe evaluar detalladamente como son emitidos o como se van a agrupar los activos pues la asignación de recursos en un activo puede aumentar si este se separa en varios o se puede reducir si se combina con otros; por ejemplo, si en el ejercicio de asignación se incorpora un índice de tesoros con vencimientos de uno a cinco años, es probable que la asignación encontrada sea aproximadamente la mitad de la que se haría si se separan los activos en un índice de tesoros de uno a tres años y otro con vencimientos entre tres y cinco años. En este documento lo que se propone es mantener el universo de índices que son utilizados actualmente para la asignación de activos por el Banco de la República, cada uno de los cuales corresponde al tramo corto (0-1 años), mediano (1-5 años y 5-10 años) y largo (10+ años) de la curva para bonos de gobierno y un índice general para otros activos admisibles (ver anexo con universo de índices de activos). Esta separación asegura que en el sector de bonos de gobiernos se obtenga una adecuada diversificación por país y por plazos en la curva de rendimientos y restringe por construcción la excesiva entrada de otros tipos de

bonos y demás activos que tradicionalmente no han tenido altas participaciones en las reservas internacionales en Colombia.

- El inversionista debe decidir la medida de riesgo que utilizará para realizar la asignación de activos. Tradicionalmente se ha utilizado la desviación estándar para este fin, pero dadas las limitaciones que esta medida posee relacionadas con el incumplimiento de los axiomas de coherencia, en este documento se utilizan las medidas de riesgo coherentes estudiadas en el capítulo anterior para la aplicación de la metodología de asignación de activos.

#### 4.1. Media-varianza versus *Risk Parity*

La teoría tradicional relacionada con los métodos de asignación de activos está profundamente vinculada con el enfoque de optimización Media-varianza (MV) desarrollado por Markowitz (1952) para construir portafolios de acciones. En la práctica, de acuerdo a varios autores como Chaves, Hsu, Li & Shakernia (2011), la metodología de optimización MV es difícil de implementar debido a los desafíos asociados con la estimación precisa de los retornos esperados de los activos y sus covarianzas. Estimaciones subjetivas sobre las distribuciones de los retornos esperados pueden a menudo ser influenciadas por sesgos propios del inversionista, tales como sobreestimar los retornos esperados de un activo en razón de un buen comportamiento reciente o subestimar el riesgo a causa del conocimiento específico que pueda llegar a tener sobre un tipo de activos.

Las estimaciones empíricas basadas en datos históricos de mediano o largo plazo pueden no ser útiles teniendo en cuenta que las primas de riesgo y correlaciones para las diferentes clases de activos son variables en el tiempo. Además, la posibilidad de «cambio de paradigma» en el mercado de capitales hace que los datos históricos sean mucho menos relevantes para el pronóstico de la evolución futura de los rendimientos de los activos.

Por otra parte, varios autores como Jobson & Korkie (1980) o Michaud (1989) han mostrado que los portafolios encontrados mediante MV son difíciles de administrar en la práctica debido a la poca estabilidad en los resultados en cortos períodos de tiempo, lo que lleva a una alta operatividad por parte del inversionista para ajustar permanentemente el portafolio al portafolio óptimo.

Para hacer frente a los problemas en la estimación del enfoque MV, Black & Litterman (1991) proponen una metodología MV que se basa en la visión de un único inversionista, «el

mercado», lo que mitiga los problemas de sensibilidad en los parámetros de entrada del modelo MV tradicional.

El modelo BL asume los siguientes supuestos:

- i. El «portafolio de mercado» se encuentra sobre la frontera eficiente del MV sin restricciones y es aquel que maximiza el *Sharpe Ratio*<sup>9</sup>.
- ii. El estimador de la matriz de covarianzas es libre de errores.
- iii. No existen restricciones relacionados con la posible asignación de activos, lo que puede generar soluciones que impliquen cortos o altos niveles de endeudamiento en ciertos activos cuando se incorporan los *views* del inversionista. En la práctica, BL usa como entrada un parámetro de ajuste ( $\tau$ ) para calcular de forma aceptable soluciones con restricciones.

Asumiendo la certeza en estos tres supuestos, se pueden calcular los retornos implícitos del mercado, los cuales sirven como estimadores de la media de los retornos para la realización de un posterior ejercicio típico MV. El uso de estos retornos como estimadores de retornos futuros no es recomendable (Michaud, Esch, & Michaud, 2013) por varias razones:

- Los retornos implícitos son función de la matriz de covarianza entre los activos, luego, por definición, no tienen información de la media de los retornos. Esto es equivalente a creer que no se conoce ningún tipo de información sobre el primer momento de la distribución de los retornos mientras existe perfecta información sobre el segundo momento.
- Estos retornos no son únicos y no están alineados con los pronósticos actuales del mercado (un múltiplo escalar positivo es también un retorno implícito).
- Los retornos implícitos requieren que el SR del portafolio de mercado sea óptimo, lo cual no se conoce y *a priori* es altamente improbable.

Por otra parte, el modelo BL propone una lógica para identificar el portafolio de mercado y anclar la optimización, para luego incorporar los *views* del inversionista. El enfoque está fundamentado en que el portafolio de mercado es óptimo y por lo tanto está sujeto a que la optimización se esté realizando sobre una frontera eficiente errada. El portafolio de mercado está sujeto a las críticas de Roll (Roll, 1977), relacionadas con el universo de activo utilizados

---

<sup>9</sup> El *Sharpe Ratio* es un indicador de retorno ajustado por nivel de riesgo, el cual está definido como:

$$SR = \frac{\mu_r - \mu_L}{\sigma_r}$$

donde  $\mu_r$  es el retorno esperado del portafolio,  $\mu_L$  es la pérdida máxima aceptable por el inversionista y  $\sigma_r$  es la desviación estándar de los retornos.

para su definición, los cuales no cubren una muy amplia gama de activos tales como renta fija privada, acciones, *commodities*, entre otros.

Además, el modelo BL ha sido criticado (Michaud, Esch, & Michaud, 2013) porque su atractivo está más relacionado con su conveniencia en la implementación que con una efectiva administración de activos y no es la opción más recomendable cuando se compara frente a otras metodologías (ellos los comparan frente a la metodología MV propuesta por Michaud & Michaud (1998) que proporciona portafolios más diversificados para los mismos inputs), además demuestran que cuando el ejercicio es restringido este converge a un ejercicio MV tradicional, y de esta forma conservan los problemas relacionados con la sensibilidad a errores de estimación.

Así, teniendo en cuenta la forma en que se estiman la media y la varianza de los retornos, los significados usuales de media y varianza se pierden y el resultado no es claro, más allá de que las entradas son convenientes para una optimización que ha sido diseñada para producir respuestas inducidas.

Asimismo, en este enfoque la solución al problema del inversionista se puede vincular con la maximización de la utilidad esperada siempre y cuando los retornos sigan una distribución normal y las preferencias del inversionista sean cuadráticas. Sin embargo, la evidencia empírica sugiere que el comportamiento de los retornos de los activos está caracterizado por momentos estadísticos de orden superior, como asimetría y curtosis.

A diferencia del modelo BL, en donde se asume que los retornos se encuentran implícitos en la información de mercado, los modelos RP asumen que no se conoce nada acerca de la media de la distribución de los retornos futuros y basan todo el proceso de asignación de activos en el riesgo, el cual tradicionalmente se ha medido con la desviación estándar (como se mencionó en el capítulo 3, esta medida no satisface todos los axiomas de coherencia y no tiene en cuenta el comportamiento de los momentos superiores de la distribución de retornos de los activos, por estas razones no se tiene en cuenta para la definición de activos propuesta en este documento).

La condición de paridad es un punto de partida ante la ausencia de *views* fuertes por parte del inversionista, a menos que este crea que la condición de paridad de riesgos es óptima por sí misma, lo cual es poco probable; pero, teniendo en cuenta que el Banco de la República en su política de inversión de las reservas internacionales establece el hecho de no incorporar sus perspectivas de mercado al modelo actual, la lógica RP podría ser más adecuada dada su naturaleza propia de no incorporar *views*.

En general, la condición RP ocasiona una caída tanto de los retornos esperados como del riesgo del portafolio debido a una mayor asignación en activos menos riesgosos frente a los modelos de asignación tradicionales. Kunz (2011) sugiere que el retorno y el SR de los portafolios RP pueden ser mejorados mediante endeudamiento, acción que no se puede implementar para el portafolio de reservas internacionales debido a su naturaleza y tamaño. A pesar de esto, cabe aclarar que como se mencionó en el capítulo 2, los principios que se deben tener en cuenta en la administración de las reservas internacionales de Colombia son, en su orden, seguridad, liquidez y rentabilidad; por lo que es deseable un mejor manejo del riesgo por encima de una mayor rentabilidad esperada.

El hecho de que RP permita realizar la asignación con base en cualquier medida de riesgo, admite incluir en la asignación de activos momentos superiores de la distribución de los retornos que están implícitos en unas «mejores» medidas de riesgo que la desviación estándar, lo que lleva a la posibilidad de realizar un mejor cubrimiento de eventos extremos. Además, en la metodología que se propone en este documento, la técnica para estimar los riesgos de los activos tienen un enfoque *forward-looking*, es decir, utiliza la distribución de los retornos esperada en el futuro a partir de una técnica de remuestreo denominada *filtered-bootstrap*, la cual se detalla en el próximo capítulo, mientras la metodología actual se basa en la matriz de covarianzas histórica, la cual puede ser un menos acertada teniendo en cuenta que las distribuciones son variables en el tiempo.

## 5. Métodos de estimación

En este capítulo se presenta el método de estimación de los portafolios RP usando las medidas de riesgo coherentes descritas en el capítulo 3. Para calcular el riesgo de un activo se utiliza una técnica de remuestreo sobre los retornos llamada *filtered bootstrap*, definida por Barone-Adesi, Giannopoulos & Vospoer (1999), en la cual se ajusta el «mejor modelo» de pronósticos ARMA-GARCH<sup>10</sup> a la serie de retornos del activo<sup>11</sup> y posteriormente se realiza un *bootstrap* simple sobre la serie de errores, los cuales sirven como pronóstico al ajustarse con los parámetros del modelo encontrado.

Se realiza el ajuste de los retornos a modelos ARMA-GARCH dado que estos modelos logran capturar el efecto de la heterocedasticidad en las series de tiempo, el cual típicamente se evidencia a través de clusters de volatilidad y colas pesadas en las distribuciones. Así, se asume que el comportamiento de los retornos está dado por la siguiente ecuación en su media (modelo ARMA(p,q)):

$$y_t = c_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$$

y la siguiente ecuación en su varianza (modelo GARCH(r,s)):

$$\varepsilon_t^2 = c_1 + \sum_{k=1}^r \gamma_k \varepsilon_{t-k} + \sum_{l=1}^s \delta_l \varepsilon_{t-s}$$

con:

$$\varepsilon_t = \epsilon_t z_t,$$

$$z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

y donde  $y_t$  representa el retorno en el tiempo  $t$ ,  $c_0$  representa la media del modelo,  $\alpha_i$  representan los coeficientes autorregresivos de la media,  $\beta_j$  representan los coeficientes de

---

<sup>10</sup> Para una explicación detallada sobre este tipo de modelos de ajuste y los métodos para su calibración ver (Enders, 1995).

<sup>11</sup> Como es común en el mercado de renta fija, en este documento se trabaja con series de índices que representan el país y el sector a los que corresponden los instrumentos en los que se desea invertir, por ejemplo, bonos de Estados Unidos con vencimientos entre cero y un año.

media móvil de la media,  $c_1$  representa la varianza media del proceso,  $\gamma_k$  representan los coeficientes autorregresivos de la varianza,  $\delta_l$  representan los coeficientes de media móvil en la varianza,  $\varepsilon_t$  es retorno residual con respecto al proceso sobre la media,  $\epsilon_t$  caracteriza el tamaño de la desviación estándar en cada instante del tiempo y  $z_t$  es una variable aleatoria ruido blanco.

La elección del «mejor ajuste» se realiza a través del criterio de información Bayesiano (BIC) propuesto por Schwarz (1978), el cual permite la selección del modelo con mejor ajuste basado en la función de verosimilitud, pero evitando el sobreajuste al penalizar la adición de parámetros de una forma mayor a otros criterios de selección como el criterio de información de Akaike (AIC).

El BIC está definido para un modelo  $M$  como:

$$BIC = -2 \ln \hat{L} + k \ln(n)$$

donde  $\hat{L}$  es el valor máximo de la función de verosimilitud del modelo  $M$ , es decir,  $\hat{L} = p(x|\hat{\theta}, M)$  tal que  $x$  es la serie de retornos observados,  $p(x|M)$  es la probabilidad marginal de los datos en el modelo  $M$  y  $\hat{\theta}$  es el conjunto de parámetros del modelo, y  $n$  es el número de observaciones de la muestra.

Una vez estimado el modelo que mejor se ajusta a la serie de retornos, el paso siguiente es generar  $N$  escenarios un período adelante mediante el *bootstrap* de los errores, los cuales son ajustados de acuerdo a los parámetros del modelo resultante, con el fin de obtener la distribución estimada de los retornos futuros  $R$  y sobre los cuales se calculan las medidas de riesgo  $\rho_i$  para cada serie de retornos generada.

Como se describió en el capítulo anterior, el ES está definido por:

$$ES_{1-\alpha}(X) = -E(X|X < -VaR_{1-\alpha})$$

Así, se debe estimar el  $VaR_{1-\alpha}$  para el nivel de confianza  $(1 - \alpha) \times 100\%$  elegido previo al cálculo del  $ES_{1-\alpha}$ . Esta estimación se puede realizar como el cuantil  $1 - \alpha$  de la distribución de los retornos estimados. Posteriormente el  $ES_{1-\alpha}$  se puede estimar como el promedio de los retornos  $R_i$  que son inferiores al  $VaR_{1-\alpha}$  así:

$$\overline{ES_{1-\alpha}} = \frac{1}{N(1 - \alpha)} \sum_{i|R_i < -VaR_{1-\alpha}} R_i$$

Para estimar el  $EVaR_{1-\alpha}$  se utiliza la siguiente optimización que aproxima la medida de riesgo para retornos discretos:

$$\overline{EVaR}_{1-\alpha} = \min_{z>0} \left\{ -\frac{1}{z} \ln \left( \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \exp^{z \cdot R_i}}{N} \right) \right\}$$

En cuanto a las medidas de riesgo espectrales, se discretizan las funciones de aversión  $\bar{\phi}$  de tal forma que:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\phi} \left( \frac{i}{n} \right) = 1$$

donde  $n$  es el número de valores tipo VaR que se tendrán en cuenta en el cálculo de la medida. Es claro que a medida que aumente  $n$ , la precisión de la medida será mayor pues el resultado convergerá a su definición continua.

Posteriormente, el valor estimado de las medidas de riesgo espectrales expuestas en el capítulo 3, tanto el PH *risk* como el Wang *risk*, estará dado por:

$$\overline{MRE} = \sum_{i=1}^n \bar{\phi} \left( \frac{i}{n} \right) VaR_{\frac{i}{n}}(R)$$

En donde sólo variará la función de aversión al riesgo para cada medida.

Dado que se busca realizar la asignación con base en medidas de riesgo coherentes, se aprovecha que las propiedades de Subaditividad y Homogeneidad Positiva pueden ser reemplazadas por la noción de convexidad, como lo hace Colucci (2011). De esta forma se tiene que:

$$\rho \leq \sum_{i=1}^n w_i \rho_i$$

donde  $\rho$  es el riesgo total del portafolio,  $\rho_i$  es el riesgo individual del activo  $i$  y  $w_i$  es el tamaño de su participación en el portafolio.

Luego se introduce un concepto que simplifica bastante los cálculos: «asumir que el riesgo total del portfolio es igual la suma ponderada del riesgo de cada uno de sus componentes». Hay dos razones para explicar este supuesto. Primero, este concepto permite enfocar el portafolio en el máximo riesgo, lo que es deseable teniendo en cuenta que la codependencia no es estable en el tiempo, lo que puede dificultar bastante su estimación. Además, teniendo en cuenta que históricamente las correlaciones entre los activos tienden a aumentar en épocas de crisis, este supuesto cubre la medida frente caídas generalizadas en el valor de los activos.

La segunda razón tiene que ver con la simplicidad que esto permite en el cálculo de los portafolios RP, facilitando así su implementación.

Así, sea  $\bar{\rho}$  el riesgo total del portafolio estimado igual a:

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{\rho}_i$$

Típicamente, para un portafolio RP sin endeudamiento con riesgo objetivo  $\bar{\rho}^*$ ,  $n_{rf}$  activos libres de riesgo con participación total en el portafolio  $w_{rf}$  y  $n_r$  activos riesgosos con participación total en el portafolio  $w_r$  y riesgo individual  $\bar{\rho}_i^*$ , se deben satisfacer las siguientes condiciones:

- $w_{rf} = \sum_{j=1}^{n_{rf}} w_j$ , donde cada  $w_j$  es la participación individual de cada activo libre de riesgo en el portafolio.
- $w_r = \sum_{k=1}^{n_r} w_k$ , donde cada  $w_k$  es la participación individual de cada activo riesgoso en el portafolio.
- $w_{rf} + w_r = 1$
- $\bar{\rho}^* = \sum_{i=1}^n w_i \bar{\rho}_i^* = \sum_{k=1}^{n_r} w_k \bar{\rho}_k^*$
- $w_{k_i} \bar{\rho}_{k_i}^* = w_{k_j} \bar{\rho}_{k_j}^*$  para todos los activos riesgosos.

Luego, al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene la ponderación RP de cada activo en el portafolio.

Para el caso de las reservas internacionales en Colombia se debe tener en cuenta una consideración adicional y es que el índice de referencia del portafolio de inversión debe cumplir la restricción de composición cambiaria con el fin de hacer cubrimiento a los egresos de la balanza de pagos. Esta restricción hace que sea obligatoria la asignación activos por grupo de monedas y lleva a que los activos de ciertos países que pueden ser «más riesgosos» tengan una mayor ponderación dentro del portafolio que activos de otros países con menor riesgo, y por lo tanto su contribución al riesgo total no sea la misma. Además, para los activos de algunos países que deben ser incluidos en el índice de referencia no se cuenta con un índice para activos que puedan ser considerados como libres de riesgo.

Para hacer frente a este tema se establecieron las siguientes reglas para adaptar la metodología tradicional de construcción de portafolios RP, de tal forma que esta se ajuste a la política de administración de las reservas internacionales de Colombia:

- Con base en el riesgo objetivo total del portafolio, se estima el riesgo que se debería tener en cada moneda a partir de la restricción de composición cambiaria.
- Para los activos de países donde no se tiene activos libres de riesgo, se compara el riesgo asignado en el paso anterior con el riesgo de cada activo.
  - Si el riesgo individual de cada uno los activos es superior al riesgo promedio asignado, se asigna toda la participación requerida en el activo con menor riesgo, se calcula el riesgo por moneda y se ajusta el presupuesto de riesgo de todo el portafolio para luego volver con el paso anterior.
  - Si el riesgo promedio asignado es superior al de todos los activos individuales, se asigna toda la participación requerida en el activo con mayor riesgo, se calcula el riesgo por moneda y se ajusta el presupuesto de riesgo de todo el portafolio para luego volver con el paso anterior.
  - Si existen activos con riesgos individuales inferiores y superiores al riesgo promedio asignado, se asigna la participación en cada activo de tal forma que el riesgo total sea equivalente al requerido para esta moneda, buscando que la participación de cada activo en el riesgo de la moneda sea aproximadamente igual.
- Para los activos de los demás países se ajusta el presupuesto de riesgo entre los activos riesgosos de tal forma que su participación dentro del riesgo total del grupo de activos de cada moneda sea igual, y se ajusta la participación total de los activos por país con el activo libre de riesgo respectivo.

## 6. Datos y Resultados

En el anexo A2 se detallan los portafolios encontrados utilizando la metodología propuesta para las diferentes medidas de riesgo para un nivel de confianza del 95 %. Se escogió este nivel de confianza dado que es el valor generalmente más usado en la literatura y tiene cierta relación con el que se tiene actualmente establecido en la política de inversión del Banco de la República en la restricción del VaR, aunque es importante anotar que esta decisión es propia de cada inversionista y puede variar de acuerdo a su grado de aversión al riesgo. Los datos utilizados en este ejercicio corresponden al período entre diciembre de 1998 y diciembre de 2014, con una frecuencia diaria.

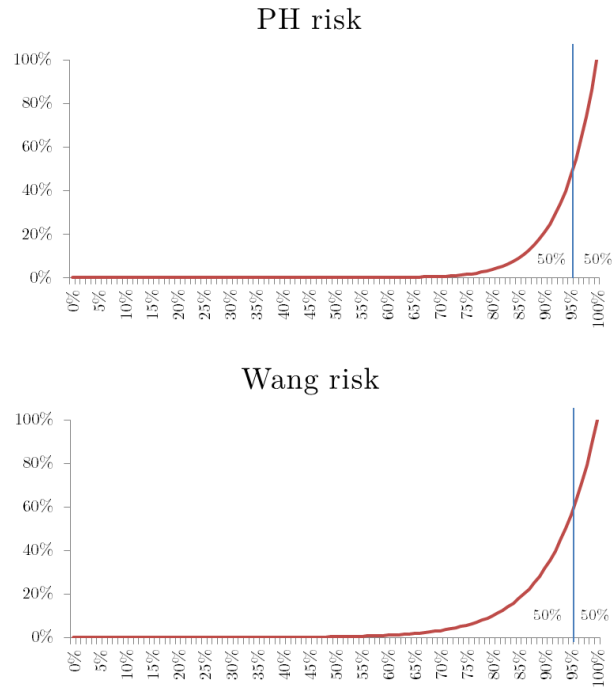
Para el cálculo del portafolio con paridad en el PH *risk*, se calibró un parámetro de aversión al riesgo  $\xi$  de tal forma que la función de aversión asigne un 50 % del peso a los «VaR» inferiores al 95 % y un 50 % los restantes, buscando tener una medida que sea bastante sensible a los eventos extremos. De forma análoga se calibró el parámetro  $\theta$  para la medida *Wang risk*. En la figura 3 se presentan las funciones de peso relativo que se asignan con el PH risk y con el Wang risk a cada posible valor dentro la distribución de retornos.

El tiempo de cómputo fue cercano a una hora, tiempo empleado principalmente en la generación de la distribución de los retornos, lo que no se considera como un inconveniente dado que la revisión del índice de referencia sólo se hace cada mes como se mencionó en el capítulo 2 y para la realización de la mayoría de pruebas no se requiere reestimar las distribuciones de los retornos pronosticados.

En el cuadro 1 se observan diferentes indicadores de retorno ajustados por nivel de riesgo para los portafolios estimados BL y RP un mes adelante (cada una de estas medidas se explica en el anexo A3), es decir, a enero de 2015. El color verde indica un mejor desempeño del indicador de la metodología RP frente a la metodología BL y el color rojo significa lo contrario. Las columnas denominadas «Actual» corresponden a la comparación entre el portafolio calculado con la metodología BL con la restricción de no tener pérdidas con un nivel del confianza del 95 % frente a los estimados con la metodología RP, calculados de tal forma que la medida de riesgo para cada uno al 95 % de confianza sea equivalente a la del portafolio BL restringido. Las columnas denominadas «Máx. Util.» corresponden a la comparación entre el portafolio de máxima utilidad calculado con la metodología BL frente

a los estimados con la metodología RP, calculados de tal forma que la medida de riesgo para cada uno al 95 % de confianza sea equivalente a la del portafolio BL de máxima utilidad.

Figura 3. Funciones de peso aplicadas para el cálculo del PH risk y el Wang risk



Fuente. Elaboración Propia

Cuadro 1. Indicadores de desempeño pronosticados para los portafolios estimados

	RP									
	BL		ES95		EVaR95		phRM95		WangRM95	
	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.
Retorno Esperado	0.2257%	0.2138%	0.2175%	0.1785%	0.2173%	0.1825%	0.2171%	0.1954%	0.2171%	0.1934%
Desviación Estándar	0.0972%	1.2370%	0.1033%	1.1183%	0.1041%	1.0674%	0.1060%	1.1901%	0.1055%	1.1800%
Sharpe Ratio	0.15	0.00	0.06	-0.03	0.06	-0.03	0.06	-0.01	0.06	-0.02
Roy's Safety-First Ratio	2.32	0.17	2.11	0.16	2.09	0.17	2.05	0.16	2.06	0.16
Sortino Ratio	0.16	0.00	0.07	-0.03	0.07	-0.03	0.06	-0.01	0.06	-0.02
Sterling Ratio	0.0128	0.0002	0.0057	-0.0021	0.0053	-0.0019	0.0047	-0.0010	0.0048	-0.0011
Omega Ratio	3.08	1.10	2.84	1.10	2.79	1.11	2.76	1.09	2.76	1.09

Fuente. Elaboración Propia

Se observa que el portafolio BL es generalmente superior en todas las medidas a los portafolios RP. Su retorno esperado es mayor, mientras su volatilidad es similar a la de los

portafolios RP. En cuanto a la probabilidad de no tener retornos negativos, el portafolio BL sigue siendo superior al portafolio RP.

El valor de las medidas de riesgo pronosticadas de cada portafolio se presenta en el cuadro 2. Allí se observa que al tomar como presupuesto de riesgo para estimar el portafolio RP el riesgo actual del portafolio, usando el ES y el EVaR se encuentran, en general, portafolios menos riesgosos al portafolio BL para diferentes medidas de riesgo y niveles de confianza de 95 y 99 %.

Cuadro 2. Riesgo estimado para los portafolios encontrados

	RP									
	BL		ES95		EVaR95		phRM95		WangRM95	
	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.	Actual	Máx. Util.
<b>ES95</b>	-1.58%	-20.99%	-1.58%	-20.99%	<b>-1.65%</b>	<b>-20.18%</b>	<b>-1.79%</b>	<b>-21.77%</b>	<b>-1.76%</b>	<b>-21.66%</b>
<b>ES99</b>	-2.26%	-28.13%	<b>-2.18%</b>	<b>-28.31%</b>	<b>-2.27%</b>	<b>-27.21%</b>	<b>-2.47%</b>	<b>-29.19%</b>	<b>-2.43%</b>	<b>-29.07%</b>
<b>EVaR95</b>	-2.56%	-28.73%	<b>-2.47%</b>	<b>-30.06%</b>	-2.56%	-28.73%	<b>-2.76%</b>	<b>-31.06%</b>	<b>-2.72%</b>	<b>-30.93%</b>
<b>EVaR99</b>	-3.39%	-35.82%	<b>-3.25%</b>	<b>-37.83%</b>	<b>-3.36%</b>	<b>-36.18%</b>	<b>-3.62%</b>	<b>-38.98%</b>	<b>-3.57%</b>	<b>-38.84%</b>
<b>phRM95</b>	-1.76%	-22.63%	<b>-1.56%</b>	<b>-22.20%</b>	<b>-1.62%</b>	<b>-21.29%</b>	-1.76%	-22.63%	<b>-1.73%</b>	<b>-22.56%</b>
<b>phRM99</b>	-3.45%	-38.85%	<b>-2.66%</b>	<b>-37.76%</b>	<b>-2.77%</b>	<b>-36.24%</b>	<b>-3.01%</b>	<b>-37.81%</b>	<b>-2.96%</b>	<b>-37.78%</b>
<b>WangRM95</b>	-1.54%	-20.13%	<b>-1.38%</b>	<b>-19.75%</b>	<b>-1.44%</b>	<b>-18.95%</b>	<b>-1.57%</b>	<b>-20.19%</b>	-1.54%	-20.13%
<b>WangRM99</b>	-2.64%	-31.46%	<b>-2.15%</b>	<b>-30.70%</b>	<b>-2.25%</b>	<b>-29.44%</b>	<b>-2.44%</b>	<b>-30.97%</b>	<b>-2.40%</b>	<b>-30.92%</b>

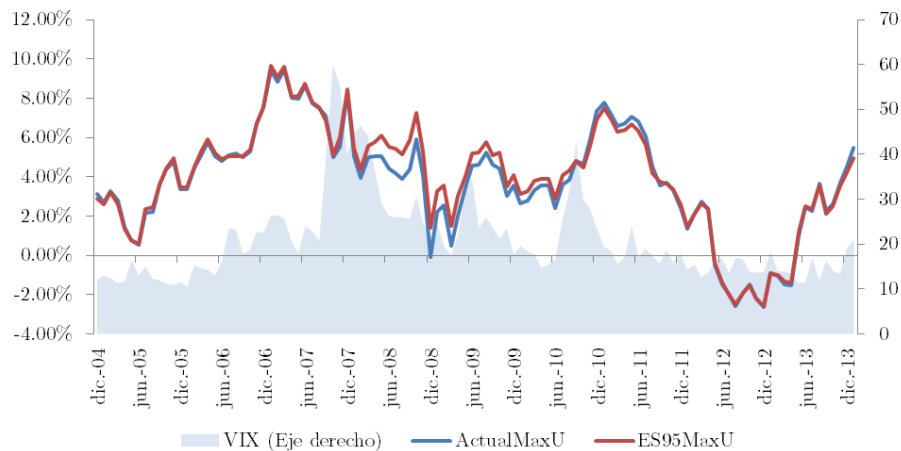
Fuente. Elaboración Propia

Así pues, es claro que en general los portafolios arrojados bajo la metodología RP son menos riesgosos a los resultantes de la metodología BL, los cuales tienen un retorno esperado mayor y parecen ser más eficientes.

Luego, dado que el ejercicio anterior sólo pronostica los indicadores y las medidas para un periodo, a continuación se presentan los resultados de un ejercicio de *backtesting* que se realizó con el fin de establecer si en el tiempo estos resultados habrían sido consistentes. En este se tomaron datos diarios desde diciembre de 1998, realizando cada optimización con cortes mensuales desde diciembre de 2004 de los portafolios bajo las dos metodologías comparadas y estimando los retornos que habría tenido cada portafolio asumiendo que se realiza un rebalanceo mensual. Como medida de riesgo para la metodología RP se usó el ES al 95 % de confianza puesto que, junto con la metodología que usa el EVaR, es la que presenta mejores resultados a nivel de riesgo de acuerdo al cuadro 2 y además, en la práctica es la más fácil de implementar e interpretar ya que es la más usada tradicionalmente.

La evolución de los retornos anuales para los portafolios de máxima utilidad se presenta en la figura 4 (se denominó portafolio RP de máxima utilidad a aquel que tiene el mismo riesgo que el portafolio BL de máxima utilidad). Se observa que en gran parte del tiempo el desempeño de los portafolios generados bajo ambas metodologías fue similar, pero durante los períodos de alta volatilidad, los cuales se ven reflejados mediante un mayor valor del índice de volatilidad VIX<sup>12</sup>, los portafolios RP tuvieron un mejor desempeño, lo que podría ser explicado por su más alta aversión al riesgo la cual hace que en momentos de alta volatilidad en el mercado, estos portafolios se desempeñen mejor debido a la mejor valorización de los activos «más seguros» capturando de una forma más eficiente el efecto *fly to quality*.

Figura 4. Evolución de los retornos anuales para los portafolios de máxima utilidad



Fuente. Elaboración Propia

En el cuadro 3 se presentan estadísticas relevantes para comparar el desempeño de los portafolios generados bajo ambas metodologías. Se observa que en promedio los portafolios RP habrían tenido un retorno superior a los portafolios BL en 21 puntos básicos con la misma volatilidad. Además, el *Omega Ratio* muestra que los portafolios RP habrían cumplido con mayor frecuencia con el retorno requerido, en este caso cero % (en el anexo A3 se enuncian y se explica cómo se deben interpretar estas medidas).

<sup>12</sup> El índice de volatilidad (VIX) es una medida de las expectativas del mercado sobre la volatilidad de corto plazo y es estimado a partir de los precios de las opciones sobre acciones que pertenecen al S&P500.

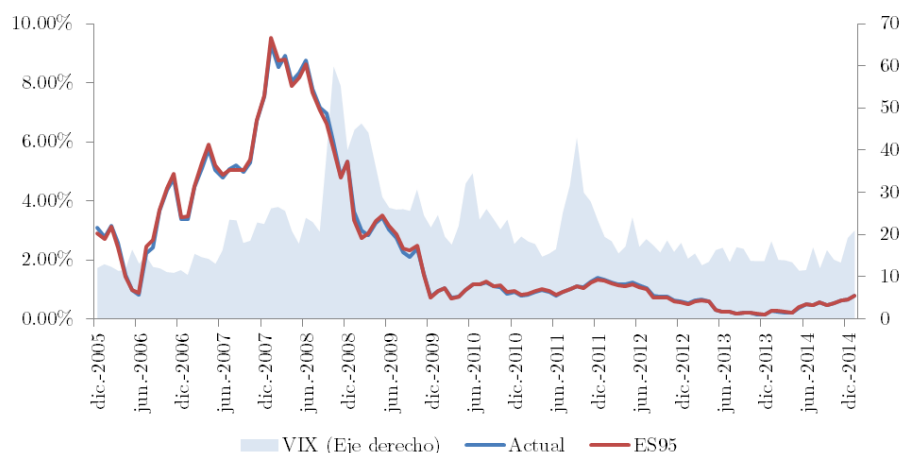
Cuadro 3. Estadísticas comparativas para portafolios de máxima utilidad

	BL	ES95
<b>Retorno Promedio Anual</b>	3.77%	3.98%
<b>Desviación Estándar Promedio</b>	2.73%	2.72%
<b>Sharpe Ratio</b>	0.76	0.84
<b>Roy's Safety-First Ratio</b>	1.38	1.46
<b>Omega Ratio</b>	7.46	8.17

Fuente. Elaboración Propia

En la figura 5 se presentan las evolución de los retornos anuales para los portafolios restringidos, es decir, los portafolios BL que incorporan la restricción tipo VaR y los portafolios RP que igualan en riesgo a los portafolios BL restringidos en cada instante, y en el cuadro 4 las estadísticas que permiten comparar las dos metodologías; se observa que no existe diferencia clara entre los retornos generados bajo los dos esquemas, lo que podría implicar que dada la fuerte restricción aplicada en la construcción de los portafolios, ambos esquemas convergen, esto dado por la reducción en el tamaño de la región de factibilidad del ejercicio que sesga los portafolios a ser ampliamente invertidos en activos de menor riesgo. Cabe destacar que, en línea con la restricción aplicada, los retornos encontrados siempre superan el umbral de cero % para ambos esquemas durante el período estudiado.

Figura 5. Evolución de los retornos anuales para los portafolios con restricción de riesgo



Fuente. Elaboración Propia

Cuadro 4. Estadísticas comparativas para portafolios con restricción de riesgo

	<b>BL</b>	<b>ES95</b>
<b>Retorno Promedio Anual</b>	2.41%	2.41%
<b>Desviación Estándar Promedio</b>	2.42%	2.42%
<b>Sharpe Ratio</b>	0.30	0.30
<b>Roy's Safety-First Ratio</b>	1.00	1.00
<b>Omega Ratio</b>	No aplica	No aplica

Fuente. Elaboración Propia

## 7. Conclusiones

Las reservas internacionales de Colombia se rigen bajo estrictos criterios de seguridad y liquidez, de tal forma que su portafolio de inversión debe estar invertido en instrumentos financieros de la más alta calidad. Entonces, teniendo en cuenta que el índice de referencia es la guía que indica en donde se realizan la mayor parte las inversiones de este portafolio, es de vital importancia hacer una revisión juiciosa de los métodos que se utilizan para su construcción y de las medidas usadas para estimar sus riesgos.

Actualmente, el esquema utilizado para la definición del índice de referencia (metodología BL) se caracteriza por estimar la media de los retornos de los activos admisibles con base en el supuesto de equilibrio y asume que estos representan el total de activos existentes en el mercado. Por otra parte, una vez estimadas dichas medias y la matriz de covarianzas, se asume que estas son ciertas y se estima el portafolio óptimo realizando una optimización MV clásica. Este enfoque es bastante intuitivo y sus resultados, *a priori*, son bastante convenientes, dada su estabilidad en el tiempo y amplia diversificación frente a un enfoque MV tradicional en el cual la media y la matriz de covarianzas de los retornos sea exógena al modelo o basada en datos históricos.

A pesar de estas ventajas, los supuestos que asume este enfoque son bastante fuertes y poco realistas y además, más allá de la forma como se estiman los datos de entrada, la metodología sigue siendo una optimización MV, la cual solo tiene en cuenta los dos primeros momentos de la distribución de los retornos y asume como medida de riesgo la volatilidad de los mismos, una deficiente medida de acuerdo al criterio de coherencia ya que no satisface los axiomas que este criterio requiere.

En este trabajo se estudió el enfoque RP, que tiene como principales ventajas que no es necesario asumir la media de los retornos de los activos, que se puede utilizar cualquier medida de riesgo para la asignación de activos y que genera portafolios muy diversificados, asegurando que cada activo tendrá una participación de acuerdo al nivel de riesgo que posea. Sus principales desventajas son que no involucra criterio alguno de optimalidad dentro de su cálculo y que asume el desconocimiento absoluto de los retornos esperados de los activos, supuestos que en la práctica pueden ser bastante conservadores, especialmente cuando se trata de inversionistas especializados.

Dadas sus propiedades, se aplicaron algunas medidas de riesgo coherentes en la generación de los portafolios RP, las cuales varían entre sí en la aversión al riesgo que implica cada una. Gracias a la forma en que son construidas, estas medidas tienen la capacidad de capturar los eventos que ocurren en las colas de las distribuciones de los retornos, lo cual muy deseable cuando se trata de series financieras, que se caracterizan por colas pesadas en la parte negativa sus distribuciones.

Para la estimación de las medidas de riesgo coherente se usó la metodología *filtered bootstrap*, la cual busca generar trayectorias de retornos que sigan un comportamiento que se ajuste a su trayectoria histórica y reutiliza los errores de las series después de ajustadas. Tiene la ventaja de usar toda la información de los retornos históricos pero es bastante exigente en términos de carga computacional.

Usando las series de los activos que tradicionalmente componen la mayor parte del portafolio de reservas internacionales de Colombia, se pronosticaron los desempeños de los portafolios estimados bajo la metodología actual y los estimados bajo la metodología propuesta con diferentes medidas de riesgo coherentes, se encontró que bajo los criterios tradicionales de retorno, volatilidad y retorno ajustado por nivel de riesgo, los portafolios BL son superiores a los portafolios RP, pero si se evalúan las medidas de riesgo coherentes, resultan ser los portafolios RP con las medidas ES y EVaR menos riesgosos que los portafolios BL, lo que indica que estos implican mayor aversión al riesgo, característica que es ser deseable para el portafolio de inversión de las reservas internacionales de Colombia.

Cuando se revisó como habría sido históricamente el desempeño de los portafolios bajo ambos esquemas, se encontró que en períodos de baja volatilidad en el mercado, el desempeño de los portafolios construidos bajo ambas metodologías fue muy similar, mientras que en momentos de alta volatilidad los portafolios RP fueron superiores, seguramente como consecuencia de su capacidad para capturar el efecto de la valorización de los activos percibidos como más seguros en momentos de crisis o de tensión en los mercados.

Al aplicar la restricción tipo VaR sobre los portafolios BL que esta implementada actualmente sobre el índice de referencia del portafolio de inversión de las reservas internacionales (aquella que restringe los portafolios factibles a aquellos que tienen una probabilidad de pérdida inferior al 5 % durante el horizonte de inversión) y compararla con los portafolios RP con el mismo nivel de riesgo, medido utilizando medidas de riesgo coherentes, se encontró que no existe diferencia significativa entre ambos enfoques puesto que el nivel de riesgo admisible es muy bajo y, por lo tanto, ambas metodologías concentran sus asignaciones en activos denominados como libres de riesgo.

## Referencias

- Acerbi, C. (2002). Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking and Finance*, XXVI(7), 1505-1518.
- Ahmadi-Javid, A. (2012). Entropic Value-at-Risk: A New Coherent Risk Measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*(155), 1105-1123.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, IX(3), 203-228.
- Banco de la República. (2012). *Informe de la Junta Directiva al Congreso de la República*. Bogotá.
- Banco de la República. (2015). *Informe Administración de las Reservas Internacionales*. Bogotá.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K., & Vosper, L. (1999). VaR without correlations for portfolio of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, XIX(5), 583-602.
- Black, F., & Litterman, R. (1991). Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 7-18.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2001). *Investments* (5th ed.). The McGraw-Hill Companies.
- Chaves, D., Hsu, J., Li, F., & Shakernia, O. (2011). Risk Parity Portfolio vs. Other Asset Allocation Heuristic Portfolios. *The Journal of Investing*, XX(1), 108-118.
- Chernoff, H. (1952). A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the sum of Observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, XXIII(4), 493-507.
- Colucci, S. (2011). How Expected Shortfall Can Simplify the Equally-Weighted Risk Contribution Portfolio. *Symphonia Sgr*.
- Daniélsson, J., Jorgensen, B., Samorodnitsky, G., Sarma, M., & de Vries, C. (2005, Octubre). *Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk*. Retrieved

Febrero 13, 2015, from Gennady Samorodnitsky Page - School of Operations Research and Information Engineering. Cornell University:  
people.orie.cornell.edu/gennady/techreports/VaRsubadd.pdf

- de Beaufort, R., & Berkelaar, A. (2009). Managing tail risk in reserve portfolios. In *Sovereign risk management* (pp. 99-110). Central Banking Publications.
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time Series* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Föllmer, H., & Schied, A. (2010). Convex and Coherent Risk Measures. In *Encyclopedia of Quantitative Finance* (pp. 355-363). John Wiley & Sons.
- Hurst, H. (1951). Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*.
- Idzorek, T. (2004). A step-by-step guide to the Black-Litterman model.
- Jobson, J., & Korkie, B. (1980). Estimation for Markowitz Efficient Portfolios. *Journal of The American Statistical Association*, LXXV(371), 544-554.
- Kunz, S. (2011). At Par with Risk Parity? *CFA Institute Conference Proceedings Quarterly* (pp. 1-7). CFA Institute.
- Kusuoka, S. (2001). On Law Invariant Coherent Risk Measures. *Advances in Mathematical Economics*, III, 83-95.
- Larsen, N., Mausser, H., & Uryasev, S. (2000). Algorithms for Optimization of Value-at-Risk. In *Financial Engineering, E-commerce and Supply Chain* (Vol. LXX, pp. 19-46).
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110-119.
- León, C., & Reveiz, A. (2010). Portfolio Optimization and Long-Term Dependence. *Borradores de Economía*(622).
- León, C., & Vela, D. (2011). Foreign reserves' strategic asset allocation. *Borradores de Economía*(645).
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, VII(1), 77-91.

- Michaud, R. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, 31-42.
- Michaud, R., & Michaud, R. (1998). *Efficient Asset Management: A practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation* (2nd ed.). New York: Oxford University Press.
- Michaud, R., Esch, D., & Michaud, R. (2013). Deconstructing Black-Litterman: How to get the portfolio you already knew you wanted. *Journal of Investment Management*, *XI*(1), 6-20.
- Roll, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory. *Journal of Financial Economics*, *IV*(2), 129-176.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, *VI*(2), 461-464.
- Wang, S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, *XVII*, 43-54.
- Wang, S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance*, *LXVII*(1), 15-36.
- Zimmermann, H., Drobetz, W., & Oertmann, P. (2003). *Global Asset Allocation - New Methods and Applications*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

## Anexos

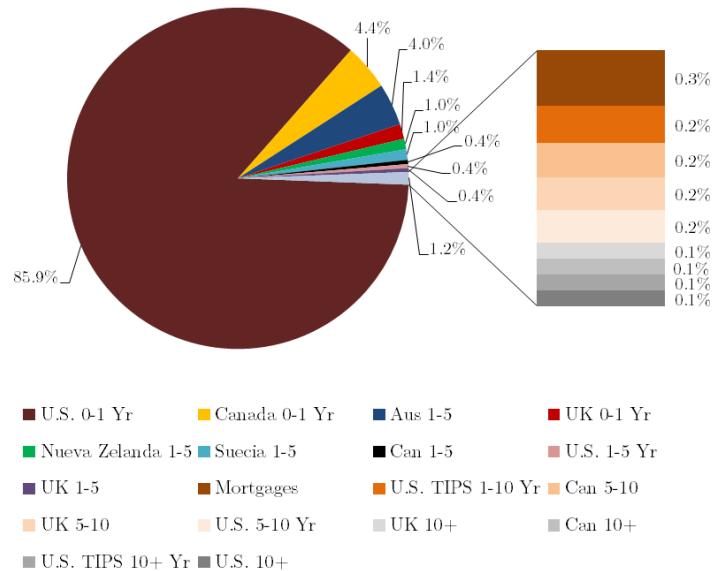
### A1. Universo de índices de activos utilizado

Instrumento		Mercado	Moneda	Descripción
Libre de riesgo	Títulos de Gobierno	USA	USD	Índices de bonos de Gobierno con vencimientos entre cero y un año (Bloomberg TKR: G0QA, G0CA, G0LA).
		CAN	CAD	
		UK	GBP	
Riesgoso	Títulos de Gobierno	USA	USD	Índices de bonos de Gobierno con vencimientos entre uno y cinco años, cinco y diez años y mas de diez años (Bloomberg TKR: (USA) GVQ0, G6O2, G9O2, (AUS) GVT0, G6T0, G9T0, (CAN) GVC0, G6C0, G9C0, (UK) GVL0, G6L0, G9L0, (NZ) GVZ0, G6Z0, (SWE) GVW0, G6W0, G9W0).
		AUS	AUD	
		CAN	CAD	
		UK	GBP	
		NZ	NZD	
	SWE	SEK		
	TIPS	USA	USD	Índices de bonos de Gobierno protegidos contra inflación con vencimientos entre uno y diez años y mayores a diez años (Bloomberg TKR: G5QI, G9QI).
	Hipotecas	USA	USD	Índice de bonos de agencias respaldados por hipotecas. Fannie Mae, Freddie Mac y Gimi Mae. (Bloomberg TKR: M0A0).

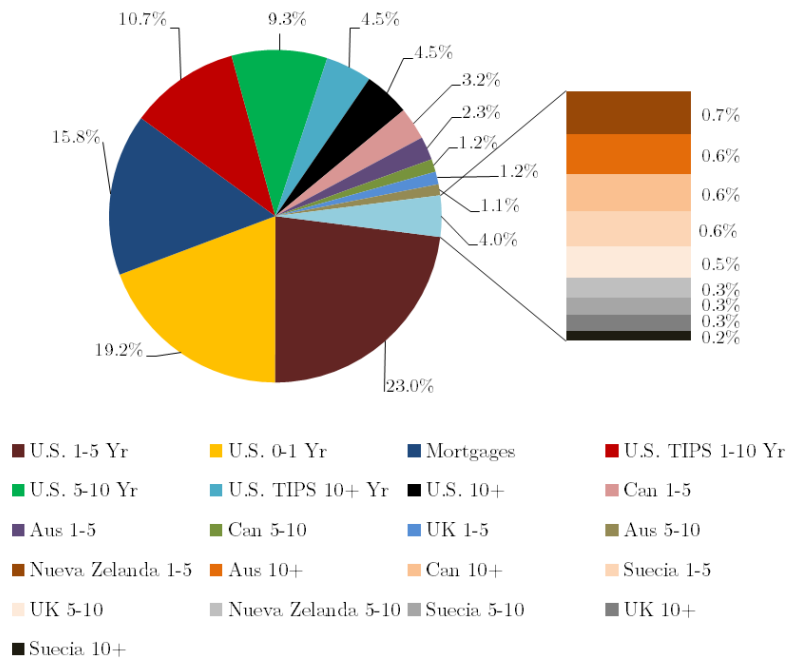
Fuente: Bloomberg, página Merryll Lynch - Bank of America

**A2. Portafolios RP de acuerdo a cada medida de riesgo, establecidos con el valor del portafolio actual y el de máxima utilidad para un 95 % de confianza**

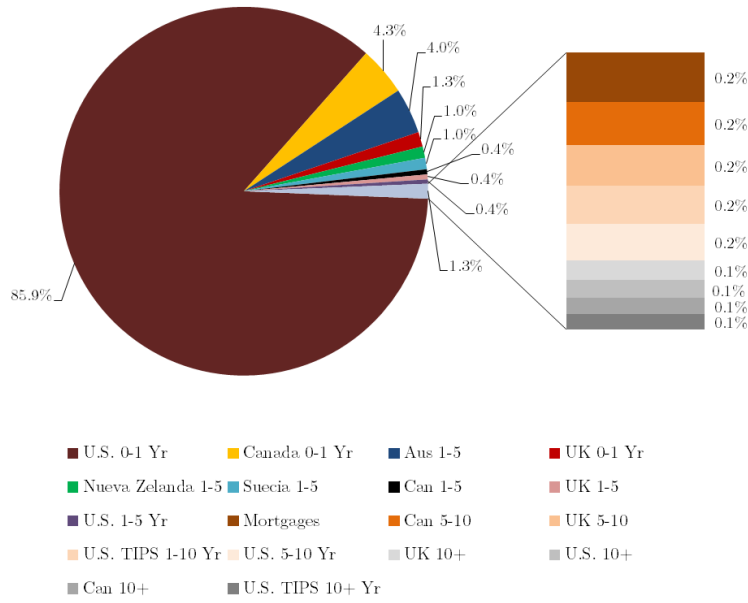
Portafolio RP usando ES 95 igual al portafolio actual



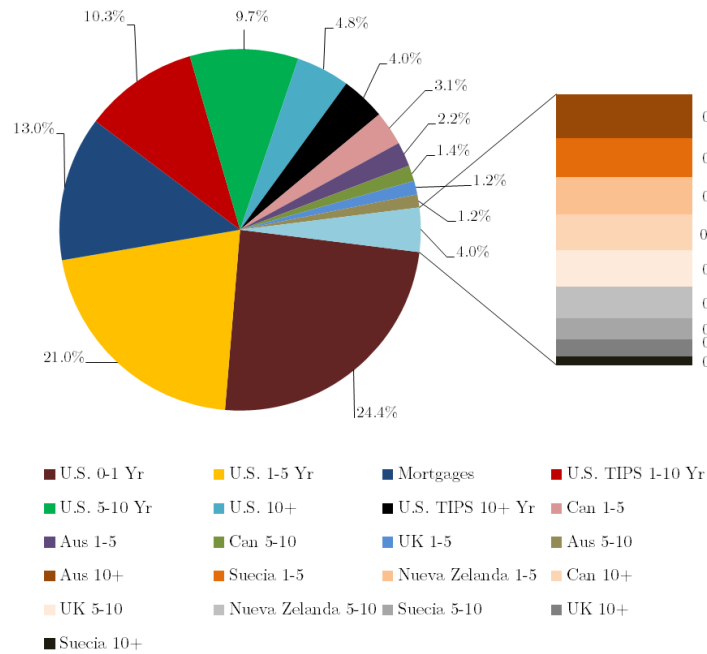
Portafolio RP usando ES 95 igual al portafolio de máxima utilidad



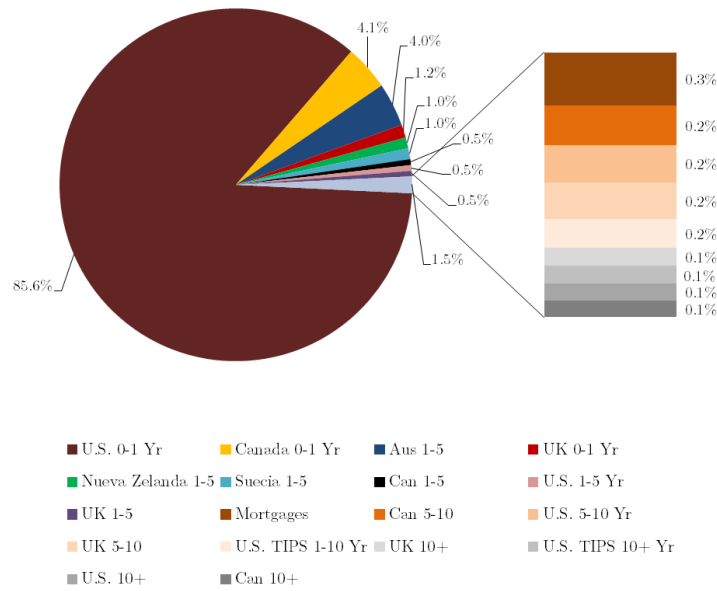
Portafolio RP usando EVaR 95 igual al portafolio actual



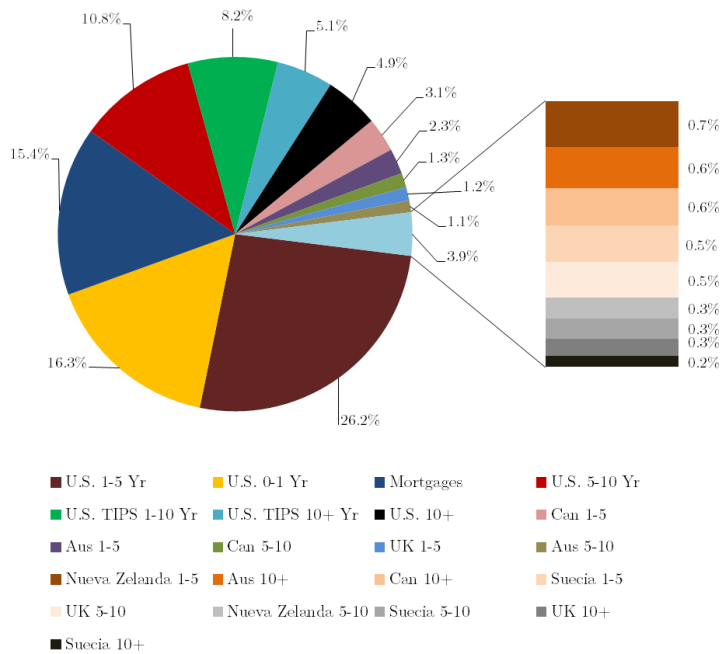
Portafolio RP usando EVaR 95 igual al portafolio de máxima utilidad



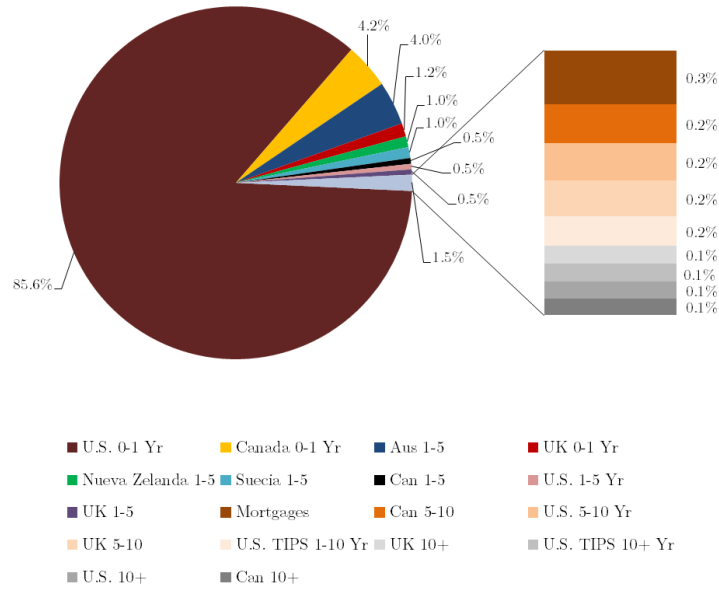
Portafolio RP usando phRM 95 igual al portafolio actual



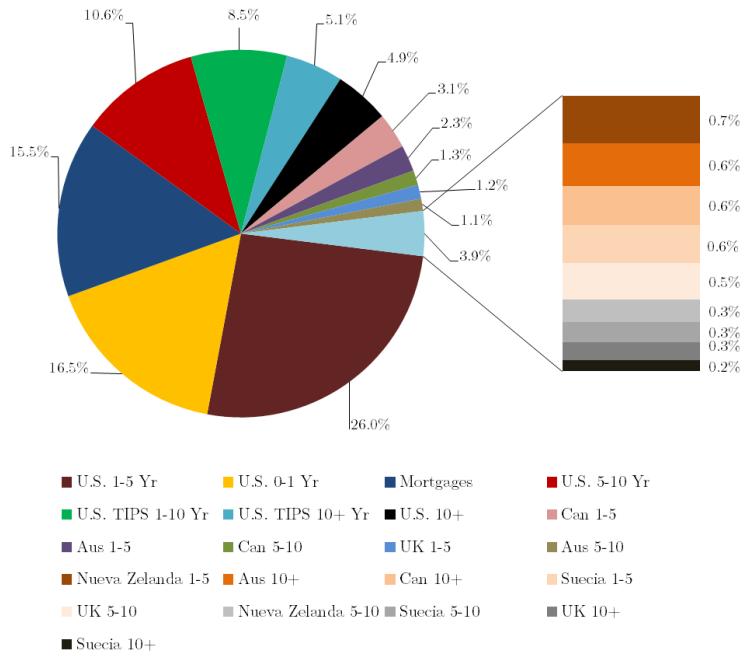
Portafolio RP usando phRM 95 igual al portafolio de máxima utilidad



Portafolio RP usando WangRM 95 igual al portafolio actual



Portafolio RP usando WangRM 95 igual al portafolio de máxima utilidad



Fuente. Elaboración Propia

### A3. Comparación de las medidas de retorno ajustadas por nivel de riesgo para los portafolios encontrados.

Para evaluar y comparar el posible desempeño de los portafolios estimados, se calcularon una serie de medidas de retorno ajustadas por nivel de riesgo usando los retornos estimados para cada serie de activos.

El Retorno Esperado y la Desviación Estándar corresponden a la media y a la desviación estándar de los retornos simulados para cada portafolio en términos anuales.

El *Sharpe Ratio* mide el exceso de retorno esperado de un portafolio sobre la opción libre de riesgo por unidad de riesgo, donde el riesgo es medido a través de la desviación estándar. El *Sharpe Ratio* se define como:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{E(r_p - r_f)}{\sigma_p}$$

donde  $r_p$  y  $r_f$  son los retornos del portafolio evaluado y de la opción libre de riesgo respectivamente y  $\sigma_p$  es la desviación estándar del portafolio evaluado. En general, un portafolio con un mayor *Sharpe Ratio* se considerará más deseable frente a otra opción.

Las principales debilidades de esta medida se basan en la noción de que el riesgo es igual a la volatilidad y que la volatilidad es mala. Es claro que cuanto más se aumenta la volatilidad, más probable es que el portafolio sea capaz de capturar una mayor rentabilidad, luego debería tener en consideración el grado de aversión al riesgo del inversionista. Además, el *Sharpe Ratio* trata la volatilidad de la misma forma sin importar su dirección, es decir, penaliza estrategias que tienen volatilidad al alza (grandes retornos positivos), lo que no debería verse como algo negativo.

El *Roy's Safety-First Ratio* mide el exceso de retorno esperado de un portafolio sobre el retorno requerido por el inversionista '*target*', donde, al igual que el *Sharpe Ratio*, el riesgo es medido a través de la desviación estándar. El *Roy's Safety-First Ratio* se define como:

$$\text{Roy's Safety - First Ratio} = \frac{E(r_p) - r_i}{\sigma_p}$$

donde  $r_i$  es el retorno requerido por el inversionista. En esta aplicación se definió  $r_i$  igual a cero, dada la importancia tienen los criterios de seguridad y liquidez en la administración del portafolio de reservas internacionales sobre su retorno esperado. Este indicador posee las mismas limitantes del *Sharpe Ratio*.

El *Sortino Ratio* es una versión modificada del *Sharpe Ratio* en la cual se ajusta la desviación estándar de tal forma que solo se tiene en cuenta la volatilidad de los datos inferiores al retorno *target* del portafolio, penalizando sólo el riesgo de caída.

$$\text{Sortino Ratio} = \frac{E(r_p - r_f)}{\sigma_{pd}}$$

donde  $\sigma_{pd}$  es la volatilidad de los retornos inferiores al retorno requerido por el inversionista con respecto a la media global. Cuando la distribución de los retornos es simétrica y el retorno requerido por el inversionista es cercano a la mediana de la distribución el *Sortino Ratio* y el *Sharpe Ratio* producen resultados similares, sino los resultados pueden variar significativamente. El *Sortino Ratio* corrige el problema de penalizar estrategias con volatilidad al alza.

Otro indicador estimado es el *Sterling Ratio*, el cual mide el exceso de retorno esperado de un portafolio sobre la opción libre de riesgo con relación al *Average Largest Drawdown* (ALD), ‘máxima caída promedio’, que indica cual sería la máxima caída esperada en los retornos del portafolio para un período de tiempo determinado. El *Sterling Ratio* está definido como:

$$\text{Sterling Ratio} = \frac{E(r_p - r_f)}{ALD}$$

El ALD difiere del *Maximum Drawdown* (MD), ‘máxima caída’, en que mide el promedio de las caídas máximas en los retornos en diferentes periodos de tiempo y no su máxima caída de forma absoluta. Para su estimación, se tomaron los retornos generados y se agruparon de tal forma que se simularan los retornos de diferentes años, luego el ALD se consideró como el promedio de las máximas caídas mensuales para cada años simulados.

Por último, el *Omega Ratio* se define como la razón entre la probabilidad de superar y la probabilidad de no cumplir con un umbral objetivo de retornos.

$$\text{Omega Ratio} = \frac{P(r_p \geq r_i)}{P(r_p < r_i)}$$

Su estimación se hizo comparando la cantidad de retornos generados que superaban el umbral (retorno cero) frente a los que no. Este indicador considera todos los momentos de la distribución de los retorno, a diferencia del *Sharpe Ratio* o del *Roy’s Safety-First Ratio*, los cuales consideran solo los primeros dos momentos. A pesar de poseer esta propiedad deseable,

el *Omega Ratio* no tiene en cuenta el tamaño de los movimientos y por lo tanto, no castiga la posible existencia de colas pesadas en las distribuciones.

## A4. Códigos de los programas y funciones implementadas en Matlab

Cálculo de las medidas de riesgo:

```
%Limpiar variables y ocultar alertas
clear all
warning off all

%Leer precios de las series de activos
[data datatxt]=xlsread('Trabajo de Grado.xlsx','pr');
riskasset=datatxt;
riskasset=riskasset(4,2:size(riskasset,2));
riskasset = ismember(riskasset(1, :), 'ACT');
price=data;
price( :, ~riskasset)=[];
numassets=size(price,2);

%Definir número de simulaciones
N=10000;

%Definir modelos ARMA-GARCH que se evaluarán en el filtered bootstrap
Mdl1=arima('ARLags',1);
Mdl2=arima('MALags',1);
Mdl3=arima('ARLags',1,'MALags',1);
Mdl4=arima('ARLags',1,'Variance',garch(0,1));
Mdl5=arima('MALags',1,'Variance',garch(0,1));
Mdl6=arima('ARLags',1,'MALags',1,'Variance',garch(0,1));
Mdl7=arima('ARLags',1,'Variance',garch(1,1));
Mdl8=arima('MALags',1,'Variance',garch(1,1));
Mdl9=arima('ARLags',1,'MALags',1,'Variance',garch(1,1));

%Creación de variables que almacenaran cálculos y resultados
retmonth=zeros(N,numassets);
Mean=zeros(1,numassets);
Std=zeros(1,numassets);
Min=zeros(1,numassets);
VaR95=zeros(1,numassets);
VaR99=zeros(1,numassets);
ExpSht95=zeros(1,numassets);
ExpSht99=zeros(1,numassets);
Model=zeros(1,numassets);
EVaR95=zeros(1,numassets);
EVaR99=zeros(1,numassets);
eps95=15;    %Constante input para ph risk measure al 95 % de confianza
eps99=70;    %Constante input para ph risk measure al 99 % de confianza
```

```

theta95=0.00001;           %Constante input para Wang risk measure al 95 % de confianza
theta99=0.0000000000000001; %Constante input para Wang risk measure al 95 % de confianza
step=0.01;
phRM95=zeros(1,numassets);
phRM99=zeros(1,numassets);
WangRM95=zeros(1,numassets);
WangRM99=zeros(1,numassets);
alpha95=0.05;
alpha99=0.01;

```

```

for k=1:numassets

```

```

    %Calcular retornos históricos

```

```

    rt = price2ret(price(:,k));

```

```

    %Realizar ajuste ARMA-GARCH y evaluación de modelos

```

```

    [EstMdl1 EstParamCov1 logL1 info1]= estimate(Mdl1,rt);

```

```

    [EstMdl2 EstParamCov2 logL2 info2]= estimate(Mdl2,rt);

```

```

    [EstMdl3 EstParamCov3 logL3 info3]= estimate(Mdl3,rt);

```

```

    [EstMdl4 EstParamCov4 logL4 info4]= estimate(Mdl4,rt);

```

```

    [EstMdl5 EstParamCov5 logL5 info5]= estimate(Mdl5,rt);

```

```

    [EstMdl6 EstParamCov6 logL6 info6]= estimate(Mdl6,rt);

```

```

    [EstMdl7 EstParamCov7 logL7 info7]= estimate(Mdl7,rt);

```

```

    [EstMdl8 EstParamCov8 logL8 info8]= estimate(Mdl8,rt);

```

```

    [EstMdl9 EstParamCov9 logL9 info9]= estimate(Mdl9,rt);

```

```

    [aic1 bic1]=aicbic(logL1,2,size(rt,1));

```

```

    [aic2 bic2]=aicbic(logL2,2,size(rt,1));

```

```

    [aic3 bic3]=aicbic(logL3,3,size(rt,1));

```

```

    [aic4 bic4]=aicbic(logL4,4,size(rt,1));

```

```

    [aic5 bic5]=aicbic(logL5,4,size(rt,1));

```

```

    [aic6 bic6]=aicbic(logL6,5,size(rt,1));

```

```

    [aic7 bic7]=aicbic(logL7,5,size(rt,1));

```

```

    [aic8 bic8]=aicbic(logL8,5,size(rt,1));

```

```

    [aic9 bic9]=aicbic(logL9,6,size(rt,1));

```

```

    minbic=min([bic1 bic2 bic3 bic4 bic5 bic6 bic7 bic8 bic9]);

```

```

    %Selecciona el modelo que mejor se ajusta a las series de acuerdo al

```

```

    %criterio de Akaike

```

```

    if minbic==bic1

```

```

        Mdl=Mdl1;

```

```

        EstMdl=EstMdl1;

```

```

        EstParamCov=EstParamCov1;

```

```

        logL=logL1;

```

```

        info=info1;

```

```

        L=1;
    end
end

```

```

else if minbic==bic2
  Mdl=Mdl2;
  EstMdl=EstMdl2;
  EstParamCov=EstParamCov2;
  logL=logL2;
  info=info2;
  L=2;
else if minbic==bic3
  Mdl=Mdl3;
  EstMdl=EstMdl3;
  EstParamCov=EstParamCov3;
  logL=logL3;
  info=info3;
  L=3;
else if minbic==bic4
  Mdl=Mdl4;
  EstMdl=EstMdl4;
  EstParamCov=EstParamCov4;
  logL=logL4;
  info=info4;
  L=4;
else if minbic==bic5
  Mdl=Mdl5;
  EstMdl=EstMdl5;
  EstParamCov=EstParamCov5;
  logL=logL5;
  info=info5;
  L=5;
else if minbic==bic6
  Mdl=Mdl6;
  EstMdl=EstMdl6;
  EstParamCov=EstParamCov6;
  logL=logL6;
  info=info6;
  L=6
else if minbic==bic7
  Mdl=Mdl7;
  EstMdl=EstMdl7;
  EstParamCov=EstParamCov7;
  logL=logL7;
  info=info7;
  L=7;
else if minbic==bic8
  Mdl=Mdl8;
  EstMdl=EstMdl8;

```



```

hstest(i,1)=EstMdl.Variance.Constant+EstMdl.Variance.GARCH{1}*ht(size(ht,1),1)+EstMdl.Variance.ARCH{1}*(epsilon(size(epsilon,1),1)^2);
zt(i,1)=bootsamresiduals(i,1)*sqrt(hstest(i,1));

retest(i,1)=EstMdl.AR{1}*rt(size(rt,1),1)+EstMdl.MA{1}*epsilon(size(epsilon,1),1)+zt(i,1);
priceest(i,1)=price(size(price,1),k)*(1+ retest(i,1));
end
else
%Calcular zt+i y pt+i
if L<=3
hstest(i,1)=hstest(i-1,1);
zt(i,1)=bootsamresiduals(i,1)*sqrt(hstest(i,1));
retest(i,1)=EstMdl.AR{1}*retest(i-1,1)+EstMdl.MA{1}*zt(i-1,1)+zt(i,1);
priceest(i,1)=priceest(i-1,1)*(1+ retest(i,1));
else
hstest(i,1)=EstMdl.Variance.Constant+EstMdl.Variance.GARCH{1}*hstest(i-1,1)+EstMdl.Variance.ARCH{1}*(zt(i-1,1)^2);
zt(i,1)=bootsamresiduals(i,1)*sqrt(hstest(i,1));
retest(i,1)=EstMdl.AR{1}*retest(i-1,1)+EstMdl.MA{1}*zt(i-1,1)+zt(i,1);
priceest(i,1)=priceest(i-1,1)*(1+ retest(i,1));
end
end
end
%Almacena retornos simulados
retmonth(j,k)=priceest(size(priceest,1),1)/price(size(price,1),k)-1;
end
%Calcula media, desviación estándar y medidas de riesgo para cada
%activo
Mean(1,k)=mean(retmonth(:,k));
Std(1,k)=std(retmonth(:,k));
Min(1,k)=min(retmonth(:,k));
VaR95(1,k)=prctile(retmonth(:,k),5);
VaR99(1,k)=prctile(retmonth(:,k),1);
Extreme=retmonth(:,k)<VaR95(1,k);
retExtreme=retmonth(:,k);
retExtreme(~Extreme)=0;
ExpSht95(1,k)=sum(retExtreme)/sum(Extreme);
Extreme=retmonth(:,k)<VaR99(1,k);
retExtreme=retmonth(:,k);
retExtreme(~Extreme)=0;
ExpSht99(1,k)=sum(retExtreme)/sum(Extreme);
fEVaR95=@(z)fEVaR(z,retmonth(:,k),alpha95);
z0=1;
A=[-1];

```

```

b=[-0.00000001];
[zopt,EVaR95(1,k)]=fmincon(fEVaR95,z0,A,b);
EVaR95(1,k)=-EVaR95(1,k);
fEVaR99=@(z)fEVaR(z,retmonth(:,k),alpha99);
[zopt EVaR99(1,k)]=fmincon(fEVaR99,z0,A,b);
EVaR99(1,k)=-EVaR99(1,k);
phRM95(1,k)=fphRM(retmonth(:,k),eps95,step);
phRM99(1,k)=fphRM(retmonth(:,k),eps99,step);
WangRM95(1,k)=fWangRM(retmonth(:,k),theta95,step);
WangRM99(1,k)=fWangRM(retmonth(:,k),theta99,step);
Model(1,k)=L;
end

```

*%Almacena en una variable resumen los resultados encontrados*

```

summary=[Mean;
Std;
Min;
VaR95;
VaR99;
ExpSht95;
ExpSht99;
EVaR95;
EVaR99;
phRM95;
phRM99;
WangRM95;
WangRM99;
Model];

```

Función que calcula el EVaR

```
function [ EVaRz ] = fEVaR(z, ret, alpha)
```

*% Ajustada del paper Entropic Value-at-Risk: A New Coherent Risk Measure - A. Ahmadi-Javid*

```
EVaRz=(1/z)*log(mean(exp(z.*ret))/alpha);
```

```
end
```

Función que calcula la medida PH risk

```
function [ phRM ] = fphRM(ret, epsilon, step )
```

```

% Ver paper de Acerbi "Spectral Measures of Risk - A
% Coherent Representation of Subjective Risk Aversion"

```

```

alpha=0;
phfun=zeros(1/step,1);

for i=1:(1/step)
    alpha=alpha + step;
    phfun(i,1)=epsilon*(alpha^(epsilon-1));
end
weight=phfun/sum(phfun);
alpha=0;
phRM=0;
for i=1:(1/step)
    alpha=alpha + step;
    if i==(1/step)
        VaR=min(ret);
    else
        VaR=prctile(ret,100*(1-alpha));
    end
    phRM=phRM+VaR*weight(i,1);
end

```

Función que calcula la medida Wang risk

```

function [ WangRM ] = fWangT(ret, theta, step)

u=0;
wangfun=zeros(1/step,1);

for i=1:(1/step)
    u=u + step;
    wangfun(i,1)=exp(-log(theta)*u-(log(theta)^2)/2);
end
weight=wangfun/sum(wangfun);

u=0;
WangRM=0;
for i=1:(1/step)
    u=u + step;
    if i==(1/step)
        VaR=min(ret);
    end
    WangRM=WangRM+VaR*weight(i,1);
end

```

```
else
    VaR=prctile(ret,100*(1-u));
end
WangRM=WangRM+VaR*weight(i,1);
end
```