CUATRO MOMENTOS DE FUNCIONES DE UTILIDAD PARA LA ESTRUCTURACIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

ÉDISON ANDRÉS ZULUAGA

ALEXANDER ARÉVALO SOTO

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE ECONOMÍA Y FINANZAS

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA (MAF)

MEDELLÍN

2016

CUATRO MOMENTOS DE FUNCIONES DE UTILIDAD PARA LA ESTRUCTURACIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de magíster en Administración Financiera

ÉDISON ANDRÉS ZULUAGA[1]

ALEXANDER ARÉVALO SOTO[2]

Asesor: ALFREDO TRESPALACIOS CARRASQUILLA, MSF

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE ECONOMÍA Y FINANZAS

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA (MAF)

MEDELLÍN

2016

[1] edisonzuluaga@gmail.com
[2] aarevalo@admon.uniajc.edu.co

Resumen

El presente documento muestra cómo la consideración del tercer y del cuarto momentos (sesgo y curtosis, en su orden) de una función de utilidad en términos del nivel de riqueza se proyecta como un mecanismo para el aprovechamiento de oportunidades y la maximización de rentabilidad de un portafolio, que, desde una perspectiva común, se expresa solo mediante el análisis de la media y la varianza, con lo que se omiten algunos aspectos que cuentan con poca visibilidad pero importante impacto.

Para tal fin, según la premisa del conocimiento existente sobre las opciones para divisas y enmarcado en la normatividad vigente establecida por Basilea III, reflejada para el país en la Circular Básica Contable y Financiera de 1995 de la Superintendencia Financiera de Colombia (1995), se presenta la construcción de diversos escenarios de mercado en función del comportamiento histórico de los rendimientos de cara a los cuatro primeros momentos (esperanza, varianza, sesgo y curtosis), que le permiten al operador de opciones tomar decisiones acordes con la situación del mercado, regido por las políticas de límites y riesgos, todo ello enmarcado para demostrar la importancia de considerar el sesgo y la curtosis en la estructuración de un portafolio según el sustento teórico expresado a partir de polinomios de Taylor de cuarto orden.

Lo anterior nació de la observación de la utilidad histórica del portafolio de opciones para la entidad de referencia, que se asoció con una función de utilidad; se consideró, además, como una función generadora de momentos por la naturaleza aleatoria de la variable que la compone, lo que permite así ir más allá del simple análisis de la utilidad esperada y la volatilidad de la misma al relacionar conceptos de importante impacto en la rentabilidad del portafolio como son el sesgo y la curtosis.

Se tomó como referencia el caso particular de una entidad; sin embargo, el resultado es algo que se puede extender a cualquier tipo de portafolio de derivados, ya sea del mercado bursátil o de situaciones empresariales.

Palabras clave: escenarios, opciones, riesgo, utilidad.

Abstract

This document shows how the consideration of the third and fourth moments (skewness and kurtosis) of a utility function in terms of the level of wealth, is projected as a mechanism for exploiting opportunities and maximizing profitability of a portfolio; that from a common perspective, it is expressed only by analyzing the mean-variance omitting some aspects that have little visibility but important impact.

To this end, under the premise of existing knowledge on options for currency and framed under the current regulations established by Basel III, reflected for Colombia in Circular Basic Accounting and Financial of 1995, the construction of various market scenarios is presented in terms the historical behavior of yields regards of the four moments (expectation, variance, skewness and kurtosis); which allows the options trader to, make decisions according to the market situation, governed under the policy limits and risks. All of it framed to demonstrate the importance of considering the skewness and kurtosis in structuring a portfolio, under the theoretical support expressed from Taylor polynomials of fourth order.

This document is born from the observation of the historical usefulness portfolio of options for the reference entity, which is associated with a utility function, and is also considered as a moment generating function by the random nature of the variable allowing this way to go beyond the simple analysis of the expected return and volatility thereof, relating concepts of important impact on the profitability of the portfolio as are the skewness and kurtosis.

Reference was made to the case of an entity; however, the result is something that can be extended to any kind of portfolio of derivatives, either the stock market or business situations.

***Key words**: scenarios, options, policies, risk, utility.*

1. Introducción

Este documento propone una reflexión analítica sobre la consideración de los cuatro primeros momentos de una variable aleatoria en la explicación y el modelamiento del rendimiento de un portafolio de instrumentos derivados, que es una figura que permite a una de las partes cubrir un riesgo (Saunders y Cornett, 2008), que generan, a su vez, un ambiente de especulación en la contraparte, relacionado en forma directa con el apetito de riesgo, que para este caso se tratan de manera específica como opciones con tasa subyacente de cambio entre dólares estadounidenses y pesos colombianos (Knob, 2013); se entiende como opción financiera “el derecho a comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) un activo subyacente a un precio determinado en una fecha futura a cambio de una prima” (Chávez Ocaña, 2004, citado en Pareja Vasseur, Ramírez Barrera, Molina Pérez y Marrero Gómez, 2011), que no solo son instrumentos que ofrecen la oportunidad de cubrir o aprovechar cambios direccionales en el precio del activo subyacente, sino que permiten valorar la volatilidad del mismo (León Rincón , 2009), lo anterior a partir de la evidencia inicial sobre la gestión de riesgo actual y cómo ella, si bien evita pérdidas financieras importantes, también obvia aspectos que pueden derivar en mayores rendimientos financieros en determinados escenarios específicos de mercado.

Con posterioridad se identificó y se analizó cuáles fueron los factores que afectaron, de manera significativa, el valor a mercado de dichos instrumentos financieros y de cuál modo específico surgió tal efecto, lo que permitió configurar diferentes escenarios que, con claridad, generaron posturas específicas frente a la necesidad de negociación de opciones al considerar los cuatro primeros momentos de una función generadora de los mismos.

Para abordar lo antes descrito, se requirió, además, la adopción o estructuración de una función de utilidad en términos del nivel de riqueza, la que, por su naturaleza aleatoria, permite expresar los cuatro primeros momentos (esperanza, varianza, sesgo y curtosis) que describen los rendimientos del portafolio en situaciones específicas. Para tal fin se evaluaron diferentes funciones de utilidad, sus propiedades y el cumplimiento de supuestos básicos de las mismas, como los de no saciedad y aversión al riesgo (Norstad, 2011), así como la posibilidad de construir funciones de utilidad paramétricas mediante los métodos de Basis y de aversión al riesgo de Arrow-Pratt (Meucci, 2007).

Por último, y en desarrollo de la premisa de la influencia que tiene el apetito de riesgo por parte del tomador final de la decisión, se evidenció la necesidad de considerar el sesgo y la curtosis implícitos en el mercado, que con posterioridad ofrecieron la posibilidad de analizar el impacto en términos de rendimiento frente a fluctuaciones del mercado que, además, tienen relación con el momento, expresado mediante el comportamiento en los meses del año.

2. Aproximación teórica

2.1 Funciones de utilidad

Una función de utilidad $U(w)$ es una medida relativa de la preferencia de un inversionista para diferentes niveles de riqueza (Norstad, 2011), que es dos veces diferenciable en función de la riqueza definida por $w > 0$ y que cumple las propiedades:

- $U'(w) > 0$, **propiedad de no saciedad.** La utilidad se incrementa con la riqueza, por lo que el inversionista nunca está satisfecho, dado que no tendrá suficiente riqueza como para no querer conseguir un poco más.
- $U''(w) < 0$, **propiedad de aversión al riesgo.** Esta propiedad es cóncava, esto es, la utilidad marginal de la riqueza decrece en la medida en que la misma se incrementa; en otras palabras, en escenarios de amplia riqueza no existe la necesidad de invertir en activos riesgosos.

A lo largo del desarrollo matemático implícito en la expresión de una función de utilidad, diferentes autores han formulado la posibilidad o de hacer uso de una función que se utilice con frecuencia o construir una que logre capturar las preferencias y el apetito de riesgo de un inversionista.

Ortiz Olivera (2013) propone una demostración analítica de la existencia y la unicidad de la función de utilidad de los consumidores. De manera teórica plantea la formalización de las características y definiciones matemáticas necesarias para construir una función de utilidad que represente los gustos y las preferencias de cualquier individuo. Por su parte, Pennings y Garcia (2009) examinan la relación entre las decisiones estratégicas financieras y la forma global de la función de utilidad de los que toman las decisiones reales; evalúan, además, la forma de las funciones de utilidad de los gestores de portafolios y muestran que la forma global está relacionada con su asignación estratégica de activos. Por último, Idrobo (2010) presenta el ejercicio de comprender los desarrollos de la teoría de la utilidad que permiten razonar sobre la base de la incertidumbre y el riesgo, con el fin de contribuir a mejorar la habilidad de elegir inversiones óptimas y abrir las puertas a nuevas oportunidades de negocio.

2.2 Funciones de utilidad más comunes

Entre las funciones de utilidad más utilizadas en la literatura están las siguientes:

2.2.1 Función de utilidad exponencial

Esta función viene dada por $U(w) = -e^{-\alpha \cdot w}$, para algún $\alpha > 0$. Cumple las propiedades de no saciedad y aversión al riesgo:

- $U'(w) = \alpha\, e^{-\alpha \cdot w} > 0$
- $U''(w) = -\alpha^2\, e^{-\alpha \cdot w} < 0$

Tiene la interesante propiedad de ser invariante frente a posibles transformaciones de la riqueza (Norstad, 2011), esto es:

$$U(k + w) = f(k)U(w) + g(k)$$

Para cualesquiera funciones $f(k) > 0$ y $g(k)$ independientes de w.

2.2.2 Función de utilidad cuadrática

Es la función de utilidad de mayor utilización en la economía financiera para la descripción del comportamiento de un inversionista, dado que, bajo el supuesto de que la relación entre el nivel de la riqueza y el comportamiento del inversionista sigue una función de utilidad cuadrática, se pueden vincular el nivel esperado de la riqueza y la desviación estándar de este valor, lo que la hace óptima para el análisis de varianza. Esta función viene dada por:

$$U(w) = w - b \cdot w^2$$

Cumple las propiedades de no saciedad y aversión al riesgo:

- $U'(w) = 1 - 2bw > 0$
- $U''(w) = -2b < 0$

En cuanto a la primera propiedad (no saciedad), para un inversionista que prefiere más a menos, la función cuadrática solo puede representar sus propensiones a través de una gama restringida de escenarios de riqueza (Damodaran, 2009).

2.2.3 Función de utilidad de optimización de portafolio

Es una función que permite tener en cuenta la aversión al riesgo de cada tomador de decisión con respecto al nivel de riqueza que tiene o que quiere llegar a adquirir si se tiene en cuenta que permite encontrar con facilidad el nivel óptimo en términos de la aversión al riesgo dada.

Esta función de utilidad está dada por:

$$U(w) = \frac{w^{\lambda} - 1}{\lambda},$$

donde λ representa la aversión al riesgo establecida por el tomador de decisiones, con $\lambda > 0$ (Pecha C., 2008). Cumple las dos propiedades exigidas de no saciedad y aversión al riesgo:

- $U'(w) = w^{\lambda-1} > 0$
- $U''(w) = (\lambda - 1)w^{\lambda-2} < 0$

Para trabajar con esta función se puede establecer un parámetro λ fijo, esto es, tomar un valor de aversión al riesgo puntual para cada situación en particular que se vaya a trabajar.

2.2.4 Función de utilidad logarítmica

Dadas las condiciones y particularidades que presenta la función logaritmo natural (sobre todo su cualidad de modelar de manera adecuada diversas situaciones de fenómenos naturales), se permite tomarla como una función de utilidad que está dada por:

$$U(w) = \ln w$$

Cumple las condiciones establecidas para una función de utilidad:

- $U'(w) = \frac{1}{w} = w^{-1} > 0$

- $U''(w) = -\frac{1}{w^2} = -w^{-2} < 0$

Permite manejar bastante bien la optimización de la utilidad en términos del nivel de riqueza, por el bajo nivel de la aversión al riesgo que plantea y el apalancamiento considerablemente alto que da su cartera óptima.

2.2.5 Función de utilidad de transformación positiva afín

Es una función de utilidad utilizada por lo general para la comparación de alternativas de inversión en términos de la rentabilidad de las mismas, por lo que satisface que le puede adicionar cualquier constante (positiva o negativa) o se puede multiplicar por cualquier constante del mismo tipo, que puede ser cualquier combinación entre el nivel de riqueza y constantes exógenas. Entonces, si se suponen constantes a, b mayores que cero y una función de utilidad $V(w)$, se puede reexpresar una nueva función de utilidad como sigue:

$$U(w) = a\,V(w) + b$$

Que cumple con las propiedades de no saciedad y de aversión al riesgo:

- $U'^{(w)} = a \; V'(w) > 0$
- $U''^{(w)} = a \; V''(w) < \; 0$, (porque $a > 0$ y $V''(w) < \; 0$)

Además, como consecuencia de la linealidad adquiere las mismas características de la función de utilidad utilizada.

2.3 Comportamiento del nivel de riqueza

Ahora bien, puesto que el nivel de aversión al riesgo es con certeza volátil y en extremo difícil de conocer, para efectos de la presente investigación se describe como una variable aleatoria cuya función de utilidad hereda las propiedades de una función de probabilidad, cuyos momentos están definidos como sigue (Canavos, 1988):

1. Valor esperado:

   - Caso discreto:

$$E[w] = \sum_{i=1} w_i \; P(W = w_i) = \mu$$

   - Caso continuo:

$$E[w] = \int_{-\infty}^{\infty} w \; U(w)\, dw = \mu$$

2. Varianza:

   - Caso discreto:

$$Var(w) = E[(w-\mu)^2] = \sum_{i=1} (w_i - \mu)^2 \; U(w)$$

   - Caso continuo:

$$Var(w) = E[(w-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (w_i-\mu)^2 \; U(w)\, dw$$

2.4 Aversión al riesgo

A continuación se plantea la forma matemática como se ha venido trabajando la aversión al riesgo en diferentes contextos financieros:

Para cualquier función de utilidad $U(w)$ se considera la siguiente función de aversión al riesgo (Norstad, 2011).

$$A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$$

Nótese que, sin importar la función de utilidad que se trabaje, por el hecho de cumplir las propiedades antes mencionadas, $U' > 0$ y $U'' < 0$, se tiene que la aversión al riesgo definida de esta manera es positiva ($A(w) > 0$).

3. Planteamiento del modelo

En el marco del presente documento, para trabajar el modelo de regresión que se desea presentar en términos de los parámetros que se pretende establecer, se hizo uso de un resultado matemático de gran importancia y aplicación en diversos campos de las ciencias naturales, tecnológicas y económicas.

Dicho resultado es el teorema de Taylor, que garantiza que localmente cualquier función elemental, que cumpla la condición de ser n veces diferenciable (Spivak, 1992) se puede aproximar, si se admite un cierto error, por medio de un polinomio de Taylor, que hace uso de las derivadas de la función dada alrededor de un punto dado. Además, se puede garantizar que esta aproximación polinomial es considerablemente buena en la medida en que su error (ε) tiende a cero, que en notación matemática se escribe $\varepsilon \approx 0$, por medio del límite del error (Larson y Edwards, 2010).

Se trabajó la función de utilidad por explorar en el proyecto por medio de su respectivo polinomio de Taylor de cuarto orden, con el fin de poder acceder a la interpretación a la que se quiere llegar en forma más clara, precisa y concisa. Se hizo uso del polinomio de Taylor de una función dada y en un punto determinado puesto que es una aproximación polinomial que se puede aplicar a toda función que cumpla la condición de ser n veces diferenciable (Spivak, 1992). Además, se puede garantizar que dicha aproximación polinomial es considerablemente buena en la medida que en su error tienda a cero, matemáticamente esto es $\varepsilon \approx 0$, por medio del límite del error (Larson y Edwards, 2010).

De tal manera, con el fin de poder acceder a la interpretación que se desea en forma más clara, precisa y concisa, se debió trabajar la función de utilidad por explorar en el documento por medio del polinomio de Taylor de cuarto orden correspondiente a la función con respecto a sus cuatro momentos y alrededor de $w = a$ (al despreciar el respectivo error por su tendencia a cero), que queda se escribe como sigue:

$$U(w) = U(a) + \frac{U'(a)}{1!}\,(w-a) + \frac{U''(a)}{2!}(w-a)^2 + \frac{U'''(a)}{3!}(w-a)^3 + \frac{U^{(4)}(a)}{4!}(w-a)^4.$$

Esta expresión se calculó para cada función de utilidad alrededor de $w = E[w]$ (al utilizar como función de probabilidad cada función de utilidad).

3.1 Implementación teórica

Al tener en cuenta las funciones de utilidad mencionadas en el aparte anterior y la representación por medio de polinomios de Taylor antes planteada, a continuación, presentan los respectivos polinomios de Taylor para cada una de las funciones de utilidad (con sus particularidades) y se calcularon los respectivos valores esperados de cada una de ellas (en caso de que existan), para establecer los puntos alrededor de los cuales se trabajaron dichos polinomios.

LO anterior permitió hacer el ajuste basado en el polinomio de Taylor de la función de utilidad dada en relación con los cuatro momentos que utilizaron como términos del polinomio:

$$U(w) = U(a) + \frac{U'(a)}{1!}\ (w-a) + \frac{U''(a)}{2!}(w-a)^2 + \frac{U'''(a)}{3!}(w-a)^3$$
$$+ \frac{U^{(4)}(a)}{4!}(w-a)^4,$$

Donde $\frac{U^{(i)}(a)}{i!}$, con $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, son valores constantes y $(w-a)^i$, con $i = 1,\ 2,\ 3,$ 4, se pueden ver como los cuatro primeros momentos de la variable aleatoria *w*: valor esperado, varianza, sesgo y curtosis, en su orden.

Observación: dado que el nivel de riqueza se definió como positivo $(\mathrm{w} > 0)$, el valor esperado se ha de calcular en el intervalo de cero a infinito $([0, \infty))$.

3.1.1 Para la función de utilidad exponencial

Dada la función de utilidad exponencial: $U(w) = -e^{-\alpha w}$, sus cuatro primeras derivadas son:

$$U'(w) = \ \alpha\, e^{-\alpha\, w}$$
$$U''(w) = \ -\alpha^2\ e^{-\alpha\, w}$$
$$U'''(w) = \ \alpha^3\ \ e^{-\alpha\, w}$$
$$U^{(4)}(w) = \ -\alpha^4\ e^{-\alpha\, w}.$$

El valor esperado, $E[w]$, para el caso de la función de utilidad exponencial es:

$$E[w] = \int_0^{\infty} w\, U(w)\ dw = -\int_0^{\infty} w\, e^{-\alpha\, w}\ dw = \frac{1}{\alpha^2}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor para esta función alrededor de $w = -\frac{1}{\alpha^2}$ se expresa así:

$$U(w) = -e^{\frac{1}{\alpha}} + \alpha\, e^{\frac{1}{\alpha}}\left(w + \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha^2\ e^{\frac{1}{\alpha}}}{2}\left(w + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 + \frac{\alpha^3\ e^{\frac{1}{\alpha}}}{6}\left(w + \frac{1}{\alpha^2}\right)^3 - \frac{\alpha^4\ e^{\frac{1}{\alpha}}}{24}\left(w + \frac{1}{\alpha^2}\right)^4.$$

3.1.2 Para la función de utilidad cuadrática

Dada la función de utilidad cuadrática: $U(w) = w - c\, w^2$, sus tres primeras derivadas son:

$$U'(w) = 1 - 2cw$$

$$U''(w) = -2c$$

$$U'''(w) = 0$$

Se puede evidenciar que la función de utilidad cuadrática no permite hacer un ajuste del modelo planteado en términos de los cuatro momentos, dado que solo permite hallar las dos primeras derivadas.

El valor esperado, $E[w]$, para el caso de la función de utilidad cuadrática es:

$$E[w] = \int_0^{\infty} w\, U(w)\ dw = -\int_0^{\infty} w\, c\, w^2\, dw = \infty$$

En este caso no es posible hallar el valor esperado de la variable aleatoria dado que la integral que la define diverge, lo que indica que esta función no puede ser tomada para ajustar el modelo por presentar puesto que no permite ser expresada alrededor de su valor esperado.

3.1.3 Para la función de utilidad de optimización de portafolio

Dada la función de utilidad de optimización de portafolio: $U(w) = \frac{w^{\lambda-1}}{\lambda}$, sus cuatro primeras derivadas son:

$$U'(w) = w^{\lambda-1}$$

$$U''(w) = (\lambda - 1)\, w^{\lambda-2}$$

$$U'''(w) = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2)\, w^{\lambda-3}$$

$$U^{(4)}(w) = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2)(\lambda - 3)\, w^{\lambda-4}$$

El valor esperado, $E[w]$, para el caso de la función de utilidad de optimización de portafolio es:

$$E[w] = \int_0^{\infty} w\, U(w)\ dw = -\int_0^{\infty} w\, \frac{w^{\lambda-1}}{\lambda} dw = \infty$$

En este caso, aunque es posible encontrar los cuatro momentos de la función de utilidad, no es posible hallar el valor esperado de la variable aleatoria, de igual forma a lo que ocurrió en el caso anterior.

3.1.4 Para la función de utilidad logarítmica

Dada la función de utilidad logarítmica: $U(w) = \ln w$, sus cuatro primeras derivadas son:

$$U'(w) = w^{-1}$$

$$U''(w) = -w^{-2}$$

$$U'''(w) = 2\, w^{-3}$$

$$U^{(4)}(w) = -6\, w^{-4}$$

El valor esperado, $E[w]$, para el caso de la función de utilidad logarítmica es:

$$E[w] = \int_0^\infty w\, U(w)\ dw = -\int_0^\infty w \ln w\, dw = \infty$$

En este caso, aunque es posible encontrar los cuatro momentos de la función de utilidad, no es posible hallar el valor esperado de la variable aleatoria, de manera análoga a los dos casos anteriores.

3.1.5 Para la función de utilidad de transformación positiva afín

Dada la función de utilidad de transformación positiva afín: $U(w) = a\ V(w) + b$, sus cuatro primeras derivadas son:

$$U'(w) = a\,V'(w)$$

$$U''(w) = a\,V''(w)$$

$$U'''(w) = a\,V'''(w)$$

$$U^{(4)}(w) = a\,V^{(4)}(w)$$

Dado que esta función de utilidad depende de otra función de utilidad dada, se parte del hecho de que es cuatro veces diferenciable y, por tanto, la nueva función de utilidad también lo es.

En este caso en particular, el valor esperado, $E[w]$, para el caso de la función de utilidad de transformación positiva afín, depende de la función de utilidad dada $V(w)$ puesto que según la función de utilidad utilizada varía el cálculo de la integral.

A partir de la fundamentación teórica antes expresada, se evidencia la viabilidad de la aplicación de cara a la implementación de un modelo por medio de la expresión de los cuatro momentos de una función de utilidad que permita materializar la hipótesis del presente documento, tal como es la función de utilidad exponencial.

4. Determinación del modelo cuantitativo

Al considerar los cuatro primeros momentos de la variable aleatoria tomada como el nivel de riqueza (w), y con la posibilidad de trabajar una función de utilidad como un polinomio de Taylor de cuarto grado, representado por los términos de los mencionados cuatro momentos de la variable aleatoria, alrededor de $w = E[w]$ se ajustó un modelo que explica el porcentaje de utilidad del portafolio de opciones de la entidad de referencia a partir de información histórica de los rendimientos diarios de tres años atrás.

Ahora, de acuerdo con la premisa teórica de la importancia y la utilidad que es el hecho de tomar en consideración factores que permitan analizar más allá del valor esperado y la varianza, tal como son el sesgo y la curtosis (tercer y cuarto momento), que, en esencia, sugieren la magnitud del impacto en términos de rendimientos en función de la volatilidad, se planteó la situación dada por el modelo que depende de dichos cuatro parámetros. Nótese que en la figura 1 se observa evidente similitud en varios meses del año durante el período analizado en términos de distribución.

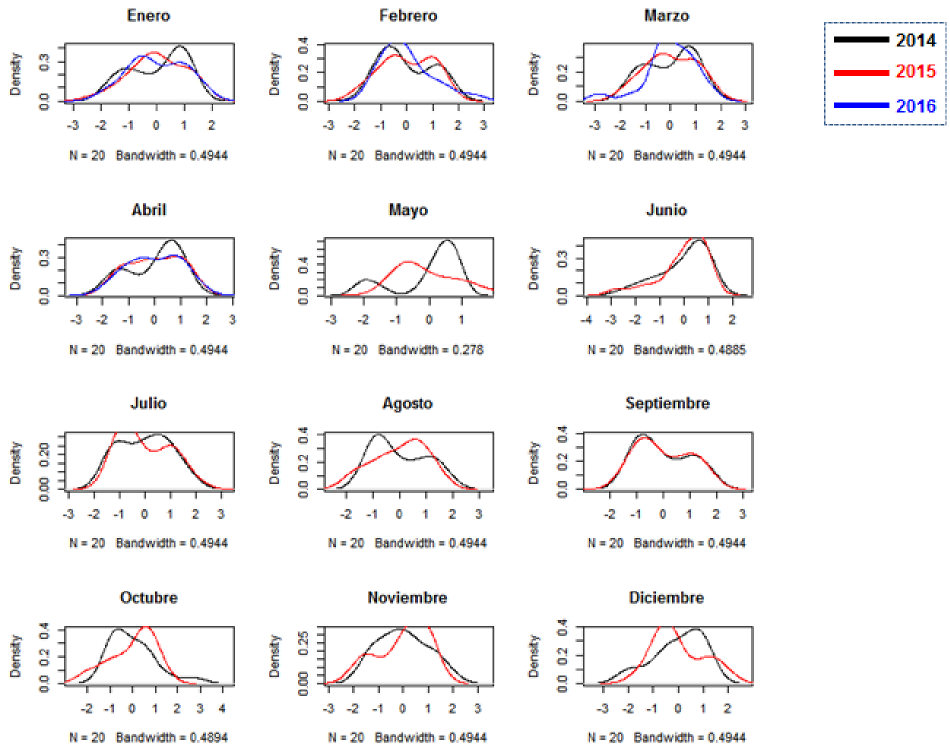

Figura 1. Comparativo de la función de densidad del porcentaje de utilidad durante el período de referencia

Fuente: elaboración propia

La entidad tomada como referencia para el análisis cuenta con un portafolio de derivados (de modo específico: opciones) que exhibió crecimiento durante los últimos años; además, como se puede ver en la figura 2, la volatilidad observada en dicha rentabilidad evidenció importante incremento desde el primer trimestre del año 2015, volatilidad evidente también en el histórico de la tasa de cambio dólares estadounidenses y pesos colombianos durante el mismo período analizado.

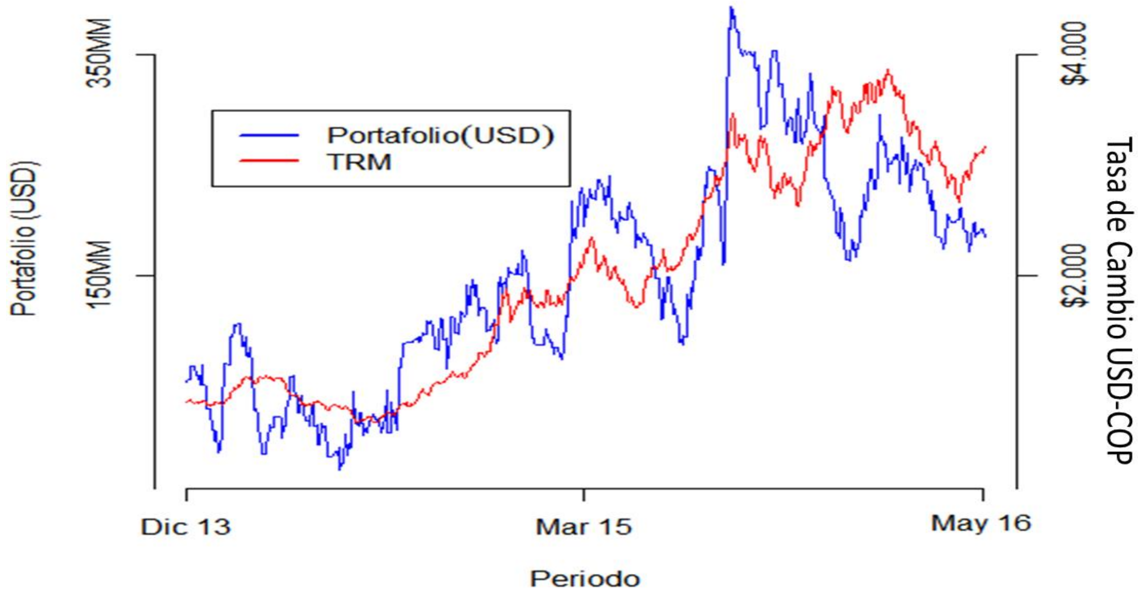

Figura 2. Histórico de la rentabilidad portafolio de opciones versus tasa de cambio de dólares estadounidenses a pesos colombianos

Fuente: elaboración propia

Además, nótese que la figura 3 reitera el incremento en la volatilidad de la utilidad del portafolio de opciones antes mencionado.

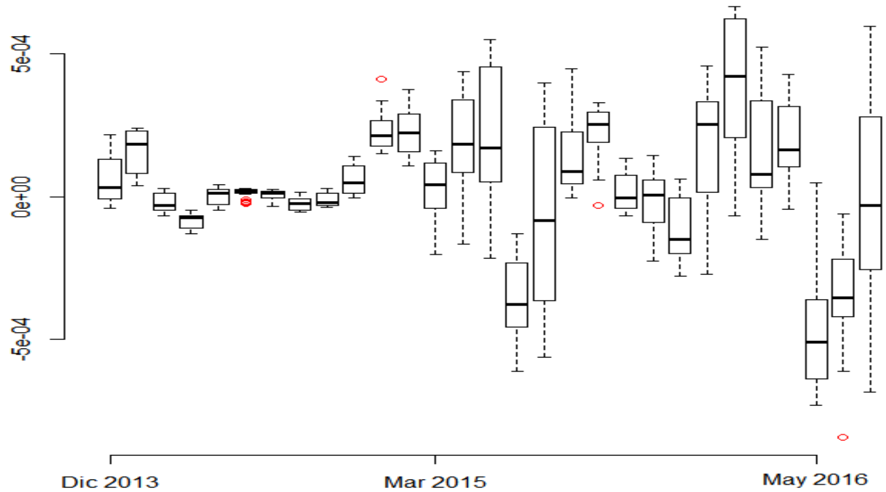

Figura 3. Gráfico de cajas histórico de la rentabilidad del portafolio de opciones

Fuente: elaboración propia

4.1 Resultados obtenidos

Puesto que la premisa fundamental del presente documento fue el análisis del aporte en la explicación y gestión de la utilidad del portafolio de activos financieros a partir de los cuatro primeros momentos de la función de utilidad, resulta de gran importancia considerar los diferentes escenarios observados durante el período de referencia analizado, de tal manera que se pueda evaluar el modelo ajustado en la investigación.

En la tabla 1 se presenta el resumen de dichos cuatro momentos, a partir de los cuales se establecieron algunos escenarios de mercado en función del sesgo y la curtosis de la rentabilidad del portafolio. Nótese que en el mes de junio, por ejemplo, se aprecia con claridad asimetría negativa, que para el mes de septiembre se tornó positiva, lo que establece dos escenarios contrarios de cara al sesgo de la distribución de la rentabilidad. De igual forma, en materia de curtosis se pude observar que la distribución de los rendimientos en el mes de febrero fue notablemente más leptocúrtica respecto a meses como, por ejemplo, noviembre. Lo anterior provee criterios para evaluar el modelo que motivó la investigación.

Tabla 1. Resumen de los cuatro momentos mensuales del período de referencia

MES	MOMENTO	AÑO		
		2014	2015	2016
Enero	Esperanza	1.59E-04	1.91E-04	-2.03E-04
	Varianza	5.60E-09	2.54E-08	-1.72E-08
	Sesgo	-4.69E-01	-3.03E-01	6.09E-02
	Curtosis	-1.51E+00	-3.27E-01	9.16E-01
Febrero	Esperanza	-2.17E-05	2.14E-04	-4.81E-04
	Varianza	9.09E-10	5.06E-08	3.98E-08
	Sesgo	3.39E-01	-1.96E-01	1.04E+00
	Curtosis	-1.43E+00	-1.13E+00	9.14E-01
Marzo	Esperanza	-8.61E-05	-3.51E-04	-3.44E-04
	Varianza	6.32E-10	1.90E-08	2.93E-08
	Sesgo	-2.87E-01	-1.35E-01	-1.08E+00
	Curtosis	-1.35E+00	-9.29E-01	2.43E+00
Abril	Esperanza	2.44E-06	-5.88E-05	-8.95E-05
	Varianza	7.96E-10	9.56E-08	9.99E-08
	Sesgo	-6.35E-01	-1.46E-01	-2.02E-01
	Curtosis	-1.13E+00	-1.35E+00	-1.18E+00
Mayo	Esperanza	1.27E-05	1.40E-04	5.26E-04
	Varianza	2.61E-10	1.42E-08	5.67E-09
	Sesgo	-1.34E+00	1.02E+00	-1.40E+00
	Curtosis	3.87E-01	4.70E-01	1.14E+00
Junio	Esperanza	5.80E-06	2.26E-04	
	Varianza	2.91E-10	8.26E-09	
	Sesgo	-1.04E+00	-1.42E+00	
	Curtosis	2.25E-01	1.86E+00	

MES	MOMENTO	AÑO		
		2014	2015	2016
Julio	Esperanza	-2.43E-05	1.24E-05	
	Varianza	4.44E-10	3.52E-09	
	Sesgo	8.05E-02	4.72E-01	
	Curtosis	-1.17E+00	-1.18E+00	
Agosto	Esperanza	-1.23E-05	-2.00E-05	
	Varianza	5.09E-10	1.10E-08	
	Sesgo	4.54E-01	-4.07E-01	
	Curtosis	-1.42E+00	-7.94E-01	
Septiembre	Esperanza	5.95E-05	-1.14E-04	
	Varianza	2.44E-09	1.14E-08	
	Sesgo	4.35E-01	2.77E-01	
	Curtosis	-1.39E+00	-1.36E+00	
Octubre	Esperanza	2.31E-04	1.81E-04	
	Varianza	3.99E-09	4.13E-08	
	Sesgo	1.23E+00	-8.05E-01	
	Curtosis	1.66E+00	-2.97E-01	
Noviembre	Esperanza	2.22E-04	3.89E-04	
	Varianza	6.30E-09	5.85E-08	
	Sesgo	2.19E-01	-6.92E-01	
	Curtosis	-9.08E-01	-8.53E-01	
Diciembre	Esperanza	2.35E-05	1.53E-04	
	Varianza	1.16E-08	3.41E-08	
	Sesgo	-7.94E-01	5.87E-01	
	Curtosis	-2.86E-01	-6.35E-01	

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo anterior, y según la premisa de la hipótesis planteada en el artículo, se determinó si los primeros cuatro momentos de una función generadora de los mismos explicaban el comportamiento de la utilidad del portafolio de referencia, y, a partir del estudio histórico del comportamiento de dicho rendimiento diario, mediante el uso del software estadístico *R*, versión 3.2.3, se estimaron los coeficientes (β_i) del modelo en mención descrito de la siguiente manera:

$$\text{Porcentaje de utilidad} = \beta_0 + \beta_1 \ k_1 \ + \beta_2 \, k_2 \ + \beta_3 \, k_3 \ + \beta_4 \ k_4 \ + \varepsilon,$$

donde:

k_1 = valor esperado

k_2 = varianza

k_3 = sesgo

k_4 = curtosis

ε = error propagado,

Al tener en cuenta que:

$$\text{Porcentaje de utilidad} \ = \hat{\pi} \ = \frac{Utilidad\ del\ portafolio}{Valor\ del\ portafolio}$$

A continuación, se presentan los resultados encontrados luego de ajustar el modelo de regresión, de acuerdo con los parámetros antes mencionados:

Tabla 2. Resultados del ajuste del modelo de regresión del porcentaje de utilidad del portafolio en función de los cuatro primeros momentos

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-3.88E-05	-5.07E-06	-1.34E-06	4.62E-06	5.12E-05

Coefficients:	Estimate	Std. Error	t Value	Pr(>|t|)
Intercepto	1.15E-06	7.32E-07	1.573	0.116201
Esperanza	9.99E-01	2.11E-03	474.51	< 2e-16 ***
Varianza	2.33E+00	4.86E-01	4.784	2.18e-06***
Sesgo	2.34E-06	9.36E-07	2.494	0.012903*
Curtosis	1.63E-06	4.88E-07	3.352	0.000855***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.13e-05 on 578 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9978, **Adjusted R-squared:** 0.9978
F-statistic: 6.462e+04 on 4 and 578 DF, **p-value:** < 2.2e-16

Fuente: elaboración propia

Nótese que el modelo de regresión ofrece la evidencia de que la utilidad del portafolio de opciones de la entidad de referencia, expresada en función del tamaño de dicho portafolio (ver tabla 2), puede explicarse por los cuatro primeros momentos (esperanza, varianza, sesgo y curtosis) de una función generadora de los mismos, que para este caso es la función de utilidad tomada como referencia para la presente investigación. Lo anterior permite estimar el efecto originado sobre la utilidad del portafolio de opciones en condiciones puntuales de volatilidad, sesgo y curtosis.

4.2 Análisis de datos

En función de lo antes mencionado, y frente al ejercicio de sensibilizar una a una las variables del modelo manteniendo las demás constantes, en la figura 4 se pueden apreciar con claridad el efecto y la magnitud de incremento del segundo, el tercero y el cuarto momentos. Nótese que la utilidad estimada a partir de la sensibilidad de la volatilidad evidencia de manera nítida un fuerte incremento en la estimación de la misma, lo que tiene sentido de acuerdo con la premisa de la relación entre riesgo y rentabilidad.

Por otra parte, nótese que en la medida en que la distribución de rentabilidad del portafolio se torna más leptocúrtica (con colas menos pesadas), se generó incremento en la utilidad estimada por el modelo; no obstante, y de acuerdo con la misma variación en el sesgo, se aprecia con claridad que en la medida en que la distribución de la rentabilidad del portafolio se torna asimétrica negativa (sesgada hacia valores positivos), la estimación de utilidad del modelo se incrementa.

Es de resaltar que la estimación de rentabilidad del modelo se hace indiferente de cara al sesgo y la curtosis, cuando la distribución de los rendimientos es casi simétrica y mesocúrtica, es decir, en un escenario bastante similar al de una distribución normal, lo que se puede aprecia con nitidez en la figura 4, en la que se intersecan las estimaciones de utilidad al variar solo el sesgo y la curtosis.

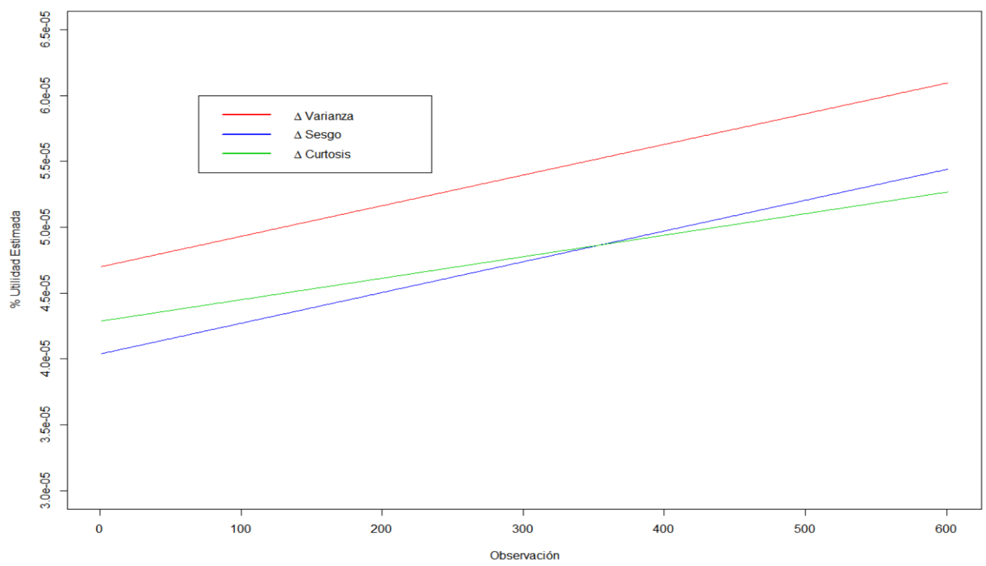

Figura 4. Comparativo de rendimientos esperados de acuerdo con la sensibilización de los momentos segundo, tercero y cuarto de manera independiente

Fuente: elaboración propia

Por último, a manera de ejemplo y para los escenarios de mercado antes descritos en función del comparativo de los momentos tercero y cuarto entre los meses específicos mencionados, se puede apreciar que, en materia de rendimientos estimados por el modelo, según las condiciones de mercado de junio versus septiembre, en materia de sesgo, el modelo muestra una variación en el rendimiento estimado del 4.05%. Por otra parte, al contrastar los meses de febrero y noviembre de cara a la curtosis, se observa una variación en el rendimiento estimado por el modelo del 3.16%.

5. Conclusiones

En este trabajo se analizó cómo el tercero y el cuarto momentos de una función expresada a partir de variables aleatorias contribuyen a la explicación de la rentabilidad del portafolio de la entidad de referencia, de tal forma que se permita establecer cómo se afecta la utilidad en diferentes escenarios de mercado y cómo estructurar el portafolio con base en la dirección dada por el sesgo y el nivel de riesgo que se asumiría, señalado por la curtosis.

En la actualidad, la literatura financiera ofrece una amplia selección de análisis metodológicos para el comportamiento de mercado, que, en la práctica terminan enfatizando únicamente en los dos primeros momentos de una función con variables aleatorias (valor esperado y varianza), pero en los que se omiten el sesgo y la curtosis como factores de modelación del rendimiento de un portafolio de derivados financieros que, en definitiva, fue el objetivo de la presente investigación.

Del ajuste del modelo de estimación de coeficientes que explican la rentabilidad del portafolio en función de los cuatro momentos, la presente investigación permitió evidenciar que para la entidad de referencia dicha estimación arrojó coeficientes estadísticamente significativos, coherentes y consistentes con la teoría asociada con la función de utilidad seleccionada.

Por tanto, al considerar el sesgo y la curtosis en la modelación de los rendimientos del portafolio, fue posible establecer diferentes efectos sobre la rentabilidad, incluso para idénticos escenarios de volatilidad, lo que ratifica la importancia de analizar los cuatro momentos y no solo el valor esperado y la volatilidad.

Al considerar las limitaciones que presenta el simple análisis de la media y la varianza, en la perspectiva de una postura clásica, que omite la importancia del sesgo y la curtosis, el presente documento pretendió establecer una referencia sobre cómo las empresas definen sus portafolios de inversión con subyacente financiero.

Como próxima etapa de la presente investigación resta por establecer, mediante simulación de Montecarlo, diferentes escenarios de mercado que permitan determinar con claridad la combinación de situaciones específicas de mercado de cara a la utilidad del portafolio, en función de la modelación ajustada en el documento.

Referencias

Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y estadística*. Ciudad de México: McGraw-Hill.

Damodaran, A. (2009). *Strategic risk taking. A framework for risk management*. Upper-Saddle River, NJ: Pearson. Recuperado el 12 de mayo de 2016, de: http://ptgmedia.pearsoncmg.com/images/9780137043774/samplepages/0137043775.pdf

Giros y Finanzas (2010). *Sistema de administración de riesgos de mercado, SARM*. Recuperado el 12 de abril de 2016, de: https://www.girosyfinanzas.com/Portals/0/pdf/sarm.pdf

Idrobo Z., S. A. (2010). La teoría de la utilidad cardinal y sus implicaciones en las decisiones de inversión. *Porik An*, *9*, 53-76. Recuperado el 13 de abril de 2016, de: http://www.unicauca.edu.co/porik_an/imagenes_3noanteriores/No.9porikan/porikan_2.pdf

Knob, R. (2013). *Manual de instrumentos derivados. Cuatro décadas de Black-Scholes* Madrid: Afi Ediciones. Empresa Global.

Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo*, 9ª ed. Ciudad de México: McGraw-Hill.

León Rincón, C. E. (2009). Una aproximación teórica a la superficie de volatilidad en el mercado colombiano a través del modelo de difusión con saltos. *Borradores de Economía, 570.* Recuperado el 21 de abril de 2016, de: http://www.banrep.gov.co/es/contenidos/publicacion/una-aproximacion-teorica-la-superficie-de-volatilidad-en-el-mercado

Meucci, A. (2007). *Risk and asset allocation*. Nueva York: Springer.

Norstad, J. (2011). *An introduction to utility theory*. Recuperado el 5 de mayo de 2016, de: http://hari.seshadri.com/docs/how-much-would-you-bet/norstad_utility.pdf

Ortiz Olivera, J. M. (2013). Propuesta de demostración de existencia y unicidad de la función de utilidad. *Economía Informa, 381*, 64-73. Recuperado el 5 de mayo de 2016, de: http://www.elsevier.es/es-revista-economia-informa-114-articulo-propuesta-demostracion-existencia-unicidad-funcion-S0185084913713288

Pareja Vasseur, J., Ramírez Barrera, B. J., Molina Pérez, J. E., y Marrero Gómez, M. (2011). *Estimación de la volatilidad en opciones reales para un proyecto en*

Colombia. Medellín: Universidad EAFIT, Semillero de investigación, bufete financiero. Recuperado el 13 de abril de 2016, de: http://www.eafit.edu.co/investigacion/comunidad-investigativa/semilleros/bufete-financiero/Documents/Paper%20Inv.pdf

Pecha C., A. (2008). *Optimización estática y dinámica en economía*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

Pennings, J. M. E., & Garcia, P. (2009). The informational content of the shape of utility functions: financial strategic behavior. *Managerial and Decision Economics*, *30*(2), 83-90. Recuperado el 14 de abril de 2016, de: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mde.1439/abstract

Saunders, A., & Cornett, M. M. (2008). *Financial institutions management. A risk management approach*, 6ª ed. NuevaYork: McGraw-Hill. Recuperado el 19 de abril de 2016, de: http://www.bulentsenver.com/FIN5477/Financial_Institutions_Management_AntonySaunders_TextBook.pdf

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*, 2ª ed. Barcelona: Reverté.

Superintendencia Financiera de Colombia (1995). *Circular básica contable y financiera (circular externa 100 de 1995)*. Bogotá: Superintendencia Financiera de Colombia. Recuperado el 14 de abril de 2016, de: https://www.superfinanciera.gov.co/jsp/loader.jsf?lServicio=Publicaciones&lTipo=publicaciones&lFuncion=loadContenidoPublicacion&id=15466