No. 08-04
2008

LA DETERMINACIÓN DEL NIVEL ÓPTIMO DE INVERSIÓN.

Jesus Botero García

Documentos de trabajo
Economía y Finanzas
Centro de Investigaciones Económicas y Financieras (CIEF)

UNIVERSIDAD EAFIT
Abierta al mundo

Foto: Juan Carlos Ramírez

LA DETERMINACIÓN DEL NIVEL ÓPTIMO DE INVERSIÓN

Jesús Botero García

1. Introducción

En general, se admite que la decisión de inversión es una decisión de optimización dinámica, en la que el inversionista elije el nivel de inversión considerando su retorno futuro.

Los problemas de optimización dinámica se resuelven por tres caminos alternativos: cálculo de variaciones; teoría de control óptimo, y programación dinámica.

En los tres casos, el problema parte de considerar dos tipos de variables: las variables de estado (x_t) y las variables de control (u_t).

2. La solución mediante cálculo de variaciones

.

El problema típico del cálculo de variaciones considera una variable $x(t)$ y su cambio en el tiempo $\dot{x}(t)$, y busca maximizar el valor, a través del tiempo, de una función $J[x]$:

Max $J[x] = \sum_{t=0}^{\infty} f(x(t), \dot{x}(t), t)$

Sujeto a $x(0) = x_0$

La condición de primer orden para un máximo se conoce como la ecuación de Euler:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0$$

Para el caso de la inversión, consideremos el stock de capital y su cambio en el tiempo (la inversión).

Asumamos las siguientes funciones:

- La ganancia bruta de un stock de capital está dada por: $g(x) = ax - bx^2$.
- El costo de la inversión está dado por: $C(x) = c\dot{x}^2 + s\dot{x}$.

El problema, dado un factor de descuento β) es en consecuencia:

Max $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (ax - bx^2 - c\dot{x}^2 - s\dot{x})$, dado $x(0) = x_0$

La ecuación de Euler queda dada por:

$$\beta^t (a - 2bx) + \frac{d}{dt} \beta^t (2c\dot{x} + s) = 0$$

Es decir:

$$a - 2bx + 2c\ddot{x} + 2c \ln \beta \dot{x} + \ln \beta s = 0$$

De donde:

$$\ddot{x} - \rho \dot{x} - \frac{b}{c} x = \frac{s\rho - a}{2c}$$

Donde $\rho = -\ln \beta$

La solución está dada por[1]:

$$x = k + me^{rt}$$

[1] Ver Lomelí y Rumbos (2003). Pag.349-350.

Siempre que $a-\rho s>0$

Donde:

$$k=\frac{a-s\rho}{2h}$$
$$r=\frac{1}{2}\left(\rho-\sqrt{\rho^{2}+\frac{4b}{c}}\right)$$
$$m=x_{0}-k$$

3. La solución mediante teoría de control óptimo

En la teoría de control óptimo, el programa típico define dos tipos de variables: las variables de estado (en nuestro caso, x) y las variables de control (en nuestro caso, u), que determinan el estado de las primeras.

El problema típico es:

Max $\sum_{t=0}^{\infty} f(x,u,t)$

Sujeto a:

$$\dot{x}=g(x,u,t)$$
$$x_{0}=x$$

La solución (el llamado principio de Pontryagin) se expresa como condiciones del denominado Hamiltoniano del problema:

$$H(x,u,\lambda,t)=f(x,u,t)+\lambda(t)g(x,u,t)$$

Las condiciones para un máximo son:

$$H_u = 0$$
$$\dot{\lambda} = -H_x$$
$$\dot{x} = H_\lambda$$

Con la condición de transversalidad: Lim $\lambda(t)_{t\to\infty} = 0$

Consideremos el caso en que se imponga alguna restricción adicional a la variable de control, y se imponga una condición de no negatividad:

$$h(x,u,t) \leq 0$$
$$u(t) \geq 0$$

El nuevo problema es:

Max $H = f(x,u,t) + \lambda(t)g(x,u,t)$

Sujeto a:

$$h(x,u,t) \leq 0$$
$$u(t) \geq 0$$

El Lagrangeano del nuevo problema es:

$$L = f(x,u,t) + \lambda(t)g(x,u,t) - \mu h(x,u,t)$$

Y la solución es:

$$L_u = f_u + \lambda g_u - \mu h_u \leq 0, u(t) \geq 0, u\left(f_u + \lambda g_u - \mu h_u\right) = 0$$
$$\dot{\lambda} = -f_x - \lambda g_x + \mu h_x$$
$$\dot{x} = g(x,u,t)$$
$$h(x,u,t) \leq o, \mu(t) \geq 0, \mu h(x,u,t) = 0$$

Para el caso de la inversión, la variable de estado es el capital (x), y la variable de control la inversión (u). Asumamos las siguientes ecuaciones:

Ingresos de la empresa: $\pi(x)=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}$

Costo de la inversión: $C(u)=qu$

Impongamos la condición de no negatividad de la inversión, y establezcamos la condición de restricción de liquidez:

$$0 \le u \le \frac{1}{\alpha}x^{a}$$

La ecuación de movimiento de la variable de estado es:

$$\dot{x}=u-\delta x$$

Donde δ es la tasa de depreciación.

El problema es, sin restricciones de liquidez, es:

Max $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}-qu\right)$

Sujeto a $\dot{x}=u-\delta x$

El Hamiltoneano del problema es:

$$H=\beta^{t}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}-qu\right)+\gamma(u-\delta x)$$
$$\gamma=\beta^{t}\lambda$$

Al agregar restricciones de liquidez, la Lagrangeano es:

$$L=\beta^{t}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}-qu\right)+\gamma(u-\delta x)-\beta^{t}\mu\left(u-\frac{1}{\alpha}x^{a}\right)$$

Las condiciones de maximización son:

$$L_u = -q + \lambda - \mu \leq 0, u \geq 0, u(-q + \lambda - \mu) = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma} = \beta^t \dot{\lambda} + \lambda \ln \beta \beta^t = -\beta^t x^{\alpha-1} + \lambda \beta^t \delta - \beta^t \mu x^{\alpha-1} \\ &\Rightarrow \dot{\lambda} = \lambda(\delta + \rho) - x^{\alpha-1}(1+\mu) \end{aligned} \qquad (2)$$

Con $\rho = -\ln \beta$

$$\dot{x} = u - \delta x \qquad (3)$$

Y:

$$\mu \geq 0, u - \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \leq 0, \mu\left(u - \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}\right) = 0 \qquad (4)$$

Definamos el estado estacionario con las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{aligned} &\lambda(\delta + \rho) = x^{\alpha-1}(1+\mu) \\ &u = \delta x \end{aligned}$$

Si $\delta x < \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda^* = q$

$$x^* = [q(\rho + \delta)]^{1/(\alpha-1)}$$

Tal condición se cumplirá si:

$$q > \frac{\alpha \delta}{\rho + \delta}$$

En caso contrario:

$$\mu > 0 \Rightarrow x^* = (\delta\alpha)^{1/(\alpha-1)}$$

Y $\lambda^* = \dfrac{\delta\alpha}{\rho+\delta}$, $\mu = \dfrac{\delta\alpha}{\rho+\delta} - q$

4. Soluciones mediante programación dinámica

a. El caso de las rentas proporcionales.

El problema típico de la programación dinámica considera la variable de estado (x_t) y la variable de control (u_t), y busca determinar la trayectoria de esta última tal que maximice la función objetivo:

Max $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t)$

Sujeto a $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$

El principio de optimalidad se define en términos de la *función valor*:

$$V_t(x_t) = \underset{u}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t)$$

El principio de optimalidad de Bellman establece que:

$$V_t(x_t) = \underset{u_t}{Max}\left(f(x_t, u_t) + \beta V_{t+1}(x_{t+1}) \right)$$

Si x y u resuelven el problema, y son una solución interior, se cumple:[2]

[2] Ver Lomelí y Rumbos (2003), pag 425-426, para un Esbozo" de demostración.

$$\frac{\partial f}{\partial u_u} + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$
$$\frac{dV_t}{dx_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t}$$
$$x_{t+1} = g(x_t, u_t)$$

Analicemos el caso más sencillo de determinación de la inversión, dados costos cuadráticos de ajuste en la inversión, y rentas proporcionales al capital[3]:

El problema es:

$$\underset{u_t}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta \left(Ax - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_t}{x_t} \right)^2 x_t - pu_t \right)$$

Sujeto a $x_{t+1} = u_t + (1-\delta)x_t$

Donde A, γ, p, δ son, respectivamente, el parámetro de proporcionalidad de la renta al capital, la constante del costo de ajuste, el precio de los bienes de capital y la depreciación.

De acuerdo al principio de optimalidad de Bellman:

$$V_t = \underset{u_t}{Max} \left(Ax - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_t}{x_t} \right)^2 x_t - pu_t + \beta V_{t+1} \right)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$-\gamma \frac{u_t}{x_t} - p + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} = 0$$
$$\frac{dV_t}{dx_t} = A + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_t}{x_t} \right)^2 + \beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} (1-\delta)$$
$$x_{t+1} = u_t + (1-\delta)x_t$$

[3] Ver Hayashi (1982). La proporcionalidad corresponde al caso de un empresario que minimiza costos en el corto plazo, tiene rendimiento constantes a escala y es tomador de precios. Ver anexo 1.

Así:

$$\frac{u_t}{x_t} = \frac{1}{\gamma}\left(\beta \frac{dV_{t+1}}{dx_{t+1}} - p\right) \qquad (5)$$

Dada la proporcionalidad de la renta, una hipótesis posible sobre la función valor es que tenga la forma[4]:

$$V = \phi(A, \gamma, \beta, \delta)x$$

Así:

$$\frac{dV}{dx} = \phi(A, \gamma, \beta, \delta)$$

Reemplazando en la ecuación (5):

$$\frac{u_t}{x_t} = \frac{1}{\gamma}\left(\beta\phi(A, \gamma, \beta, \delta) - p\right) \qquad (6)$$

Ahora bien, en el óptimo se debe cumplir:

$$\phi x = Ax - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{u_t}{x_t}\right)^2 x_t - pu_t + \beta\phi\left(x(1-\delta) + u\right)$$

Reemplazando en u según la expresión (6) y dividiendo por x:

$$\phi = A - \frac{1}{2\gamma}(\beta\phi - p)^2 - p\left(\frac{1}{\gamma}(\beta\phi - p)\right)^2 + \beta\phi\left(1 - \delta + \frac{1}{\gamma}(\beta\phi - p)\right) \qquad (7)$$

La ecuación (7) define (de manera implícita) el valor de $\phi(A, \gamma, \beta, \delta)$.

[4] Ver Adda y Cooper (2002), pag 206.

b. Iteraciones de la función de valor.

Si no se asume competencia perfecta, el problema ya no puede ser resuelto algebraicamente. Se requieren métodos numéricos.

El problema es determinar una secuencia de valores del stock de capital $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ que maximice la expresión:

$$\underset{u_t}{Max}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left((1-\theta)f(x_t)-c(x_t,x_{t+1})-p(1-\omega)\left(x_{t+1}-(1-\delta(x_t))\right)\right)$$

Donde:

$\beta=\dfrac{1}{1+r}$, el factor de descuento.

θ: Tasa de impuesto sobre las rentas de capital.

$f(x)=Ax^{\rho}$: Función que expresa las rentas de capital en términos del stock. El parámetro ρ refleja condiciones de competencia imperfecta, porque le empresario no puede multiplicar sus rentas multiplicando su capital[5].

A: Parámetro de productividad.

$c(x_t,x_{t+1})=\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)\left(\dfrac{x_{t+1}-(1-\delta)x_t}{x_t}\right)^2 x_t$: Función cuadrática de costos de ajuste.

p : precio relativo de los bienes de capital.

$\omega=\theta s+\sum_{t=1}^{n}\beta^t\theta\left(\dfrac{1}{n}\right)$: tasa de descuento tributario, igual a la tasa impositiva por el descuento de inversión (s), más el valor presente neto de los deducciones por la depreciación de la inversión en *n* períodos.

δ : tasa de depreciación económica.

La ecuación de Bellman es:

[5] Ver Anexo 3 para una discusión formal del tema.

$$V(x_t) = Max \left((1-\theta) f(x_t) - c(x_t, x_{t+1}) - p(1-\omega)\left(x_{t+1} - (1-\delta)x_t\right)\right) + \beta V(x_{t+1})$$

La condición de primer orden es:

$$-\frac{\partial c(x_{t.}, x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} - p(1-\omega) + \beta V'(x_{t+1}) = 0 \qquad (1)$$

Y la derivada de la función de valor respecto al capital es:

$$V'(x_t) = (1-\theta) f'(x_t) - \frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_t} + (1-\delta) p(1-\omega) \text{ para todo } x_t \ (2)$$

Reemplazando:

$$-\frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} - p(1-\omega) + \beta(1-\theta) f'(x_{t+1}) - \beta \frac{\partial c(x_{t+1}, x_{t+2})}{\partial x_{t+1}} + \beta(1-\delta) p(1-\omega) = 0$$

Para la función cuadrática de costos de ajuste:

$$\frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} = \gamma\left(\frac{x_{t+1} - (1-\delta)x_t}{x_t}\right)$$

$$\frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_t} = \frac{\gamma}{2}\left(-\left(\frac{x_{t+1} - (1-\delta)x_t}{x_t}\right)^2 - 2(1-\delta)\left(\frac{x_{t+1} - (1-\delta)x_t}{x_t}\right)\right)$$

En estado estacionario:

$$f'(x^*) = \rho A {x^*}^{\rho-1}$$

$$\frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} = \gamma\delta$$

$$\frac{\partial c(x_t, x_{t+1})}{\partial x_t} = \frac{\gamma}{2}\left(\delta^2 - 2\delta\right)$$

La solución de estado estacionario es, en consecuencia:

$$x^* = \left[\frac{\gamma\delta + p(1-\omega) + \beta\gamma(\delta^2 - 2\delta)/2 - (1-\delta)p(1-\omega)\beta}{\beta(1-\theta)\rho A} \right]^{1/(\rho-1)}$$

El problema de programación dinámica se resuelve iterando sobre la función de valor, en el intervalo entre el valor observado del capital y su valor de estado estacionario. El resultado de la iteración es una correspondencia $x_{t+1} = g(x_t)$, la función de política, que determina, para el límite inferior x_0 el valor óptimo de x_1, y por consiguiente, el nivel de inversión óptimo[6].

ANEXO 1: El caso de la proporcionalidad de las rentas

La proporcionalidad de las rentas al stock de capital fijo depende de dos supuestos: rendimientos constantes de escala y competencia imperfecta. El parámetro A puede expresarse en términos de un parámetro de productividad, el precio de los bienes y el salario, como se ilustra a continuación, para el caso de una función de producción Cobb-Douglas:

El empresario determina el empleo del insumo variable maximizando su ganancia en el corto plazo (es decir, dado el stock de capital disponible, x_0):

$$\underset{T}{Max} \quad qY - wT$$

Dado:

$$Y = TFPx_0^{\alpha}T^{1-a}$$

Donde q es el precio del producto, w el salario, TFP la productividad y Y el producto.

[6] Ver el anexo 2 para una descripción del proceso de iteración.

La condición de primer orden es:

$$(1-\alpha)TFP\left(\frac{x}{T}\right)^{\alpha} = \frac{w}{q}$$

Despejando y reemplazando:

$$\pi(K) = \left[qTFP\left(\frac{q(1-\alpha)TFP}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - w\left(\frac{q(1-\alpha)TFP}{w}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] x_0$$

ANEXO 2: Iteraciones sobre la función de valor

Una vez determinado el intervalo sobre el que estará el valor del capital ($\left[x_0, x^*\right]$ si $x^* > x_0$, o $\left[x^*, x_0\right]$ en caso contrario), se determina una rejilla de valores x_i en dicho intervalo. Sobre dicha rejilla se establece un proceso iterativo para determinar la función de política $x_{t+1} = g(x_t)$, que asigna, a cada valor de x_t un valor x_{t+1} que maximiza la función de valor[7].

El proceso consta de los siguientes pasos:

- Se determina un valor inicial arbitrario del vector $V_{t+1}(x_i)$.
- Se calcula, para cada x_i, las funciones:

$$V(x_i, x_j) = \left((1-\theta) f(x_i) - c(x_i, x_j) - p(1-\omega)\left(x_j - (1-\delta)x_i\right)\right) + \beta V_{t+1}(x_j)$$

- Se elije un nuevo vector $V_{t+1}(x_i) = \underset{x_j}{Max} \quad V(x_i, x_j)$
- Se itera hasta que se alcance un criterio de convergencia dado para el vector $V_{t+1}(x_i)$.

---

[7] Se puede demostrar que si la función que se maximiza es real, continua y acotada, el conjunto $\left[x_0, x^*\right]$ es no vacío, compacto y continuo, y β está entre 0 y 1, existe una solución única al problema, y puede ser alcanzada a partir de una condición inicial arbitraria. Ver Adda y Coper (2003), cap. 2, sección 2.5.1.

La correspondencia $x_{t+1} = g(x_t)$ se construye escogiendo el x_j que hace máxima la función de valor $V(x_i, x_j)$ para cada x_i.

ANEXO 3: La solución del problema en condiciones de competencia monopolística.

La formulación de la función de renta $\pi = Ax^{\rho}$ puede fundamentarse como se describe a continuación.

Sea un empresario que determina el nivel de empleo que maximiza su ganancia, dada una función de producción Cobb-Douglas y una función de demanda de producto diferenciado en competencia monopolística.

Max $qY - wT$

Sujeto a:

$q = FY^{-1/\sigma}$

$Y = Ax^{\alpha}T^{(1-\alpha)}$

Derivando (y simplificando las constantes):

$$T = c_1 x^{\frac{\alpha-\sigma\alpha}{\alpha-1-\alpha\sigma}}$$

La renta es, en consecuencia:

$$\pi(x) = c_3 x^{\frac{\alpha-\sigma\alpha}{\alpha-1-\alpha\sigma}}$$

A manera de ejemplo, para $\alpha = 0.4$ y $\sigma = 2$, la función de renta es:

$$\pi(x) = c_3 x^{0.6154}$$

BIBLIOGRAFÍA

Hayashi (1982). "Tobin´s Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation". *Econometrica,* Vol. 50, No. 1, pp 213-224.

Adda, Jerome and Rusell Cooper (2003). *Dynamic Economics. Quantitative Methods and Applications*. MIT.