

## VALOR EN RIESGO DESDE UN ENFOQUE DE CÓPULAS

Gabriel Ignacio Torres Avendaño\*  
Ana Milena Olarte Cadavid\*\*

### Resumen

*El valor en riesgo —VaR—, es una medida que cuantifica los riesgos enfrentados por un portafolio. Entre los métodos de medición del VaR están la simulación histórica; simulación Monte Carlo; modelos paramétricos y modelos de duración y convexidad. Para el cálculo del VaR, se requiere modelar los retornos del portafolio y hallar la distribución de pérdidas que los describe, tradicionalmente se han supuesto retornos normalmente distribuidos, pero la evidencia empírica muestra que éstos no se comportan así. En los últimos años, se han adelantado investigaciones para calcular el VaR utilizando cópulas, que determinan la estructura de dependencia del portafolio y de los activos riesgosos que lo conforman, sin partir de supuestos sobre sus distribuciones, obteniendo resultados más realistas y evitando así la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.*

**Palabras claves:** *valor en riesgo, simulación Monte Carlo, simulación histórica, cópulas, distribución de pérdidas, estructura de dependencia.*

### Abstract

*The value at risk —VaR—, is a measure that quantifies the risks faced by a given portfolio. There are some methods to calculate the VaR: historical simulation, Monte Carlo simulation, parametric models and duration and convexity models, among others. To calculate the VaR is required to model the portfolio returns and to find the loss distributions that describe them, traditionally those distributions*

---

\* Gabriel Ignacio Torres Avendaño, Ingeniero Industrial, Docente Investigador del Departamento de Finanzas, Universidad EAFIT, [gtorres@eafit.edu.co](mailto:gtorres@eafit.edu.co), Medellín, Colombia.

\*\* Ana Milena Olarte Cadavid, Economista, Analista Financiera, UNE EPM Telecomunicaciones. [apolartec@eafit.edu.co](mailto:apolartec@eafit.edu.co), Medellín, Colombia.

\*\*\* Agradecemos la colaboración de Angélica Domínguez estudiante de Contaduría y José Luis García estudiante de Ingeniería matemática de la Universidad EAFIT.

*are suppose to be normal distributed, but the empirical evidence shows the contrary. In the last few years, research in VaR calculation shows how copulas determine the dependence structure of a portfolio of the risky assets, without any assumptions regarding distributions, so you can find in it more realistic results and it is possible to avoid sub estimation of the value at risk of the portfolio.*

**Keywords: value at risk, Monte Carlo simulation, historical simulation, copulas, losses distributions, dependence structures.**

## **INTRODUCCIÓN**

El capital regulatorio de una empresa está determinado por los riesgos que enfrentan sus portafolios. Estos riesgos se pueden originar por variaciones en el precio de los activos financieros que componen el portafolio, refiriéndose a riesgos de mercado, entre otros.

Una medida de riesgo ampliamente aceptada en años recientes es el Valor en Riesgo —VaR—, que cuantifica los riesgos relacionados con un portafolio, convirtiéndose en una herramienta importante en la determinación de los requerimientos mínimos de capital de las instituciones financieras en el ámbito internacional, más aún cuando en el Nuevo Acuerdo de 1996<sup>1</sup>, el Comité de Basilea sugiere el uso de metodologías de medición de riesgo alternativas al modelo estándar establecido para entidades bancarias.

Tradicionalmente, para la medición del VaR se han definido cuatro grupos de modelos (Melo y Becerra, 2005). El primer grupo se refiere a modelos por simulación como la simulación histórica y simulación Monte Carlo, muy utilizado en entidades bancarias; en el segundo grupo están los modelos analíticos de

---

<sup>1</sup> Reforma al Acuerdo de Capital de Basilea, llevada a cabo en 1996, según la cual, el Comité de Basilea exige un cambio en las metodologías de medición del riesgo de mercado en las entidades financieras, en busca de una mejor gestión frente a los requerimientos mínimos de capital.

formas paramétricas con correlaciones, basados en análisis de varianzas y covarianzas, como los modelos de mezcla de Normales y Delta Gamma; en el tercer grupo se encuentran los modelos de duración y convexidades; y el cuarto grupo lo constituyen los modelos de Peor escenario (Max VaR).

En términos estadísticos, el VaR corresponde al  $\alpha$ -ésimo cuantil ( $q_\alpha$ ) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los  $(1-\alpha)\%$  peores casos de la distribución, con lo cual la pérdida de una inversión no puede exceder el VaR con probabilidad  $\alpha$  (Melo y Becerra, 2005).

Al observar la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, se puede verificar, que las pérdidas en éste son influenciadas por caídas simultáneas en sus activos riesgosos, por tanto, esta distribución depende de la distribución conjunta de los activos, y es fundamental para calcular el valor en riesgo (Giacomini, 2005).

En los métodos de medición de VaR tradicionales, la distribución conjunta de los retornos financieros ha sido modelada suponiendo que éstos están distribuidos normalmente, lo que implica una estructura de dependencia predeterminada que cumple los supuestos básicos de la distribución normal como: simetría en la distribución de los retornos, colas livianas en la distribución y dependencia lineal de los retornos que puede medirse a través de la correlación (Giacomini, 2005); además, la inferencia sobre los retornos puede basarse en análisis de media-varianza.

Sin embargo, la evidencia empírica demuestra que estos supuestos de normalidad sobre los retornos son poco apropiados y que es necesaria una herramienta más flexible para modelar la distribución marginal de los activos riesgosos, a través de las cuales obtener la distribución conjunta del portafolio.

Se necesitan, además, medidas de dependencia alternativas a la correlación lineal, dado que ésta presenta algunas limitaciones. Entre ellas: el coeficiente de correlación supone variables normalmente distribuidas; no es invariante ante transformaciones de la variable; está definida si la media y la varianza de las variables son finitas, por tanto, la correlación no es una medida de dependencia apropiada para variables con distribuciones de colas pesadas, donde las medias y varianzas pueden ser infinitas; no captura las relaciones de dependencia no lineal que existe entre muchas variables, como son los activos financieros.

Algunas medidas de dependencia utilizadas, además del coeficiente de correlación lineal, son: la correlación de Pearson, correlación de Spearman y la correlación de Kendall<sup>2</sup>. Una medida alternativa de dependencia muy útil para modelar la distribución multivariada es la Función Cópula, que une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones de probabilidad marginales univariadas, y así determinar la estructura de dependencia, tanto de la función de distribución conjunta del portafolio, como de las marginales de cada activo riesgoso (Down, 2004).

A través de cópulas, se libera la modelación de la distribución de los retornos de un portafolio del supuesto usual de normalidad, por lo que distribuciones marginales con diferentes estructuras de dependencia pueden unirse y darle una estructura de dependencia particular a la distribución conjunta del portafolio, lo cual parece arrojar una descripción, más realista, de las características empíricas de la distribución de los retornos de un portafolio.

---

<sup>2</sup> Correlación de Pearson ( $r$ ): indica la calidad del ajuste del método de mínimos cuadrados aplicado a un conjunto de datos. Implica dirección de causalidad asumiendo una relación lineal. Correlación de Spearman: es una estadística no paramétrica que cuantifica la correlación entre dos variables, no implica relaciones causales o un modelo de probabilidad, no asume normalidad.

Correlación de Kendall ( $\tau$ ): es usado para medir el grado de correspondencia entre dos rankings y mide la significancia de esta correspondencia. No asume normalidad.

En este estudio, se utilizaron distribuciones marginales empíricas para modelar el comportamiento de los retornos de las acciones Colombianas analizadas, dado que éstos no se ajustaban adecuadamente a otras distribuciones. Sin embargo, como ejercicio académico se asumieron también distribuciones marginales uniformes y t-student para los retornos, aunque el ajuste no era bueno, estas distribuciones fueron las más cercanas a la región de no rechazo dentro de las pruebas de ajuste de Kolmogorov Smirnov<sup>3</sup> (Canavos, 1988). Adicionalmente, el uso de la t-student se justifica por la no independencia presentada por los retornos de las acciones analizadas, dado que la correlación de Kendall resultó positiva en todos los casos, y porque esta distribución permite modelar adecuadamente las colas pesadas; y la distribución uniforme es utilizada como modelo de máxima incertidumbre, donde se le asigna la misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos.

---

<sup>3</sup> Valores críticos para las pruebas de ajuste de Kolmogorov-Smirnov:

Para  $\alpha=1\%$ , el valor crítico es  $1.63/\sqrt{n}$

Para  $\alpha=5\%$ , el valor crítico es  $1.36/\sqrt{n}$

Para  $\alpha=10\%$ , el valor crítico es  $1.22/\sqrt{n}$

# 1. MARCO TEÓRICO

## 1.1. VALOR EN RIESGO

El Valor en Riesgo se define como la máxima pérdida posible de un portafolio para un nivel de confianza  $(\alpha)^4$  y un período de tenencia dados. En términos estadísticos, el VaR corresponde al  $\alpha$ -ésimo cuantil ( $q_\alpha$ ) de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los  $(1-\alpha)\%$  peores casos de la distribución, con lo cual la pérdida de una inversión no puede exceder el VaR con probabilidad  $\alpha$  (Melo y Becerra, 2005).

Sea  $w = (w_1, \dots, w_d)^T \in R^d$  un portafolio con posiciones en  $d$  activos financieros, donde  $w_i$  es el peso de cada activo  $i$  en el portafolio y  $S_t = (S_{1,t}, \dots, S_{d,t})^T$  un vector aleatorio no negativo de los precios de los activos en el tiempo  $t$ , donde  $S_{i,t}$  es el precio de cada activo  $i$  del portafolio en el tiempo  $t$ . El valor del portafolio  $w$  está dado por (Giacomini, 2005):

$$V_t = \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t}$$

La variable aleatoria  $L_{t+\tau} = (V_{t+\tau} - V_t)$  es llamada función de pérdidas y ganancias, la cual expresa el cambio en el valor del portafolio entre  $\tau$  períodos, donde  $\tau$  es el número de períodos proyectados de la variable aleatoria. Dado  $V_t$  y  $V_{t+\tau}$ , la función  $L_{t+\tau}$  está dada por:

$$\begin{aligned} L_{t+\tau} &= (V_{t+\tau} - V_t) \\ &= \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t+\tau} - \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t} \\ &= \sum_{j=1}^d w_j (S_{j,t+\tau} - S_{j,t}) \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup> El nivel de confianza se define como la probabilidad de que no se alcance el nivel de pérdida definido por el VaR.

Considerando los log-retornos como  $X_{t+\tau} = LnS_{t+\tau} - LnS_t$  y haciendo  $\tau=1$  se tiene que  $L_{t+1} = \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t} (e^{X_{j,t+1}} - 1)$ , como L es una variable aleatoria continua se sabe que  $F_L(x) = P(L \leq x)$ . Con esto, el valor en riesgo a un nivel de  $\alpha$  para el portafolio w está definido como el  $\alpha$ -cuantil para  $F_L$ :  $VaR(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha)$ . La función de distribución de pérdidas  $F_L$  depende del proceso aleatorio asociado a los activos riesgosos que influyen en las pérdidas y ganancias del portafolio.

En la literatura han sido ampliamente aceptados dos grandes grupos de modelos tradicionales de medición del Valor en Riesgo: los modelos analíticos de formas paramétricas y los modelos por simulación.

**1.1.1 Modelos analíticos de formas paramétricas.** Entre los modelos analíticos de formas paramétricas, están los modelos que calculan el VaR partiendo de un supuesto para la función de pérdidas y ganancias. Comúnmente se suponen distribuciones normales o t-student, donde la distribución de la función de pérdidas y ganancias puede ser descrita por sus dos primeros momentos y a partir de éstos se construye el VaR. En la t-student, para determinados grados de libertad, se presenta una curtosis más alta que la normal y por tanto los eventos extremos tienen mayor probabilidad de ocurrencia. Con esto, el VaR suponiendo normal o t-student puede ser calculado de la siguiente manera:

$$P[r_t \geq VaR] = P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha \quad P[r_t \geq VaR] = 1 - \alpha$$

$$\frac{VaR - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \equiv Z_\alpha \quad VaR = t_v^{-1}(\alpha) \equiv t_{v,\alpha}$$

$$VaR = \mu + \sigma Z_\alpha$$

Donde  $r_t$  son los retornos de los activos,  $\Phi^{-1}(\bullet)$  es la función inversa de la distribución normal acumulada,  $Z_\alpha$  es el  $\alpha$ -ésimo cuantil de una distribución normal estándar,  $t_v^{-1}(\bullet)$  es la función inversa de la distribución t y  $t_{v,\alpha}$  es el  $\alpha$ -

ésimo cuantil de una distribución  $t$  con  $\nu$  grados de libertad. En la práctica se ha observado que el VaR con distribución  $t$  es más alto que el VaR asumiendo normalidad, en consecuencia, el VaR por normalidad subestima el riesgo en casos donde la distribución de pérdidas y ganancias presenta colas pesadas.

A este grupo pertenecen también, los llamados modelos de varianzas y covarianzas, donde se parte de datos históricos para construir una matriz de correlaciones en un período de tenencia y los retornos de los activos se distribuyen normalmente. En este caso, el VaR es un múltiplo de la desviación típica del portafolio, que parte de la matriz de varianzas-covarianzas de los activos riesgosos que componen el portafolio. Así el VaR será:  $VaR = -P_o \alpha \sigma_p$ .

Donde  $P_o$  el valor inicial del portafolio,  $\alpha$  el nivel de confianza seleccionado y  $\sigma_p$  la desviación típica del portafolio. En estos modelos se supone que la volatilidad de los retornos es constante en el tiempo, lo que no es necesariamente cierto, por lo que se hace la modelación de la volatilidad ( $\sigma$ ) a través de modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heterocedasticity Models) y GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) que suponen varianza condicional no constante (Tsay, 2002).

**1.1.2. Modelos por simulación.** Entre éstos se encuentra el modelo por simulación histórica, que parte de datos históricos de la serie de retornos de los activos financieros, los cuales no dependen de ningún supuesto sobre su distribución. El VaR es calculado como el  $\alpha$ -ésimo percentil de la distribución empírica de pérdidas y ganancias, suponiendo que la distribución no cambia en el tiempo (Melo y Becerra, 2005), en este caso, se utilizan datos del pasado como una predicción de lo que ocurriría en el futuro, con lo cual, se valoran los portafolios replicando diferentes pautas temporales pasadas en las variables asumidas como activos riesgosos.

También hacen parte de este grupo los modelos de simulación Montecarlo, donde se asume una distribución sobre los errores del modelo que describe la dinámica estocástica de los retornos, cuando esto es posible, y se supone, además, un modelo de comportamiento para cada activo riesgoso. La determinación de los movimientos de los activos riesgosos mediante Montecarlo, se basa en la simulación de un elevado número de posibles valores para los activos riesgosos mediante la definición de un proceso estocástico y la estimación de sus parámetros, como la media y la varianza, a través del análisis de series históricas (por ejemplo, suponiendo que los precios del portafolio siguen un determinado proceso aleatorio) (Gento, 2002). Con este supuesto, estos modelos tratan de estimar el cambio en el valor del portafolio a través de un gran número de escenarios generados aleatoriamente, con lo cual la simulación Montecarlo representa una cantidad de posibles trayectorias del proceso del valor del portafolio, con base en esto se determina la distribución esperada.

**1.1.3 Valor en Riesgo con Cópulas.** La función Cópula une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones marginales univariadas, determinando la estructura de dependencia, tanto de la función de distribución conjunta del portafolio, como de las marginales de cada activo riesgoso (Down, 2004).

La función Cópula puede ser usada para resolver problemas de riesgo multivariado y calcular el VaR de un portafolio donde los activos riesgosos que lo componen se distribuyen de forma no normal. Permite calcular las relaciones de dependencia sin incurrir en las desventajas que presenta la correlación lineal, además puede ser modelada la dependencia de valores extremos.

**1.1.3.1. Función cópula.** Una cópula d-dimensional es una función  $C:[0,1]^d \rightarrow [0,1]$  que cumple las siguientes propiedades para cada  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)^T \in [0,1]^d$  y  $j \in \{1, \dots, d\}$  (Giacomini, 2005):

1. Si  $u_j = 0$  entonces  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$  para cada  $j = 1 \dots d$
2.  $C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j$
3. Para cada  $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)^T \in [0,1]^d$ ,  $v_j \leq u_j$ ,  $V_c(u, v) \geq 0$

Donde  $V_c(u, v)$  está dada por  $\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(g_{i_1}, \dots, g_{i_d})$  y  $g_{j1} = v_j$  y  $g_{j2} = u_j$

Con estas propiedades puede decirse que las cópulas son funciones uniformes multivariadas, crecientes y no negativas.

El teorema de Sklar (Giacomini, 2005), muestra que cada función de distribución puede ser descompuesta en sus distribuciones marginales y al menos una cópula, la cual será única si las distribuciones marginales y la multivariada son continuas.

Sea  $F$  una función de distribución d-dimensional con marginales  $F_1, \dots, F_d$ , entonces existe una cópula  $C$  con:

$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$  para cada  $x_1, \dots, x_d \in \bar{R}$ . Si  $F_1, \dots, F_d$  son continuas, entonces  $C$  es única. Por otro lado, si  $C$  es una cópula y  $F_1, \dots, F_d$  son funciones de distribución, entonces la función  $F$  definida anteriormente es una función de distribución conjunta con marginales  $F_1, \dots, F_d$ .

Así, para una distribución conjunta  $F$  con marginales continuas  $F_1, \dots, F_d$ , la cópula única  $C$  para todo  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)^T \in [0,1]^d$  está definida como:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)\}$$

Para una cópula continua, la densidad cópula está definida por:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1, \dots, u_d}$$

De manera específica, la cópula de una variable aleatoria se define de la siguiente manera (Giacomini, 2005):

Sea  $X = (X_1, \dots, X_d)^T$  un vector con distribución  $X \sim F_X$  y marginales continuas  $X_j \sim F_j$ . La cópula de  $X$  es la función de distribución  $C_X$  de  $u = (u_1, u_2, \dots, u_d)^T \in [0,1]^d$  donde  $u_j = F_{X_j}(x_j)$ :

$$C_X(u_1, \dots, u_d) = F_X \{F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)\}$$

Para variables aleatorias independientes  $X_1, \dots, X_d$  la cópula de  $X$  es el producto definido por:

$$\begin{aligned} C_X(u_1, \dots, u_d) &= F_X(x_1, \dots, x_d) \\ &= \prod_{j=1}^d F_{X_j}(x_j) \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra como el producto cópula es el mismo para cualquier distribución marginal y determina la estructura de dependencia entre variables univariadas con marginales arbitrarias.

Para una variable aleatoria  $X = (X_1, \dots, X_d)^T$  la densidad cópula  $c_x$  está dada por:

$$c_X(u_1, \dots, u_d) = \frac{f\{F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)\}}{\prod_{j=1}^d f_j\{F_{X_j}^{-1}(u_j)\}}$$

Por otra parte, la función cópula puede asumir diferentes formas (Giacomini, 2005), entre las más importantes se tienen:

**1.1.3.1.1. Cópula Gaussiana.** Representa la estructura de dependencia para una distribución normal multivariada, lo que significa que distribuciones marginales normales combinadas con cópula gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. Una expresión para la cópula gaussiana está dada por:

$$C_{\Psi}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = F_Y \{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d) \}$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} 2\pi^{-\frac{d}{2}} \text{abs}(\psi)^{-\frac{d}{2}} e^{\left( -\frac{1}{2} r^T \psi^{-1} r \right)} dr_1 \dots dr_d$$

Donde  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)^T \sim N_d(0, \psi)$  y  $r = (r_1, \dots, r_d)^T$

**1.1.3.1.2. t-cópula student.** La t-cópula, conteniendo la estructura de dependencia forma la distribución t multivariada. La t-cópula student está dada por:

$$C_{v,\psi}(u_1, \dots, u_d) = t_{v,\psi} \{ t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d) \}$$

Donde  $t_v^{-1}$  es la función cuantil para la distribución t univariada y  $t_{v,\psi}$  es la función de distribución de  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)^T \sim t_d(v, 0, \psi)$

**1.1.3.1.3. Cópula arquimediana.**  $\phi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$  son funciones continuas, estrictamente decrecientes y convexas con  $\phi(1) = 0$ . La función  $C^d: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$

$$C^d(u_1, \dots, u_d) = \phi^{[-1]} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_d) \}$$

es una cópula llamada cópula arquimediana y las funciones  $\phi$  sus generadoras.

Recientemente, en la literatura se ha venido trabajando con cópulas que tienen una estructura más simple y que pertenecen a la familia de cópulas caracterizadas por un solo parámetro. Para el caso particular de cópulas 2-dimensionales se tienen las siguientes formas de cópulas (Rank, 2002):

**1.1.3.1.4. Cópula de Frank.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{Frank}(u, v) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] & \forall \theta \in ]-\infty, \infty[ \setminus \{0\} \\ uv & \text{para } \theta = 0 \end{cases}$$

**1.1.3.1.5. Cópula de Gumbel-Hougaard.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{GH}(u, v) = \exp\left\{-\left[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}$$

El parámetro  $\theta$  puede tomar todos los valores en el intervalo  $[1, \infty]$

**1.1.3.1.6 Cópula de Clayton.** La forma de esta cópula 2-dimensional está dada por:

$$C_{Clayton}(u, v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}$$

El parámetro  $a$  puede tomar todos los valores en el intervalo  $]0, \infty[$

**1.1.3.2. Estado del arte del valor en riesgo a través de cópulas.** Una revisión de los estudios de aplicación de cópulas en finanzas se presenta a continuación.

Una aplicación de cópulas utilizadas para la administración de riesgos la presenta la Banca Romana, donde Romero (2002) en su estudio *Applying Copula Function to Risk Management*, pretende mostrar el uso de una función cópula diferente de la gaussiana que capturara eventos extremos de manera efectiva. Probaron que cópulas elípticas son particularmente fáciles de implementar en modelos de simulación Montecarlo para estimar medidas de riesgo. Probaron también, para 10 acciones italianas importantes, que asumir una distribución normal multivariada para los retornos subestima el VaR y la pérdida esperada de un portafolio, mientras que a través de una cópula t-student obtuvieron una estimación más adecuada de las medidas de riesgo.

De igual manera, en la Universidad Humboldt de Berlín, Giacomini (2005) en su estudio *Risk Management with Copulae* utilizó tres diferentes copulas (Gumbel, Clayton y Gaussian) para estimar el valor en riesgo de un portafolio 2-dimensional, verificando que la estructura de dependencia de los activos riesgosos que componían el portafolio estaba representada de forma similar en

las tres cópulas, pero que la estimación por cópulas Clayton y Gaussian sobrestimaba el VaR, mientras que por Gumbel arrojaba resultados más cercanos a los deseables dado que parecía representar más exactamente la relación de dependencia entre las variables. Lo que los llevó a concluir que en la aplicación de cópulas, es crucial para la obtención de resultados realistas y útiles la elección adecuada de la cópula que determine la estructura de dependencia de los activos riesgosos del portafolio, dado que de esto dependerá si los requerimientos de capital para las instituciones están siendo subestimados o sobreestimados.

Por otra parte, en la Universidad de Cagliari en Italia, Micocci et al. (2004) en el estudio titulado *Backtesting value-at-risk estimation with non gaussian marginals* usaron cópulas para modelar la estructura de dependencia entre los retornos de los activos sin hacer uso de supuestos de normalidad en la distribución conjunta y en las marginales. Utilizaron las funciones cópula arquimediana y t-student para modelar la estructura de dependencia de tres activos riesgosos que conformaban un portafolio (luego ampliaron el portafolio a 22 activos riesgosos) y calcular la probabilidad de pérdida del portafolio, resultados que fueron comparados con una simulación Montecarlo clásica, llegando a la conclusión que, evidentemente, los retornos de los activos riesgosos poseen colas pesadas que hacen inadecuados los supuestos de normalidad en la función de distribución marginal de éstos, por lo que el Montecarlo clásico resultó ser poco adecuado para modelar distribuciones leptocúrticas, mientras que la cópula t-student parece ajustar mejor los cuantiles altos de la distribución de los retornos.

También en la Universidad de Oxford se han venido adelantando investigaciones para la aplicación de cópulas, es el caso del estudio llamado *Improving VaR Calculations by Using Copulas and non-Gaussian Margins*, donde Rank (2002) tenía como objetivo aplicar un método alternativo a los métodos tradicionales para el cálculo del valor en riesgo de un portafolio financiero. Para lo cual se tomaron datos históricos de los tipos de cambio GBP/DEM y USD/DEM y se

calculó el VaR del portafolio conformado por estos tipos de cambio a través de simulación Montecarlo y de cópulas Frank y Gumbel-Hougaard, de manera que se pudieran comparar los resultados de un método tradicional y uno alternativo como las cópulas. Como conclusiones encontraron que la copula Gumbel Hougaard es adecuada para describir estructuras de dependencia positivas. Además, al comparar la cópula de Gumbel Hougaard con la de Frank, se observa que son más realistas los resultados del VaR con la copula Frank, por lo cual es de mayor aceptación. En general, concluyeron que el método de cópulas es necesario si se quieren considerar funciones de distribución arbitrarias para las marginales, además éste arroja resultados más realistas que los obtenidos por métodos tradicionales, como el Montecarlo y el de varianza-covarianza, si la cópula es usada con marginales distribuidas como una t-student.

A los estudios anteriores sobre cópulas y valor en riesgo, se une el estudio realizado por la Reserva Federal de Nueva York llamado *A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risk*, donde Rosenberg et al. (2004) usan el método de cópulas para construir la distribución de riesgo conjunta para un banco activo internacionalmente, de manera que pudieran combinar los diferentes tipos de riesgo en una sola distribución, como resultado obtuvo una distribución conjunta, formada por distribuciones marginales consistentes y realistas, que conserva importantes propiedades de los riesgos individuales. Sin embargo, advierten que la medida del riesgo es más exacta cuando se agregan el riesgo de mercado y de crédito, que cuando se agregan el de mercado, de crédito y el operacional, ya que este requiere un trato especial para ser agregado.

Finalmente, dando un repaso generalizado de los estudios que se han venido realizando recientemente sobre la utilización de cópulas se tiene que Embrechts and Straumann (1999) estuvieron entre los primeros en introducir esta herramienta a la literatura financiera; Li (2000) generó una aplicación al riesgo de crédito y a derivados. Adicionalmente, algunos estudios se centraron

en la agregación de diferentes tipos de riesgo como Wang (1999, 2000) que modeló la agregación del amplio portafolio de riesgo que enfrenta una aseguradora con un altamente diversificado conjunto de distribuciones marginales de los riesgos; Ward and Lee (2002) aproximaron el problema de agregación de riesgos usando una cópula gaussiana.

## **2. METODOLOGÍA**

### **2.1. DESCRIPCIÓN DE LAS SERIES**

Como activos riesgosos se utilizaron datos diarios de cuatro acciones colombianas (Suraminv, Bogotá, Inverargos y Colinvers) para el período comprendido entre el 15 de marzo de 2004 y el 15 de marzo de 2007, para un total de 733 días de negociación. Las acciones seleccionadas hacen parte de las acciones de mayor bursatilidad en el mercado.

La clasificación de las acciones colombianas, basadas en su bursatilidad se encuentra en el reporte mensual generado por la Superintendencia Financiera de Colombia<sup>5</sup>, partiendo de este reporte para diciembre de 2006, las acciones de alta bursatilidad en Colombia son: Almacenes Éxito S.A., Bancolombia S.A., Cementos Argos S.A., Compañía Colombiana de Inversiones S.A., Inversiones Argos S.A., Suramericana de Inversiones S.A., Grupo Nacional de Chocolates S.A., Interbolsa S.A., Tablemac S.A., Banco de Bogotá S.A., Coltejer, Paz del Río.

Teniendo en cuenta las series de precios de las acciones seleccionadas, los retornos son calculados como la diferencia entre el logaritmo de los precios para los dos períodos consecutivos, lo cual genera una serie de retornos compuestos continuos. Para los retornos diarios sólo se tomarán en cuenta los precios de

---

<sup>5</sup> De acuerdo con el artículo 1.2.1.1 de la resolución 1200 de 1995, modificado mediante resoluciones 638 del 29 de septiembre de 1998 y 521 del 30 de julio de 2002, la Superintendencia Financiera de Colombia informa el Índice de Bursatilidad Accionaria para las acciones que se negocian en bolsa, correspondiente al mes de diciembre de 2006.

cierre diarios, sin realizar interpolaciones o ajustes para los fines de semana y festivos (Maya y Torres, 2004). Adicionalmente, se realizaron pruebas de normalidad y de mejor ajuste mediante Best Fit para los retornos de las acciones seleccionadas, las pruebas rechazaron la existencia de normalidad según el estadístico de Jarque Bera (ver Tabla 1), el mejor ajuste lo presentaron distribuciones empíricas, seguidas de t-student y logística, aunque se rechaza la hipótesis en todos los casos con el estadístico de Kolmogorov-Smirnov (ver Apéndice I).

**Tabla 1. Estadística descriptiva de retornos de las acciones, 2004-2007**

	<b>Suraminv</b>	<b>Bogotá</b>	<b>Inverargos</b>	<b>Colinvers</b>
Media	0.0015	0,0013	0,0014	0,0015
Mediana	0,0011	0,0000	0,0011	0,0010
Máximo	0,1979	0,1196	0,2286	0,1955
Mínimo	-0,2050	-0,1050	-0,1610	-0,1858
Desviación estándar	0,0265	0,0196	0,0253	0,0260
Coeficiente de asimetría	-0,3980	-0,1334	0,2400	-0,5746
Curtosis	15,9085	13,3323	17,7228	16,7156
<b>Jarque-Bera</b>	<b>5108,5</b>	<b>3262,7</b>	<b>6600,2</b>	<b>5769,9</b>
<b>Probabilidad</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>

Fuente: cálculos de los autores.

Tal como se observa en la Tabla 1, el coeficiente de asimetría está sugiriendo la existencia de colas en las distribuciones de los retornos, donde al parecer Suraminv, Bogotá y Colinvers presentan distribuciones con sesgo izquierdo dado el signo negativo del estadístico, mientras que Inverargos tiene distribución con sesgo derecho. En cuanto a la curtosis, parece que los retornos de las acciones poseen distribuciones leptocúrticas, dado que el valor del estadístico es mayor que 3 en todos los casos, evidenciando la existencia de colas pesadas y la necesidad de implementar una metodología de cálculo del VaR sin partir de supuestos de normalidad para los retornos de las acciones.

## 2.2. CÁLCULO DEL VAR CON CÓPULAS

A partir de las series de los retornos de las acciones, se determina la distribución marginal que recoge más adecuadamente el comportamiento de cada activo riesgoso (retornos de las acciones), para lo cual se realiza un ajuste entre varias distribuciones que puedan describir a cada activo riesgoso; a través de pruebas estadísticas y con los valores críticos de Kolmogorov-Smirnov, Chi-cuadrado y Anderson-Darling se identifica cual es la distribución que da mejor ajuste a las marginales de cada activo riesgoso.

Los parámetros  $\delta_j$  de las distribuciones marginales determinadas para cada activo riesgoso se estiman por máxima verosimilitud, para luego ser usados en la determinación de la estructura de dependencia a través del parámetro  $\theta$  en la cópula. Por tanto, el problema de maximización a resolver será:  $\max_{\delta} \lambda_j(\delta_j)$  y la función de log-verosimilitud de cada distribución marginal está dada por:

$$\lambda_j(\delta_j) = \sum_{t=1}^T \ln f_j(x_{j,t}; \delta_j)$$

Se estiman los parámetros  $\delta_j = \arg \max_{\delta} \lambda_j(\delta_j)$

Una vez estimados los parámetros de las marginales, se selecciona la función de distribución conjunta de los activos riesgosos, es decir, se obtiene la cópula y se estiman el parámetro  $\theta$  que revela la estructura de dependencia de los activos riesgosos. Por tanto, la cópula está definida como:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

Donde las  $F_i$  son las distribuciones marginales y las cópulas  $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  utilizadas fueron la cópula de Gumbel-Hougaard, la cópula de Frank y la de Clayton, cuyo parámetro  $\theta$  debe ser estimado por máxima verosimilitud. Así, desde la probabilidad acumulada  $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  se obtiene la función de

densidad de probabilidad, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial_{x_1} \partial_{x_2}} C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1), v=F_2(x_2)} f(x_1) f(x_2)$$

Para las cópulas de Frank, Gumbel-Hougaard y Clayton se calculó la derivada parcial y se obtuvieron los siguientes resultados (ver Apéndice II):

Cópula de Frank  $\frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C_{Frank}(u, v) = \frac{e^{-\theta u} e^{-\theta v} (1 - e^{-\theta}) \theta}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$

Cópula de Gumbel  $\frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C_{GH}(u, v) = \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \frac{(-Lnv)^{\theta-1}}{v} \times e^{-\sum^{1/\theta}} (\sum^{-2(\theta-1)/\theta} + (\theta-1) \sum^{-(2\theta-1)/\theta})$   
 Donde  $\sum = (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta$

Cópula de Clayton  $\frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C_{CL}(u, v) = (a+1)u^{-(a+1)}v - (a+1)[u^{-a} + v^{-a} - 1]^{-\frac{(2a+1)}{a}}$

Con estas ecuaciones se obtiene la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = L((x_{1,1}, x_{2,1}), \dots, (x_{1,N}, x_{2,N}); \theta) = \prod_{j=1}^N f(x_{1,j}, x_{2,j})$$

Con la maximización de  $L(\theta)$  se obtiene el parámetro estimado  $\hat{\theta}$  (ver Apéndice III).

Con esto, se generan números pseudos-aleatorios que obedecen a la estructura de dependencia de la cópula seleccionada (donde están insertos el parámetro  $\hat{\theta}$  y las distribuciones marginales de los activos riesgosos), formando posibles escenarios para el portafolio. Para esto, se generan dos números pseudos-aleatorios  $u$  y  $w$  distribuidos uniformemente en  $[0,1]$ , se calcula  $v = C_u^{-1}(w)$  para las cópulas de Frank, Gumbel Hougaard y Clayton. Así, se determinan

$x_1 = F_1^{-1}(u)$  y  $x_2 = F_2^{-1}(v)$  para obtener un par  $(x_1, x_2)$  de números pseudos-aleatorios con la estructura de dependencia deseada.

Finalmente, se calcula el valor en riesgo del portafolio, para lo cual se obtiene el VaR a niveles de confianza del 90% ( $\alpha_1 = 10\%$ ), 95% ( $\alpha_2 = 5\%$ ), y 99% ( $\alpha_3 = 1\%$ ). El número de pérdidas subestimadas con relación al número total de valores testeados da tres valores  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  que pueden ser comparados con los tres cuantiles  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ .

### 3. RESULTADOS EMPÍRICOS

En este estudio se simularon diferentes portafolios conformados por dos activos riesgosos, que en este caso son las acciones colombianas Suraminv, Bogotá, Inverargos y Colinvers. Se utilizaron las cópulas de Frank, Gumbel y Clayton como distribuciones conjuntas para el portafolio, mientras que las distribuciones marginales ajustadas a los retornos de las acciones fueron las distribuciones empírica, uniforme y t-student. Como se dijo anteriormente, la t-student fue implementada como ejercicio académico dado que las pruebas de ajuste fueron rechazadas. Sin embargo, en la literatura existente con cópulas es común encontrar el uso de distribuciones marginales t-student.

Para obtener el parámetro  $\theta$  de las cópulas, que representa la estructura de dependencia de los activos riesgosos del portafolio, es necesario encontrar la correlación de los activos a través del coeficiente Tao de Kendall<sup>6</sup>, partiendo de éste se estima por máxima verosimilitud el Theta para cada cópula, tal como se muestra en la Tabla 2.

---

<sup>6</sup> Medida de correlación alternativa a la correlación de Spearman y de Pearson que no supone normalidad en las variables y es usada para medir el grado de correspondencia entre dos rankings, mide la significancia de esta correspondencia.

**Tabla 2. Parámetros utilizados en las Cópulas**

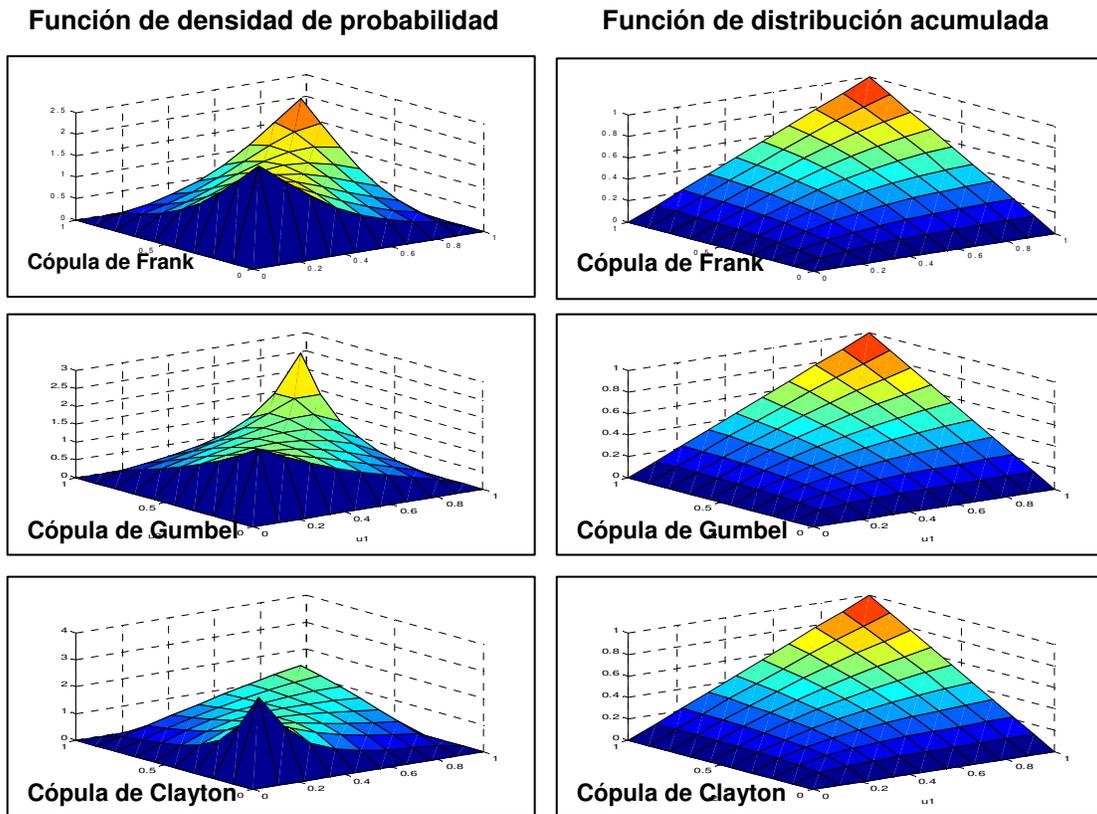
Portafolios	Tao de Kendall ( $\tau$ )	Theta ( $\theta$ )		
		Frank	Gumbel	Clayton
Suraminv-Bogotá	0.3756	3.8340	1.6015	1.2030
Suraminv-Inverargos	0.4888	5.5362	1.9561	1.9123
Suraminv-Colinvers	0.4886	5.5322	1.9553	1.9123
Bogotá-Inverargos	0.3210	3.1597	0.9456	1.4728
Bogotá-Colinvers	0.2884	2.7869	1.4052	0.8104
Inverargos-Colinvers	0.4247	4.5113	1.7382	1.4763

Fuente: cálculos de los autores.

Como se observa en la tabla, las acciones que conforman cada portafolio están positivamente correlacionadas, donde la mayor correlación la presentan las acciones Suraminv-Inverargos y Suraminv-Colinvers. El parámetro  $\theta$  para cada cópula está dentro de los valores teóricos que pueden tomar en cada caso. Así,  $\theta_{Frank} \in ]-\infty, \infty[$ ,  $\theta_{Gumbel} \in [1, \infty[$  y  $\theta_{Clayton} \in ]0, \infty[$ . Este parámetro  $\theta$  es el que muestra la estructura de dependencia del portafolio.

Con esta información, y con las distribuciones marginales de los retornos simuladas, se calcularon las cópulas para cada portafolio (ver Figura A1, Apéndice IV) y con éstas se obtuvo el VaR de los portafolios definidos anteriormente, donde se observa los porcentajes de pérdida que puede obtenerse simultáneamente, en un día, en las acciones que conforman un portafolio a niveles de confianza del 99%, 97%, 95% y 90%.

**Figura 1. Cópulas de Frank, Gumbel y Clayton para Suraminv-Bogotá**



Adicionalmente, se calcula el VaR a través del método de simulación histórica para efectos de comparación de resultados, donde se hacen visibles las diferencias entre el VaR con Cópulas y con el método tradicional de simulación histórica.

La Tabla 3 resume los resultados del VaR a través de Cópulas y de simulación histórica para los seis portafolios conformados por dos acciones cada uno. Además se observa el resultado para cada tipo de distribuciones marginales utilizadas, es decir, las cópulas de Frank, Gumbel y Clayton para los activos riesgoso con distribuciones marginales empíricas, uniformes y t-student.

**Tabla 3. Resultados del VaR calculado por el Método de Cópulas y por el Método de Simulación Histórica**

Portafolio	Cuantiles	VAR																				Simulación Histórica	
		Frank						Gumbel						Clayton									
		Marginales Empíricas		Marginales Uniformes		Marginales t-student		Marginales Empíricas		Marginales Uniformes		Marginales t-student		Marginales Empíricas		Marginales Uniformes		Marginales t-student					
Suraminv- Bogotá	1%	Suraminv	Bogotá	Suraminv	Bogotá	Suraminv	Bogotá																
	3%																						
	5%																						
	10%																						
Suraminv-Inverargos	1%	Suraminv	Inverargos	Suraminv	Inverargos	Suraminv	Inverargos																
	3%																						
	5%																						
	10%																						
Suraminv-Colinvers	1%	Suraminv	Colinvers	Suraminv	Colinvers	Suraminv	Colinvers																
	3%																						
	5%																						
	10%																						
Bogotá-Inverargos	1%	Bogotá	Inverargos	Bogotá	Inverargos	Bogotá	Inverargos																
	3%																						
	5%																						
	10%																						
Bogotá-Colinvers	1%	Bogotá	Colinvers	Bogotá	Colinvers	Bogotá	Colinvers																
	3%																						
	5%																						
	10%																						
Inverargos- Colinvers	1%	Inverargos	Colinvers	Inverargos	Colinvers	Inverargos	Colinvers																
	3%																						
	5%																						
	10%																						

Fuente: cálculos de los autores.

Nota: Los grados de libertad utilizados para obtener las distribuciones t-student fueron obtenidos de del best fit realizado a las series. Los grados de libertad para cada acción son: Suraminv (1.6831), Bogotá (1.3014), Inverargos (1.5542) y Colinvers (2.0789).

De acuerdo con los resultados de la Tabla 3, para el portafolio conformado por Suraminv-Bogotá, el VaR calculado con distribuciones marginales empíricas de los retornos presenta un mayor porcentaje de pérdida con la cópula de Clayton a un nivel de confianza del 99%, mientras que las cópulas de Frank y de Gumbel muestran igual porcentaje de pérdida al mismo nivel de confianza. Así, en este portafolio pueden perderse simultáneamente un 4,1% en Suraminv y un 1,3% en Bogotá según las cópulas de Frank y Gumbel, mientras que con Clayton la pérdida sería de 5,6% en Suraminv y de 2,2% en Bogotá con una probabilidad del 1%.

Al comparar estos resultados con la simulación histórica, puede observarse como este método sobrestima la pérdida en el portafolio, dado que el porcentaje de pérdida está muy por encima de los observados con las tres cópulas, por tanto el valor del portafolio en un día es menor calculado con el método tradicional que con cópulas (ver Tabla 4), por lo que el capital regulatorio podría ser mayor al verdaderamente requerido. El que la simulación histórica sobrestime la pérdida de valor del portafolio también se debe a que el mercado colombiano estuvo afectado por momentos históricos muy extremos como la caída de las acciones en junio de 2006, lo que afecta la información recogida por este método de simulación para calcular el VaR.

**Tabla 4. Valor del portafolio estimado con método tradicional y alternativo**

Portafolios	Dato histórico en t	Dato histórico en t+1	Valor del Portafolio en t+1 ( $\alpha=1\%$ )									Simulación Histórica
			Frank			Gumbel			Clayton			
			Empírica	Uniforme	t-student	Empírica	Uniforme	t-student	Empírica	Uniforme	t-student	
Suraminv	18,100	18,280	17,352	17,446	15,346	17,352	17,429	15,077	17,082	17,087	15,346	16,507
Bogotá	29,500	29,500	29,095	28,862	26,969	29,095	28,814	26,724	28,851	27,977	26,969	27,515
Portafolio completo	47,600	47,780	46,447	46,308	42,315	46,447	46,243	41,801	45,933	45,064	42,315	44,022
Suraminv	18,100	18,280	17,087	17,446	15,616	17,087	17,352	15,197	16,855	17,073	15,466	16,507
Inverargos	11,160	11,280	10,969	10,919	9,685	10,969	10,704	9,424	10,660	10,479	9,585	10,340
Portafolio completo	29,260	29,560	28,056	28,365	25,300	28,056	28,057	24,621	27,516	27,551	25,051	26,847
Suraminv	18,100	18,280	17,352	17,421	16,963	17,352	17,352	16,813	17,082	17,073	16,274	16,507
Colinvers	22,040	22,340	21,359	21,307	20,738	21,359	21,232	20,548	21,049	20,710	19,927	20,160
Portafolio completo	40,140	40,620	38,711	38,728	37,701	38,711	38,585	37,361	38,131	37,783	36,201	36,667
Bogotá	29,500	29,500	28,851	28,881	27,138	28,851	29,109	28,192	28,117	27,977	29,500	27,515
Inverargos	11,160	11,280	10,969	10,813	9,585	10,969	10,930	10,327	10,488	10,497	11,160	10,340
Portafolio completo	40,660	40,780	39,820	39,694	36,722	39,820	40,040	38,519	38,604	38,474	40,660	37,854
Bogotá	29,500	29,500	29,095	28,916	28,437	29,095	28,904	28,437	28,606	28,189	27,947	27,515
Colinvers	22,040	22,340	21,359	21,419	20,738	21,359	21,394	20,738	20,738	20,948	20,117	20,160
Portafolio completo	51,540	51,840	50,454	50,335	49,175	50,454	50,298	49,175	49,344	49,136	48,065	47,675
Inverargos	11,160	11,280	10,969	10,798	10,488	10,809	10,756	10,488	10,648	10,497	10,066	10,340
Colinvers	22,040	22,340	21,049	21,355	20,738	20,738	21,307	20,738	20,428	20,746	19,927	20,160
Portafolio completo	33,200	33,620	32,018	32,153	31,226	31,547	32,063	31,226	31,076	31,243	29,993	30,500

Fuente: Cálculos de los autores.

Nota: El período t corresponde a 14 de marzo de 2007 y t+1 corresponde al 15 de marzo de 2007.

Igualmente, para los demás portafolios con distribuciones marginales empíricas, la cópula de Clayton es la que mayor porcentaje de pérdida simultánea presenta para los retornos de las acciones y sigue siendo la simulación histórica la que sobrestima el valor en riesgo del portafolio (ver Tabla 4).

Por otro lado, para el caso en que las distribuciones marginales son uniformes, el mayor porcentaje de pérdidas simultáneas en los retornos de las acciones de los portafolios lo presenta la cópula de Clayton, mientras que Frank y Gumbel continúan arrojando resultados muy cercanos. También en este caso, el VaR calculado por simulación histórica tiende a estar por encima de los demás resultados, por lo que el valor del portafolio es menor con este método como lo muestra la Tabla 4.

En cuanto al VaR calculado con marginales distribuidas t-student, se observa que éste supera el porcentaje de pérdidas arrojado con las demás distribuciones a través de todas las cópulas y a cada nivel de confianza analizado, acercándose a los valores arrojados por la simulación histórica. Teniendo en cuenta que al hacer las pruebas de ajuste fue rechazada la t-student como la distribución que mejor ajustaba el comportamiento de los retornos, es razonable pensar que a través de ésta, al igual que a través de la simulación histórica, se sobrestimara el valor en riesgo de cada uno de los portafolios. Mientras que el VaR obtenido con distribuciones marginales empíricas y uniformes presentan resultados muy similares con pequeños cambios entre las cópulas de Frank y Gumbel, siendo más realistas los resultados con Gumbel, debido a que correlaciones positivas entre las acciones de un portafolio son mejor modeladas con Gumbel, tal como se ha demostrado la evidencia empírica.

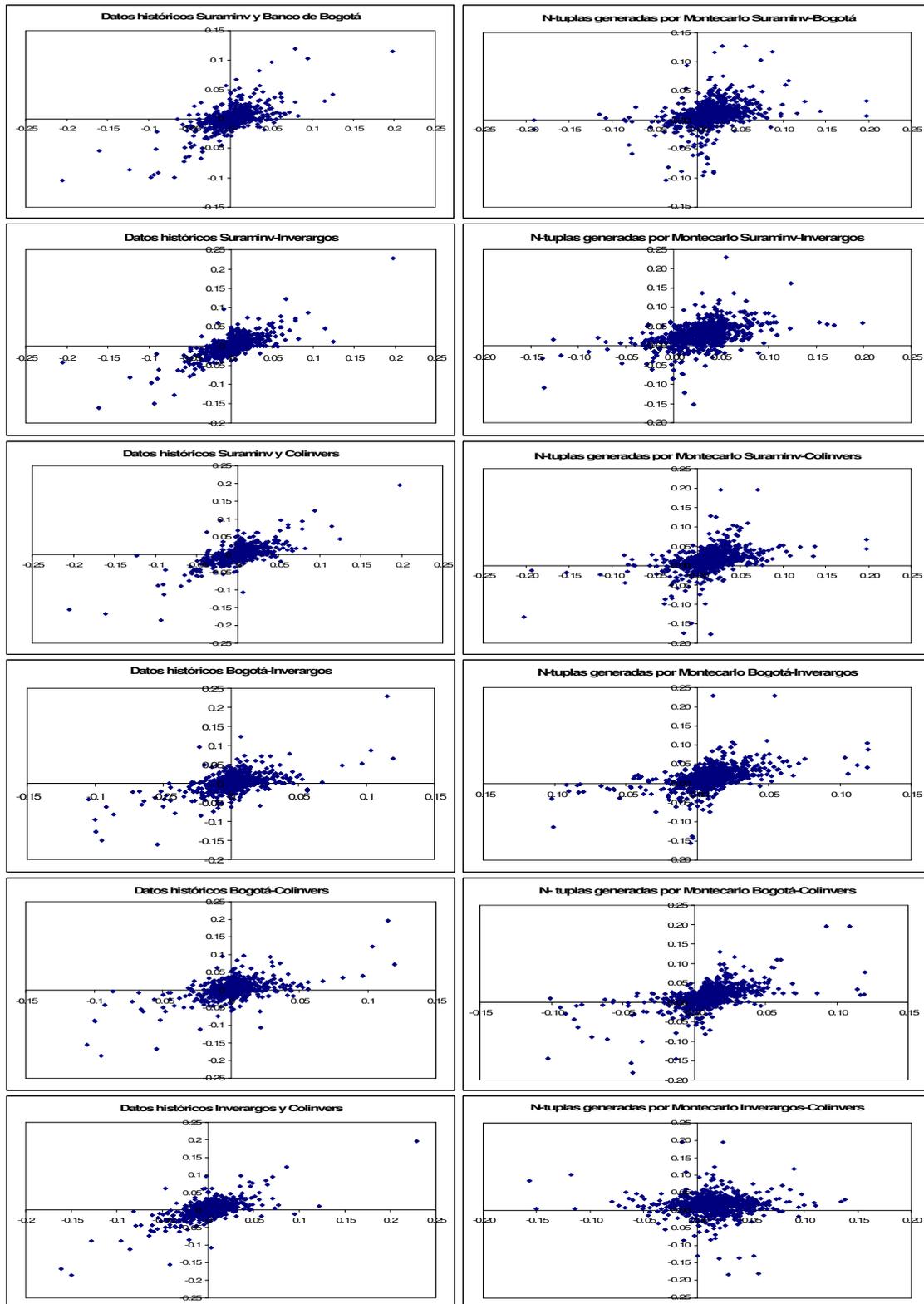
Con esto, se puede deducir que el cambio desde el método tradicional de simulación histórica al método de cópulas con distribuciones empíricas y uniformes puede mejorar el cálculo del VaR cuando son usadas las cópulas de Frank y Gumbel. Esto se puede observar en la Tabla 4 cuando se compara el

valor estimado del portafolio a través de cópulas y de simulación histórica con el valor real tomado de los datos históricos, donde los resultados más cercanos a la realidad los presenta la estimación del VaR por el método de cópulas que la estimación por simulación histórica, siendo las cópulas estimadas con marginales t-student muy similares a la estimación por el método tradicional.

Adicionalmente, partiendo de los parámetros obtenidos a través de las cópulas estimadas y con distribuciones marginales empíricas, se generaron, por simulación Monte Carlo, n-tuplas de valores para los activos riesgosos, formando posibles escenarios para cada portafolio. Así, se determinan  $x_1 = F_1^{-1}(u)$  y  $x_2 = F_2^{-1}(v)$  para obtener un par (x1 y x2) de números pseudos-aleatorios con la estructura de dependencia deseada como se muestra en la Figura 2, donde se comparan los valores simulados para los retornos de las acciones con los valores históricos de éstos.

Al comparar las n-tuplas generadas por Monte Carlo con los datos históricos, se observa la adecuada representación de las series con una distribución empírica, donde los datos extremos son importantes, dado que modelar las colas pesadas tiene un gran impacto en el VaR de cada portafolio.

Figura 2. N-tuplas generadas por Simulación Monte Carlo



## CONCLUSIONES

En este estudio se han utilizado las Cópulas como método alternativo para calcular el valor en riesgo de un portafolio. En este caso, se utilizaron portafolios conformados por dos activos riesgosos (acciones colombianas), pero el método puede ser perfectamente generalizado a un portafolio compuesto por  $n$  activos riesgosos.

Se utilizaron las cópulas de Frank, Gumbel y Clayton, que pertenecen a la familia de cópulas de un solo parámetro, donde no fue necesario partir de supuestos de normalidad para los retornos de las acciones y la correlación entre los activos riesgosos se calculó a través del Tau de Kendall, una medida alternativa que no exige la existencia de tales supuestos. Así, la estructura de dependencia del portafolio y los activos que lo conforman no dependía de la correlación individual, sino de la estructura de dependencia arrojada por el parámetro  $\theta$  estimado a través de las cópulas.

Para los portafolios utilizados en el estudio, se observó que el método de cópulas presentó unos resultados más realistas que el método tradicional de simulación histórica, dado que este último sobrestimaba el valor en riesgo del portafolio. Sin embargo, entre las cópulas utilizadas, la cópula de Clayton arrojó resultados muy cercanos a la simulación histórica para las tres distribuciones marginales asumidas en los portafolios (empírica, uniforme y t-student), por lo que, al parecer, es más adecuado el cálculo del VaR con las cópulas de Frank y Gumbel, que presentaron resultados muy similares al ser calculados con distribuciones marginales empíricas y uniformes.

La determinación de las distribuciones marginales que se ajusten al comportamiento de los retornos ejerce gran influencia en la determinación del VaR, por lo que hay que ser muy cuidadoso en su identificación. En este estudio se asumieron marginales empíricas dado que las pruebas de ajuste rechazaban

las demás posibles distribuciones, aunque como ejercicio académico, y siguiendo la literatura existente sobre cópulas, también se asumieron distribuciones uniformes y t-student. El uso de la uniforme se explica por la necesidad de tener un punto de comparación con una medida de la máxima incertidumbre, donde se les da la misma probabilidad de ocurrencia a todos los eventos; mientras que la t-student fue utilizada porque esta distribución representa adecuadamente las colas pesadas, que en este estudio se presentaron en todos los activos riesgosos analizados, además por la no independencia de los datos.

Finalmente, en este estudio que ha mostrado que el uso de cópulas y distribuciones marginales no normales puede mejorar el cálculo del valor en riesgo de un portafolio financiero, sin necesidad de partir de supuestos que puedan llevar a una sub-estimación o sobre-estimación del VaR.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Bouyé, Eric. Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications. Financial Econometrics Research Centre, City University Business School. London. (Julio, 2000). P. 2-70.

Bouyé, Eric *et al.* Copulas: an open field for risk management. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais. Working paper, 8. (Marzo, 2001).

Canavos, George. Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos. Mc Graw Hill, 1988.

Cherubini, Umberto *et al.* Copula methods in finance. Wiley Finance. John Wiley & Sons. 2004. P. 37-87.

Di Clemente Annalisa. Romero, Claudio. Measuring Portfolio Value at Risk by a Copula EVT Based Approach. Department of Economic Theory and Quantitative Methods for the Political Choices. University of Rome "La Sapienza". Italia. (Febrero, 2003). P. 22.

Dowd, Kevin. An Informal Introduction to Copulas. Artículo en Internet. Tomado de Financial Engineering News. Acceso:

[http://www.fenews.com/fen36/topics\\_act\\_analysis/topics\\_act\\_analysis.html](http://www.fenews.com/fen36/topics_act_analysis/topics_act_analysis.html).

\_\_\_\_\_ Evaluating Copulas. Artículo en Internet. Tomado de Financial Engineering News. Acceso: <http://www.fenews.com/fen46/risk-reward/risk-reward.html>.

Embrechts, Paul. Straumann. Correlation: Pitfalls and Alternatives. En: *Risk*. (Mayo, 1999). P. 69-71.

Fackler, Paul. Dowd, Kevin. Estimating VaR with Copulas. Artículo en internet. Tomado de Financial Engineering News.

Acceso: [http://www.fenews.com/fen39/one\\_time\\_articles/copula/copula-var.html](http://www.fenews.com/fen39/one_time_articles/copula/copula-var.html).

Gento, Pedro. Comparación entre métodos alternativos para la estimación del valor en riesgo. Universidad de Castilla-La Mancha, Facultad de derecho y ciencias sociales, 2000. pp. 1-43.

Giacomini, Enzo. Risk Management with Copulae. Center for Applied Statistics and Econometrics, Humboldt – Universität zu Berlin. Berlin. (Agosto, 2005). P. 8-46.

Hu, Ling. Dependence Patterns across Financial Markets: a Mixed Copula Approach. Ohio State University. (Junio, 2004). P. 1-19.

Li, D. X. On Default Correlation: A Copula Function Approach. *Journal of Fixed Income*. (Marzo, 2000). P. 43-54.

Maya, Cecilia. Torres, Gabriel. The Unification of the Colombian Stock Market: A Step Towards Efficiency- Empirical Evidence. *Latin American Business Review*, Vol. 5(4). 2004. P. 72-73.

Melo, Luís Fernando. Becerra, Oscar. Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia. Gerencia Técnica, Banco de la República. (Mayo, 2005). P. 1-71.

Micocci, Marco. Masala, Giovanni. Backtesting Value at Risk Estimation with non Gaussian Marginals. University of Cagliari. Italia. (Mayo, 2004). P. 1-18.

Parra, Helder. Koodi, Luiz. Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk. State University of Campinas. *Journal of Data Science* 4(2006). P. 93-115.

Rachev, Svetlozar *et al.* Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distribution: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing. Wiley Finance. The Frank J. Fabozzi Series. 2005. P. 57-74.

Rank, Jörn. Copulas in Financial Risk Management. Department for Continuing Education. University of Oxford. (Agosto, 2000). P. 2-40.

\_\_\_\_\_ Improving VaR Calculations by Using Copulas and non-Gaussian Margins. University of Oxford, Mathematical Finance. (November, 2002). P. 1-54.

Romero, Claudio. Applying Copula Function to Risk Management. Banca di Roma. Italia. 2002.

Rosenberg, Joshua. Schuermann, Til. A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat Tailed Risk. Federal Reserve Bank of New York. Staff Report No. 185. (Mayo, 2004). P. 3-56.

Tsay, Ruey. Analysis of Financial Time Series. Financial Econometrics. University of Chicago. United States of America, Wiley-Interscience Publication, 2002. 443 p.

Wang, Shaun. A Set of New Methods and Tools for Enterprise Risk Capital Management and Portfolio Optimization. CAS. Forum Summer 2000. Artículo en internet. Acceso: <http://www.casact.org/pubs/forum/02sf043.pdf>.

\_\_\_\_\_ Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms. CAS. Society of Risk Working Paper. Artículo en internet. 1999.  
Acceso: <http://www.casact.org/cofor/Wang.pdf>.

Ward, Lisa. Lee, David. Practical Application of the Risk-Adjusted Return on Capital Framework. CAS. Forum Summer 2002. Artículo en internet. Acceso: <http://www.casact.org/pubs/forum/02sforum/02sftoc.htm>.

Zhang, Xuping. Value At Risk For Non-Linear Portfolios With Non-Normal Financial Returns. McMaster University, Hamilton, Ontario. Canada. (Septiembre, 2002). P. 2-79.

## APÉNDICE I

**Tabla A1. Pruebas de mejor ajuste de las distribuciones de los retornos**

Distribuciones	Suraminv	Bogotá	Inverargos	Colinvers
Normal	0.114	0.143	0.103	0.116
Triangular	0.307	0.293	0.377	0.310
Lognormal	--	--	--	--
Uniform	0.370	0.359	0.444	0.376
Exponential	--	--	--	--
Weibull	0.154	0.168	0.140	0.137
Beta	0.114	0.144	0.103	0.117
Gamma	0.141	0.164	0.120	0.146
Logistic	0.071	0.085	0.072	0.056
Pareto	--	--	--	--
Max Extreme	0.245	0.226	0.209	0.241
Min Extreme	0.235	0.238	0.264	0.242
Student's t	<b>0.063</b>	<b>0.106</b>	<b>0.076</b>	<b>0.061</b>

Valores críticos de Kolmogorov-Smirnov	$\alpha=1\%$	$\alpha=5\%$	$\alpha=10\%$
<b>n=733</b>	<b>0,0369</b>	<b>0,0451</b>	<b>0,0602</b>

## APÉNDICE II

Sea  $C(u, v)$  una cópula. Para cada  $u \in [0, 1]$ , la derivada parcial  $\frac{\partial C}{\partial v}$  existe para todo  $v \in [0, 1]$ . Así, para cada  $u$  y  $v$  se tiene (Rank, 2002):

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$$

El resultado es análogo para la derivada parcial  $\frac{\partial C}{\partial u}$ , en consecuencia, las

funciones:  $C_v(u) \equiv \frac{\partial}{\partial v} C(u, v)$  y  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  están bien definidas en  $[0, 1]$ ,

además  $C_v$  y  $C_u$  son no decrecientes en  $[0, 1]$ . Con esto, se presentan a continuación las derivadas parciales para la cópula de Frank, Gumbel y Clayton.

La cópula de Frank está definida como:

$$C_{Frank}(u, v) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] & \forall \theta \in ]-\infty, \infty[ \setminus \{0\} \\ uv & \text{para } \theta = 0 \end{cases}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  está dada por:

$$C_u(v) = -\frac{1}{\theta} \left[ \frac{e^{-\theta} - 1}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)} \right] \left[ \frac{-\theta e^{-\theta u} (e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$$

$$C_u(v) = \frac{e^{-\theta u} (e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C(u, v) &= \frac{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)] [-\theta e^{-\theta u} e^{-\theta v}] + \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta v} - 1)(e^{-\theta u} - 1)}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2} \\ &= \frac{-\theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta} - 1) - \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1) + \theta e^{-\theta u} e^{-\theta v} (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_u \partial_v} C(u, v) = \frac{e^{-\theta u} e^{-\theta v} (1 - e^{-\theta}) \theta}{[e^{-\theta} - 1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$$

La cópula de Gumbel está definida como:

$$C_{GH}(u, v) = \exp \left\{ - \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  está dada por:

$$C_u(v) = e^{-[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{1/\theta}} \left( -\frac{1}{\theta} \right) \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{-\theta/\theta} \theta (-Lnu)^{\theta-1} \left( -\frac{1}{u} \right)$$

$$C_u(v) = e^{-[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{1/\theta}} \left[ (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta \right]^{-(\theta-1)/\theta} \left( \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \right)$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \frac{(-Lnv)^{\theta-1}}{v} e^{-[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{1/\theta}} \left[ (\theta-1) [(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{-2\theta+1/\theta} + [(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{-2\theta+2/\theta} \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = \frac{(-Lnu)^{\theta-1}}{u} \frac{(-Lnv)^{\theta-1}}{v} e^{-\Sigma^{1/\theta}} \left[ \Sigma^{-2(\theta-1)/\theta} + (\theta-1) \Sigma^{-(2\theta-1)/\theta} \right]$$

$$\text{Donde } \Sigma = (-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta$$

La cópula de Clayton está definida como:

$$C_{Clayton}(u, v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1/a}$$

La derivada parcial  $C_u(v) \equiv \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$  está dada por:

$$C_u(v) = -\frac{1}{a} (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-1-a/a} (-a) u^{-a-1}$$

$$C_u(v) = (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-(a+1)/a} u^{-(a+1)}$$

A partir de esta ecuación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la cópula, a través del cálculo de la derivada parcial de C con respecto a ambos parámetros (Rank, 2002):

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = -\frac{(a+1)}{a} (u^{-a} + v^{-a} - 1)^{-(2a+1)/a} (-a) v^{-(a+1)} u^{-(a+1)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = (a+1) u^{-(a+1)} v^{-(a+1)} [u^{-a} + v^{-a} - 1]^{(2a+1)/a}$$

### APÉNDICE III

Sean  $F_1$  y  $F_2$  las funciones de distribución de las marginales, cuyas funciones de densidad de probabilidad son  $f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$  y  $f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$ , partiendo de la expresión  $f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1), v=F_2(x_2)} f(x_1)f(x_2)$  se obtiene la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = L((x_{1,1}, x_{2,1}), \dots, (x_{1,N}, x_{2,N}); \theta) = \prod_{j=1}^N f(x_{1,j}, x_{2,j})$$

El logaritmo de la función de verosimilitud está dado por:

$$L(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1, j), v=F_2(x_2, j)} f_1(x_1, j) f_2(x_2, j)$$

$$L(\theta) = \sum_{j=1}^N \ln \left( \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1, j), v=F_2(x_2, j)} \right) + \sum_{j=1}^N (\ln f_1(x_1, j) + \ln f_2(x_2, j))$$

Como la segunda expresión no depende de  $\theta$ , es suficiente maximizar la función

$$\tilde{L}(\theta) = \sum_{j=1}^N \ln \left( \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \Big|_{u=F_1(x_1, j), v=F_2(x_2, j)} \right) \text{ con respecto a } \theta \text{ y luego encontrar } \hat{\theta}.$$

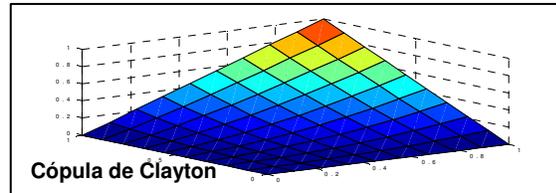
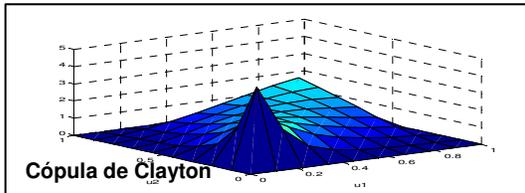
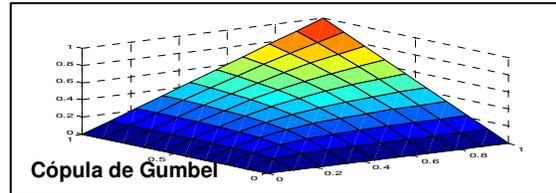
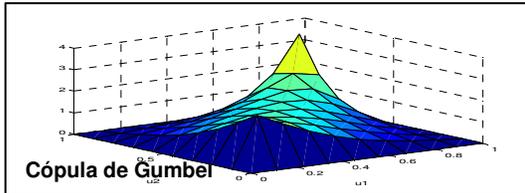
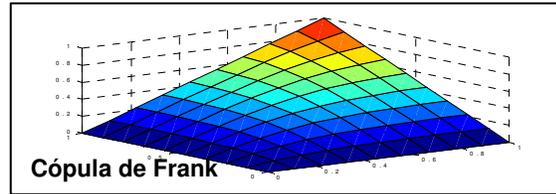
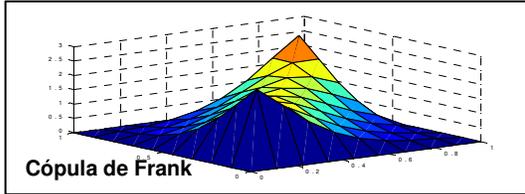
## Apéndice IV

### Figura A1. Cópulas de Frank, Gumbel y Clayton

Suraminv-Inverargos y Suraminv-Colinvers

Función de densidad de probabilidad

Función de distribución acumulada



Bogotá-Inverargos

