

**BETAS Y CORRELACIONES DINÁMICAS DEL SECTOR *OIL &*
GAS EN COLOMBIA 2014-2021: UNA APROXIMACIÓN GARCH
MULTIVARIADA**

NARCISO RODRÍGUEZ SANMIGUEL

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANZAS

MEDELLÍN

2021

**BETAS Y CORRELACIONES DINÁMICAS DEL SECTOR *OIL &*
GAS EN COLOMBIA 2014-2021: UNA APROXIMACIÓN GARCH
MULTIVARIADA**

NARCISO RODRÍGUEZ SANMIGUEL

Trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Finanzas

Asesor: Diego Alexander Restrepo Tobón, PhD

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANZAS

MEDELLÍN

2021

RESUMEN

El objetivo del presente documento era probar la constancia de los coeficientes bajo el marco de Fama y French, a través de la metodología de modelos autorregresivos multivariados de heterocedasticidad condicionada que consideran correlaciones dinámicas (MGARCH – DCC), y contemplando en la estimación de parámetros, varianzas y covarianzas fluctuantes en el tiempo distribuciones distintas a la Normal (t-Student y exponencial general, GED). Se sustentó evidencia a favor de la hipótesis de coeficientes variables en el tiempo para el factor de mercado, ratio de valor de mercado/valor en libros, e incluyendo como cuarto factor cambios en el precio del crudo para seis acciones y dos portafolios del sector de *Oil & Gas* en Colombia entre febrero de 2014 y abril de 2021, con frecuencia diaria, que cotizan en los mercados bursátiles de Estados Unidos o Canadá. Se encontró evidencia débil de coeficientes variables para el factor tamaño. Se encontró, en los coeficientes variables (betas), un efecto de cobertura o *Hedge* de mitigación (negativo) en la respuesta del factor ante choques en las covarianzas (correlaciones), entre el retorno de la acción y el respectivo factor.

Palabras clave: GARCH Multivariado, DCC, coeficientes variables, Fama y French, precio del crudo, industria Oil & Gas

ABSTRACT

The objective of this document was to test the constancy of the coefficients under the framework of Fama and French, through the methodology of multivariate autoregression models of conditioned heteroscedasticity that consider dynamic correlations (MGARCH – DCC), and considering in the estimation of parameters, variances and fluctuating covariances in time, distributions other than Normal (Student's t and general exponential, GED). Evidence was supported in favor of the hypothesis of variable coefficients in time for market factor, market value/book value ratio and including as a fourth factor changes in the price of crude oil for six stocks and two portfolios of the Oil & Gas sector in Colombia, between February 2014 and April 2021, with daily frequency that are listed in United States or Canada stock exchange markets. Weak evidence of variable coefficients was found for the size factor. In the variable coefficients (betas) a coverage effect or mitigation Hedge (negative) was found in the response of the factor to shocks in the covariances (correlations), between the return on the share and the respective factor.

Keywords: Multivariate GARCH, DCC, variable coefficients, Fama and French, crude oil price, Oil & Gas industry

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	7
1. CONTEXTO ECONÓMICO	12
2. REVISIÓN DE LA LITERATURA	19
3. METODOLOGÍA	33
4. ANÁLISIS DE DATOS.....	43
5. RESULTADOS.....	52
6. CONCLUSIONES.....	67
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
ANEXOS	80
Anexo 1. Resultados de la ecuación 16	80
Anexo 2. Tabla A1. Coeficientes de la media, distribución t-Student.....	81
Anexo 3. Tabla A2. Coeficientes MGARCH, Distribución t-Student.....	82
Anexo 4. Gráfico A1. Desviaciones Estándar condicionadas de Factores	83
Anexo 5. Gráfico A2. Desviaciones Estándar condicionadas de Acciones.....	84
Anexo 6. Gráfico A3. Desviaciones Estándar condicionadas de Acciones (Continuación) ..	85
Anexo 7. Gráfico A4. Capitalización de mercado promedio. 2014-2021.....	86

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Estadísticas descriptivas excesos de retorno diarios 2014-2021.....	47
Tabla 2. Desviación estándar excesos de retorno diarios para distintos subperíodos 2014-2021.....	50
Tabla 3. Validación presencia componentes variables y criterio de selección distribuciones GED y T.....	52
Tabla 4. Coeficientes de la media, distribución GED	54
Tabla 5. Coeficientes MGARCH, distribución GED.....	59

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Precio histórico del crudo - marcador Brent (2014-2021)	14
Gráfico 2. Producción de crudo en Colombia – miles de barriles día – kbopd - (2014-2021).....	15
Gráfico 3. Evolución de las exportaciones de petróleo en Colombia (2014-2021)	16
Gráfico 4. Desempeño PIB Explotación de minas y canteras y contribución al PIB en Colombia (2014:T1 – 2020:T4)	18
Gráfico 5. Participación de los operadores en la producción de crudo y gas en Colombia, en 2020	44
Gráfico 6. Excesos de retorno diarios.....	47
Gráfico 7. Desempeño de factores en el período 2014-2021	49
Gráfico 8. Betas y correlaciones dinámicas Mercado	62
Gráfico 9. Betas y correlaciones dinámicas SMB	63
Gráfico 10. Betas y correlaciones dinámicas HML.....	64
Gráfico 11. Betas y correlaciones dinámicas Brent	65

INTRODUCCIÓN

En marzo de 2020 se presentó una contracción sin precedentes de la actividad económica mundial, a raíz de lo que se puede denominar una crisis en doble vía internacional (*double dip*). Dicha crisis se desencadenó por dos razones fundamentales: (1) la ausencia de coordinación entre la OPEP y Rusia para contraer la producción y así aumentar los precios internacionales del crudo y (2) la explosión de la pandemia global de SARS-CoV-2, o COVID-19.

Este panorama impuso, de manera general, en el entorno económico y político, y, de manera particular, en el sector de *Oil & Gas* y en las economías altamente dependientes de dicho sector, una situación de fuerte contracción de la demanda, con lo cual sus flujos de caja se vieron sustancialmente afectados. Dicho escenario describe en gran medida a la economía colombiana y las empresas del sector de extracción de hidrocarburos. Es así como se configura un entorno de retroalimentación entre el entorno económico mundial, el desempeño del sector de hidrocarburos y la economía colombiana.

Ante este panorama, las compañías de este segmento presenciaron la manera como los agentes de mercado empezaron a generar un aumento en la oferta (venta de posiciones) de acciones de este sector, reforzando así las pérdidas en valorización de la capitalización bursátil de estas empresas (Fu y otros, 2021). Las predicciones de marcos teóricos tales como el modelo de valoración de activos financieros (CAPM, por sus siglas en inglés *capital asset pricing model*), la teoría del arbitraje (APT, por sus siglas en inglés *arbitrage pricing theory*) o los modelos aplicados de Fama y French (1993; 2015), derivado este último de los 2 primeros, suponen relaciones constantes en el tiempo entre el exceso de retorno de un activo y diversos factores asociados a fluctuaciones en el portafolio de mercado, a variables macroeconómicas como inflación o tasas de interés y a características asociadas a la valorización y la relación de valor de mercado a libros de los portafolios de activos disponibles. Es entonces de interés entender el impacto que dichas variables tienen en compañías del sector *Oil & Gas*, con operaciones cuya participación del país en el total sea relevante, así como una contribución apreciable en el total de la producción nacional.¹

¹ Tal como se aprecia en la sección 5 (Análisis de datos), las empresas que se analizan contribuyeron a más del 85% de la producción de crudo y gas de Colombia en 2020, y al menos un 75% de la producción de cada compañía proviene del país.

Resulta cuando menos inquietante suponer que, de existir una relación entre los retornos de los activos y los mencionados factores, dicha relación sea estable y constante en el tiempo; más aún, con los constantes vaivenes de los mercados de renta variable a nivel mundial de los últimos años. De acuerdo con Engle (2016), se han sugerido diversas estrategias para estimar coeficientes (betas de exposición a los mencionados factores) variables en el tiempo, tales como las representaciones Estado-espacio, para el uso del Filtro de Kalman (Harvey, 1989) o los mínimos cuadrados recursivos, por mencionar algunos. En el primer caso, la forma autorregresiva del(los) coeficiente(s), usualmente un AR(1) no goza de soporte económico y puede implicar la existencia de al menos una raíz unitaria; para el segundo caso, la dinámica de los coeficientes variables depende altamente de la ventana con la que se estime la recursión, similar al suavizamiento que hace una media móvil en una serie: a mayor amplitud de la ventana, más suaves serán las fluctuaciones en la serie obtenida.

En diversas series económicas, en general, y muy especialmente en series financieras, desde Engle (1982), para el caso de una variable, y con desarrollos posteriores de Bollerslev y otros (1988), Engle y Kroner (1995) y Engle (2001), entre otros, para el caso de varias series, se ha demostrado la existencia de heterocedasticidad condicionada. Esto es, que las varianzas de las series, al igual que las covarianzas o

correlaciones con otras variables, no son constantes en el tiempo. Este tipo de estructuras se conocen en la literatura como modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicionada (ARCH-GARCH, por sus siglas en inglés *Autoregressive conditional heteroscedasticity* y *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*).

Lo anterior brinda un marco adecuado que permite estimar, de manera simultánea, la media, la varianza y las covarianzas de un conjunto de series de interés. Mas aún, Engle (2016) aprovecha la riqueza de los modelos GARCH multivariados (MGARCH, por sus siglas en inglés *multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) y propone una alternativa para estimar coeficientes variables en el tiempo, los cuales están en función de las covarianzas y desviaciones estándar dinámicas (DCB, por sus siglas en inglés *dynamic conditional betas*). La presente investigación sería una de las primeras en implementar este tipo de modelaciones para acciones del sector de *Oil & Gas* que operan en Colombia y que cotizan en bolsas de Estados Unidos y Canadá. Se permite así testear la existencia de componentes fijos y variables en los coeficientes de variables que la literatura establece como explicativas de los retornos (o excesos de retornos).

Es así como el presente documento se divide en siete secciones, además de esta introducción. En la sección 1, se presenta el entorno o contexto económico y cómo la crisis del 2020 impactó a la economía colombiana y al sector de *Oil & Gas*. En la sección 2, se hace una revisión de la literatura asociada al marco teórico abordado para la presente investigación. La sección 3 aborda la metodología GARCH multivariada, escogida para tal fin. En la sección 4, se revisan los datos analizados, con frecuencia diaria entre febrero de 2014 y abril de 2021, y se contrastan con la modelación econométrica. La sección 5 expone los resultados obtenidos, y en la sección 6 se presentan las conclusiones.

1. CONTEXTO ECONÓMICO

A raíz de lo que se puede denominar una crisis en doble vía internacional (*double dip*) presentada en marzo de 2020, y que fue configurada: (1) por la ausencia de coordinación entre la OPEP y Rusia para contraer producción y así aumentar los precios internacionales del crudo, y (2) por el surgimiento de la pandemia del SARS-CoV-2, se presentó una contracción mundial de la actividad económica sin precedentes (The World Bank, 2021).²

Por su parte, la *U. S. Energy Information Administration* (EIA, 2021) señaló que para el 2020 la demanda mundial diaria de crudo fue cercana a los 92,2 millones de barriles por día, un 9,0% menor que la observada en 2019, la contracción más grande en la demanda desde 2008-2009.

Para el caso del mercado del crudo, en el gráfico 1 se muestra, el desempeño diario del marcador Brent desde febrero de 2014 hasta abril de 2021. La fuerte contracción del precio entre 2014 y 2015, con una leve recuperación entre enero y mayo de 2015,

² De acuerdo con cifras del Banco Mundial (The World Bank, 2021) la contracción global del Producto Interno Bruto (PIB) para 2020 estaría en un 3.6%, la mayor datada desde 2009.

se explica principalmente por el aumento de la producción en Estados Unidos a través del *fracking*, incrementando su producción diaria un 90% en cuestión de siete años, pasando de producir 5 millones de barriles por día (BOPD, por sus siglas en inglés *barrels of oil per day*), a producir 9,5 millones (EIA, 2020).³ El precio mostró una dinámica alcista hasta 2018 (principalmente último trimestre, al pasar de US\$83,0/bbl en octubre, a mínimos de US\$50,5/bbl en diciembre) período en el cual Estados Unidos pasa a ser el principal productor, con 11,7 millones de BOPD, superando a Rusia y Arabia Saudita.

Con la ausencia de coordinación entre la OPEP y Rusia, entre enero y abril de 2020 junto con la contracción del mercado mundial ya mencionada, el marcador Brent pasó de US\$68,2/bbl a 20,0/bbl, la caída más pronunciada en cuatro meses para el rango de análisis señalado, tocando niveles similares de principios de la década del 2000.⁴

³ Producción en miles de barriles al año. Se divide por 365 para obtener producción promedio diario.

⁴ Para el 20 de abril de 2020, los futuros del marcador WTI eran negativos por el exceso de almacenamiento que se mostraba para mayo, haciendo que las empresas productoras pujaran para que se evacuara su producción (Tobben, 2020).

Gráfico 1

Precio histórico del crudo - marcador Brent (2014-2021)

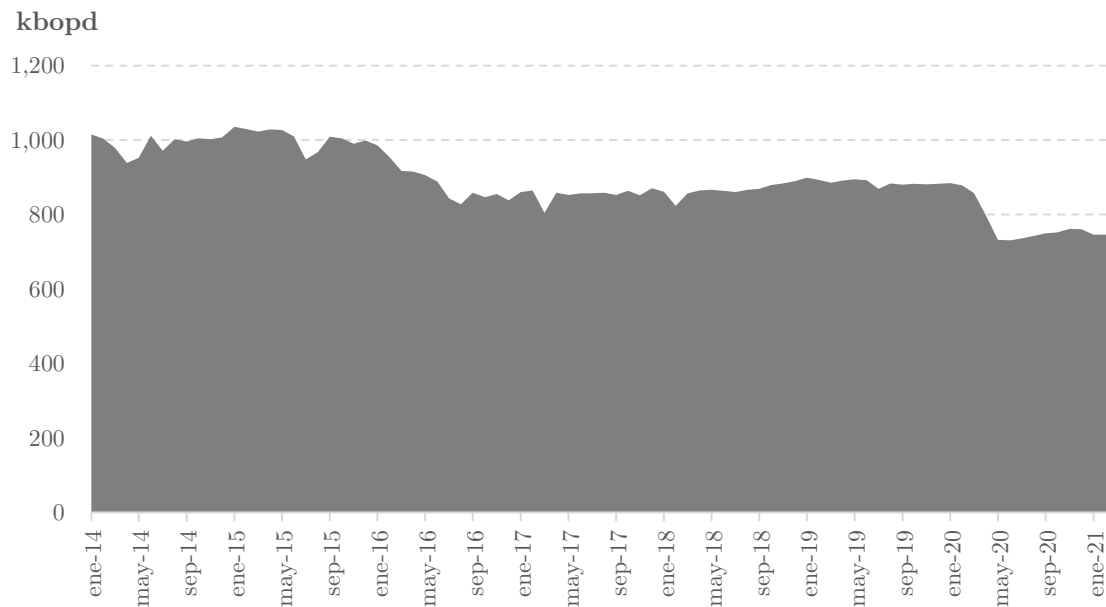


Nota. Gráfico del autor con información de la EIA – U. S. Energy Information Administration (2021). Spot prices for crude oil and petroleum products. Europe Brent spot price FOB (Dollars per Barrel).

Los ajustes en precio antes descritos han tenido impactos importantes en la producción de crudo en el país. El gráfico 2 presenta la evolución de la producción de crudo en Colombia entre enero de 2014 y marzo de 2021.

Gráfico 2

Producción de crudo en Colombia: miles de barriles día – kbopd (2014-2021)



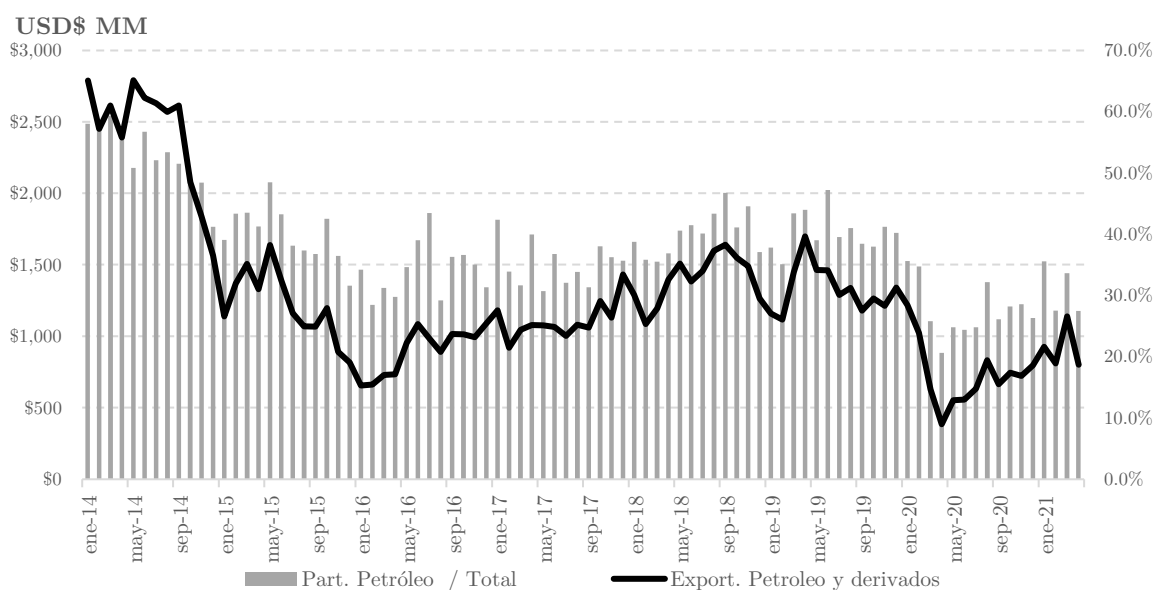
Nota. Gráfico del autor con información de la ANH - Agencia Nacional de Hidrocarburos (2021). Estadísticas de producción. Producción fiscalizada crudo. 2014-2020.

Con las contracciones del precio entre 2014 y 2015, la producción cayó, del promedio de 1.000 KBOPD entre enero de 2014 y febrero de 2016, a niveles de 868 KBOPD entre marzo de 2016 y marzo de 2020. La recién señalada reducción en la demanda mundial llevó a la producción local a niveles promedio de 750 KBOPD entre abril de 2020 y marzo de 2021.

¿Cuán importante es este panorama para el desempeño económico del país? El gráfico 3 muestra la evolución mensual de las exportaciones de petróleo y derivados desde enero de 2014 hasta abril de 2021 en Colombia, y su participación en el total de exportaciones.

Gráfico 3

Evolución de las exportaciones de petróleo en Colombia (2014-2021)



Nota. Gráfico y cálculos del autor, con información del Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE, 2021). Exportaciones. Series Históricas. Colombia, exportaciones de café, carbón, petróleo y sus derivados, ferroníquel y no tradicionales.

Desde mediados de 2014 hasta inicios de 2016 dichas exportaciones presentan una importante reducción, llegando a participaciones de entre 30% y 40%. Entre

mediados de 2016 hasta finales de 2019 se pudo apreciar una recuperación en las exportaciones, debido a un entorno de precios internacionales favorable.

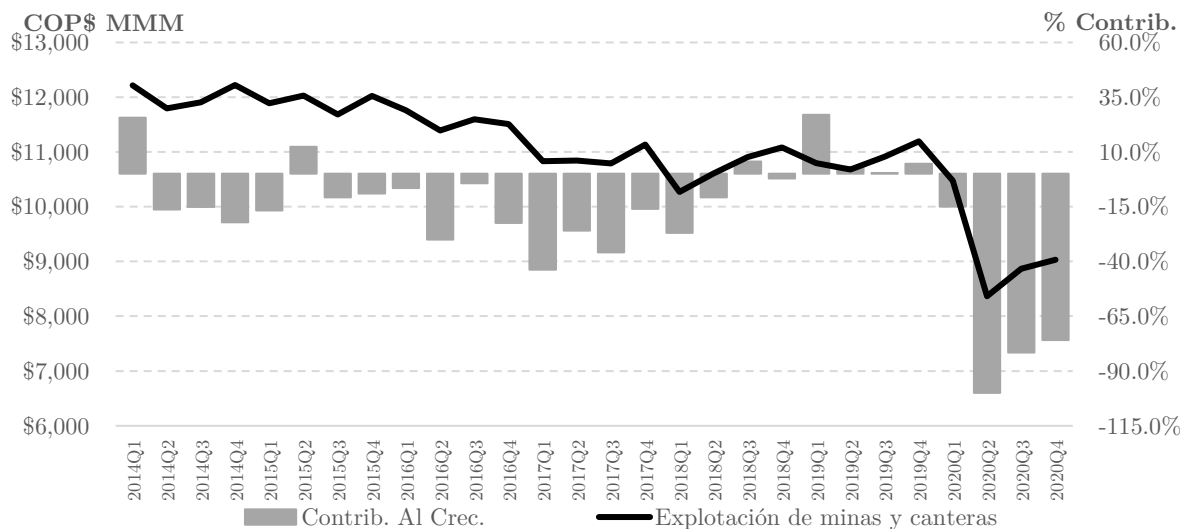
La profunda contracción entre diciembre de 2019 y abril de 2020, de 71,3%, resulta ser la mayor contracción en un lapso similar para el rango temporal descrito. Durante el último año (abril 2020-abril 2021), dicho rubro ha mostrado una leve recuperación, participando en promedio el 27,7%, con un máximo en marzo de 2021, de 33,6%, en parte explicado por la reciente recuperación de los precios del crudo, tal como se verá más adelante.

El gráfico 4 presenta la evolución del producto interno bruto (PIB) de la rama de explotación de minas y canteras (categoría en la cual el Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas, DANE, incluye el sector de hidrocarburos en Colombia) y su contribución al crecimiento⁵ del PIB total entre el primer trimestre de 2014 y el cuarto trimestre de 2020.

⁵ La contribución al crecimiento ($C\Delta PIB_{i,t}$) se define como la participación del PIB del sector i en el período t en el total de PIB: $s_{i,t} = PIB_{i,t} / PIB_t$, multiplicada por el crecimiento interanual del PIB del sector i en el período t : $\Delta PIB_{i,t} = (PIB_{i,t} / PIB_{i,t-4}) - 1$ para periodos trimestrales. Así, se tiene que $C\Delta PIB_{i,t} = s_{i,t} \times \Delta PIB_{i,t}$. (Lora y Prada, 2016).

Gráfico 4

Desempeño del PIB Explotación de minas y canteras y contribución al PIB en Colombia (2014:T1 – 2020:T4)



Nota. Gráfico y cálculos del autor con información tomada de Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas (DANE 2021). Anexos_produccion_constantes_II_2021. Cuentas trimestrales nacionales.

Producto Interno Bruto -PIB- nacional trimestral.

Entre 2014 y el último trimestre de 2019, la contribución de dicho sector pasó a ser negativa (promedio -9,7%), llegando a explicar cerca del 30,1%, en promedio, de la reducción del dinamismo del PIB para 2017. Para los dos últimos trimestres de 2020, el sector mejoró su desempeño y redujo su contribución a las contracciones del total del PIB.

2. REVISIÓN DE LA LITERATURA

En los últimos 60 años, desde la publicación del artículo seminal de Markowitz (1952), y los desarrollos posteriores de Sharpe (1964) y Lintner (1965), se configuró lo que en la actualidad se conoce como el modelo de valoración de activos financieros (CAPM, por sus siglas en inglés *capital asset pricing model*). Hasta la fecha (2021), este modelo se constituye en el marco teórico y práctico base para determinar el desempeño de un activo o un conjunto de activos (portafolios), o para estimar el costo del patrimonio (*equity*) de una compañía.

El modelo CAPM⁶ establece que en la economía se dispone de un conjunto finito de activos, con determinado grado de riesgo (este último entendido como la posibilidad que el resultado obtenido sea diferente al esperado). Para un activo j , su rendimiento entre los períodos t y $t-1$ (denominado $R_{j,t}$) se encuentra asociado a un riesgo propio

⁶ Bodie y otros (2018) desarrollan una excelente discusión del modelo CAPM en sus capítulos 6-10. Para propósitos expositivos y no extender sus implicaciones, se le recomienda al lector consultar dichos capítulos, para un mayor entendimiento de las derivaciones e implicaciones del modelo.

o idiosincrático (denominado σ_j). También es posible prestar y pedir prestado a una tasa libre de riesgo (activo cuyo rendimiento se denomina R_f)⁷, donde $\sigma_f = 0$.

Al agregar los retornos tanto de activos con riesgo asociado como aquel libre de riesgo, se constituye un portafolio que reúne a todos los activos de la economía, cuyo retorno se denomina retorno de mercado ($R_{Mk,t}$). El retorno de mercado se calcula como un promedio ponderado de los retornos de los activos de dicha economía, cuya variabilidad o riesgo de mercado (σ_M) contempla no solo la variabilidad propia de cada activo, sino la interacción (covarianza) entre los distintos activos ($Cov_{ji} = \sigma_{ji}$).

En equilibrio, se deriva la ecuación 1, que permite valorar tanto el precio de un activo en función de la tasa libre de riesgo como del retorno de mercado:

$$R_{j,t} - R_f = \beta_{j,Mk} [R_{Mk,t} - r_f] \quad (1)$$

En la ecuación anterior, el único factor que explica el exceso de retorno del activo es el exceso de retorno del mercado. $\beta_{j,Mk}$ describe la relación entre el mercado y el

⁷ El modelo CAPM supone que el activo “libre riesgo”, que puede entenderse como un bono del Gobierno, se presume que no puede incurrir en situaciones de *default* o impago de sus deudas y es constante en el tiempo, y por ello no presenta riesgo. Más adelante se contempla la flexibilización de este, y otros supuestos.

activo: con $\beta_{j,Mk} > 1$, el activo responde más que proporcionalmente a fluctuaciones en el mercado, y dicho activo se considera “agresivo”. Con $\beta_{j,Mk} < 1$, el activo responde menos que proporcionalmente ante cambios del mercado, y dicho activo se considera “conservador”.

Tanto desde la perspectiva de la regresión lineal como en el marco teórico del CAPM,

$\beta_{j,Mk} = \frac{Cov_{jMk}}{\sigma_{Mk}^2}$, donde σ_{Mk}^2 corresponde a la varianza del retorno del portafolio de

mercado. Al contrastar la ecuación 1 empíricamente, resulta apropiado expresarla de la siguiente forma:

$$R_{j,t} - R_f = \alpha_j + \beta_{j,Mk}[R_{Mk,t} - R_f] + \varepsilon_{j,t} \quad (2)$$

Siendo $E(\circ)$ el operador de expectativas, o valor esperado no condicionado, se tiene que $E(\alpha_j) = E(\varepsilon_{j,t}) = 0$, $E(R_{Mk,t}) = \widetilde{R}_M$ y $Var(\varepsilon_{j,t}) = \sigma_j^2$. \widetilde{R}_{Mk} es una constante, mientras que $Var(\varepsilon_{j,t})$ corresponde a la varianza del retorno del activo j .

De esta manera, y suponiendo que $\varepsilon_{j,t}$ se distribuye como una normal con valor esperado 0 y varianza σ_j^2 , de la ecuación 2 se puede tipificar el proceso generador de datos (DGP, por sus siglas en inglés *data generating process*) del exceso de retorno como una distribución normal con valor esperado y varianza de la forma:

$$R_{j,t} - R_f \sim N(\beta_{j,Mk} [\widetilde{R}_{Mk} - R_f], \sigma_{Mk}^2 + \beta_{j,Mk}^2 \sigma_j^2) \quad (3)$$

De la ecuación 3, se interpreta que el valor esperado del exceso de retorno del activo bajo estudio es $\beta_{j,Mk} [\widetilde{R}_{Mk} - R_f]$, y su varianza $\sigma_{Mk}^2 + \beta_{j,Mk}^2 \sigma_j^2$. La volatilidad (o varianza) del activo puede descomponerse en σ_{Mk}^2 o “riesgo de mercado”, y $\beta_{j,Mk}^2 \sigma_j^2$, que se conoce como “riesgo propio” o “riesgo idiosincrásico” del activo. Otra de las importantes implicaciones de la ecuación 3 es que los parámetros profundos del DGP (media y varianza) son constantes en el tiempo.

Conforme se popularizó la implementación del modelo, la evidencia empírica sugería que el ajuste de la ecuación 2 a los datos reales de activos (como acciones o bonos), e incluso portafolios de inversión, no era el mejor (coeficientes de ajuste inferiores al 30%). A mediados de los 70, se empieza a contemplar la posibilidad de incluir factores adicionales al desempeño del mercado, siendo algunas de las investigaciones las de Merton (1973) y Ross (1976), derivando en los modelos CAPM Inter temporal (ICAPM) y teoría de valoración por arbitraje (APT, por sus siglas en inglés *arbitrage pricing theory*).

Para el caso de Merton (1973), se contempla el concepto de ciclo económico, en el sentido en que las oportunidades de inversión y las decisiones de consumo para los agentes pueden cambiar ya sea en el corto como en el mediano y el largo plazo. No obstante, se puede construir un portafolio que permita ejercer una cobertura, mitigando así los efectos de una contracción de la economía e incluso estabilizando los ingresos en tiempos de bonanza.

Ross (1976), suponiendo una ley de precio único, encuentra la misma relación presentada en la ecuación 2, y contempla la inclusión de factores adicionales. Es importante precisar que, en mercados eficientes, la información se transmite por completo y se procesa de manera inmediata, de tal suerte que bienes o activos que presenten precios diferentes en mercados distintos verán cerrar dicha brecha de precios, pues estos, al ver la posibilidad de *comprar barato y vender caro*, agotarán la posibilidad de arbitraje (obtener una mayor retorno sin incurrir en un riesgo adicional). Desarrollos posteriores permitieron determinar con recurrencia los factores macroeconómicos que tendrían incidencia en el exceso de retorno de los activos; entre otros factores, los más frecuentes son la inflación, la estructura a plazos de las tasas de interés, las tasas de cambio y varias *proxies* de ciclo económico.

Una de las aplicaciones más ampliamente utilizadas en la inclusión de factores adicionales al (exceso de) retorno del mercado es la desarrollada por Fama y French (1993; 1996). Para 25 portafolios de acciones, con frecuencia mensual entre julio de 1963 y diciembre de 1991, construyen dos factores asociados al tamaño de las empresas, así como su razón de valor en libros a su valor de mercado. Esta aproximación expande la ecuación 2 de la forma que se presenta a continuación en la ecuación 4:

$$R_{j,t} - R_f = \alpha_j + \beta_{j,Mk}[R_{Mk,t} - R_f] + \beta_{j,SMB}SMB_t + \beta_{j,HML}HML_t + \varepsilon_{j,t} \quad (4)$$

En la ecuación anterior, *small minus big* (SMB) hace referencia al mayor rendimiento que las empresas pequeñas tienen respecto a las empresas de mayor tamaño, medido este por la capitalización de mercado (*market cap*), que es el valor de cada acción en el mercado multiplicado por el número de acciones en circulación. Así, SMB busca contemplar el efecto tamaño en el rendimiento del activo. Por su parte, *high minus low* (HML) hace referencia a la relación del valor en libros al valor de mercado (B/M).

Firmas o portafolios con una *ratio* B/M elevada se consideran como activos de valor (*value assets*), pues su valor se deriva de activos operativos actualmente; por el contrario, se denominan activos de crecimiento (*growth assets*) aquellas firmas o

portafolios con una baja *ratio* B/M, pues se interpreta que su valor se deriva de flujos de caja futuros. Fama y French (1993; 1996) basados en la evidencia, establecen que los *value assets* presentan históricamente un mejor desempeño que las *growth assets*; entre otras razones, por la certidumbre de sus flujos de caja actuales.

Para activos del sector de *Oil & Gas*, Sanusi y Ahmad (2016), a los factores incluidos en la ecuación 4 le incorporan un cuarto factor denominado *momentum*, para 30 acciones del Reino Unido con frecuencia diaria entre enero/2004 y diciembre/2015. Este cuarto factor se asocia a la mayor probabilidad de que el activo se mueva en la misma dirección en la que lo hizo en el(los) período(s) anterior(es); asimismo, a los rezagos que se presentan en la ecuación 5, de cambios positivos y negativos del precio del crudo en busca de obtener efectos asimétricos. Estos autores encuentran evidencia de efectos asimétricos en favor de cambios positivos versus cambios negativos.

A diferencia de los activos de otros sectores, el precio del *commodity* incrementa los flujos de caja del sector de *Oil & Gas* y permite expandir sus inversiones, mientras que en otros sectores es un insumo, que incrementa sus costos y reduce sus rendimientos futuros. A su vez, Sanusi y Ahmad (2016) encuentran que los factores de *momentum* y HML no contribuyen a explicar dichos retornos.

En los modelos aquí presentados (CAPM, ICAPM, APT y FF), el énfasis de dichos desarrollos se concentró en la predicción del retorno esperado y se mantuvo el supuesto de que la varianza del retorno era constante en el tiempo. A partir del artículo de Engle (1982) y de la generalización de Bollerslev (1986), se introduce el concepto de heterocedasticidad autorregresiva condicionada (modelos ARCH-GARCH)⁸.

Engle (1982), en Reino Unido, y Bollerslev (1986), en Estados Unidos, evidenciaron que en series como la inflación se presentaban tanto episodios de “tranquilidad” como de “turbulencia”, de tal manera que los hechos estilizados señalaban que no es apropiado el supuesto de varianza condicionada constante (esta condición se establecía dada la información disponible en el momento t).

Dichos modelos se concentran en la varianza de la variable de interés (en este caso el retorno de un activo). Para la ecuación 4, interpretando a $\varepsilon_{j,t}$ como una innovación o perturbación al exceso de retorno, el cual se puede modelar de la forma $\varepsilon_{j,t} = \nu_t \sqrt{h_{j,t}}$ con $\varepsilon_{j,t} \sim N(0, h_{j,t})$. Se entiende a $h_{j,t}$ como la varianza condicionada de

⁸ Enders (2015) en el capítulo 3 de su libro *Applied Econometric Time Series* hace un compendio práctico de los modelos ARCH-GARCH. Andersen y otros (2009), y en especial Francq y Zakoian (2019), hacen una presentación con mayor enfoque teórico para modelos univariados y multivariados.

$\varepsilon_{j,t}$ a la información disponible en $t-1$. Siendo $\{\nu_t\}$ un proceso de ruido blanco, no correlacionado con $h_{j,t}$ se tiene que, tal como se expresa en la ecuación 5:

$$E(\nu_t) = 0, \text{Var}(\nu_t) = \sigma_\nu^2 = 1 \text{ y } \text{Cov}(\nu_t, h_{j,t}) = 0 \quad (5)$$

De esta manera se tiene que, tal como se expresa en la ecuación 6, la expectativa condicionada del cuadrado de $\varepsilon_{j,t}$ es:

$$E_{t-1}(\varepsilon_{j,t}^2) = h_{j,t} \quad (6)$$

Con $h_{j,t}$ siguiendo un proceso autorregresivo de la forma presentada en la ecuación 7:

$$h_{j,t} = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{j,t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{j,t-i} \quad (7)$$

La ecuación 7 se conoce en la literatura de series de tiempo como GARCH (p, q), por el número de rezagos de la varianza y de la innovación cuadrática necesarios para tipificar la volatilidad de la serie de interés. Para que la varianza condicionada esté acotada superiormente (esto es que la varianza no crezca de manera indefinida), se debe cumplir con lo planteado en la ecuación 8:

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1 \quad (8)$$

Otro aspecto explorado en artículos como los de Braun y otros (1995) y Glosten y otros (1993), este último conocido como modelo GJR, contemplan en (5) la inclusión de efectos asimétricos en la volatilidad:

$$h_{j,t} = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{j,t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{j,t-i} + \sum_{i=1}^p d_i h_{j,t-i} (I_{\varepsilon_{j,t} > 0}) \quad (9)$$

En 9, para el modelo GJR con $p = 1$, se espera que d_1 sea negativo: innovaciones favorables ($I_{\varepsilon_{j,t}} = 1$ si $\varepsilon_{j,t} > 0$, y 0 de lo contrario) a una mayor rentabilidad reducirían la incertidumbre, y choques adversos incrementarían en promedio la volatilidad de los retornos.⁹

Los hechos estilizados señalan que los retornos de los activos (entre ellos las acciones) no se ajustan a la distribución normal. En resumen, estas series suelen tener mayor concentración de datos en las colas, y pueden ocurrir con mayor frecuencia pérdidas que ganancias, o viceversa, lo cual se asocia a la asimetría de la distribución (la distribución normal es simétrica) o a una mayor ocurrencia de datos extremos con respecto a la normal (colas más “gordas” que la distribución de referencia; esta propiedad de la distribución se conoce como exceso de curtosis).

⁹ Ederington y Guan (2010) presentan un ejercicio aplicado al mercado de acciones en Estados Unidos.

Bollerslev (1987) y Nelson (1991) estudian el ajuste de los modelos ARCH-GARCH con funciones de distribución t-Student estandarizadas y la denominada distribución generalizada de error (GED, por sus siglas en inglés *generalized error distribution*), y evidencian que este tipo de distribuciones presentan un mejor ajuste con respecto a la distribución normal. Yaya y otros (2014) y Diongue y otros (2010) así lo exponen en términos de consistencia en estimación de parámetros, captura en la estimación de valores extremos y menor error de pronóstico. La función de densidad de la distribución t-Student estandarizada para el error $\varepsilon_{j,t}$ es de la forma presentada en la ecuación 10:

$$f(\varepsilon_{j,t}) = \Gamma\left(\frac{\tau+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} [(\tau-2)h_{j,t}]^{-0,5} \left[1 + \frac{\varepsilon_{j,t}^2}{h_{j,t}((\tau-2))}\right]^{-\left(\frac{\tau+1}{2}\right)} \quad (10)$$

En la ecuación 10 $\tau > 2$ es un parámetro de grados de libertad, y $\Gamma(\circ)$ es la distribución gamma¹⁰. τ puede referirse al grado de Kurtosis excesiva versus una distribución normal. Así, para estimaciones con $3 < \tau < 10$, la distribución t-Student junto con el modelo GARCH explican en gran medida el mencionado exceso de Kurtosis en los retornos. Para el caso de la función de distribución GED, según la ecuación 11, se tiene que:

¹⁰ Para la distribución, gamma se tiene como función de densidad: $\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} \exp(-t) dt$

$$f(\varepsilon_{j,t}) = \frac{v2^{-(1+\frac{1}{v})}}{\sqrt{2^{-(\frac{2}{v})}\Gamma(\frac{1}{v})/\Gamma(\frac{3}{v})}\Gamma(\frac{1}{v})} \exp \left[-0,5 \left| \frac{\varepsilon_{j,t}}{\sqrt{2^{-(\frac{2}{v})}\Gamma(\frac{1}{v})/\Gamma(\frac{3}{v})}} \right|^v \right] \quad (11)$$

En 11, se tiene la distribución normal como caso especial con $v = 2$. Distribuciones con colas más gordas que la normal presentan en $1 \leq v < 2$.

Puesto que la valoración de los portafolios depende de la interacción (covarianza) de los componentes de este, y las posiciones de cobertura están vinculadas a las relaciones entre las distintas variables y el activo que se va a cubrir, resulta natural la extensión multivariada de los modelos ARCH-GARCH (MGARCH). Bollerslev y otros (1988) y Engle y Kroner (1995) desarrollan los primeros modelos multivariados, conocidos como VEC-GARCH y BEKK-GARCH, respectivamente.

Por simplicidad de exposición, en la ecuación 12 se muestra el modelo de Bollerslev y otros (1988) para dos variables¹¹:

¹¹ En sentido estricto, la forma apropiada de representar las varianzas y covarianzas es con una matriz en lugar de un vector, y se hace uso del operador *vech*, un vector columna que dispone los elementos de una matriz. En este caso, se aprovecha de la simetría de la matriz para facilitar la exposición. A partir de esta sección, a menos que se indique lo contrario, letras minúsculas en negrita representan vectores (\mathbf{x}), mientras que letras mayúsculas en negrita representan matrices (\mathbf{X}). El capítulo “Multivariate GARCH”, de Silvennoinen & Teräsvirta, citados en Andersen y otros (2009), ofrece un buen compendio de este tipo de modelos multivariados.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix}}_{\text{vech}(\mathbf{H}_t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ c_{30} \end{bmatrix}}_c + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}}_{\text{vech}(\varepsilon_t\varepsilon_t')} \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}}_{\text{vech}(\mathbf{H}_{t-1})} \quad (12)
\end{aligned}$$

En 12 las varianzas de las dos variables ($h_{11,t}$ y $h_{22,t}$) dependen de su propio pasado, del pasado de la covarianza entre dichas variables ($h_{12,t-1}$) y de la historia de las innovaciones cuadráticas propias y cruzada. Si bien este tipo de representaciones ofrece una amplia flexibilidad para la interacción entre las distintas variables, implica también dos aspectos que se deben considerar: (1) que la matriz de varianzas y covarianzas sea invertible (semi-definida positiva) en cada momento del tiempo, y (2) el número de coeficientes por estimar crece con el número de variables por considerar (maldición de la dimensionalidad¹²).

Desarrollos posteriores restringieron el grado de interacción entre las variables, permitiendo, a su vez, hacer énfasis en las covarianzas (o correlaciones), entre las variables de interés. Se introducen los modelos de correlación contante condicionada (CCC), de Bollerslev (1990) y correlación dinámica condicionada (DCC), de Engle

¹² Para evitar la no invertibilidad de \mathbf{H}_t , Engle y Kroner (1995) desarrollan para la ecuación 12 una forma cuadrática con una interpretación compleja de los parámetros a obtener.

(2002). De este último tipo de modelos, se modela \mathbf{H}_t , para el caso de N variables (ecuación 13):

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t \quad (13)$$

Donde $\mathbf{G}_t = \text{diag}(h_{1,t}^{0.5}, h_{2,t}^{0.5}, \dots, h_{N,t}^{0.5})$ y \mathbf{P}_t es la matriz de covarianzas que cambia en cada momento del tiempo. En este tipo de modelos puede contrastarse si un subconjunto o la totalidad de coeficientes (betas) de la ecuación 4 son constantes o variables en el tiempo. Engle (2016) usando el modelo DCC permite la estimación de coeficientes variables de la forma que se presenta en la ecuación 14:

$$\boldsymbol{\varkappa}_t = \mathbf{H}_{xx,t}^{-1} \mathbf{h}_{xy,t} \quad (14)$$

Siendo $\mathbf{H}_{xx,t}$ y $\mathbf{h}_{xy,t}$ particiones de \mathbf{H}_t , que representa una matriz ($\mathbf{H}_{xx,t}$) con la estructura de varianzas y covarianzas entre los regresores (factores Fama y French + precio del crudo), y un vector $\mathbf{h}_{xy,t}$, que contiene para cada momento del tiempo las covarianzas de la variable dependiente con los regresores incluidos en la ecuación que define la media; en este caso, los excesos de retornos de las acciones.

3. METODOLOGÍA

Se considera un proceso estocástico para un vector \mathbf{r}_t de dimensiones $N \times 1$. Para el caso que compete al presente documento \mathbf{r}_t contiene (excesos de) retornos de variables asociados al mercado, factores asociados al tamaño de mercado (SMB), la *ratio Book to Market value* (HML), de Fama y French (1993), rentabilidad del precio del crudo y retornos de acciones del mercado del sector del *Oil & Gas* que operan en Colombia. Por tanto, se tiene un sistema de $N = 5$ variables para las seis acciones, y dos portafolios que se describen en la sección 5. El vector columna $\mathbf{r}_t = [\bar{R}_{Mk,t}, \bar{R}_{SMB,t}, \bar{R}_{HML,t}, \bar{R}_{Brent,t}, \bar{R}_{Stock,t}]'$ donde $\bar{R}_{x,t}$ es el exceso de retorno del respectivo factor: $\bar{R}_{x,t} = R_{x,t} - R_{f,t} - \mu_{x,t}$, y $\mu_{x,t}$ es la media muestral del respectivo factor, y puede modelarse de la forma presentada en la ecuación 15:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (15)$$

En la ecuación 15, $\boldsymbol{\mu}_t$ hace referencia al valor esperado del vector de retornos, y $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ hace referencia al componente de error idiosincrático del vector de retornos (componente que hace desviar a los retornos de su media esperada). Para modelar las medias, se particiona el vector \mathbf{r}_t de la siguiente manera, sea $\mathbf{r}_{fact,t} = [\bar{R}_{Mk,t}, \bar{R}_{SMB,t}, \bar{R}_{HML,t}, \bar{R}_{Brent,t}]'$ un vector columna de tamaño (4×1) , que contiene

los excesos de retorno de factores de mercado, SMB, HML y Brent. Para estos factores se implementa un vector autorregresivo (VAR, por sus siglas en inglés *vector autoregressive*) de la forma que se presenta en la ecuación 16:

$$\mathbf{r}_{fact,t} = \mathbf{u} + \sum_{j=1}^p \mathbf{M}_j \mathbf{r}_{fact,t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t} \quad (16)$$

En la ecuación 16, la media del vector de factores se representa como una función de un vector \mathbf{u} (4 x 1), de constantes p matrices \mathbf{M}_j cada una de tamaño (4 x 4), que contienen los coeficientes que relacionan a los factores en el momento t con sus propios p rezagos. Es así como los excesos de retorno de los factores se expresan en función de los rezagos tanto de sí mismos como de los rezagos de los demás factores. $\boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t}$ es un vector (4 x 1), de errores asociado a los factores.

Awartani y otros (2018) y Cátedra (2017) usan modelos VAR para incorporar las interrelaciones entre los factores de mercado SMB y HML. Huang y Miao (2016) y Sadorsky (2012) incluyen en este tipo de estructuras la interacción entre el precio del crudo y las fluctuaciones en los diferentes mercados accionarios. La matriz de varianzas y covarianzas de $\boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t}$ es de la forma presentada en la ecuación 17:

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t})'] = \begin{cases} \mathbf{M}, \forall t = \tau \\ \mathbf{0}, \forall t \neq \tau \end{cases} \quad (17)$$

En la ecuación 17 se establece que los errores presentan solo correlación contemporánea entre sí, mas no presentan ni autocorrelación serial (para un elemento k de $\boldsymbol{\varepsilon}_{fact,t}, \varepsilon_{(fact,k),t}$ se tiene que $E(\varepsilon_{(fact,k),t}, \varepsilon_{(fact,k),t-s})=0, \forall s = 1, 2, \dots$), ni correlación serial con errores de otras variables ($E(\varepsilon_{(fact,k),t}, \varepsilon_{(fact,l),t-s}) = 0, \forall s = 1, 2, \dots; \forall k \neq l$). Si bien la literatura recomienda usar criterios en la ecuación 16 para escoger el sistema más parsimonioso posible: el menor número de parámetros para estimar, tipo *Akaike Information Criterion* (AIC) o *Schwartz Information Criterion* (SIC), para este caso, se escoge el número mínimo de rezagos en el cual no se obtiene correlación serial multivariada ($p = 2$). Los resultados de la ecuación 16 se presentan en el anexo 1. Para el vector de errores total se tiene en la ecuación 18:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\nu}_t \mathbf{H}_t^{0.5} \quad (18)$$

La función de distribución de $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ en la ecuación 18 depende a su vez del vector de ruido blanco $\boldsymbol{\nu}_t$ que puede seguir, ya sea una distribución t-Student, o GED con matriz de varianzas y covarianzas \mathbf{I} , con unos en la diagonal, y ceros en los demás elementos (matriz idéntica). La matriz de varianzas y covarianzas de \boldsymbol{r}_t , es de la forma que se presenta en el sistema de ecuaciones 19-21:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_t = \mathbf{C} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{G}_{t-1} + \mathbf{D}\mathbf{G}_{t-1}\mathbf{I}\mathbf{I}_{t-1} + \mathbf{F}\mathbf{Z}_t \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_t = \bar{\mathbf{P}}(1 - \rho - \psi) + \rho\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} + \psi\mathbf{P}_{t-1} \quad (21)$$

En la ecuación 19 se descompone la matriz \mathbf{H}_t en una matriz \mathbf{G}_t , que es diagonal (contiene las desviaciones estándar dinámicas del sistema en los elementos de la diagonal, y ceros en las demás posiciones), y la matriz \mathbf{P}_t , que contiene las covarianzas de las variables consideradas. En la ecuación 20, las matrices \mathbf{C} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{F} son matrices de orden (5 x 5), con coeficientes en la diagonal, y ceros en las demás posiciones que vayan a ser estimadas, y que describen la dinámica de la varianza para cada serie contemplada en el sistema.

Para el k -ésimo elemento de la ecuación 20, $c_k/(1 - a_k - b_k)$ es la estimación de la varianza de largo plazo, que suele establecerse como la varianza muestral. $a_k + b_k$ establece el grado de persistencia de la varianza, y para que esta sea acotada, dicha suma debe ser estrictamente menor a 1: a mayor valor de persistencia, más tiempo tardarán en diluirse los efectos de perturbaciones en la varianza de cada serie. Cada varianza en el sistema tiene un grado de persistencia diferente (los elementos en las diagonales de \mathbf{A} y \mathbf{B} son distintos para cada variable en el sistema). La matriz \mathbf{D} , de tamaño (5 x 5), con elementos en la diagonal, y ceros en las demás posiciones, que captura los efectos asimétricos de la varianza, siendo la matriz $\mathbf{I}\mathbf{I}_{t-1}$ una matriz

con unos en aquellos períodos donde $\varepsilon_{k,t-1} < 0$ y ceros de lo contrario.¹³ De esta manera, la significancia de los coeficientes de \mathbf{D} soporta la evidencia que, ante el surgimiento de noticias negativas asociadas a un factor, la volatilidad de dicho factor aumenta. La matriz \mathbf{F} contempla el efecto que variables exógenas a las varianzas puedan tener sobre ellas; pueden incluir variables *dummy* u otro tipo de variables que contribuyan a explicar las volatilidades.

Referente al proceso de las covarianzas, en la ecuación 21, $\bar{\mathbf{P}}$ es la matriz de covarianzas muestrales, mientras que ρ y ψ son coeficientes escalares (comunes a las covarianzas de todas las series del sistema) que establecen el grado de persistencia de las covarianzas. Así, para valores de $\rho + \psi$ cercanos a 0,90, los choques transitorios en las covarianzas perduran en el tiempo. De la ecuación 21, pueden estimarse correlaciones dinámicas entre las distintas variables de la forma que se presenta en la ecuación 22:

$$\delta_{kl,t} = \frac{p_{kl,t}}{g_{k,t}^{0.5} g_{l,t}^{0.5}} \quad (22)$$

¹³ Por el tipo de GARCH multivariado que se ha escogido para este documento, no se contemplan asimetrías de la forma: $1 \text{ si } \varepsilon_{k,t-1} \wedge \varepsilon_{l,t-1} < 0 ; \forall k \neq l$.

En la ecuación 22, $\delta_{kl,t}$ es el coeficiente de correlación dinámica entre las variables k y l , $p_{kl,t}$ es la covarianza variable en el tiempo entre dichas variables, $g_{k,t}^{0.5}$ es la desviación estándar de la variable k , y $g_{l,t}^{0.5}$ es la desviación estándar de la variable l . A partir de Engle (2016), desde la matriz \mathbf{H}_t se pueden construir coeficientes variables para la media de la forma:

$$\boldsymbol{\nu}_t = \mathbf{H}_{fact,t}^{-1} \mathbf{h}_{(fact,Stock),t} \quad (23)$$

En la ecuación 23, $\mathbf{H}_{fact,t}^{-1}$ es la inversa de la submatriz (4 x 4), que contiene las covarianzas de los factores. $\mathbf{h}_{(fact,Stock),t}$ es un vector (4 x 1), que contiene las covarianzas de cada factor con la acción incluida en cada uno de los sistemas considerados.

El propósito de este documento no estriba en la inclusión de coeficientes variables en 16. Se propone así la inclusión de componentes variables en el tiempo para los coeficientes del modelo Fama y French (1993; 1996) + precio del crudo de la forma (ecuación 24):

$$\begin{aligned} \bar{R}_{j,t} = & \alpha_j + \underbrace{(\theta_{Mk} + \Phi_{Mk}\{\boldsymbol{\nu}_{(Mk,j),t}\})}_{\beta_{(Mk,j),t}} \bar{R}_{Mk,t} + \underbrace{(\theta_{SMB} + \Phi_{SMB}\{\boldsymbol{\nu}_{(SMB,j),t}\})}_{\beta_{(SMB,j),t}} \bar{R}_{SMB,t} + \\ & \underbrace{(\theta_{HML} + \Phi_{HML}\{\boldsymbol{\nu}_{(HML,j),t}\})}_{\beta_{(HML,j),t}} \bar{R}_{HML,t} + \underbrace{(\theta_{Brent} + \Phi_{Brent}\{\boldsymbol{\nu}_{(Brent,j),t}\})}_{\beta_{(Brent,j),t}} \bar{R}_{Brent,t} + \varepsilon_{j,t} \end{aligned} \quad (24)$$

siendo j una acción del sector de *Oil & Gas* con operación en Colombia (las acciones por analizar se reseñan en la siguiente sección, para un total de seis acciones y dos portafolios). En la ecuación 24, para cada beta se incluye un componente fijo (θ_i) que puede ser estimado de forma convencional (mínimos cuadrados ordinarios) y un componente variable ($\Phi_{(i,j)}\mathcal{N}_{(i,j),t}$) para $i = \text{Mk, SMB, HML, Brent}$. De la ecuación 19 se tiene que:

$$\beta_{(i,j),t} = \theta_{(i,j)} + \Phi_{(i,j)}\mathcal{N}_{(i,j),t} \quad (25)$$

El conjunto de parámetros $\Theta = [\mathbf{u}, \mathbf{M}, \alpha, \beta_t, \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \rho, \psi, \nu]'$ (o τ para este último parámetro de grados de libertad de la distribución t-Student y $\beta_t = (\boldsymbol{\theta} + \Phi\mathcal{N}_t)$) de cada uno de los sistemas por estimar (determinado por las ecuaciones 11, 13, 15, 16 17, 19 y 20) es aquel que maximiza el logaritmo de la función de verosimilitud $L(\Theta)$, para la distribución t-Student, con T observaciones, y haciendo uso de la ecuación 19:

$$L(\Theta) = T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\tau + 1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \pi (\tau - 2) \right\} \\ - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln |\mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t| + (\tau + 1) \ln \left\{ 1 + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t'}{(\tau - 2)} [\mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t]^{-1} \right\} \right] \quad (26)$$

donde \ln es el logaritmo natural, $\Gamma(\circ)$ es la distribución gamma y $|\circ|$ es el determinante de una matriz.

Para la distribución GED, se tiene que:

$$L(\Theta) = T \left\{ \ln \left(\frac{v}{\lambda_v} \right) - \left(1 + \frac{1}{v} \right) \ln(2) - \ln \Gamma \left(\frac{1}{v} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln |\mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t| + [\mathbf{G}_t \mathbf{P}_t \mathbf{G}_t]^{-v} \left| \frac{\varepsilon_t}{\lambda_v} \right|^v \right\} \right\} \quad (27)$$

Las estimaciones se ejecutan a través del principio de estimación de cuasi-máxima verosimilitud (QMLE, por sus siglas en inglés *quasi-maximum likelihood estimators*). Este principio parte del supuesto del desconocimiento de la verdadera distribución generadora de datos, con lo cual existe un Θ con el cual se maximiza la probabilidad de que la densidad estimada se aproxime a la verdadera densidad.¹⁴

Puesto que las acciones y portafolios acá estudiados no tienen incidencia en los factores explicativos, inicialmente se estima el VAR para el vector \mathbf{r}_t^{fact} , tomando esta representación como la media; luego se procede a estimar las matrices de

¹⁴ Para el lector interesado, Greene (2018) en el capítulo 14 de su libro *Econometric Analysis* discute el método de estimación de verosimilitud máxima (MLE, por sus siglas en inglés *method of maximum likelihood*) y especialmente en la sección 14.11 discute ampliamente el método de QMLE.

varianzas y covarianzas condicionadas para los factores (\mathbf{G}_t^{fact} y \mathbf{P}_t^{fact}); una vez estimadas las varianzas y covarianzas dinámicas entre los factores, se imponen como restricción en cada sistema (incluyendo en cada uno el exceso de retorno de la acción respectiva), de tal manera que \mathbf{G}_t^{fact} y \mathbf{P}_t^{fact} son las mismas para uno de los ocho sistemas estimados.

Para contrastar la relevancia de los componentes variables en los betas, sea $\beta_t^R = \theta$; es decir, establecer una restricción que estriba en la no significancia de los componentes variables en los betas ($\Phi = \mathbf{0}$). De esta manera, se establece una estimación sin restricciones (Θ_{UR}), que incluye todos los parámetros de la ecuación 26, y otra, imponiendo la restricción β_t^R (Θ_R). Se obtienen así los logaritmos de verosimilitud sin restringir y restringidos ($L(\Theta_{UR})$ y $L(\Theta_R)$), con los cuales se implementa la prueba de razones de verosimilitud (LR, por sus siglas en inglés *likelihood ratio*): $LR = -2T[L(\Theta_{UR}) - L(\Theta_R)] \sim \chi_2(4)$. Dicha prueba sigue una distribución chi-cuadrada con 4 grados de libertad. Valores bajos del LR soportan la consistencia de $L(\Theta_{UR})$ con los datos, favoreciendo la nula, y valores elevados del LR soportan el ajuste del modelo restringido con los datos.

Para establecer la mejor precisión de las distribuciones al marco Fama y French (1993; 1996) expandido con el precio del crudo, ya sea de la t-Student o la GED, se toma el error de ajuste en la ecuación 24 ($\varepsilon_{j,t}$), y con base en este se mide la raíz del error cuadrático medio para cada acción (RMSE, por sus siglas en inglés *root-mean-square error*) para las dos distribuciones, mostrando el mejor ajuste aquel con el

valor más bajo de este indicador: $RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\bar{R}_{j,t} - \varepsilon_{j,t})^2}$.

4. ANÁLISIS DE DATOS

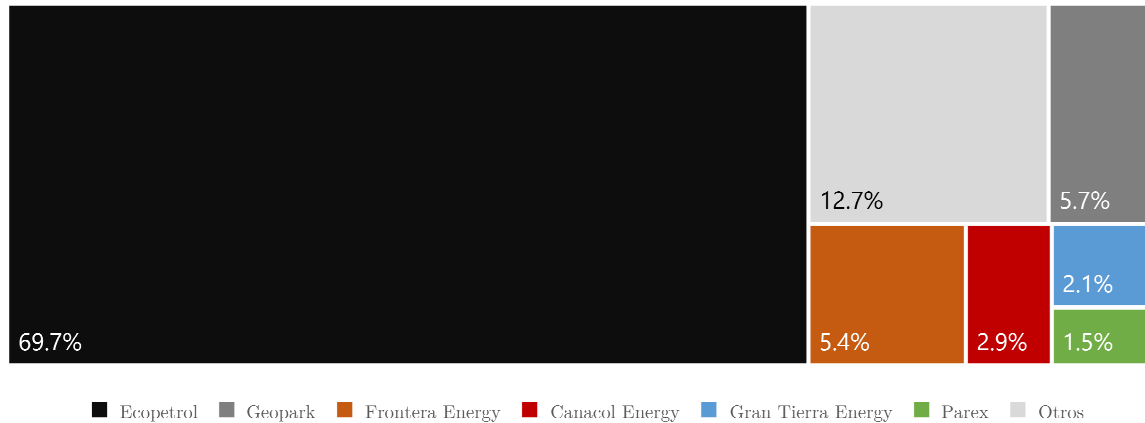
Se analiza el desempeño de los excesos de retorno de seis acciones correspondientes a empresas del sector del *Oil & Gas* que cotizan en mercados financieros con alto grado de liquidez, y cuya operación en Colombia represente un alto porcentaje de su producción. Las empresas por analizar son: Grupo Ecopetrol (ECP), Geopark (GPRK) y Gran Tierra Energy (GTE), empresas cotizantes en el mercado de Estados Unidos (S&P500), y Parex Resources (PXT), Canacol Energy (CNE) y Frontera Energy Colombia (FEC), con presencia en la Bolsa de Canadá (TSX).

La importancia de las empresas mencionadas se aprecia continuación en el gráfico 5. Para el 2020, las seis firmas analizadas representaban el 87,3% de la producción nacional, de las cuales cerca del 70% son operadas por el Grupo Ecopetrol. Entre Geopark Colombia y Frontera Energy (antes Pacific Rubiales Energy) extraen el 11,1% de los hidrocarburos; Canacol Energy, Gran Tierra Energy y Parex Resources producen el 6,5%. Entre el Grupo Ecopetrol y Canacol Energy se extrajo el 94,3% del gas.¹⁵

¹⁵ Desde 2014, no menos del 96% de la producción de Ecopetrol proviene de Colombia; para Geopark, la producción proveniente de Colombia pasó del 53% en 2014, a 82,7% en 2020; en las demás empresas, Colombia representa el 100% de su producción.

Gráfico 5

Participación de los operadores en la producción de crudo y gas en Colombia, en 2020



Nota. Gráfico del autor con información de la ANH - Agencia Nacional de Hidrocarburos (2021). Estadísticas de producción. Producción fiscalizada de crudo y gas para 2020.

Para las acciones del sector de *Oil & Gas* con operación en Colombia listadas en el mercado accionario de Estados Unidos, se calculan los excesos de retorno de la forma:

$$\bar{R}_{x,t} = 100 * \left[\ln \left(\frac{x_t}{x_{t-1}} \right) - R_{f,t} - \mu_x \right] \quad (28), \quad x = ECP, GPRK, GTE$$

$R_{x,t}$ es el exceso de retorno diario, calculado como la diferencia de logaritmo natural entre el precio de la acción x en el momento t y $t-1$ con frecuencia diaria; μ_x corresponde a la media muestral de los retornos. Se considera como tasa libre de riesgo ($R_{f,t}$) la calculada en French (2021). Para las acciones canadienses, y con el

propósito de que los retornos estén denominados en dólares norteamericanos, el exceso de retorno se calcula de la forma:

$$R_{y,t} = 100 * \left[\ln \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right) - R_{f,t} - Dev_t^{CAN-USD} - \mu_y \right] \quad (29), \quad y = PXT, CNE, FEC$$

$Dev_t^{CAN-USD}$ es la devaluación diaria del dólar canadiense con respecto al dólar norteamericano, calculada como $\ln \left(\frac{(CAN-USD)_t}{(CAN-USD)_{t-1}} \right)$; μ_y corresponde a la media muestral de los retornos.

Se toma información con frecuencia diaria desde el 7 de febrero de 2014 (fecha histórica a partir de la cual todas las acciones cotizaban en bolsa), hasta el 30 de abril de 2021. Para el caso de Frontera Energy Colombia (antes Pacific Rubiales Energy) se toma información desde el 2 de noviembre de 2016, fecha en la cual la nueva empresa empezó a cotizar en la bolsa canadiense como nueva empresa.

A partir de los retornos calculados se calculan dos portafolios, calculando un promedio simple de los excesos de retorno para las cinco acciones existentes antes del 2 de noviembre de 2016, y para las seis acciones existentes a partir de la mencionada fecha (denominado portafolio simple); el segundo portafolio (llamado portafolio ponderado) se calcula ponderando cada retorno por el *market cap* de cada acción.

El gráfico 6 muestra a continuación la evolución diaria de los excesos de retorno de cada acción, así como de los portafolios contruidos, para un total de 1823 datos por acción/portafolio (a excepción de FEC, que cuenta con 1140 datos disponibles). Se evidencia en cada uno de los rendimientos clústeres de volatilidad, especialmente en el período 2015-2016, y la mencionada crisis de oferta de crudo más declaración de pandemia entre febrero y mayo de 2020 (a excepción de CNE, principal productor privado de gas en Colombia), momentos en los cuales las especies reportaron contracciones diarias en los precios no inferiores al 20%, y en algunos casos, como los de Geopark, Gran Tierra y Frontera Energy, donde las pérdidas máximas rondaron el 40%.

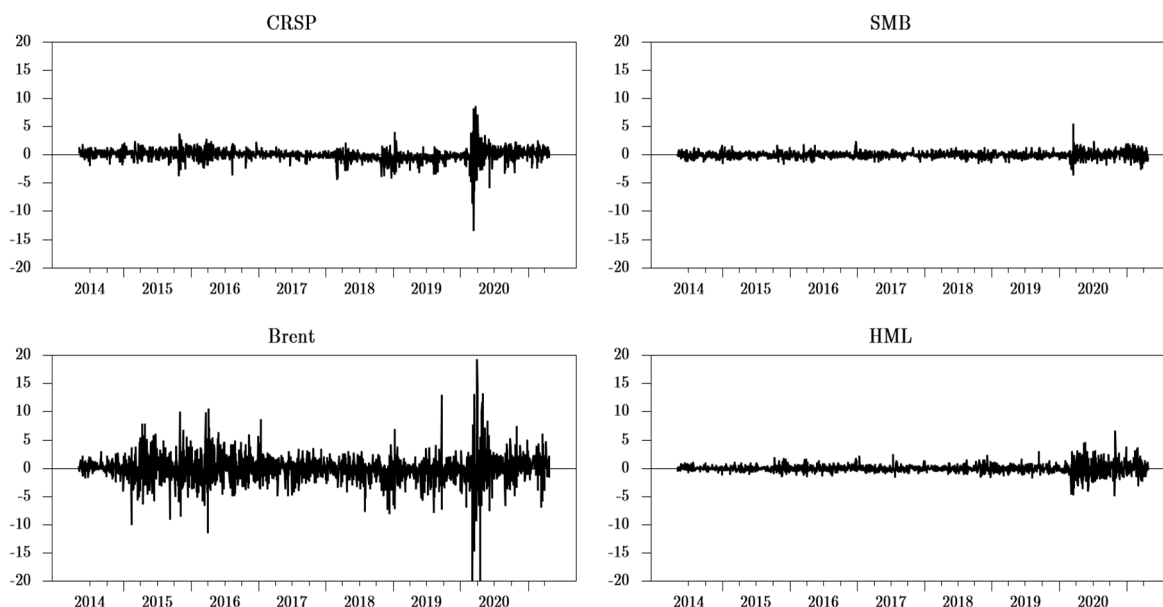
Si bien la hipótesis de no efecto ARCH para 10 rezagos es fuertemente rechazada (lo cual sugiere la existencia de heterocedasticidad condicionada)¹⁶, las acciones de Gran Tierra y Geopark preliminarmente muestran una mayor volatilidad (desviación estándar muestral) que el resto de las acciones o los portafolios construidos, lo cual soporta la inspección visual de los retornos excedentes. Los valores del coeficiente de curtosis (significativamente diferentes de 3, que es el parámetro para la distribución normal) y la prueba Jarque-Bera de normalidad no sustentan la hipótesis nula que establece que los retornos se ajusten a dicha distribución.

El gráfico 7 muestra la evolución del exceso de retorno del índice de *The Center of Research in Security Prices* (CRSP) como *proxy* del retorno de mercado (que incluye en su construcción acciones de indicadores como el S&P500, NYSE y NASDAQ, entre otras), y el exceso de retorno, o variación diaria de precios excedente de la tasa libre de riesgo, del marcador Brent. Para los factores SMB y HML se utilizó la base de datos del sitio web de French (2021).

¹⁶ McLeod y Li (1983) sugieren para esta prueba obtener residuales cuadráticos ($\hat{\varepsilon}_t^2$) de la ecuación 4 y testear la significancia de los coeficientes: $\hat{\varepsilon}_t^2 = a_0 + \sum_{j=1}^p a_j \hat{\varepsilon}_{t-j}^2$. La hipótesis nula para $p=10$ es que $a_0 = a_1 = \dots = a_{10} = 0$. El rechazo de la nula que se testea como una Chi-cuadrada con p grados de libertad, se interpreta como evidencia a favor de existencia de efecto ARCH.

Gráfico 7

Desempeño de factores en el período 2014-2021



Nota: Gráfico y cálculos del autor con información del portal Investing (2021), sección de índices para CRSP. 2014-2021. Para el Brent EIA – U. S. Energy Information Administration (2021). Spot prices for crude oil and petroleum products. Europe Brent spot price FOB (Dollars per Barrel). Para factores SMB y HML French, K. R. (2021). *U.S. Research Returns Data (Downloadable Files)*.

De las cuatro series, más arriba la tabla 1 confirma la inspección visual del gráfico 7, donde las desviaciones estándar para todo el período de análisis del CRSP fue de 1,19; para SMB, de 0,61; y para el factor HML, de 0,82. Para el Brent, la medida típica de volatilidad es de 2,64, entre 2 y 4 veces mayor a la de los demás factores,

con episodios tales como la contracción de oferta de crudo y el surgimiento de la pandemia a principios de 2020.

La tabla 2 presenta la desviación estándar de cada serie para dos períodos, antes y después de 2020; allí se muestra un aumento, en algunos casos sustancial, de dicha medida post-2020.

Tabla 2

Desviación estándar excesos de retorno diarios para distintos subperíodos 2014-2021

Variable	2014:2 / 2020:1	2020:2 / 2021:4
ECP	2,470	4,293
GPRK	3,194	4,901
GTE	3,309	7,759
PXT	2,520	3,635
CNE	2,985	2,301
FEC	2,191	5,986
Port. Simple	1,977	3,874
Port. Pond.	2,336	4,109
CRSP	0,899	2,052
SMB	0,511	0,949
HML	0,531	1,586
Brent	2,190	4,141

El incremento promedio en la volatilidad promedio excede el 90%, y en especies como la de GTE y FEC, así como en el CRSP y HML, el aumento excede el 100%; sin embargo, esta inspección debe tomarse con cautela, puesto que, tal como se estableció en la tabla 1, al evidenciar existencia de efector ARCH, las volatilidades de las series no son constantes en el tiempo, por lo que este análisis preliminar se extiende a la siguiente sección.

5. RESULTADOS

La tabla 3 muestra los resultados del contraste de razón de verosimilitud (LR) de los MGARCH de cada acción, contemplando en el modelo no restringido (UR) los componentes variables para los betas (Φ_k), y en el modelo restringido (R), la exclusión de dichos componentes.

Tabla 3

Validación presencia componentes variables y criterio de selección distribuciones GED y t

criterio	ECP	GPRK	GTE	PXT	CNE	FEC	PTS	PTW
LR _{UR} - LR _R (χ^2 [4])	6,808	15.110	13,928	20,078	21,209	11,215	9,929	9,137
Nivel significancia (χ^2 [4])	0,146	0,005	0,008	0.000	0.000	0,024	0,042	0,058
RMSE - Dist. GED	2.049*	3.237*	3,822	2.393*	3.098*	2,744	1.725*	1.940*
RMSE - Dist. T	2,117	3,241	3.725*	2,407	3.170	2.731*	1,744	1,994

Las primeras dos líneas de la tabla anterior muestran el contraste usando en el proceso generador de datos la distribución GED. Para todas las acciones se halla evidencia de existencia de componentes variables a niveles convencionales de significancia. En el caso de ECP, no se rechaza la nula de componentes variables a un nivel de significancia de 15%. Al inspeccionar la distribución t-Student, no se

rechaza la nula a niveles del 10%, por lo cual se interpreta como evidencia (débil) de presencia de dichos componentes variables para esta especie.

Las dos últimas líneas de la tabla 3 muestran el RMSE intramuestral para cada acción con las distribuciones multivariadas T y GED. En seis de las ocho series de acciones y portafolios analizados se muestra un mejor ajuste de la distribución GED respecto a la T , aunque cabe señalar que las diferencias en el RMSE no son sustanciales. Para propósitos expositivos, a partir de este momento se muestran los resultados para la distribución GED y se remite al lector a inspeccionar los mismos para la distribución t-Student en el anexo 2.

La tabla 4 muestra los resultados del modelo de tres factores de Fama y French (2015), ampliado por el exceso de retorno diario del precio del crudo contemplando la distribución GED. Tan solo en los retornos de Canacol (CNE) y de Frontera Energy (FEC), α es estadísticamente significativo, lo que indica que pueden presentarse errores de especificación para estas acciones. Alternativas de especificación para esas especies pueden ser la inclusión de factores adicionales para esas especies, tales como *momentum* (Jegadeesh & Titman, 1993; Sanusi & Ahmad, 2016), rentabilidad e inversión (Fama & French, 2015), y riesgo país (Damodaran,

2003), solo por mencionar algunos; sin embargo, para las otras cuatro acciones y los dos portafolios, α no es estadísticamente significativo, lo cual validaría la pertinencia del modelo de Fama y French para dichas especies.

Tabla 4

Coefficientes de la media, distribución GED

Variable	ECP	GPRK	GTE	PXT	CNE	FEC	PTS	PTW
α	0,032 (0,040)	-0,030 (0,062)	-0,023 (0,064)	-0,054 (0,047)	-0,148** (0,044)	-0,159** (0,075)	-0,008 (0,030)	0,029 (0,038)
θ_{Mk}	0,778** (0,061)	0,580** (0,101)	0,574** (0,157)	0,436** (0,068)	0,334** (0,065)	0,254* (0,132)	0,562** (0,063)	0,776** (0,057)
Φ_{MK}	-0,658** (0,173)	-0,481** (0,240)	0,122 (0,331)	-0,497** (0,230)	-0,523** (0,170)	-0,435 (0,285)	-0,129 (0,308)	-0,669** (0,165)
θ_{SMB}	-0,095 (0,159)	0,316** (0,131)	0,656** (0,140)	0,383** (0,048)	0,133 (0,142)	0,123 (0,211)	0,212* (0,120)	-0,067 (0,158)
Φ_{SMB}	-0,392 (0,276)	-0,902** (0,255)	-0,896** (0,130)	-1,210** (0,108)	-0,587** (0,217)	-0,583** (0,258)	-0,484* (0,251)	-0,413 (0,264)
θ_{HML}	0,484** (0,143)	0,365** (0,122)	0,611** (0,192)	0,375** (0,117)	0,113* (0,066)	0,455** (0,182)	0,474** (0,085)	0,473** (0,137)
Φ_{HML}	-0,135 (0,266)	-0,666** (0,213)	-0,362 (0,254)	-0,579** (0,191)	-0,934** (0,156)	-0,472 (0,310)	-0,500** (0,235)	-0,218 (0,252)
θ_{Brent}	0,376** (0,050)	0,375** (0,048)	0,492** (0,068)	0,404** (0,039)	0,098** (0,044)	0,396** (0,042)	0,406** (0,027)	0,361** (0,049)
Φ_{Brent}	-0,377* (0,211)	-0,427** (0,202)	-0,495** (0,180)	-0,659** (0,144)	-0,468** (0,165)	-0,875** (0,173)	-0,579** (0,146)	-0,474** (0,166)
$\theta_{Mk}=\Phi_{MK}=0$	186,088**	36,197**	13,879**	41,966**	44,059**	4,947*	79,735**	224,430**
$\theta_{SMB}=\Phi_{SMB}=0$	2,997	15,369**	52,363**	198,950**	7,389**	5,178*	5,026*	3,247
$\theta_{HML}=\Phi_{HML}=0$	11,621**	14,509**	11,739**	21,729**	36,553**	7,752**	34,803**	12,465**
$\theta_{Brent}=\Phi_{Brent}=0$	61,718**	61,444**	52,552**	108,810**	11,997**	130,957**	226,199**	56,925**

Nota. Los errores estándar robustos en heterocedasticidad se presentan entre

paréntesis. * indica que es significativo al 10%, y ** indica que lo es al 5%.

Los componentes fijos asociados a fluctuaciones de mercado (θ_{Mk}) son significativos para todas las acciones a los niveles convencionales. Para las acciones, dicho componente se estima en el rango 0,436-0,778, a excepción de CNE (0,334) y FEC (0,254). Para el efecto “tamaño” (SMB), el componente fijo (θ_{SMB}) es significativo para tres de las seis acciones y para el portafolio simple. Para aquellas donde dicho factor es significativo, el rango de este es 0,212-0,656. Para el caso de ECP y del portafolio ponderado el signo del coeficiente es contraintuitivo, aunque no es significativo a los niveles convencionales. Esta evidencia referente al factor SMB es consistente con hallazgos como los de Foye y otros (2013), en los que para mercados emergentes encuentran no significancia de dicho factor por una mayor tendencia de manipulación contable en dichos mercados, y proponen la inclusión de *proxies* que consideran dicha tendencia, obteniendo mejores resultados que el modelo FF.

En el caso del factor de *ratio* de valor en libros a valor de mercado (θ_{HML}), este es significativo para todas las acciones y portafolios, y oscila en el rango 0,113-0,611.

No sorprende, al igual que en los demás factores, que los coeficientes de ECP y del portafolio ponderado sean similares en magnitud y nivel de significancia, dado que no menos del 85% del *market cap* total de dicho portafolio es representado por las fluctuaciones de la *National Oil Company* (NOC) del país.

Era de esperar que el componente fijo del Brent (θ_{Brent}) fuese significativo para todas las acciones, pues, en la medida en que el precio del *commodity* aumenta, los ingresos de las compañías, al igual que los resultados financieros, se ven positivamente impactados. Este efecto es inverso para otros sectores de la economía, pues típicamente el precio del crudo se interpreta como un costo de operación, con lo cual, frente al aumento de este, los flujos de caja suelen verse afectados a la baja. El rango estimado de este factor para las acciones y los portafolios contemplados es de 0,361-0,492, excluyendo a CNE, cuyo factor es sensiblemente menor; sin embargo, si bien esta empresa deriva sus ingresos del gas, el cual puede entenderse como un sustituto, los precios de ambos *commodities* suelen moverse en la misma dirección (Villar & Joutz, 2006).

El componente variable de los betas de cada factor incluido presenta un signo negativo (Φ_k). Esta evidencia está en línea con Glosten y otros (1993), que establecen dicho mecanismo: la existencia de efectos asimétricos; más concretamente, la forma en que las innovaciones (“noticias”) negativas aumentan la volatilidad de las series, e inciden positivamente en el riesgo percibido por los agentes y generan contracciones en los retornos. Es así como los componentes variables del beta total pueden interpretarse como un mecanismo de cobertura (*Hedge*) ante fluctuaciones de la

volatilidad condicionada (en tiempo y controlada por los demás factores) del respectivo k -ésimo factor.

Para el componente variable del beta de mercado (Φ_{Mk}), no se encontró significancia para las acciones GTE, FEC y ni para el portafolio simple, siendo contraintuitivo el de GTE con signo positivo. El intervalo de este componente está en el intervalo -0,669 a -0,481, siendo la mayor reacción a este factor la del portafolio ponderado (en valor absoluto similar a la de ECP, 0,658). Para el componente variable del beta de SMB (Φ_{SMB}), no se encontró evidencia de significancia para ECP ni para el portafolio ponderado. Entre los factores contemplados en este documento, el rango encontrado para este factor es el más cercano en promedio a 1, ubicándose en el intervalo -1,210 a -0,484. En este caso, la acción de PXT muestra una sobrerreacción a fluctuaciones en la covarianza con este factor.

Para el componente variable de HML (Φ_{HML}), se halló evidencia de significancia en tres de las seis acciones, y en el portafolio de ponderación simple, con valores en el rango -0,934 a -0,500, siendo CNE la acción con mayor reacción a este factor. El componente variable del Brent (Φ_{Brent}) es significativo para todas las especies en el rango -0,875 a -0,377, siendo FEC la acción con mayor reacción ante perturbaciones

en la covarianza variable con el precio al *commodity*. Para contrastar la hipótesis de que el beta variable de un factor sea cero, se implementó una prueba chi-cuadrado con 2 grados de libertad sobre la nula: $\theta_k = \Phi_k = 0$. Los resultados de esta prueba se muestran más arriba, en las últimas cuatro filas de la tabla 4. Para ECP y para el portafolio ponderado, no se rechaza la nula a los niveles convencionales de significancia para el beta del factor SMB.

La tabla 5 presenta los resultados de las estimaciones de los DCC-MGARCH para cada una de las acciones. En general, se encuentra un alto grado de persistencia en las volatilidades, toda vez que para las variables incluidas $A_k + B_k$ nunca es menor a 0,80, siendo la volatilidad del mercado la de menor persistencia, seguida por la de las acciones y del Brent (cercasas a 0,90). Los factores Fama y French (1993; 1996) presentan las mayores persistencias en varianzas, con un promedio de 0,92 para SMB, y alrededor de 0,93 para el factor HML. Si bien la diferencia parece menor, una perturbación transitoria en la varianzas con un nivel de persistencia de 0,8 tardaría en desaparecer en cerca de 30 días, mientras dicha perturbación con persistencias de 0,90 genera en la volatilidad impactos que desaparecen en el doble del tiempo.

Tabla 5

Coeficientes MGARCH, distribución GED

Variable	ECP	GPRK	GTE	PXT	CNE	FEC	PTS	PTW
C _{MK}	0,017** (0,003)	0,016** (0,003)	0,018** (0,003)	0,017** (0,003)	0,019** (0,003)	0,012** (0,003)	0,018** (0,003)	0,017** (0,003)
C _{SMB}	0,004** (0,001)	0,003** (0,001)	0,003** (0,001)	0,003** (0,001)	0,004** (0,001)	0,003** (0,001)	0,004** (0,001)	0,004** (0,001)
C _{HML}	0,001** (0,001)	0,002** (0,001)	0,001** (0,001)	0,001** (0,001)	0,002** (0,001)	0,002** (0,001)	0,001** (0,001)	0,001** (0,001)
C _{Brent}	0,041** (0,009)	0,040** (0,009)	0,040** (0,009)	0,042** (0,009)	0,041** (0,009)	0,062** (0,013)	0,042** (0,01)	0,040** (0,009)
C _{Stock}	0,064** (0,016)	0,206** (0,045)	0,110** (0,022)	0,113** (0,028)	0,022** (0,007)	0,063** (0,017)	0,022** (0,006)	0,038** (0,01)
A _{MK}	0,034** (0,007)	0,036** (0,008)	0,033** (0,007)	0,036** (0,008)	0,044** (0,008)	0,043** (0,01)	0,037** (0,008)	0,033** (0,007)
A _{SMB}	0,018** (0,006)	0,016** (0,005)	0,016** (0,005)	0,017** (0,005)	0,018** (0,006)	0,017** (0,007)	0,018** (0,006)	0,018** (0,006)
A _{HML}	0,020** (0,004)	0,021** (0,004)	0,020** (0,004)	0,019** (0,004)	0,021** (0,004)	0,018** (0,005)	0,020** (0,004)	0,020** (0,004)
A _{Brent}	0,023** (0,006)	0,021** (0,005)	0,024** (0,006)	0,022** (0,005)	0,025** (0,006)	0,005 (0,005)	0,024** (0,006)	0,023** (0,005)
A _{Stock}	0,024** (0,007)	0,026** (0,006)	0,040** (0,006)	0,015** (0,006)	0,010** (0,004)	0,024** (0,005)	0,018** (0,006)	0,024** (0,006)
B _{MK}	0,793** (0,02)	0,791** (0,02)	0,777** (0,021)	0,789** (0,021)	0,780** (0,021)	0,798** (0,024)	0,789** (0,02)	0,793** (0,02)
B _{SMB}	0,914** (0,018)	0,918** (0,017)	0,920** (0,016)	0,919** (0,017)	0,922** (0,017)	0,915** (0,022)	0,915** (0,017)	0,913** (0,018)
B _{HML}	0,931** (0,009)	0,927** (0,01)	0,929** (0,01)	0,933** (0,009)	0,932** (0,009)	0,923** (0,013)	0,933** (0,009)	0,931** (0,01)
B _{Brent}	0,885** (0,013)	0,888** (0,013)	0,883** (0,014)	0,888** (0,013)	0,889** (0,012)	0,895** (0,016)	0,887** (0,013)	0,884** (0,013)
B _{Stock}	0,880** (0,019)	0,842** (0,02)	0,888** (0,011)	0,875** (0,024)	0,939** (0,008)	0,908** (0,014)	0,908** (0,014)	0,900** (0,016)
D _{Mk}	0,071** (0,014)	0,072** (0,015)	0,078** (0,015)	0,069** (0,015)	0,078** (0,016)	0,045** (0,013)	0,077** (0,015)	0,072** (0,015)
D _{SMB}	0,017** (0,008)	0,018** (0,008)	0,016** (0,007)	0,015** (0,008)	0,018** (0,008)	0,017** (0,009)	0,019** (0,008)	0,017** (0,008)
D _{HML}	0,015** (0,007)	0,015** (0,007)	0,014** (0,007)	0,014** (0,007)	0,016** (0,007)	0,016** (0,009)	0,016** (0,007)	0,015** (0,007)
D _{Brent}	0,036** (0,009)	0,038** (0,009)	0,032** (0,008)	0,034** (0,008)	0,040** (0,009)	0,033** (0,008)	0,038** (0,009)	0,035** (0,008)
D _{Stock}	0,016** (0,008)	0,041** (0,011)	-0,016** (0,007)	0,030** (0,01)	0,032** (0,007)	0,001 (0,008)	0,025** (0,009)	0,010 (0,007)
F _{Mk}	0,104* (0,063)	0,102* (0,062)	0,100 (0,063)	0,105 (0,067)	0,115* (0,069)	0,106* (0,06)	0,112* (0,068)	0,103* (0,063)
F _{SMB}	0,009 (0,005)	0,009* (0,005)	0,008* (0,005)	0,010* (0,006)	0,010* (0,006)	0,008 (0,005)	0,010* (0,006)	0,009 (0,006)
F _{HML}	0,022* (0,013)	0,021* (0,013)	0,022* (0,013)	0,022 (0,014)	0,024* (0,014)	0,019 (0,013)	0,024* (0,014)	0,022* (0,013)
F _{Brent}	0,329* (0,178)	0,329* (0,17)	0,347** (0,16)	0,371** (0,167)	0,425** (0,178)	0,433** (0,196)	0,382** (0,181)	0,330* (0,179)
F _{Stock}	0,132 (0,096)	0,158 (0,112)	1,446** (0,514)	0,131 (0,123)	0,051* (0,028)	0,297** (0,125)	0,114** (0,039)	0,110* (0,068)
ρ	0,008** (0,001)	0,009** (0,002)	0,008** (0,001)	0,009** (0,001)	0,011** (0,002)	0,010** (0,002)	0,009** (0,001)	0,008** (0,001)
ψ	0,975** (0,004)	0,969** (0,005)	0,977** (0,003)	0,971** (0,004)	0,971** (0,004)	0,962** (0,008)	0,972** (0,004)	0,977** (0,003)
ν	1,793** (0,052)	1,790** (0,056)	1,828** (0,049)	1,787** (0,05)	1,697** (0,053)	1,869** (0,074)	1,739** (0,053)	1,796** (0,051)

Nota. Los errores estándar robustos en heterocedasticidad se presentan entre

paréntesis. * indica que es significativo al 10%, y ** indica que lo es al 5%.

Los factores de asimetría son significativos estadísticamente para todos los factores y para gran parte de las acciones (a excepción de FEC y el portafolio ponderado), corroborando el mecanismo a través del cual se presenta el hallazgo del efecto *Hedge* para los betas dinámicos. Los mayores grados de asimetría se observan en las volatilidades del mercado, con un rango de 0,069-0,078, seguido del Brent, con un rango de 0,032-0,040. Se incluyó una variable *Dummy* exógena en la ecuación de las varianzas, que toma valor de 1 para el período 23/01/2020-01/04/2020 y 0 para otros períodos.¹⁷ Los coeficientes de dicha *Dummy* (\mathbf{F}) son significativos a los niveles convencionales para las acciones GTE, CNE, FEC y para los dos portafolios.¹⁸

Los coeficientes asociados al grado de persistencia de las covarianzas entre las variables ($\rho + \psi$) están en el orden de 0,98 (cabe recordar que los modelos DCC imponen estos coeficientes para las covarianzas dinámicas de todas las series contempladas en el sistema), con lo cual se evidencia en los co-movimientos de las variables un mayor grado de persistencia que en las varianzas de cada una de estas.¹⁹

El coeficiente que define el grosor de las colas en la distribución GED (ν) se encuentra

¹⁷ Se estimaron GARCH univariados para cada uno de los factores (mercado, SMB, HML y Brent), con el fin de tener una inspección inicial de las volatilidades, marcando este período como el de mayor turbulencia para las variables en mención.

¹⁸ Para las demás acciones, dicha *Dummy* es significativa al 15%.

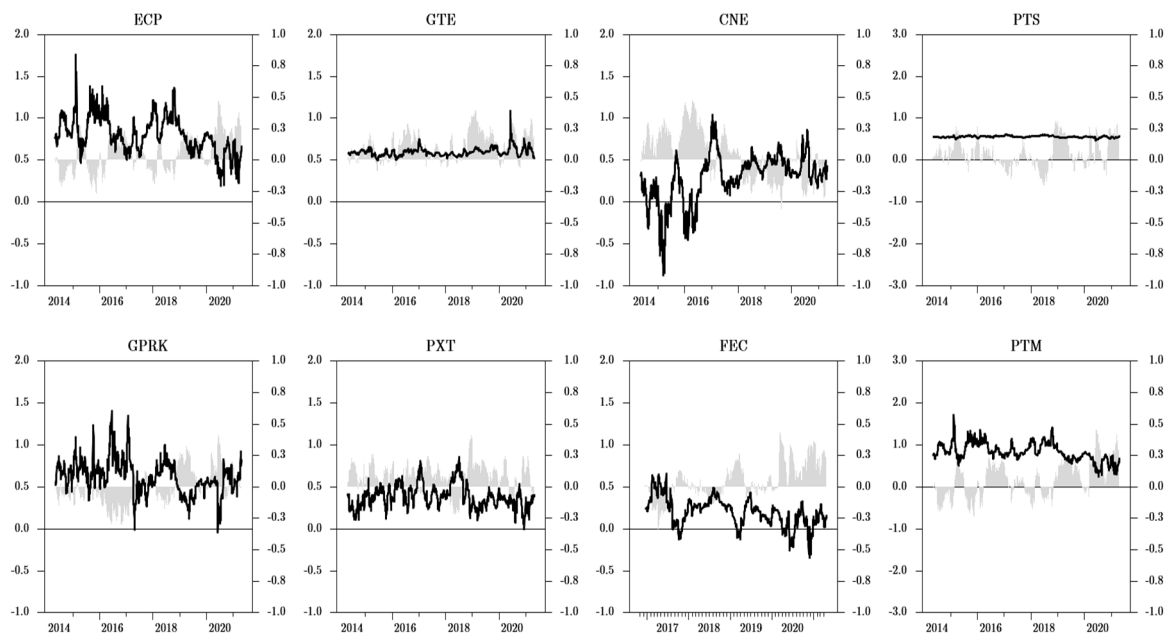
¹⁹ Incluso 180 días después de la perturbación se observan efectos en las covarianzas.

en el rango 1,697-1,828, con lo cual se evidencian colas más gruesas que en la contraparte de la distribución normal. En el anexo 4, gráficos A1-A3, se muestran las desviaciones estándar condicionadas de los factores, así como de las acciones y portafolios. Para los factores, mientras que los retornos del marcador Brent presenta la mayor volatilidad, para las acciones, GTE y GPRK se evidencian elevadas fluctuaciones en este indicador.

En el gráfico 8, los betas totales del mercado ($\beta_{Mk,t} = \theta_{Mk} + \Phi_{Mk} \mathcal{N}_{Mk,t}$) se visualizan en la línea negra (escala izquierda), y las correlaciones dinámicas de la respectiva acción con el indicador de mercado en sombra gris. Para acciones como CNE y FTE, en el gráfico anterior se muestran períodos en los cuales este factor es negativo. Ello coincide con los episodios en los que la correlación con el mercado presentó crecimientos importantes, con lo cual el efecto *Hedge* sobrepasó el componente fijo del factor. En general, desde mediados de 2018 se muestra una reducción en la media del beta, especialmente en acciones como ECP, GPRK y PXT, explicado por el incremento en la correlación de estas especies con el factor de mercado.

Gráfico 8

Betas y correlaciones dinámicas Mercado



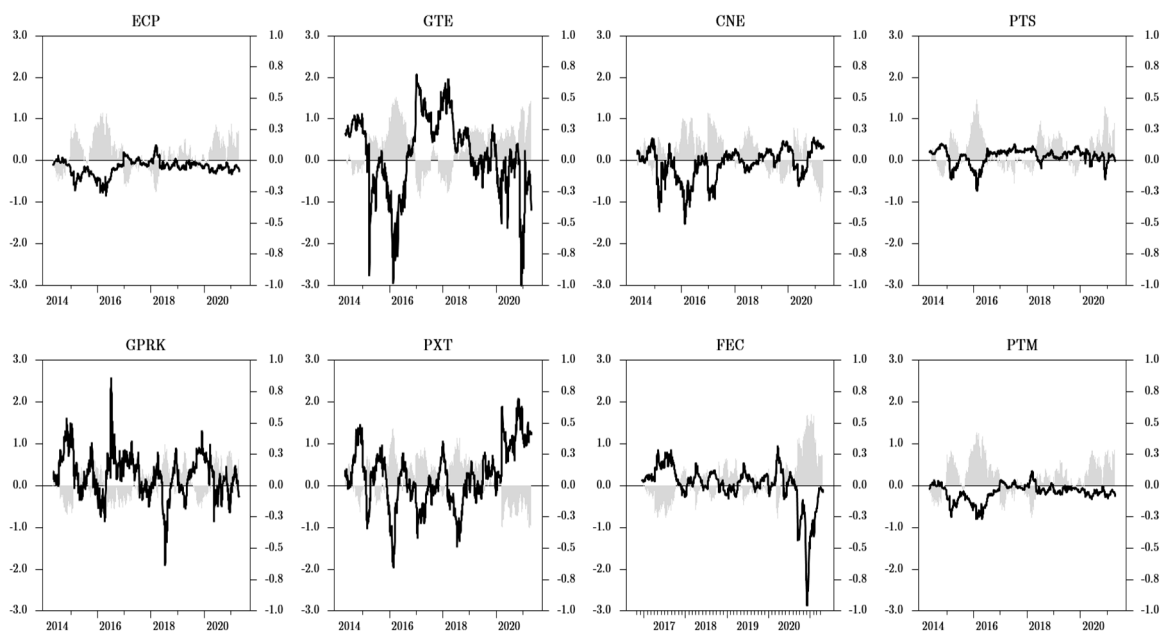
Nota. Eje izquierdo (línea negra) representa betas dinámicos. Eje derecho (sombra gris) representa correlaciones dinámicas. Separador de decimales se indican con punto

El gráfico 9 muestra betas y correlaciones dinámicas para el factor SMB. No sorprende que para ECP y el portafolio ponderado, el beta fluctúe cerca a cero. Para futuras investigaciones, se pueden construir intervalos de confianza a través de simulaciones de Monte Carlo (o *bootstrapping*) para los betas, e inspeccionar su significancia estadística en todos los períodos de análisis. Para las acciones de GPRK, GTE y PXT, este beta es el que muestra mayores oscilaciones. Destacan valores cercanos a -3,0 para GTE y FEC, para finales de 2020. No sorprende este hallazgo,

pues estas empresas de baja capitalización bursátil (ver gráfico A4 en la sección de anexos) tuvieron en dicho período retornos diarios superiores al 15-25% (muy por encima del retorno promedio de acciones con elevada *market cap*). Esto va en línea con la evidencia de Fama y French (1993), y para el caso español, de Medarde (2014).

Gráfico 9

Betas y correlaciones dinámicas SMB

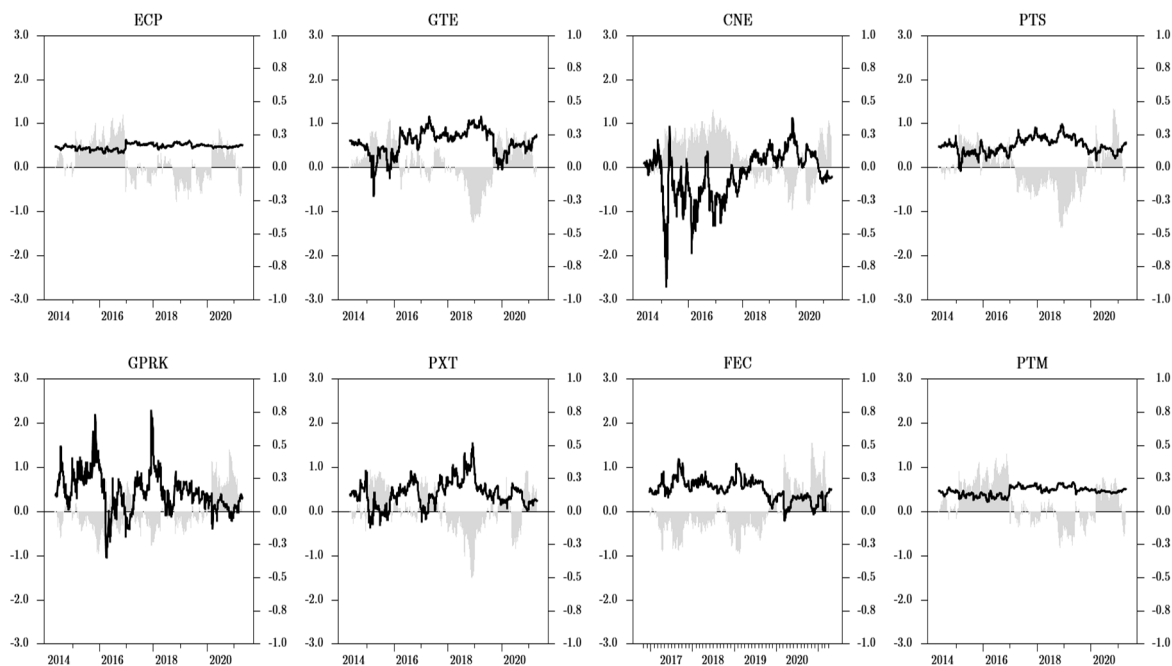


Nota. Eje izquierdo (línea negra) representa betas dinámicos. Eje derecho (sombra gris) representa correlaciones dinámicas. Separador de decimales se indican con punto.

El gráfico 10 expone los betas y correlaciones del factor HML para las acciones/portafolios considerados.

Gráfico 10

Betas y correlaciones dinámicas HML



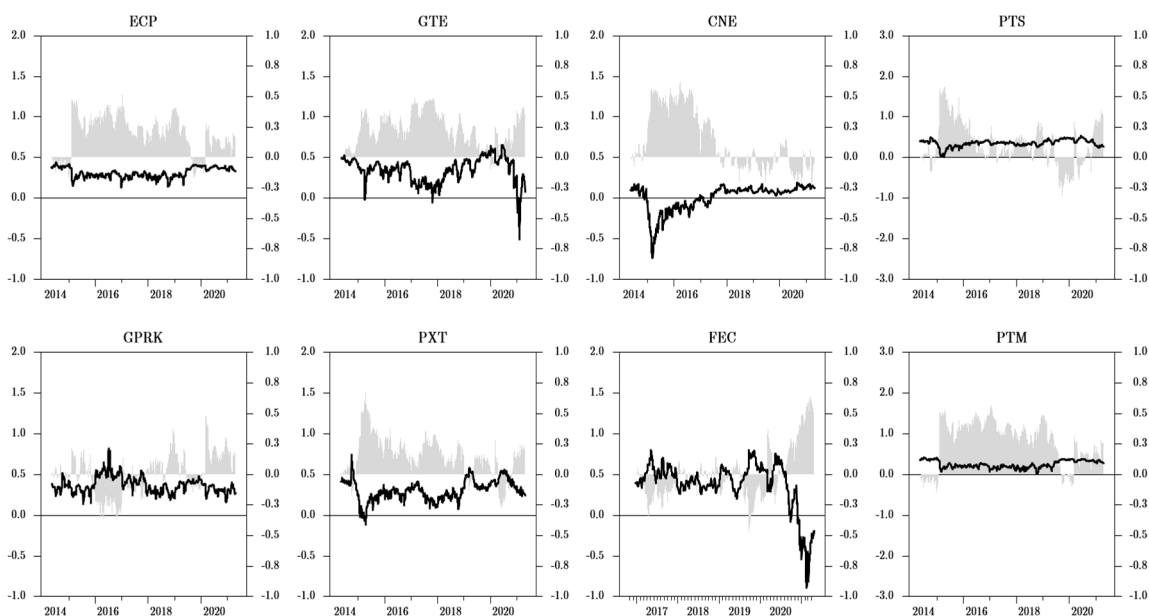
Nota. Eje izquierdo (línea negra) representa betas dinámicos. Eje derecho (sombra gris) representa correlaciones dinámicas. Separador de decimales se indican con punto.

Cuando las acciones presentan un $\beta_{t,HML}$ negativo, se comportan como acciones de crecimiento (acciones que derivan su valor de activos futuros), mientras que en un $\beta_{t,HML}$ positivo su desempeño se relaciona principalmente de activos en funcionamiento (acciones de valor). Posterior a la crisis del 2020, este factor tiene un impacto marginal en acciones como las de GPRK y PXT, pero con valores cercanos a 0,5 en el último año para acciones como GTE y FEC. En promedio para las acciones

estudiadas, estas se comportan más como acciones de valor, aun cuando presentan períodos de crecimiento (ejemplo CNE en el período 2015-2017). El gráfico 11 presenta los betas y las correlaciones dinámicas del Brent.

Gráfico 11

Betas y correlaciones dinámicas Brent



Nota. Eje izquierdo (línea negra) representa betas dinámicos. Eje derecho (sombra gris) representa correlaciones dinámicas. Separador de decimales se indican con punto.

Para los dos portafolios, ECP, ECP, GPRK y PXT, el beta siempre ha sido positivo (a excepción de un corto período para PXT a inicios de 2015). En general, la correlación con el precio del crudo es positiva, a excepción de algunos subperíodos a

finales de 2019, para ECP; gran parte de 2016, para GPRK; y a inicios de 2020, para PXT. Aspectos tales como hallazgos exploratorios o mejor desempeño de la producción básica a la esperada por el mercado en períodos de contracción del precio explicarían estas fluctuaciones en la correlación versus desempeño de las acciones. Las fases de betas negativos para acciones como GTE, CNE y FEC se asocian a aumentos repentinos en las correlaciones dinámicas de dichas especies con el precio del crudo, usualmente asociadas a períodos de fuertes caídas del *commodity* en 2016 y 2020.

6. CONCLUSIONES

El presente documento analiza las fluctuaciones en el precio de un conjunto de acciones del sector *Oil & Gas* que cotizan en mercados de Estados Unidos y Canadá, y con participación mayoritaria de su producción originada en Colombia, con frecuencia diaria entre febrero de 2014 y abril de 2021. Utilizando como marco el modelo de Fama y French (1993) de tres factores, con la inclusión de variaciones en el precio del crudo (marcador Brent), y a través de la metodología de modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicionada multivariados (MGARCH), se encontró evidencia de coeficientes o respuestas (betas) variables en el tiempo de cambios en los excesos de retorno ante fluctuaciones en los excesos de retorno de las variables antes mencionadas.

Otro de los hallazgos de este análisis es la tensión entre el efecto fijo o constante en el tiempo (normalmente positivo, de acuerdo con la literatura) y el componente variable de los coeficientes, o betas. Ante aumentos en las covarianzas (o correlaciones) condicionadas, el componente variable ejerce un efecto de cobertura o *Hedge* en el coeficiente, o beta total, disminuyendo el impacto del factor en el exceso de retorno de la acción. Esto se sustenta en la existencia de efectos asimétricos que,

ante el surgimiento de innovaciones negativas (noticias malas), la volatilidad aumenta, elevando los niveles de riesgo de los agentes, ante lo cual los agentes de mercado reducen su exposición al factor que se ha visto impactado por la innovación. Finalmente, la evidencia sugiere un mejor ajuste de los excesos de retorno con las distribuciones *t*-Student o GED, que presentan colas concentrando mayor ocurrencia de datos que su contraparte normal.

Con la evidencia encontrada de efecto GARCH en los coeficientes de los factores analizados, para los gestores de portafolios o agentes de mercado resulta fundamental contemplar en sus análisis la existencia de efectos variables en el tiempo. Es así como, incorporar el efecto de fluctuaciones tanto del primero como del segundo momento, en especial de las covarianzas dinámicas entre los factores de interés y el activo analizado, permitiría un mayor entendimiento de la dinámica de los retornos esperados ante choques de diversas fuentes.

Considerar especies de otros sectores económicos y estudiar la heterogeneidad de estos efectos es un campo de análisis prometedor para futuras investigaciones. La metodología analizada permite así sustentar o invalidar la hipótesis de coeficientes variables asociados a un factor en particular, permitiendo así contrastar si dicho

factor está o no sujeto a la famosa crítica de Lucas, que establece que los cambios de política económica tienen efecto sobre la estructura de los modelos económicos, e inciden en los parámetros profundos de dicho modelo. No contemplar coeficientes variables en el tiempo cuando la evidencia soporte su existencia, puede llevar a estrategias de inversión inadecuadas, e incluso inconsistentes con el estado de la información disponible.

Los resultados acá obtenidos pueden aplicarse para estimar la tasa ponderada de costo del capital (WACC), contemplar los $\beta_{Mk,t}$ estimados, y controlados tanto por los demás factores como por las varianzas y covarianzas condicionadas. Estimar el *Kernel* de $\beta_{Mk,t}$ les permitiría a las compañías tener un rango o intervalo de confianza para determinados períodos caracterizados por episodios de tranquilidad o volatilidad, en vez de una estimación puntual de la WACC, reconociendo la incertidumbre sobre dicha tasa de descuento.

Futuras investigaciones pueden ampliarse en varios sentidos. Ampliar la metodología de betas dinámicos condicionados (DCB) a un mayor conjunto de activos (incluir empresas petroleras de otros países de la región y estudiar el impacto diferenciado con corporaciones del sector de otras regiones). Para el caso de los betas dinámicos

de mercado ($\beta_{Mk,t}$) y del Brent ($\beta_{Brent,t}$), resulta apropiado estudiar sus determinantes (ciclo económico ya sea de Estados Unidos o mundial, fluctuaciones de oferta y demanda del crudo, y riesgo país, solo por mencionar algunos).

Implementar la metodología de regresión cuantílica, para analizar cuantiles de varianzas, covarianzas y(o) betas dinámicos es un campo de investigación por explorar (Atkins & Ng, 2014). Contemplar alternativas de especificación para esas especies pueden ser la inclusión de factores adicionales, tales como *momentum* (Jegadeesh & Titman, 1993; Sanusi & Ahmad, 2016), rentabilidad e inversión (Fama & French, 2015), y riesgo país (Damodaran, 2003), solo por mencionar algunos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANH - Agencia Nacional de Hidrocarburos (2021). Estadísticas de producción. Producción fiscalizada de crudo para varios años (2014-2020). <https://www.anh.gov.co/estadisticas-del-sector/sistemas-integrados-operaciones/estad%C3%ADsticas-producci%C3%B3n>
- Andersen, T.G., Davis, R.A., Kreiss, J.-P., & Mikosch, Th.V. (2009). *Handbook of Financial Time Series*. Springer-Verlag.
- Atkins, A. B., & Ng, P. T. (2014). Refining Our Understanding of Beta Through Quantile Regressions. *Journal of Financial Risk Management*, 7(2), 67-79. <https://doi.org/10.3390/jrfm7020067>
- Awartani, B., Javed, F., Maghyreh, A. and Virkd, N. (2018). Time-varying transmission between oil and equities in the MENA region: New evidence from DCC-MIDAS analyses. *Review of Development Finance*, 8(2), 481-483. <https://doi.org/10.1016/j.rdf.2018.11.001>
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2018). *Investments* (11th ed.). McGraw-Hill.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498-505. <https://doi.org/10.2307/2109358>

- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542-547. <https://doi.org/10.2307/1925546>
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116-131. <https://doi.org/10.1086/261527>
- Bloomberg (2021). Stocks. *Markets. Overview.* <https://www.bloomberg.com/markets/stocks>
- Braun, P. A., Nelson, D. B., & Sunier, A. M. (1995). Good News, Bad News, Volatility, and Betas. *The Journal of Finance*, 50(5), 1575-1603. <https://doi.org/10.2307/2329327>
- Cátedra Lozano, C. (2017). Volatility and Fama-French factors in the European Market [tesis de Grado, Tillburg University]. Repositorio Institucional. <http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=144783>
- Damodaran, A. (2003). Country Risk and Company Exposure: Theory and Practice. *Journal of Applied Finance*, 13(2), 63-76. <https://ssrn.com/abstract=480963>

Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas – DANE (2021).

Anexos_produccion_constantes_II_2021. Cuentas trimestrales nacionales.

Producto Interno Bruto -PIB- nacional trimestral.

<https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/cuentas-nacionales/cuentas-nacionales-trimestrales/pib-informacion-tecnica>

Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas – DANE (2021).

Exportaciones. Series Históricas. Colombia, exportaciones de café, carbón, petróleo y sus derivados, ferroníquel y no tradicionales.

<https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/comercio-internacional/exportaciones>

Diongue, A. K., Guegan, D., & Wolff, R. C. (2010). *BL-GARCH models with*

elliptical distributed innovations. Journal of Statistical Computation and

Simulation, 80(7), 775-791. <https://dx.doi.org/10.1080/00949650902773577>

Ederington, L. H., & Guan, W. (2010). How Asymmetric is US stock market

volatility? *Journal of Financial Markets*, 13(2), 225-248.

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.192.5661&rep=rep1&type=pdf>

Enders, W. (2015). *Applied Econometric Time Series* (4th ed.). John Wiley & Sons.

EIA – U.S. Energy Information Administration (2021). Spot prices for crude oil and petroleum products. Europe Brent spot price FOB (Dollars per Barrel).

http://www.eia.gov/dnav/pet/pet_pri_spt_s1_d.htm

EIA – U.S. Energy Information Administration (2020). *Petroleum & Other liquids*.

<https://www.eia.gov/dnav/pet/hist/LeafHandler.ashx?n=pet&s=mcrfpus1&f=a>

Engle, R. (2016). Dynamic Conditional Beta. *Journal of Financial Econometrics*,

14(4), 643-667. <https://dx.doi.org/10.1093/jfinec/nbw006>

Engle, R. (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate

Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.

<https://www.jstor.org/stable/1392121>

Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.

<https://doi.org/10.2307/1912773>

Engle, R., & Kroner, K. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH.

Econometric Theory, 11(1), 122-150.

<https://doi.org/10.1017/S0266466600009063>

- Fama, E. F. & French, K. R. (2015). A Five-Factor Asset Pricing Model. *Journal of Financial Economics*, 116(1), 1-22.
<https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010>
- Fama, E. F., & French, K. R. (1996). Multifactor Explanations of Asset-Pricing Anomalies. *Journal of Finance*, 51(1), 55-84. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05202.x>
- Fama, E. F., & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3-56.
[https://doi.org/10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5)
- Francq, C. & Zakoian, J.-M. (2019). *GARCH Models. Structure, Statistical Inference, and Financial Applications* (2nd ed.). Jhon Wiley & Sons.
- French, K. R. (2021). *U.S. Research Returns Data (Downloadable Files)*.
http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html#Research
- Foye, J., Mramor, D., & Pahor, M. (2013). A Respecified Fama French Three-Factor Model for the New European Union Member States. *Journal of International Financial Management & Accounting*, 24(1), 3-25.
<https://doi.org/10.1111/jifm.12005>

Fu, S., Liu, C., & Wei, X. (2021). Contagion in global stock markets during the COVID-19 Crisis. *Global Challenges*, 2000130.

<https://doi.org/10.1002/gch2.202000130>

Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks.

The Journal of Finance, 48(5), 1779-1801. [https://doi.org/10.1111/j.1540-](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x)

[6261.1993.tb05128.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x)

Greene, W. (2018). *Econometric Analysis* (8th ed.). Pearson.

Harvey, C. R. (1989). Time-varying conditional covariances in tests of asset pricing models. *Journal of Financial Economics*, 24(2), 289-317.

[https://doi.org/10.1016/0304-405X\(89\)90049-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(89)90049-4)

Huang, D., & Miao, J. (2016). *Oil Prices and the Cross-Section of Stock Return*.

Boston University. <http://people.bu.edu/miaoj/HuangMiao.pdf>

Jegadeesh, N. & Titman, S. (1993). Return to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. *The Journal of Finance*, 48(1), 65-

91. <https://doi.org/10.2307/2328882>

Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37. <https://doi.org/10.2307/1924119>

Lora, E., y Prada Ríos, S. I. (2016). *Técnicas de medición económica: metodología y aplicaciones en Colombia* (5^a. ed.). Universidad Icesi.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

<https://doi.org/10.2307/2975974>

McLeod, A.I., & Li, W.K. (1983). Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 269-273.

<https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1983.tb00373.x>

Medarde Muguerra, N. (2014). *El modelo de tres factores de Fama y French aplicado al mercado español* [tesis de Maestría, Icade]. Repositorio Institucional.

<https://repositorio.comillas.edu/rest/bitstreams/2763/retrieve>

Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 41(5), 867-887. <https://doi.org/10.2307/1913811>

Nelson, D. (1991). Conditional Heteroskedasticity In Asset Returns - A New Approach. *Econometrica*, 59(2), 347-370. <https://doi.org/10.2307/2938260>

Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6)

- Sadorsky, P. (2012). Correlations and volatility spillovers between oil prices and the stock prices of clean energy and technology companies. *Energy Economics*, 34(1), 248-255. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2011.03.006>
- Sanusi, M. S., & Ahmad, F. (2016). Modelling oil and gas stock returns using multi factor asset pricing model including oil price exposure. *Finance Research Letters*, 18, 89-99. https://scholar.google.co.uk/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=WolELLgAAAJ&citation_for_view=WolELLgAAAAJ:u5HHmVD_uO8C
- Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442. https://psc.ky.gov/pscecf/2012-00221/rateintervention%40ag.ky.gov/10252012f/sharpe_-_CAPM.pdf
- Tobben, S. (20 de abril, 2020). Oil for Less Than Nothing? Here's How That Happened. *Bloomberg*. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-04-20/negative-prices-for-oil-here-s-what-that-means-quicktake>
- Villar, J. A., & Joutz, F. L. (2006). The Relationship Between Crude Oil and Natural Gas Prices. *Energy Information Administration, Office of Oil & Gas*. http://aceer.uprm.edu/pdfs/CrudeOil_NaturalGas.pdf

The World Bank (2021). World Bank national accounts data, and OECD National Accounts data files. GDP annual growth (%).

<https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG>

Yaya, O. S., Olubusoye, O. E., & Ojo, O. O (2014). Estimates and Forecasts of GARCH Model under Misspecified Probability Distributions: A MonteCarlo Simulation Approach. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 13(2), 479-492. <https://dx.doi.org/10.22237/jmasm/1414816020>

ANEXOS

Anexo 1. Resultados de la ecuación 16

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{R}_{CRSP,t} \\ \bar{R}_{SMB,t} \\ \bar{R}_{HML,t} \\ \bar{R}_{Brent,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,067^{**} & 0,130^{**} & -0,073^{**} & 0,015 \\ -0,007 & -0,034 & 0,015 & 0,008 \\ 0,033^{**} & -0,021 & 0,061^{**} & 0,004 \\ 0,042 & -0,060 & -0,061 & 0,014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{CRSP,t-1} \\ \bar{R}_{SMB,t-1} \\ \bar{R}_{HML,t-1} \\ \bar{R}_{Brent,t-1} \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 0,205^{**} & 0,002 & 0,082^{**} & 0,016 \\ 0,049^{**} & 0,018 & 0,008 & -0,001 \\ 0,039^{**} & -0,055^{*} & -0,023 & 0,001 \\ 0,183^{**} & 0,223^{**} & -0,066 & 0,040 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{CRSP,t-2} \\ \bar{R}_{SMB,t-2} \\ \bar{R}_{HML,t-2} \\ \bar{R}_{Brent,t-2} \end{bmatrix} & \quad (A.1)
\end{aligned}$$

Q-Ljung Box(1)=2.75**

Nota. Los errores estándar robustos en heterocedasticidad se presentan entre paréntesis. * indica que es significativo al 10%, y ** indica que lo es al 5%.

Anexo 2. Tabla A1. Coeficientes de la media, distribución t-Student

Variable	ECP	GPRK	GTE	PXT	CNE	FEC	PTS	PTW
α	0.032 (0.041)	-0.025 (0.062)	-0.025 (0.064)	-0.068 (0.047)	-0.153** (0.044)	-0.157** (0.076)	-0.009 (0.030)	0.030 (0.039)
Θ_{Mk}	0.792** (0.062)	0.559** (0.105)	0.565** (0.156)	0.430** (0.065)	0.324** (0.066)	0.306** (0.135)	0.561** (0.065)	0.782** (0.056)
Φ_{Mk}	-0.675** (0.167)	-0.449* (0.245)	0.030 (0.312)	-0.560** (0.217)	-0.519** (0.167)	-0.365 (0.302)	-0.112 (0.305)	-0.677** (0.162)
Θ_{SMB}	-0.126 (0.164)	0.354** (0.105)	0.759** (0.166)	0.404** (0.049)	0.099 (0.140)	0.154 (0.207)	0.208* (0.127)	-0.071 (0.156)
Φ_{SMB}	-0.433* (0.251)	-1.009** (0.223)	-0.797** (0.171)	-1.193** (0.108)	-0.620** (0.203)	-0.632** (0.254)	-0.476* (0.249)	-0.450* (0.241)
Θ_{HML}	0.454** (0.150)	0.367** (0.116)	0.700** (0.229)	0.361** (0.124)	0.117** (0.063)	0.404** (0.189)	0.475** (0.085)	0.438** (0.138)
Φ_{HML}	-0.162 (0.272)	-0.698** (0.198)	-0.383 (0.247)	-0.513** (0.213)	-0.948** (0.144)	-0.534* (0.298)	-0.573** (0.207)	-0.240 (0.257)
Θ_{Brent}	0.332** (0.057)	0.353** (0.052)	0.510** (0.072)	0.411** (0.038)	0.088* (0.045)	0.386** (0.046)	0.380** (0.033)	0.323** (0.054)
Φ_{Brent}	-0.392** (0.191)	-0.383* (0.208)	-0.522** (0.180)	-0.705** (0.128)	-0.481** (0.163)	-0.831** (0.186)	-0.512** (0.159)	-0.432** (0.162)
$\Theta_{\text{Mk}}=\Phi_{\text{Mk}}=0$	98.583**	30.803**	13.526**	43.805**	40.127**	5.986**	73.949**	236.350**
$\Theta_{\text{SMB}}=\Phi_{\text{SMB}}=0$	2.226	14.004**	37.648**	209.819**	9.350**	6.406**	4.743*	4.385
$\Theta_{\text{HML}}=\Phi_{\text{HML}}=0$	4.623**	17.335**	12.579**	15.275**	44.823**	6.692**	38.626**	10.338**
$\Theta_{\text{Brent}}=\Phi_{\text{Brent}}=0$	17.576**	46.214**	50.594**	114.192**	11.204**	103.589**	135.531**	36.151**

Nota. Los errores estándar robustos en heterocedasticidad se presentan entre

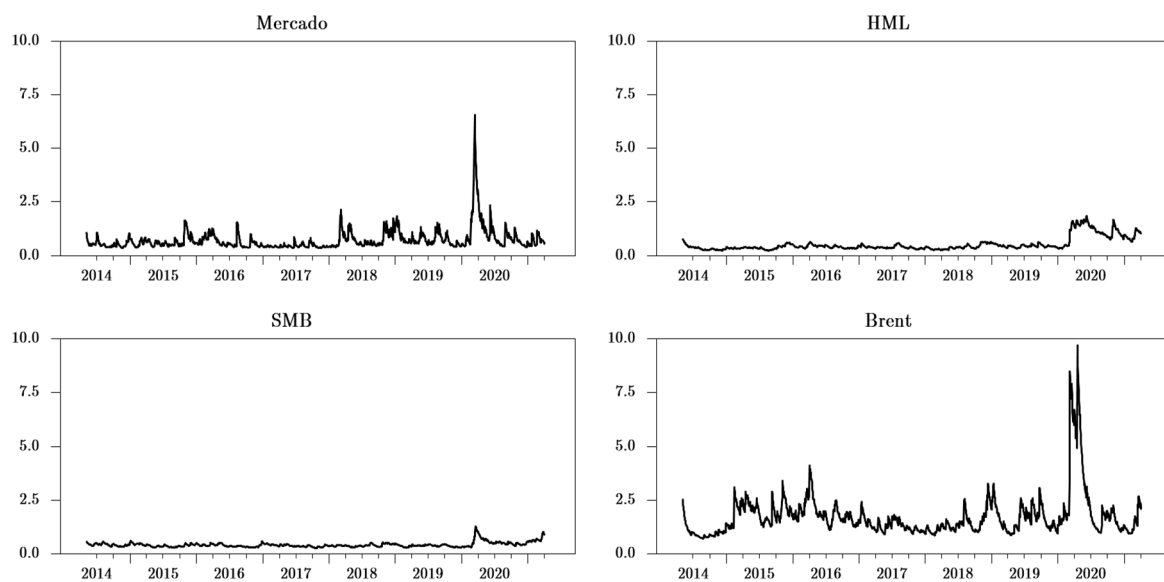
paréntesis. * indica que es significativo al 10%, y ** indica que lo es al 5%.

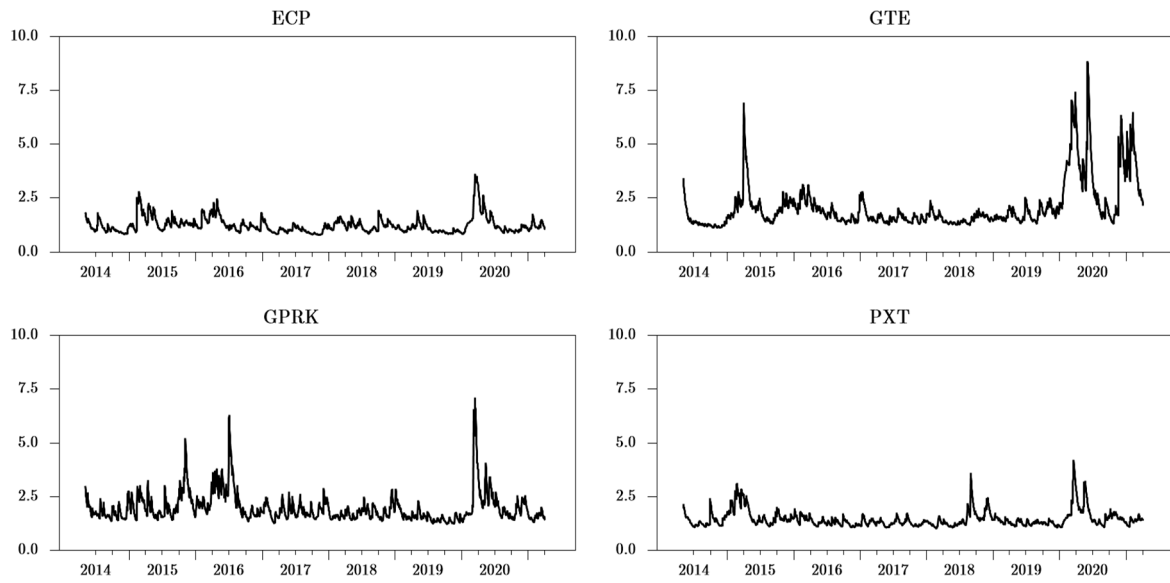
Anexo 3. Tabla A2. Coeficientes MGARCH, Distribución t-Student

Variable	ECP	GPRK	GTE	PXT	CNE	FEC	PTS	PTW
C_{MK}	0.038** (0.006)	0.036** (0.006)	0.043** (0.007)	0.038** (0.006)	0.039** (0.006)	0.025** (0.006)	0.038** (0.006)	0.038** (0.006)
C_{SMB}	0.006** (0.002)	0.006** (0.002)	0.006** (0.002)	0.006** (0.002)	0.006** (0.002)	0.007** (0.003)	0.007** (0.002)	0.006** (0.002)
C_{HML}	0.002** (0.001)	0.003** (0.001)	0.002** (0.001)	0.002** (0.001)	0.002** (0.001)	0.003** (0.002)	0.002** (0.001)	0.002** (0.001)
C_{Brent}	0.080** (0.018)	0.079** (0.019)	0.086** (0.02)	0.086** (0.02)	0.075** (0.018)	0.167** (0.036)	0.076** (0.018)	0.079** (0.018)
C_{Stock}	0.123** (0.03)	0.518** (0.111)	0.255** (0.048)	0.298** (0.075)	0.047** (0.015)	0.121** (0.033)	0.041** (0.011)	0.085** (0.022)
A_{MK}	0.072** (0.018)	0.078** (0.018)	0.076** (0.019)	0.078** (0.018)	0.086** (0.019)	0.096** (0.024)	0.073** (0.018)	0.072** (0.018)
A_{SMB}	0.035** (0.011)	0.033** (0.011)	0.032** (0.01)	0.034** (0.01)	0.032** (0.011)	0.045** (0.016)	0.033** (0.011)	0.035** (0.011)
A_{HML}	0.034** (0.008)	0.037** (0.008)	0.036** (0.008)	0.034** (0.007)	0.035** (0.007)	0.028** (0.01)	0.033** (0.007)	0.034** (0.008)
A_{Brent}	0.051** (0.013)	0.046** (0.012)	0.054** (0.013)	0.048** (0.012)	0.051** (0.012)	0.017 (0.013)	0.050** (0.013)	0.053** (0.013)
A_{Stock}	0.054** (0.014)	0.067** (0.016)	0.071** (0.011)	0.044** (0.016)	0.022** (0.008)	0.043** (0.01)	0.034** (0.011)	0.058** (0.014)
B_{MK}	0.805** (0.021)	0.801** (0.02)	0.787** (0.022)	0.803** (0.021)	0.791** (0.021)	0.823** (0.023)	0.801** (0.02)	0.806** (0.021)
B_{SMB}	0.932** (0.015)	0.934** (0.014)	0.937** (0.013)	0.937** (0.013)	0.937** (0.014)	0.922** (0.02)	0.931** (0.015)	0.932** (0.015)
B_{HML}	0.947** (0.008)	0.943** (0.009)	0.947** (0.009)	0.948** (0.008)	0.946** (0.008)	0.949** (0.01)	0.947** (0.008)	0.946** (0.009)
B_{Brent}	0.895** (0.012)	0.899** (0.012)	0.894** (0.013)	0.898** (0.013)	0.898** (0.012)	0.894** (0.017)	0.897** (0.012)	0.894** (0.012)
B_{Stock}	0.897** (0.017)	0.838** (0.021)	0.912** (0.011)	0.865** (0.026)	0.939** (0.008)	0.929** (0.011)	0.922** (0.012)	0.904** (0.015)
D_{Mk}	0.173** (0.034)	0.175** (0.034)	0.198** (0.037)	0.162** (0.033)	0.171** (0.034)	0.108** (0.03)	0.175** (0.033)	0.175** (0.034)
D_{SMB}	0.037** (0.017)	0.036** (0.017)	0.037** (0.017)	0.030** (0.016)	0.034** (0.016)	0.038** (0.023)	0.040** (0.017)	0.038** (0.017)
D_{HML}	0.037** (0.014)	0.035** (0.015)	0.034** (0.014)	0.032** (0.014)	0.034** (0.014)	0.040** (0.019)	0.036** (0.014)	0.036** (0.015)
D_{Brent}	0.079** (0.018)	0.084** (0.018)	0.077** (0.019)	0.076** (0.018)	0.079** (0.018)	0.084** (0.021)	0.079** (0.018)	0.077** (0.018)
D_{Stock}	0.031** (0.017)	0.093** (0.025)	-0.034** (0.015)	0.065** (0.024)	0.068** (0.014)	0.016 (0.019)	0.052** (0.017)	0.022 (0.016)
F_{Mk}	0.235* (0.14)	0.228* (0.135)	0.240* (0.146)	0.234 (0.144)	0.239* (0.139)	0.246* (0.13)	0.226* (0.136)	0.233* (0.139)
F_{SMB}	0.019* (0.011)	0.020* (0.011)	0.020* (0.011)	0.021* (0.011)	0.018* (0.011)	0.017 (0.012)	0.018 (0.011)	0.019* (0.011)
F_{HML}	0.044* (0.026)	0.042* (0.024)	0.049* (0.027)	0.045 (0.028)	0.044* (0.026)	0.040* (0.024)	0.046* (0.026)	0.045* (0.026)
F_{Brent}	0.595* (0.338)	0.586* (0.319)	0.692** (0.327)	0.701** (0.326)	0.768** (0.335)	0.838** (0.375)	0.634** (0.307)	0.596* (0.339)
F_{Stock}	0.218 (0.194)	0.085 (0.252)	2.899** (1.051)	0.252 (0.274)	0.078 (0.057)	0.405** (0.216)	0.122** (0.06)	0.183 (0.153)
ρ	0.019** (0.003)	0.020** (0.003)	0.020** (0.003)	0.021** (0.003)	0.022** (0.003)	0.023** (0.004)	0.020** (0.003)	0.019** (0.002)
ψ	0.977** (0.003)	0.973** (0.004)	0.977** (0.003)	0.973** (0.004)	0.972** (0.004)	0.968** (0.007)	0.975** (0.004)	0.978** (0.003)
τ	8.238** (0.58)	8.315** (0.623)	7.984** (0.535)	8.381** (0.59)	9.043** (0.713)	7.912** (0.736)	8.752** (0.654)	8.248** (0.578)

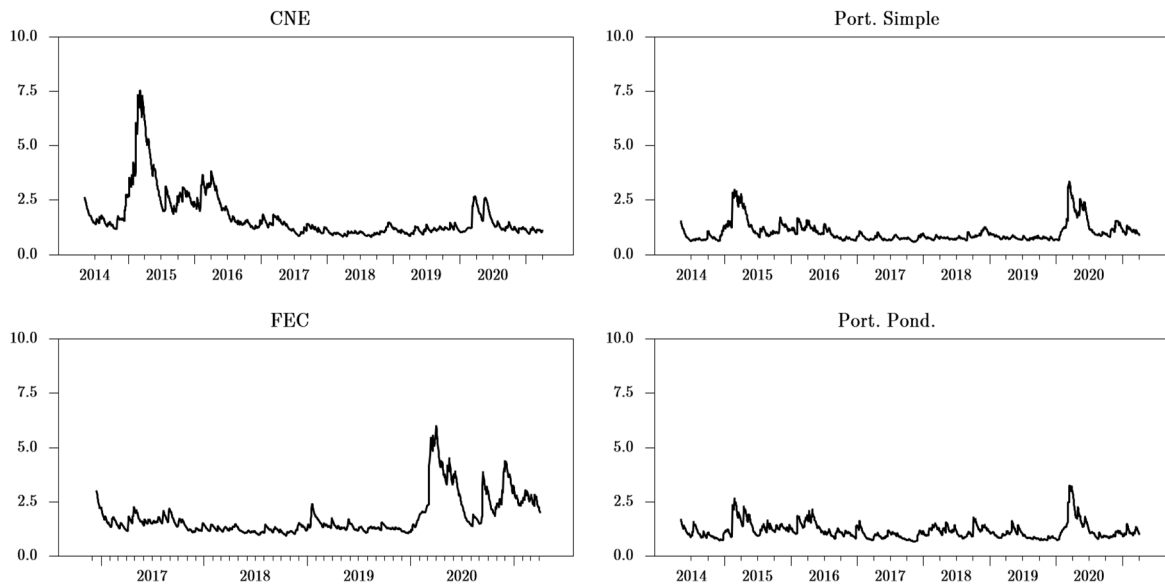
Nota. Los errores estándar robustos en heterocedasticidad se presentan entre

paréntesis. * indica que es significativo al 10%, y ** indica que lo es al 5%.

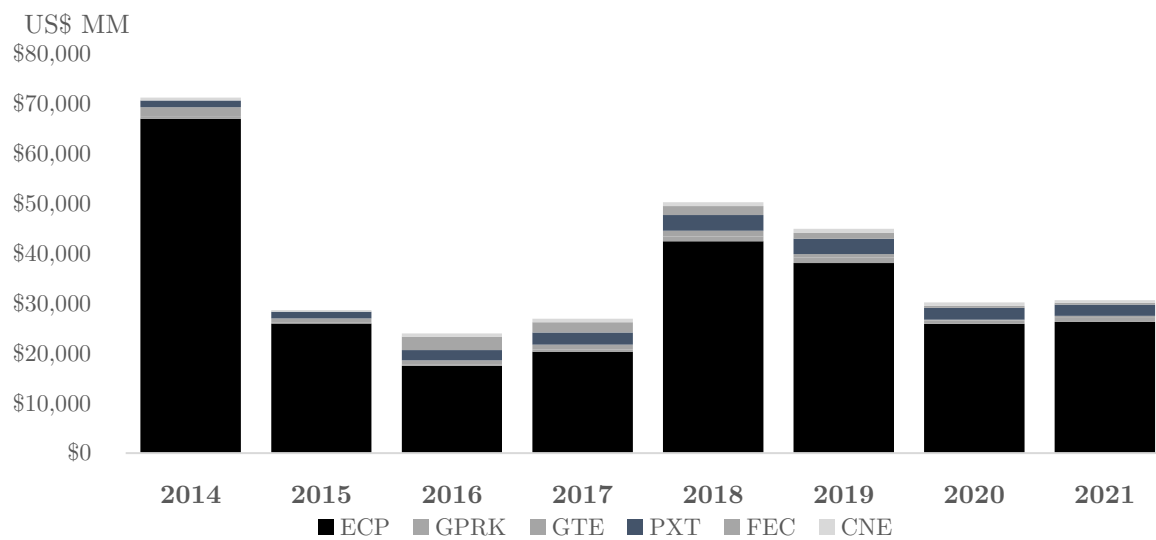
Anexo 4. Gráfico A1. Desviaciones Estándar condicionadas de Factores

Anexo 5. Gráfico A2. Desviaciones Estándar condicionadas de Acciones

Anexo 6. Gráfico A3. Desviaciones Estándar condicionadas de Acciones
(continuación)



Anexo 7. Gráfico A4. Capitalización de mercado promedio. 2014-2021



Nota: Gráfico del autor con información del portal Bloomberg (2021), sección de *stocks* para varias acciones. 2014-2021. <https://www.bloomberg.com/markets/stocks>