

APROXIMACIÓN AL MODELO DEL MERCADO DE TELECOMUNICACIONES MÓVILES EN COLOMBIA DESDE LA PERSPECTIVA DE CONTROL

BIBIANA SEPÚLVEDA BOTERO

Trabajo enviado al Departamento de Ciencias Básicas
para el cumplimiento de uno de los requisitos para obtener el título de
Master of Science en Matemáticas Aplicadas

Directora
Olga Lucia Quintero M. Dra.

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MEDELLÍN - COLOMBIA
UNIVERSIDAD EAFIT

21 de noviembre de 2013

Nota de aceptación

Jairo Villegas. Dr. Coordinador de la Maestría

Olga Lucia Quintero Montoya. Dra. Ing.
Directora del Proyecto

Medellín, Fecha: _____

Resumen

En este trabajo de tesis, se presenta una aproximación a la modelación del mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia, donde se adolece de este tipo de enfoque, dado que las grandes empresas que tienen el control del mercado no lo hacen público por los grandes conflictos de tipo económicos que se manejan. Al inicio del trabajo se hace una breve presentación del escenario en el que se desarrolla el mercado, la evolución que ha tenido y algunas consideraciones de competencia, en un mercado que desde sus inicios ha tenido el concurso de muy pocas empresas y ha sido marcado por un gran monopolio.

Para la modelación, se parte de datos de usuarios y precios disponibles en las páginas web de los operadores de Telecomunicaciones y de información pública disponible en las páginas oficiales del Ministerio de Comunicaciones de Colombia, el modelo de mercado presentado está compuesto por cuatro empresas de Telecomunicaciones Móviles: Claro (antes Comcel), Movistar, Tigo y UFF; los tres primeros Operadores de Redes Móviles y el cuarto Operador Móvil Virtual. A la fecha de entrega de la tesis ya han aparecido otros dos operadores móviles virtuales.

El soporte matemático inicial para la construcción del modelo, se basa en modelos desarrollados por Cricelli et al (2002), para el mercado de Telecomunicaciones de Italia, son modelos basados en espacio de estado, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, lo que presume una cierta linealidad en el sistema que se desarrolla.

Se inicia con la identificación de las variables del sistema y se construye el modelo propuesto en variables de estado, pero como en Colombia éste mercado tiene asociado un gran monopolio, la no linealidad en el sistema hace muy difícil su modelación, en especial para el operador dominante (Claro) y para el operador más nuevo en el medio (UFF); por lo que se ajusta el modelo utilizando técnicas de inteligencia artificial, para este caso redes neuronales, herramienta utilizada para modelar el comportamiento del sistema y sus incertidumbres.

Finalmente, se presenta una discusión de las dinámicas del mercado a la luz de la matemática aplicada para su entendimiento.

Índice

1. Introducción	7
1.1. Descripción y Formulación del Problema	10
1.2. Objetivos	11
1.2.1. Objetivo General	11
1.2.2. Objetivos Específicos	11
1.3. Importancia de la Investigación	12
1.4. Hipótesis o Pregunta de Investigación	13
2. Fundamentos Teóricos	14
2.1. Introducción	14
2.2. Antecedentes	14
2.3. Revisión del Estado del Arte en Modelos de Mercados de Te- lecomunicaciones	15
2.4. Modelo de Referencia	20
2.5. Técnicas de Estimación de Parámetros	26
2.5.1. Métodos exactos	27
2.5.2. Métodos Heurísticos	28
2.6. Inteligencia Artificial	29
2.6.1. Lógica Difusa:	30
2.6.2. Redes Neuronales Artificiales ANN:	30
2.6.3. ANFIS:	33
3. Modelos de Mercado para la Telefonía Móvil en Colombia	34
3.1. Introducción	34
3.2. Modelo en Espacio de Estados	34
3.3. Modelo Híbrido	42
3.4. Modelo de Redes Neuronales	46
4. Análisis de Resultados	50
4.1. Introducción	50
4.2. Resultados Obtenidos	51
4.2.1. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Ope- rador A (Claro)	51
4.2.2. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Ope- rador B (Movistar)	53
4.2.3. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Ope- rador C (Tigo)	58
4.2.4. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Ope- rador D (UFF)	59

4.3.	Análisis de la Modelación del Mercado de Telecomunicaciones	
	Móviles	60
4.3.1.	Inversión y Cobertura	61
4.3.2.	Tráfico on net y off net	62
5.	Conclusiones y Recomendaciones	65
6.	Anexos	67
6.1.	Glosario	67
6.2.	Tablas de Datos	69

Índice de figuras

1.	Arquitectura de una Red Neuronal	30
2.	Neurona Artificial	31
3.	Principales Funciones de Transferencia	32
4.	Tipos de Redes Neuronales	32
5.	Distribución del flujo de tráfico	34
6.	Modelo de crecimiento de usuarios	37
7.	Evolución de crecimiento del mercado	38
8.	Modelo en Espacio de Estados en Simulink	39
9.	Crecimiento de usuarios para operador A	40
10.	Crecimiento de usuarios para operador B	40
11.	Crecimiento de usuarios para operador C	41
12.	Crecimiento de usuarios para operador D	41
13.	Concentración de Usuarios e Ingresos en Colombia	46
14.	Comportamiento de usuario operador A (Claro)	46
15.	Comportamiento de usuario operador B (Movistar)	47
16.	Comportamiento de usuario operador C (Tigo)	47
17.	Comportamiento de usuario operador D (UFF)	48
18.	Red neuronal para Operador A	52
19.	Red neuronal para Operador B	53
20.	Red neuronal para Operador C	53
21.	Red neuronal para Operador D	54
22.	Comportamiento de Usuarios Operador A con Red Neuronal	54
23.	Comportamiento de Usuarios Operador B con Red Neuronal	55
24.	Comportamiento de Usuarios Operador C con Red Neuronal	55
25.	Comportamiento de Usuarios Operador D con Red Neuronal	56
26.	Resultados de modelación operador A	56
27.	Errores en modelacion Operador A	57
28.	Resultados de modelación del Operador B	57
29.	Errores en modelacion Operador B	58
30.	Resultados de Modelacion del Operador C	59
31.	Errores en modelacion Operador C	59
32.	Resultados de Modelacion del Operador D	60
33.	Errores en modelacion Operador D	61
34.	Inversion en Capital CAPEX	62
35.	Inversion en Cobertura	62
36.	Proporción Tráfico off net Total	63
37.	Proporción Tráfico off net por segmento	63

1. Introducción

La construcción de modelos para diferentes tipos de mercados, ha sido un reto que tradicionalmente se ha enfrentado desde la Economía, la Econometría y la Estadística, puesto que es desde esas áreas del conocimiento que se han venido construyendo explicaciones a los fenómenos presentes bajo condiciones ideales de equilibrio, normalidad y en muchos casos, linealidad. Particularmente, los mercados de telecomunicaciones móviles, han sido modelados desde diferentes perspectivas que van desde la construcción de modelos de demanda en función de los precios, excedentes de consumidor como aproximaciones al negativo de la derivada de la demanda, utilidades y ganancias como función de la demanda y cuotas de mercado, todas las anteriores con la finalidad de estimar beneficios, bienestar o analizar algunas dinámicas de los mercados.

Desde el comienzo del uso de la tecnología de teléfonos móviles celulares, han venido sucediendo diferentes fenómenos que tienen como consecuencia la distorsión del mercado de telefonía móvil. La inclusión de los servicios de datos, hizo que el mercado de los celulares se tornara en un mercado de servicios móviles avanzados en los que básicamente se tienen una serie de sub mercados como el de voz, movil-movil, móvil-fijo, mensajes de texto SMS, los datos o acceso a redes sociales. Sin embargo, la literatura y la historia de las entidades regulatorias de telecomunicaciones han enfocado sus esfuerzos en el modelado del mercado relevante de voz móvil.

Desde la comisión de regulación de comunicaciones de Europa, pasando por Estados Unidos, Perú, Chile y algunos países de Latinoamérica, los entes reguladores han realizado muchísimos estudios que se enfocan en el conocimiento del mercado a través de dinámicas básicas, sin prestar mucha atención a los fenómenos que hacen que los mercados estén fuera del equilibrio. La forma en la que se ha afrontado al problema, pareciera que se orienta a que el mercado deba parecerse al modelo, más no al revés.

Este trabajo busca modelar el mercado de telecomunicaciones móviles de Colombia, haciendo una primera aproximación desde la perspectiva de los sistemas lineales y de control, usando para tal fin las ecuaciones diferenciales y en el caso de no lograr un modelo compacto explicativo del fenómeno, se buscará resolverlo mediante herramientas de modelado de sistemas no lineales heredadas de la teoría de control como lo son las redes neuronales.

Específicamente hablando, se supone que el número de usuarios de un operador móvil es proporcional a los diferenciales de precios con sus com-

petidores, sin embargo, existen otro tipo de factores que han demostrado afectan la forma con la que los usuarios eligen tal o cual empresa prestadora de servicios, además de la diferenciación de las tarifas dentro y fuera de la red. Esta tesis busca enmarcar las aplicaciones de la matemática, en una problemática que ha sido de actualidad en Latinoamérica y Colombia y plantea un precedente desde la perspectiva del regulador, para proceder en trabajos futuros al diseño de estrategias de control de mercado. Naturalmente la situación Colombiana de los últimos dos años, hace que la creación de un modelo compacto sea de gran dificultad para quien modela, puesto que se han tomado medidas regulatorias que introducen perturbaciones de tipo estocástico al sistema.

Según la Comisión de Regulación de Comunicaciones (CRC), en Colombia el mercado de la telefonía móvil ha tenido por varios años el concurso de tres Operadores de Redes Móviles (OMR) establecidos y dominantes del mercado: Comunicación Celular S.A. Claro (antes Comcel), Telefónica Móviles S.A. Movistar y Colombia Móvil S.A. E.S.P. Tigo, cuya participación en el mercado en términos de usuarios a marzo del 2011 es casi del cien por ciento de los usuarios de telefonía móvil en Colombia; con la finalidad de hacer un uso más eficiente de la infraestructura instalada en el país, consistente en: postes, poliductos, conductos, cámaras, corredores férreos, líneas de transmisión eléctrica y demás, la CRC a través de la ley 1341 de 2009 posibilita la entrada de los Operadores Móviles Virtuales (OMV), esta ley promueve el uso eficiente de la infraestructura y la optimización de los servicios de telecomunicaciones y se dictan medidas regulatorias sobre el tema, esto en beneficio del desarrollo del sector de las Tecnologías de la Información y las Telecomunicaciones (TIC) y con el objetivo de proveer mejores servicios en beneficio de las comunidades más desfavorecidas y alejadas del país.

Un OMV se sirve de las redes de los operadores móviles establecidos para prestar servicios móviles a los usuarios finales, en Colombia este tipo de operadores ya comenzaron a incursionar a través de UNE y ETB prestando servicios de datos y UFF prestando servicios de voz y datos, los tres soportados sobre la red de Colombia Móvil. A nivel internacional existen más de 650 OMV con un número aproximado de 114 millones de suscriptores (finales de 2010), en su orden, las regiones del mundo con más OMV son: Europa Occidental, Norteamérica y Asia (CRC, 2010), los cuales prestan servicios de voz y datos a comunidades estratégicas enfocados en precios, servicios y productos.

Este trabajo busca aproximar un modelo matemático al mercado de la telefonía móvil en Colombia, el cual está conformado por tres OMR y un

OMV, en este modelo la cadena de valor tiene diferentes niveles: la infraestructura de la red, el desarrollo y suministro de servicios y la relación con los consumidores; en estos tres niveles se desarrolla la competencia del mercado, en donde los primeros OMR actúan como proveedores y los OMV actúan como minoristas y están en el último nivel de la cadena de valor.

En la construcción del modelo matemático inicial, se tiene en cuenta la influencia de las diferencias de precios de los competidores, para obtener un modelo en ecuaciones diferenciales lineales para el cambio del número de usuarios. Luego, se contemplan de manera cualitativa variables que intervienen en el mercado de las Telecomunicaciones tales como: costos marginales, ingresos, inversiones infraestructurales y cargos de interconexión, entre otras; y la forma en la que estas variables intervienen en la interacción entre los diferentes tipos de operadores.

Para la construcción del modelo matemático, se utilizaron como punto de partida, principalmente, los modelos matemáticos de mercados de telecomunicaciones definidos en los diferentes trabajos de Cricelli et al desde el año 2002 hasta el año 2011; se pretende modelar el crecimiento del mercado con la finalidad de analizar el impacto de la competencia debida a la entrada de nuevos operadores.

Este trabajo se desarrollo en el siguiente orden: En el capítulo 2 se presenta una breve descripción de los fundamentos teóricos desde la teoría de mercados de telecomunicaciones, sistemas de control, estimación de parámetros e inteligencia artificial usados para el desarrollo de la Tesis.

El capítulo 3 se titula Modelos de Mercado para la Telefonía Móvil en Colombia donde se presenta el primer modelo ampliado para el mercado Colombiano de 4 operadores (tres OMR y un OMV) y se hace una presentación de las estimaciones de parámetros realizados para el modelo y los resultados obtenidos; adicionalmente se presenta el modelado de los errores de estimación del modelo en espacio de estados mediante redes neuronales, configurando un modelo híbrido y finalmente se reportan las redes neuronales que sirven para modelar el sistema completo no lineal, que explica las dinámicas del mercado no contempladas en el modelo en espacio de estado.

En el capítulo 4 se hace una discusión sobre los resultados obtenidos para el cumplimiento de los objetivos específicos, aplicando conocimientos previos del área de las telecomunicaciones en el tratamiento del problema, identificando las variables que intervienen en el mercado de las telecomunicaciones en Colombia y determinando las variables que impactan en la interacción entre operadores.

1.1. Descripción y Formulación del Problema

Desde sus inicios en Colombia, la telefonía móvil se ha caracterizado por tener pocos operadores, los que han venido ingresando al mercado progresivamente mediante la instalación de infraestructura y la aplicación de diferentes tipos de estrategias de mercadeo; la combinación de esos factores, con otros indicadores de calidad de servicio y manejo de precios lo sitúan como uno de los mercados de Latinoamérica más altamente concentrados.

La presencia de indicadores de concentración de mercado, inmediatamente remiten al desarrollo de estudios de relevancia de los productos de la canasta de servicios y naturalmente, a la determinación de la dominancia de alguno de los operadores. Ante la presencia de tal distorsión de mercado, y la evidencia de anomalías como el efecto club ¹ es necesaria la intervención del estado mediante el ente regulador en pro del cumplimiento de la ley de competencia.

Luego de ello, se aplican acciones regulatorias que buscan salvaguardar el mercado lo que tiene efectos directos sobre los precios de oferta a los usuarios. Algunas de las acciones regulatorias son la aplicación de techos de precios para llamadas fuera de la red, la asignación de cargos de interconexión entre los operadores y relaciones entre los precios dentro y fuera de la red.

Una práctica realizada en Europa cuando no se logra tener un equilibrio dado que las inversiones ya han posicionado a los operadores, existen distorsiones del mercado y las acciones regulatorias no son suficientes para equilibrar el mercado, es que se permite la entrada de nuevos operadores que no tienen que hacer inversiones de infraestructura iniciales a los que se les denomina Operadores Móviles Virtuales (OMV).

Un OMV puede entrar en el mercado de la telefonía móvil sin ser el dueño de la licencia de banda ancha, paga una tarifa por el uso del espectro, tampoco es dueño de la infraestructura, paga un cargo por su utilización; esto produce un nuevo modelo en la cadena de valor, pues se abre la posibilidad de entrada de nuevos jugadores al mercado (dado que los mercados de telecomunicaciones pueden escribirse como un juego) los cuales pueden ingresar en la cadena de valor en el segundo o tercer nivel, dependiendo de sus condiciones económicas y su propia infraestructura, además de las condiciones que

¹Efecto club: incentivo que tienen los usuarios a suscribirse a un operador que ofrece precios on net inferiores a sus precios off net

indique el operador que lo hospeda en su red y de los acuerdos y condiciones de servicio que le impongan.

Este trabajo de tesis, se enmarca en el desarrollo del proyecto de Investigación en Modelado Matemático de Mercados de Sectores Estratégicos y se enfoca en el uso de las herramientas heredadas de los Sistemas de Control e Inteligencia Artificial en la línea de formación de la tesista en Ingeniería de Telecomunicaciones. Se genera un modelo matemático aproximado del mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia, ampliando el modelo de referencia y logrando un modelo amplio representado en espacio de estados, técnicas avanzadas de modelado tipo caja negra (inteligencia artificial) y su simulación en Matlab, para describir la forma de operación de la industria de las telecomunicaciones, esto con la entrada de nuevos jugadores, que como se mencionó, entran en el mercado en otras condiciones técnicas y de servicio; el modelo servirá para analizar la competencia y la diversidad generada entre los OMR y los OMV, así mismo, servirá para describir y analizar las relaciones de tipo comercial que se pueden establecer entre los operadores dadas las condiciones del mercado en relación a los nuevos productos, servicios y beneficios para los usuarios de la telefonía móvil.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Aproximar un modelo matemático del mercado relevante de voz de los sistemas de telecomunicaciones móviles en Colombia en donde se cuenta con tres Operadores de Redes Móviles y un Operador Móvil Virtual, con base en los diferentes modelos definidos en los trabajos de Cricelli et al para el mercado de telecomunicaciones móviles en Italia.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Aplicar conocimientos previos del área de las telecomunicaciones en el tratamiento del problema.
- Identificar las variables que intervienen en el mercado de las telecomunicaciones en Colombia.

- Determinar las variables que impactan en la interacción entre operadores.
- Aplicar la perspectiva del análisis de sistemas dinámicos y control en el modelado del mercado de la telefonía móvil en Colombia.
- Aproximar un modelo matemático del mercado de telecomunicaciones móviles en Colombia representado en espacios de estados con fines de simulación.
- Validar el modelo usando técnicas de ingeniería avanzada en la solución del manejo de la incertidumbre.

1.3. Importancia de la Investigación

La importancia de la modelación matemática en la solución de los problemas de ingeniería, radica en la construcción de conocimiento que permita el control de las variables que se requieren para la explicación de los fenómenos tanto determinísticos como estocásticos, particularmente en el sector de las telecomunicaciones se han detectado necesidades de modelación matemática, con la finalidad de obtener instrumentos válidos para la toma de decisiones en dicho sector.

En la situación que compete a este trabajo, la matemática es aplicada a un sector estratégico de las telecomunicaciones: la telefonía móvil, para la construcción de un modelo que aportará información en relación al crecimiento de usuarios y precios, útil para entes tomadores de decisiones en lo relacionado con el mercadeo y la comercialización de este servicio; así como también información sobre ganancias y estrategias de competencia.

A nivel internacional, a junio de 2010 existían más de 650 OMV en el mundo, con un número aproximado de 114 millones de suscriptores; Europa Occidental contaba con la mayor participación con el 58 % del total de OMV y 44 % del total de suscriptores, seguido por Norteamérica con el 12 % y Asia con el 11 %; las demás regiones en el mundo no tienen una participación significativa de OMV; Latinoamérica se encuentra retrasado en el desarrollo de OMV (CRC, 2010).

La posición regulatoria a nivel internacional depende mucho del objeto que se persiga, en este sentido, tenemos que por ejemplo en Reino Unido,

OFCOM (Independent regulator and competition authority for the UK communications industries) luego de algunos estudios del mercado de las telecomunicaciones móviles, optó por no regular en forma directa dicho mercado ya que se podría crear una sobrerregulación, aunque manteniendo siempre un monitoreo sobre los OMV y los OMR. En Norteamérica a finales del 2010 existían aproximadamente 61 OMV en Estados Unidos y Canadá, en estos países los OMV no requieren de ninguna licencia para entrar a operar, dado que se ha determinado que es un mercado efectivamente competitivo, así lo determinó la FCC (Federal Communications Commission). El marco regulatorio en Colombia se ha ido ajustando para el desarrollo de los OMV, el órgano regulador en Colombia se preocupa por promover la sana competencia y la inversión de los operadores, así como también por la protección de los derechos de los usuarios (CRC, 2011).

El mercado de las telecomunicaciones es complejo dado el monopolio dominante, la entrada continua de nuevos servicios, contenidos y aplicaciones, así mismo, la entrada permanente de nuevas tecnologías y operadores. Esta propuesta pretende construir un modelo que incluya todas las consideraciones anteriores y permita medir el impacto de la entrada de los nuevos participantes al mercado, tales como los Operadores Móviles Virtuales OMV. Se tiene como punto de partida para la modelación los diferentes trabajos de Cricelli et al, este modelo podrá ser tomado por los agentes reguladores del sector como una potencial herramienta en la toma de decisiones, así mismo será una herramienta de consulta para el desarrollo de futuros proyectos de investigación relacionados con el tema.

1.4. Hipótesis o Pregunta de Investigación

¿Será posible modelar el mercado de telefonía móvil avanzado en Colombia con base en la perspectiva del control, teniendo como referente el modelo del mercado móvil Italiano, en un mercado donde compiten Operadores de Redes Móviles OMR y Operadores Móviles Virtuales OMV?. ¿El modelo servirá para determinar la relación costo beneficio de los operadores en acción?

2. Fundamentos Teóricos

2.1. Introducción

En esta sección se presenta una breve descripción del mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia, una descripción del modelo matemático definido por Cricelli et al (2002) para la representación en ecuaciones de estado del mercado de telecomunicaciones móviles en Italia, el cual se utilizó como referente para la modelación del mercado de telecomunicaciones móviles en Colombia. Se presentan brevemente las técnicas de estimación paramétrica usadas para la primera aproximación y también una descripción de algunas técnicas de Inteligencia Artificial utilizadas para el modelado de las incertidumbres.

2.2. Antecedentes

En el mercado de la telefonía móvil en Colombia, en los últimos años, se ha desarrollado un gran cambio en la forma de hacer negocios y de prestar servicios de telecomunicaciones, uno de los que más fuerza ha tomado es el negocio de los Operadores Móviles Virtuales (OMV), los cuales se sirven de otras redes para prestar servicios a los usuarios finales. Un OMV puede aprovechar una red celular para ofrecer innovación y diversidad en sus servicios, tales como: TV móvil, entretenimiento, seguridad y control de aplicaciones; utilizando una gama muy variada de dispositivos, los nuevos operadores no pueden limitarse solo a servicios de voz, sino que incluyen valores agregados a su negocio.

Un OMV debe tener claro su modelo de negocio y sus capacidades reales en cuanto a infraestructura, para determinar el tipo de relación comercial que puede establecer con el Operador de Red Móvil (OMR) que lo alojará.

Según la Comisión de Regulación de Comunicaciones (CRC) los OMV se pueden clasificar de la siguiente manera:

- **Según su nivel de operación:** en este el OMV determina cuáles funciones estarán bajo su control.
- **Según el segmento de clientes y servicios:** en este el OMV pretende llegar a sus clientes con ofertas personalizadas a empresas o grupos

de interés con estrategias basadas en precios, sin contratos, sin cláusulas de permanencia, sin verificación de crédito, sin límite de edad; y con estrategias basadas en servicios a segmentos poblacionales específicos, empresas o clientes corporativos, roaming, sistemas de rastreo, vigilancia y control, acceso a internet, entretenimiento, entre otros.

En la mayoría de los países en donde operan fuertemente los OMV, los organismos regulatorios han optado por una política no regulatoria, manteniendo un constante control y respetando los acuerdos comerciales entre los operadores. En Colombia el ente regulador es la CRC, quien tiene a su cargo la regulación de mercados de redes y de servicios de comunicaciones, regulación encaminada a promover la sana competencia, evitar el abuso de los operadores dominantes, además de supervisar la buena prestación de los servicios y su calidad.

2.3. Revisión del Estado del Arte en Modelos de Mercados de Telecomunicaciones

El mercado de telefonía móvil presenta irregularidades, que en lo ideal, deben ser atendidas a la brevedad respecto los factores de competencia dentro de un marco legal. En otros países se han tomado medidas regulatorias, que han resultado ineficientes en la mayoría de los casos, es por esta razón que la investigación en la cual esta tesis se enmarca, desea construir un modelo formal basado en herramientas matemáticas, probabilísticas, econométricas y de inteligencia artificial, para poder comprender su comportamiento, encontrar las posibles acciones de control y analizar los efectos de las mismas sobre el mercado, este mismo concepto aplica para el mercado de internet. El enfoque propuesto, es el análisis de este sistema desde el punto de vista de la Ingeniería de Control, es aquel en el cual se aplican primero herramientas para comprender y modelar los sistemas y posteriormente, se analizan diferentes escenarios y se encuentran acciones de control óptimas, con la finalidad de maximizar o minimizar los factores que se consideren apropiados para lograr el mejor desempeño del sistema.

De este modo, puede afirmarse que los sistemas reales poseen, por naturaleza, dinámicas altamente no lineales debido a las interacciones entre muchas de las variables internas del sistema. Estas dinámicas, en algunos casos, pueden describirse mediante la representación del sistema en ecuaciones diferenciales y posteriormente ser expresadas en términos de las variables de

estado, a través de las cuales, se tratan de establecer las relaciones entre las entradas, los estados y las salidas del sistema. La forma en que la información se difunde a través de la evolución del sistema, determina los valores de los estados y su repercusión en la salida global del sistema no lineal.

Dado que la representación matemática de un sistema real no es exacta, es posible que las diferencias entre estos modelos y la realidad, sean tratadas por medio de algunas aproximaciones. Generalmente se considera que las discrepancias entre la realidad y el modelo matemático obedecen a incertidumbres que se adicionan al modelo de estados, convirtiéndolo en un conjunto de ecuaciones más complejas y con características que obedecen al tipo de perturbación que se considera parte del sistema. Al hablar de perturbación es necesario incorporar terminología más adecuada para su caracterización y cuantificación; las herramientas adecuadas para este fin son las teorías de probabilidades y procesos estocásticos, esto es, las perturbaciones se caracterizan y cuantifican mediante sus funciones de distribución de probabilidad. De esta forma, la distribución de probabilidad de los estados del sistema determina que la propagación de información pueda ser o no de tipo Gaussiano.

El objetivo de la estimación de estados o la identificación de sistemas, consiste en reconstruir la mayor información posible acerca del sistema (cuando no está totalmente disponible ni medida), a partir de las observaciones (mediciones) de la salida y/o de los estados relacionados. Dentro de la ingeniería de sistemas de control, es fundamental disponer de esta información para el desarrollo de aplicaciones varias, por ejemplo, en este caso particular el entendimiento de los sistemas definidos por los mercados de las telecomunicaciones en Colombia.

En el estudio de Berger et al (2004) se muestra que la estrategia de Bill and Keep es mejor que la de los precios de acceso basados en costos desde el punto de vista óptimo. Mientras que las externalidades usuales en una red se desvanecen si el mercado se acerca a estar cubierto, un tipo importante de externalidades permanecen: las externalidades de red tipo mediación de tarifas, descritas por Lafont et al (1998).

“Dado que la interconexión es normalmente un factor mandatorio, parte de los servicios de las redes consisten en terminar las llamadas que se originan en una red con la cual se compite, es una práctica común que las redes paguen al resto cargos de acceso en bases por minuto, las cuales se negocian entre ellas” Berger (2004). Es importante entonces tener en cuenta, un

modelo de un sistema donde el que llama-paga que incorpore precios no lineales y discriminación de precios basados en la terminación de las llamadas, así mismo en externalidades de llamada. Berger et al (2004) argumenta que solo el juego entre las externalidades de llamadas y el precio discriminatorio crea efectos interesantes que pueden ser decisivos para los resultados de la competencia. Esto aplica también para el caso de precios no lineales.

El modelo considerado contiene básicamente el cargo del consumidor (Tarifa T) que pertenece a una red, que incluye un cargo fijo, un factor de precios on net y uno de precios off net. Berger (2004) en su trabajo, introduce las externalidades de la llamada en el modelo estandar de competencia de redes con discriminación de precios basados en terminación de llamadas. También afirma que la estrategia de Bill and Keep, puede mejorar el beneficio total comparado con la estrategia de precios de acceso basada en costos. Estos modelos predicen que bajo una regla de precios lineal, el cargo de acceso negociado se usa como una herramienta colusoria y excede el costo marginal de acceso.

Por otro lado, un análisis acerca de si la intervención regulatoria es apropiada, en el caso de las externalidades de la red del tipo mediación de tarifa fué realizado por Hoerning (2007), los escenarios de intervención analizados consisten de: altos precios en llamadas off net, bajas precios de llamadas on net hacia el nivel eficiente (debajo del costo).

Los remedios posibles evaluados para solucionar los escenarios de intervención anteriores según Hoering pueden ser: bajar los cargos por terminación de ambas redes, bajar los cargos de terminación de la red más grande, introducir límites en los diferenciales on net / off net e introducir límites en los márgenes de off net. El modelo contempla costos on net, cargos de acceso (fijados por el regulador), costos off net, utilidad adicional, asimetría de la red, utilidad directa, duración de las llamadas, utilidad indirecta, función de demanda, y utilidad. Los beneficios, las ganancias, el excedente del consumidor y el beneficio total se consideran similares al modelo de Berger.

El análisis de equilibrio del mercado, se realiza a través del equilibrio de Nash, en el caso de la cuota de mercado constante. Los precios on net internalizan la utilidad de los suscriptores de recibir llamadas llevando al precio eficiente debajo del costo marginal. Los precios off net permanecen debajo del costo marginal e incrementan la cuota de mercado. En equilibrio simétrico y el excedente del consumidor se determina con el grado de competitividad del mercado.

En base a las anteriores apreciaciones acerca de los diferentes casos y escenarios de los mercados, y los diferentes tipos de modelos realizados, es de notable importancia revisar el trabajo de Tangeras (2009) donde revisa la neutralidad de las ganancias de los cargos de acceso en la competencia de redes. En este trabajo se demuestra que la neutralidad de las ganancias de los cargos de acceso en el caso de las ganancias de las redes es independiente de los cargos de acceso por tarifas de llamadas tipo “two-part”, dependiendo de una propiedad específica de la demanda de suscripción. Esto sugiere la inclusión de un modelo de demanda dentro del análisis general.

El análisis se realiza usando formas funcionales para describir la demanda de suscriptores y de llamadas para dos o más redes. Teniendo en cuenta costos marginales de originar y terminar las llamadas, diferenciando las ganancias respecto a los precios de las llamadas y el costo de suscripción, plantean una condición para el equilibrio simétrico encontrando que el precio de la llamada se debe poner igual al costo marginal efectivo para maximizar el excedente social dentro de la red.

Esta apreciación los lleva a plantear que las ganancias de la red son independientes de los cargos de acceso en equilibrio simétrico sólo si la elasticidad de la suscripción es proporcional el excedente neto del consumidor. Consecuentemente se plantean diferentes modelos para las utilidades llamados “estandar” y “general”.

Algunas apreciaciones generales de dicha aproximación se refiere a que las ganancias de dos redes interconectadas son independientes de los cargos de acceso que pagan por la terminación de la llamada en la red del competidor, dado que las redes que usan una tarifa de llamadas de “two-part” no discriminan los precios entre las llamadas que se realizan dentro o fuera de la red y tienen cargos de acceso y costos simétricos. Una red que monopolice el mercado, debería definir un precio de llamada igual al costo marginal para maximizar el excedente social y usar una cuota de suscripción fija para extraer completamente dicho excedente. Un cargo de acceso diferente al costo marginal de la terminación de llamada conlleva a un precio de llamada diferente del costo marginal, generando una pérdida del excedente social.

En un escenario más realista, es posible afirmar que las redes que eligiendo sus cargos de acceso afectan el excedente social, así como la intensidad de la competencia por suscriptores a través del efecto sobre las tarifas de las llamadas. El excedente social se divide entre la industria y el consumidor en proporción de la sensibilidad al precio de la demanda de suscripción y la elasticidad de la suscripción. Para propósitos de regulación la pregunta

interesante no es acerca de la robustez de la neutralidad de las ganancias por si misma, sino en las implicaciones regulatorias que provengan de la robustez de la neutralidad de las ganancias. Desafortunadamente perturbaciones pequeñas al modelo económico que contemple la neutralidad de las ganancias pueden tener grandes efectos discontinuos sobre los cargos de acceso de las redes y por consiguiente en el beneficio. A pesar de tener un cargo de acceso que maximice las ganancias (bajo la neutralidad de las ganancias) los cargos de acceso socialmente óptimos provienen de la ganancia que minimiza los cargos de acceso. Una solución extrema surge cuando los cargos de acceso preferidos por las redes son muy altos o muy bajos, de repente aparece un caso perfecto para la regulación de los cargos de acceso. Para Tangeras (2009) finalmente, despues de analizar diferentes casos de maximización y minimización de las ganancias y beneficios en función de los cargos de acceso, se encuentra con varias circunstancias en las cuales la neutralidad de las ganancias falla.

Si el precio de la red discrimina entre las llamadas terminadas dentro y fuera de la red, las redes deben beneficiarse conjuntamente de un precio de acceso debajo, o sobre el costo marginal de la terminación de la llamada, dependiendo del modo de competencia y del modelo de suscripción. La neutralidad de la ganancia falla si las redes establecen cargos de acceso asimétricos, es claro que en estos casos unas acciones regulatorias pueden restaurar la neutralidad de las ganancias eliminando la discriminación de precios de llamada e imponiendo cargos de acceso simétricos en las redes. Cuando el tamaño total del mercado está creciendo las redes generalmente obtendrán sus ganancias de los cargos de acceso debajo del costo de terminación de la llamada. Los cargos de acceso afectan las ganancias si las redes son asimétricas. Si las redes compiten en dimensiones diferentes que el precio, por ejemplo la calidad, encontrarán beneficios en los cargos de acceso para cubrir sus inversiones.

Yaipairoj (2004), plantea una posible solución técnica a algunos de los problemas de precios de llamadas, cargos de acceso, o variaciones de tarifas on net y off net mencionados en su trabajo "Priority Telephony System with pricing alternatives". En este trabajo se plantean esquemas de precios dinámicos en redes de telecomunicaciones donde tradicionalmente se usa crear incentivos en los usuarios, de modo que el uso de la red se mejore y las ganancias se maximicen. Es de pensar que este tipo de esquema ha de ser facilmente implementado en redes de datos o internet, pero dados algunos escenarios de congestión y calidad de servicio de algunas de las operadoras del mercado de telefonía móvil en Colombia, vale la pena rescatar algunas

de las conclusiones de este trabajo.

Como consecuencias de esquemas dinámicos de precios en sistemas de telefonía prioritaria se contemplan dos alternativas a los usuarios: un esquema de precios dinámicos donde se entrega una calidad superior de servicio o donde se fije un precio mas bajo con una degradación aceptable del desempeño.

Los esquemas de precios se convierten en una medida efectiva para realizar un manejo de tráfico y control de congestión. Los precios de las llamadas pueden cambiar en la medida que la demanda fluctua. Aumentar los precios de acuerdo con la demanda, determinar controles adicionales sobre los usuarios que usan la red o gastan los recursos de la red durante los tiempos de congestión lleva a un uso eficiente de la red, pese a generar algún tipo de frustración a algunos usuarios.

Conforme con la revisión del estado del arte en modelos económicos, se necesita definir una estructura del modelo, para encontrar de la forma más acertada posible, los factores principales de actividad del mercado.

Los métodos matemáticos utilizados hasta ahora para el modelo de mercados de telecomunicaciones, han sido la econometría y diferentes pruebas de poder de mercado desde la teoría económica. El uso de variables de estado se atribuye solamente a la escuela de Cricelli, sin embargo, en Colombia no se conocen estudios similares desde alguna de las anteriores perspectivas. Adicionalmente el uso de técnicas de inteligencia artificial para el modelado del mercado se conoce solo por trabajos específicos de consultoria en Ecuador.

2.4. Modelo de Referencia

Como punto de partida se tomará el modelo definido por Cricelli et al (2002), en donde se modela y analiza la entrada de un nuevo operador C al mercado de las telecomunicaciones móviles en Italia, en un mercado con dos operadores A y B; en el que se pretende representar el crecimiento de usuarios o suscriptores y el efecto de los precios óptimos por llamada. Desde este punto de vista, se trata el mercado como un sistema dinámico que evoluciona con el tiempo con tres variables de estado y al menos tres variables de control que serán los precios de cada uno de los operadores.

Se definen entonces las siguientes variables:

x_i : Número de suscriptores, donde $i = A, B, C$

q_i : Promedio de tráfico mensual por suscriptor, por operador i

F_i : Costo mensual de comercialización por operador i

p_i : Precio de llamada por minuto

c_1 : Costo marginal de transmisión de una llamada por minuto

c_2 : Costo marginal de recepción de una llamada por minuto

T : Tarifa de interconexión entre operadores por minuto

La función de demanda de llamadas de los operadores A, B y C es propuesta como una función lineal y está dada por la ecuación (1):

$$q_i = a - b \cdot p_i \quad (1)$$

El flujo de tráfico (minutos por mes) generado por cada operador está dado por la ecuación (2):

$$\varphi_i = x_i \cdot q_i \quad (2)$$

Una parte del flujo de llamadas es enviado fuera de la red, es decir, usuarios que realizan llamadas a usuarios de otro operador; la posibilidad de que un suscriptor haga una llamada hacia un suscriptor de otra red está dado por la ecuación (3):

$$\begin{aligned} P(j \rightarrow i) &= P(k \rightarrow i) = P(i \rightarrow i) \\ &\equiv \frac{x_i}{x_i + x_j + x_k} \quad i, j, k = A, B, C \quad i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (3)$$

Dicho esto, es posible definir una función de beneficio para cada uno de los operadores móviles, la cual está dada por la ecuación (4):

$$\begin{aligned} \Pi_i(x_i, x_j, x_k, p_i, p_j, p_k) &= (p_i - c_1)\varphi_i - c_2\varphi_i\left(\frac{x_i}{x_i + x_j + x_k}\right) \\ &- c_2\varphi_j\left(\frac{x_i}{x_i + x_j + x_k}\right) - c_2\varphi_k\left(\frac{x_i}{x_i + x_j + x_k}\right) + T\varphi_j\left(\frac{x_i}{x_i + x_j + x_k}\right) + T\varphi_k\left(\frac{x_i}{x_i + x_j + x_k}\right) \\ &- T\varphi_i\left(\frac{x_j}{x_i + x_j + x_k}\right) - T\varphi_i\left(\frac{x_k}{x_i + x_j + x_k}\right) - F_i \end{aligned} \quad (4)$$

En la ecuación (4) los dos primeros términos representan la utilidad del tráfico originado y despachado dentro de la red i respectivamente, los términos tres y cuatro representan los costos causados por la prestación del servicio de llamadas recibidas desde los operadores j y k , los términos cinco y seis representan los ingresos derivados del flujo de llamadas realizadas desde el operador i a los operadores j y k , el término siete y ocho representan los costos del servicio de interconexión con el operador j y k y el último término representa el costo mensual de comercialización del operador i . Esto es análogo para los dos operadores restantes, lo que indica que cada operador tiene una función de beneficio económico similar.

Reorganizando la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (5):

$$\begin{aligned} \Pi_i(x_i, x_j, x_k, p_i, p_j, p_k) = & (p_i - c_1 - c_2)x_i q_i + \left(\frac{x_i x_j}{x_i + x_j + x_k}\right)(T - c_2)(q_j - q_i) \\ & + \left(\frac{x_i x_k}{x_i + x_j + x_k}\right)(T - c_2)(q_k - q_i) - F_i \end{aligned} \quad (5)$$

Las variables x_i, x_j, x_k son variables de estado y evolucionan con el tiempo, las variables p_i, p_j, p_k son variables de control, dependen del tiempo y representan estrategias de precios de los portadores. Es sobre los precios que la regulación a nivel internacional ha sugerido intervenir como mecanismo de control de competencia entre los operadores móviles. Naturalmente, en este modelo base (solo para tres operadores) se estudian las estrategias de precios de cada uno de los operadores fuera de un escenario de intervención regulatoria, es necesario aclarar que este modelo está diseñado para reproducir la dinámica del mercado sin distorsiones de poder de mercado de ningún operador.

La optimización es un proceso que permite encontrar el conjunto de condiciones requeridas para conseguir el mejor resultado, en términos de minimización o maximización de una función objetivo. En el caso del mercado italiano, y con la finalidad de maximizar el beneficio de los operadores para cada periodo de tiempo, los autores proponen la siguiente función objetivo que representa la ganancia acumulada de los operadores, ecuación (6):

$$J_i = \int_0^{\infty} e^{-r \cdot t} (\Pi_i(x_i, x_j, x_k, p_i, p_j, p_k)) dt \quad (6)$$

Donde r es un factor de descuento. El costo por operador, del mercadeo mensual de sus servicios está dado por la ecuación (7):

$$F_i(t) = F + F'_i(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t} \quad (7)$$

Por su parte, el crecimiento total del mercado de la telefonía móvil celular está dado por la ecuación (8):

$$X(t) = \bar{X} \cdot (1 - e^{-k \cdot (t+t_0)}) \quad (8)$$

Donde \bar{X} es el número máximo de suscriptores, k es un parámetro que indica el crecimiento total del mercado y t_0 es el tiempo de retraso entre el comienzo del inicio del mercado y el tiempo de inicio del periodo de observación. Dicha función se ajusta a la evolución esperada del mercado; la velocidad de crecimiento del mercado depende directamente de la inversión, la mejor calidad y servicio prestado a los usuarios. Dicho esto, y desde el punto de vista de control, es posible asumir que la variación instantánea de suscriptores para cada operador está dada por el siguiente espacio de estados, representado por las ecuaciones (9), (10) y (11):

$$\begin{aligned} \dot{x}_A(t) = & k_{AA}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t)) + k_{AB}(p_B(t) - p_A(t)) \\ & + k_{AC}(p_C(t) - p_A(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_B(t) = & k_{BB}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t)) + k_{BA}(p_A(t) - p_B(t)) \\ & + k_{BC}(p_C(t) - p_B(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_C(t) = & k_{CC}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t)) + k_{CA}(p_A(t) - p_C(t)) \\ & + k_{CB}(p_B(t) - p_C(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

Donde k_{AA} , k_{BB} y k_{CC} corresponden al porcentaje potencial de suscriptores del mercado para A , B y C respectivamente; cada k_{ij} ($i \neq j$) son incrementos (decrementos) del número de suscriptores para el operador i como una función de la reducción del precio relativo al operador j .

Y la evolución de crecimiento del mercado de la telefonía móvil, con base en la ecuación (8) está dado por la ecuación (12):

$$\dot{X}(t) = k \cdot \bar{X} \cdot e^{-k \cdot (t+t_0)} \quad (12)$$

Es sobre este espacio de estados que se desea trabajar para construir una estructura útil para modelar el mercado de telecomunicaciones móviles en Colombia, analizando particularmente el efecto de la entrada al mercado del nuevo operador móvil virtual UFF, que denominaremos dentro de la tesis, operador D.

Con el espacio de estados planteado, y sin pérdida de generalidad, puede afirmarse que $x(t)$ es un vector de variables de estado ($\in E^m$) y $u(t)$ un vector de variables de control (p_a, p_b, p_c) ($\in E^n$), la ecuación en variables de estado con condiciones iniciales, para el número de suscriptores se define por la ecuación (13):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Retomando la ecuación (6) y con el propósito de encontrar acciones de control óptimas de forma que se maximice la función de beneficio de los operadores, se integran las trayectorias de estado en (13) y se define la siguiente función objetivo, ecuación (14):

$$J = \int_0^T g^i(t, x(t), u(t)) dt \quad (14)$$

Donde $f(t)$ y $g^i(t)$ en (13) y (14) son funciones continuamente diferenciables.

El problema de control óptimo consiste entonces en establecer la trayectoria óptima, es decir, la trayectoria que maximiza la función objetivo.

Se presenta entonces un arbitraje en la determinación del vector de control óptimo entre el valor que uno puede asignar al objetivo instantáneo y la trayectoria tomada por la variable de estado que tendrá un efecto sobre los valores futuros de la función objetivo; técnicamente esto consiste en escribir una función objetivo modificada que tiene en cuenta estos dos efectos.

Este objetivo modificado es llamado hamiltoniano, un Hamiltoniano, es entonces la suma del valor instantáneo del objetivo y de los valores futuros de este objetivo teniendo en cuenta la variación del vector de estado. Opciones diferentes del valor de la variable de control (precios) implican trayectorias diferentes del sistema dinámico. Se debe tener en cuenta esta restricción para determinar el vector de control que maximice el objetivo.

Usando los precios y el número de suscriptores como funciones de control y de estado, respectivamente, definimos el Hamiltoniano de cada operador, ecuaciones (15), (16) y (17):

$$H^A = \Pi_A + z_{AA} \cdot \dot{x}_A + z_{AB} \cdot \dot{x}_B + z_{AC} \cdot \dot{x}_C \quad (15)$$

$$H^B = \Pi_B + z_{BA} \cdot \dot{x}_A + z_{BB} \cdot \dot{x}_B + z_{BC} \cdot \dot{x}_C \quad (16)$$

$$H^C = \Pi_C + z_{CA} \cdot \dot{x}_A + z_{CB} \cdot \dot{x}_B + z_{CC} \cdot \dot{x}_C \quad (17)$$

Para este caso, el Hamiltoniano es la suma del valor instantáneo de las funciones de beneficio económico definidas anteriormente, y de la variación del vector de estado ponderada por coeficientes que representan la variación instantánea del Hamiltoniano con el vector de estado, z_{ij} son funciones constantes $i, j, k=A, B, C$; con condición inicial $x(0) = x_0$ y condición final $\lim_{t \rightarrow \infty} z_{ij}(t) = 0$.

Se muestra entonces que se debe arbitrar entre el valor del objetivo al instante y los valores futuros del vector de estado.

Los precios óptimos para los operadores se obtienen cuando se cumple la condición $\frac{\partial H^i}{\partial p_i} = 0$ con $i = A, B, C$, estos precios están dados por las ecuaciones (18), (19) y (20):

$$u_A^*(t) = \frac{a}{2b} + \frac{c_1+T}{2} + \frac{x_A(t)}{X_t(t)} \cdot \frac{c_2-T}{2} - \frac{k_{AB}z_{AA}(t) + k_{AC}z_{AA}(t) - k_{BA}z_{AB}(t) - k_{CA}z_{AC}(t)}{2bx_A(t)} \quad (18)$$

$$u_B^*(t) = \frac{a}{2b} + \frac{c_1+T}{2} + \frac{x_B(t)}{X_t(t)} \cdot \frac{c_2-T}{2} - \frac{k_{AB}z_{BA}(t) + k_{BA}z_{BB}(t) - k_{BC}z_{BB}(t) - k_{CB}z_{BC}(t)}{2bx_B(t)} \quad (19)$$

$$u_C^*(t) = \frac{a}{2b} + \frac{c_1+T}{2} + \frac{x_C(t)}{X_t(t)} \cdot \frac{c_2-T}{2} - \frac{k_{AC}z_{CA}(t) + k_{BC}z_{CB}(t) - k_{CA}z_{CC}(t) - k_{CB}z_{CC}(t)}{2bx_C(t)} \quad (20)$$

Donde $X_t(t) = x_A(t) + x_B(t) + x_C(t)$ que es el número total de suscriptores.

El objetivo de este proyecto es modelar para el mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia el crecimiento de usuarios por operador (ecuaciones 9, 10 y 11)); evaluar los efectos de los precios óptimos del modelo de referencia por llamada (ecuaciones 18, 19 y 20) a partir de datos reales tomados del mercado, en donde se cuenta con cuatro operadores. Modelar las incertidumbres de las ecuaciones (9, 10 y 11) con técnicas de inteligencia artificial. No se pretende optimizar ninguna función de beneficio, se desea evaluar la estrategia de precios óptimos propuesta en la literatura.

2.5. Técnicas de Estimación de Parámetros

Los métodos de estimación de parámetros son variados, pero en general pertenecen a dos grandes familias los no paramétricos y los paramétricos, ambos tienen como objetivo encontrar aproximaciones a los parámetros del sistema real, pero la diferencia entre ambos radica en que en los segundos se parte de una estructura inicial del modelo y se calculan los parámetros de dicha estructura definiendo el ajuste del modelo estimado con las salidas reales.

En particular, se trataron modelos caja gris (modelos teóricos con parámetros desconocidos) donde se busca minimizar una función de coste que compare la respuesta real con la respuesta simulada empleando los parámetros encontrados, dichos métodos caja gris pueden ser exactos o heurísticos

2.5.1. Métodos exactos

Mínimos cuadrados

El procedimiento más objetivo para ajustar una recta a un conjunto de datos presentados en un diagrama de dispersión se conoce como *el método de los mínimos cuadrados*. La recta resultante presenta dos características importantes:

1. Es nula la suma de las desviaciones de los puntos a partir de la recta de ajuste, ecuación (21):

$$\sum_{t=0}^T (\hat{Y} - Y) = 0 \quad (21)$$

2. Es mínima la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Con ninguna otra recta se obtendrá una suma menor de las desviaciones elevadas al cuadrado, ecuación (22).

$$\sum_{t=0}^T (\hat{Y} - Y)^2 \longrightarrow 0 \quad (22)$$

El procedimiento consiste entonces en minimizar los residuos al cuadrado.

Gradiente descendente

En este caso el objetivo, igual que antes es minimizar los residuos al cuadrado, definiendo los residuos como la diferencia entre salidas reales y estimadas.

El gradiente descendente es un algoritmo de optimización de primer orden, en estimación de parámetros se utiliza para encontrar el mínimo local de la función, ecuación (23):

$$\sum_{t=0}^T (\hat{Y} - Y) \quad (23)$$

Utilizando disminuciones del gradiente de la función, se toman medidas proporcionales al negativo de la pendiente (o del gradiente aproximado) de la función en el punto actual.

2.5.2. Métodos Heurísticos

Los métodos heurísticos son procedimientos inteligentes para resolver problemas bien definidos. Algunos de los métodos heurísticos más usados son los algoritmos evolutivos, en los que se encuentran los algoritmos genéticos.

Los *algoritmos genéticos* se basan en en la genética natural con su mecánica de selección. Estos métodos combían un intercambio de información estructurada y la elección del más apto para construir una búsqueda.

Los elementos de los algoritmos genéticos son los individuos que tienen un cromosoma formado por genes que son las soluciones, la población que son el conjunto de individuos que se reproducirá mediante operadores genéticos, los operadores de selección: por ruleta o por torneo, que deciden qué individuos tienen la posibilidad de reproducirse usando la ley del más apto, los operadores de cruce: por un punto, por dos puntos o uniforme, que indican la manera en que se aparean los individuos, es decir, cómo se mezclan los genes para dar nuevas soluciones que se llaman hijos, los operadores de reemplazo o actualización: los mejores, total, proporcional o aleatorio, que indica la manera en que se reemplazarán las viejas generaciones por las nuevas y los operadores de mutación con los que esporádicamente, como en la evolución biológica, un individuo varía sus genes.

Un típico pseudocódigo del algoritmo genético es:

```
AlgoritmoGenético()
  Leer Tamaño de la población
  Leer Generaciones
  Leer Número de Hijos
  Leer Probabilidad de mutación
  i:=1 TamañoPoblación 1
  P(i) = generarSolucionInicial();
  i:=1 Generaciones 1
  j:=1 NumeroHijos 1
  (Padre, Madre) = Selección(P) ;
  Hijo(j) = cruce(Padre, Madre);
  aleatorio ¡ProbabilidadMutacion Hijo(j) = mutacion()
```

P = Actualización (P)
Imprima la mejor solución en P

2.6. Inteligencia Artificial

En el desarrollo de esta tesis se contempla como alternativa de modelado de las incertidumbres del vector de estados, entre el modelo de referencia y el mercado colombiano, el uso de herramientas de inteligencia artificial. Esta área del conocimiento se caracteriza por la capacidad de reproducir conocimiento experto y/o modelar incertidumbres en las variables que obedecen a efectos de perturbaciones externas. También se caracteriza por lograr un buen entendimiento del problema y extrapolar e interpolar bien las tendencias de algunas variables.

La Inteligencia Artificial es una ciencia que intenta imitar el comportamiento de la inteligencia humana, la cual es capaz de aprender, reconocer y pensar. Las técnicas de la Inteligencia Artificial estas orientadas a las siguientes áreas:

- Sistemas Basados en Conocimiento.
- Visión Computacional
- Procesamiento de Voz y Lenguaje Natural
- Lógica Difusa
- Redes Neuronales
- Computación Evolutiva
- Sistemas Multiagente
- Robótica
- Aprendizaje Mecánico.
- Técnicas Heurísticas (recocido simulado)

2.6.1. Lógica Difusa:

La lógica difusa es una extensión de la lógica tradicional, Booleana, que imitan la manera de pensar de los seres humanos, la lógica difusa no usa valores exactos como 1 o 0 pero usa valores entre 1 y 0 (inclusive) que puede indicar valores intermedios que toma una función, esta lógica se usa en procesos de gran complejidad o en situaciones en donde no existan modelos matemáticos exactos, también se utiliza en procesos no lineales donde se relacionan situaciones no definidas de forma exacta.

Una de las grandes ventajas de la lógica difusa es que ofrece salidas a un sistema de forma precisa, ágil y rápida, disminuyendo así la incertidumbre en la toma de decisiones en un problema. La computación usando inferencia basada en lógica difusa es un método de cómputo muy popular, que se usa con mucho éxito en áreas como control, clasificación, sistemas expertos, robótica y reconocimiento de patrones.

2.6.2. Redes Neuronales Artificiales ANN:

Las redes neuronales artificiales se construyen tomando como modelo el sistema nervioso de los animales, en donde existen células llamadas neuronas que son unidades de procesamiento interconectadas de forma que una neurona estimula a otra neurona y luego a otras y así sucesivamente, para generar un sistema que es capaz de realizar cómputos y detectar patrones complejos, es decir, un sistema que luego de ser entrenado puede adquirir un comportamiento inteligente con capacidad de: procesar información, aprender, clasificar, almacenar, interpolar y adaptarse.

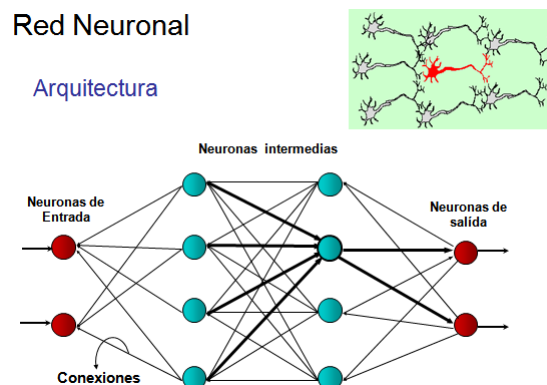


Figura 1: Arquitectura de una Red Neuronal

Las características de las redes neuronales artificiales se pueden recrear en sistemas computacionales robustos mediante algoritmos de aprendizaje, que pueden realizar muchas iteraciones a gran velocidad permitiendo el reconocimiento de un patrón o comportamiento con una gran precisión.

Una neurona artificial es una unidad de procesamiento de información, que ante un vector de entradas proporciona una única salida, está constituida por:

Conjunto de entradas: x_j

Pesos sinápticos: w_i

Función de activación: $a = w_1 * x_1 + w_2 * x_2 + \dots + w_n * x_n$

Función de transferencia: $y = F(w_1 * x_1 + w_2 * x_2 + \dots + w_n * x_n)$

Bias o polarización: entrada constante de magnitud 1, y peso b que se introduce en el sumador

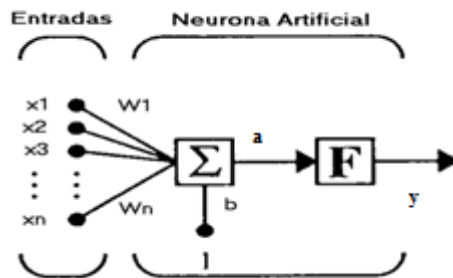


Figura 2: Neurona Artificial

Las principales funciones de transferencia usadas en redes neuronales se presentan en la figura 3.

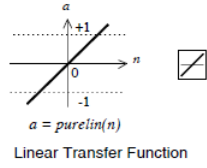
Tipos de Redes:

Las redes neuronales se clasifican de acuerdo a su número de capas en: redes de una capa o multicapa, y de acuerdo al método de aprendizaje en: redes recurrentes y redes no recurrentes, ver figura 4.

Tipos de Aprendizaje:

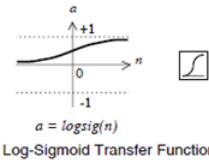
El entrenamiento es un procedimiento por medio del cual la red realiza

Función Lineal:



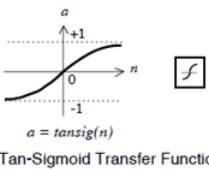
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1/a \\ a * x & -1/a < x < 1/a \\ 1 & x \geq 1/a \end{cases}$$

Función Sigmoidea:



$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-g * x}}$$

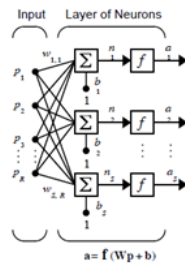
Función Tangente Hiperbólica:



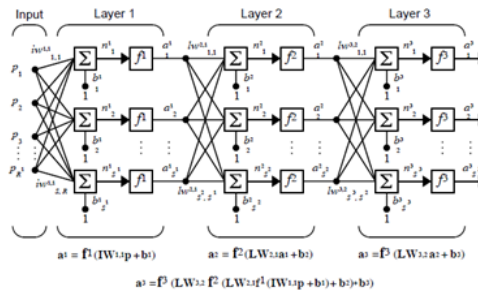
$$f(x) = \frac{e^{g * x} - e^{-g * x}}{e^{g * x} + e^{-g * x}}$$

Figura 3: Principales Funciones de Transferencia

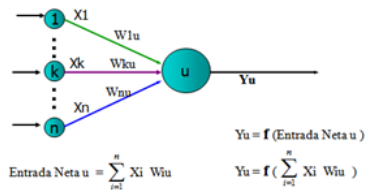
Redes de una capa:



Redes Multicapa:



Redes Feedforward (no recurrentes): conexiones unidireccionales



Redes Feedback (recurrentes): presenta conexiones de retorno

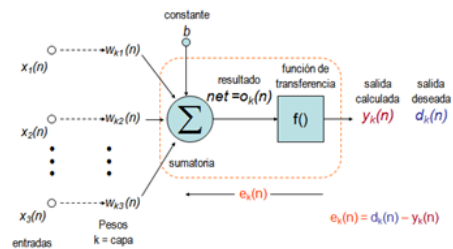


Figura 4: Tipos de Redes Neuronales

un proceso de aprendizaje, con la finalidad de obtener el comportamiento deseado, existen métodos (algoritmos) que permiten ajustar los parámetros de la red: las entradas, los pesos y las bias, con lo que se obtiene su convergencia, es decir, la salida de la red se ajusta a un valor deseado. Los tipos de entrenamiento básico son:

Supervisado: Se logra comparando la salida con una respuesta deseada y conocida, la diferencia permite ajustar pesos para buscar una mejor respuesta de la red. El aprendizaje se da a través de un proceso iterativo de ajuste aplicado a los pesos sinápticos.

No Supervisado: No requiere influencia externa para ajustar los pesos de las conexiones entre las neuronas, no recibe ninguna información del entorno que le indique si la salida generada respecto a una entrada es o no correcta.

Dadas sus características, las redes neuronales son muy usadas en aplicaciones en las que no se cuenta con un modelo matemático definido, o en situaciones no modelables o programables mediante técnicas definidas, pero en donde se cuenta con un conjunto de entradas ya identificadas; su aplicación incluye: problemas de clasificación y reconocimiento de patrones de voz, imágenes y señales.

2.6.3. ANFIS:

Los sistemas Neuro-Difusos son el resultado de la simbiosis de dos tecnologías: las Redes Neuronales y los Sistemas Difusos, esto potencializa su poder de aplicación, dado el beneficio que puede ofrecer cada una de ellas por separado, es decir, ANFIS resulta de gran utilidad en los sistemas no lineales o en situaciones difíciles de modelar matemáticamente, bajo estas condiciones las redes neuronales adquieren la capacidad de aprender y adaptarse proporcionando modelos que pueden explicar datos del pasado y predecir datos del futuro, lo que lo convierte en una herramienta que puede ser usada en situaciones donde se requieran pronósticos de los datos para apoyar la toma de decisiones.

3. Modelos de Mercado para la Telefonía Móvil en Colombia

3.1. Introducción

En esta sección se presenta, el modelo en espacio de estados del mercado de telecomunicaciones móviles en Colombia, cuyo modelo inicia con la identificación de los parámetros asociados al sistema, se hace su respectiva validación y consideraciones en torno al modelo obtenido. Luego de esto se hace un ajuste al modelo utilizando técnicas de inteligencia artificial, para el caso redes neuronales.

3.2. Modelo en Espacio de Estados

Con base en el modelo de Cricelli et al (2002) presentado en el capítulo anterior, se construye un modelo en espacio de estados para el caso de Colombia, en donde se tiene en cuenta la entrada de un nuevo operador D, ver figura 5.

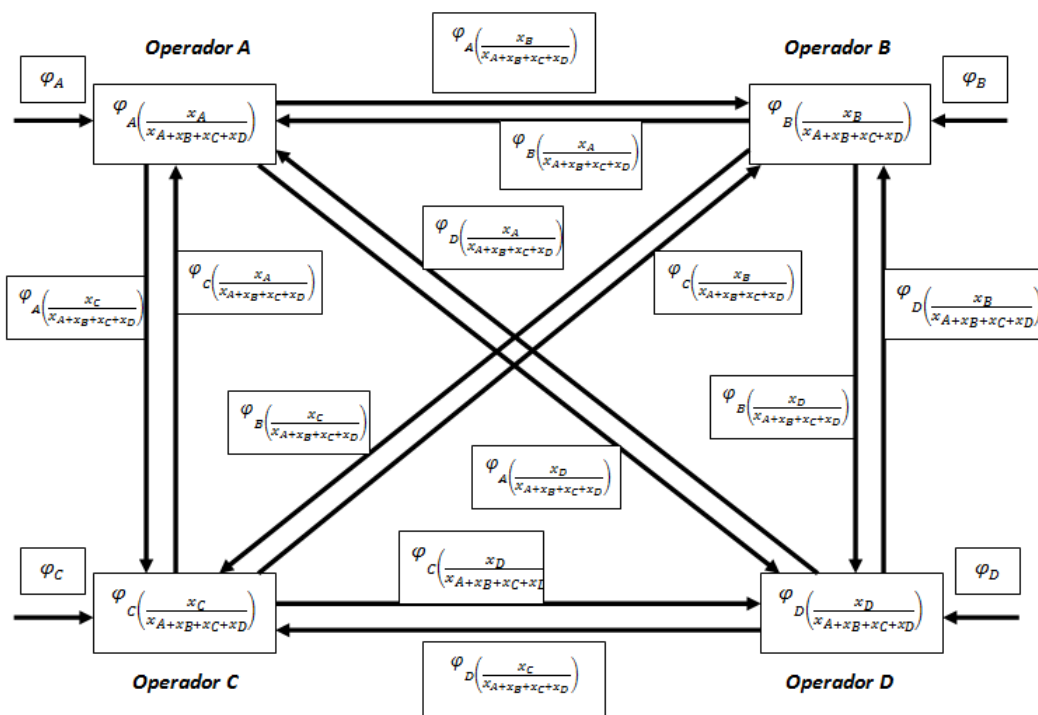


Figura 5: Distribución del flujo de tráfico

En el modelo de referencia con tres operadores A, B y C las ecuaciones (9), (10) y (11) representan la variación instantanea de suscriptores para cada operador, para el caso Colombiano este modelo debe ser ajustado a cuatro operadores los cuales llamaremos A (Claro antes Comcel), B (Movistar), C (Tigo) y D (UFF) respectivamente, el modelo para cuatro operadores es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_A(t) = & k_{AA}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t) - x_D(t)) + k_{AB}(p_B(t) - p_A(t)) \\ & + k_{AC}(p_C(t) - p_A(t)) + k_{AD}(p_D(t) - p_A(t))\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_B(t) = & k_{BB}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t) - x_D(t)) + k_{BA}(p_A(t) - p_B(t)) \\ & + k_{BC}(p_C(t) - p_B(t)) + k_{BD}(p_D(t) - p_B(t))\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_C(t) = & k_{CC}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t) - x_D(t)) + k_{CA}(p_A(t) - p_C(t)) \\ & + k_{CB}(p_B(t) - p_C(t)) + k_{CD}(p_D(t) - p_C(t))\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_D(t) = & k_{DD}(x(t) - x_A(t) - x_B(t) - x_C(t) - x_D(t)) + k_{DA}(p_A(t) - p_D(t)) \\ & + k_{DB}(p_B(t) - p_D(t)) + k_{DC}(p_C(t) - p_D(t))\end{aligned}\quad (27)$$

Como se mencionó, en el modelo de Cricelli, cada constante k_{ii} representa el porcentaje potencial de suscriptores del mercado para cada operador i , y k_{ij} ($i \neq j$) corresponde a incrementos (decrementos) del número de suscriptores para el operador i como una función de la reducción del precio relativo al operador j .

Para la obtención de un modelo en espacio de estados se parte de datos del mercado de telefonía móvil en Colombia (usuarios y precios) disponibles en las páginas web de la Comisión de Regulación de Comunicaciones (CRC), del Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (MINTIC) y de los operadores de telefonía móvil en Colombia, los datos se consolidarán para un periodo de tiempo desde el año 2008 hasta el año 2012 agrupados por trimestre, los precios se tomaron Off Net para usuarios en calidad prepago. Los datos de usuarios y precios reales se pueden consultar al final de este documento en el anexo tablas de datos.

■ **Identificación de Parámetros**

Para la identificación de los parámetros k_{ij} del modelo descrito por la ecuaciones (21), (22), (23) y (24) se utilizaron métodos de estimación de parámetros, método del gradiente y mínimos cuadrados no lineales, adicionalmente metodologías no paramétricas como los algoritmos heurísticos para encontrar el conjunto de parámetros apropiados para el modelo. Para la estimación de estos parámetros se utilizaron los datos de usuarios y precios ya mencionados.

Los resultados obtenidos para cada k_{ij} que permiten construir las ecuaciones (21), (22), (23) y (24) del modelo en espacio de estados se presentan en la Tabla 1.

Parámetros	Prepago On Net
Kaa	0,987585278
Kab	-353441,6571
Kac	1373305,059
Kad	214345,9443
Kba	-2089,511136
Kbb	-0,051884905
Kbc	-333,7332379
Kbd	-149,3928217
Kca	-385,4670037
Kcb	341,6530218
Kcc	-0,00211572
Kcd	-458,1273335
Kda	52067,78219
Kdb	-1443188,224
Kdc	-475255,9875
Kdd	0,00015076

Tabla 1: Parámetros Kij para el Modelo en Espacio de Estados

Para determinar el crecimiento de usuarios de la telefonía móvil (8) y la evolución de crecimiento del mercado (12), se obtuvieron los siguientes datos con el modelo de identificación de parámetros:

$$\bar{X} = 10751935,23$$

$$k = 0,999947031$$

$$t_0 = 3,080909224$$

Para el caso Colombiano el crecimiento de usuarios estaría determinado por la ecuación (28), ver figura 6.

$$X(t) = 10751935,23 \cdot (1 - e^{-0,999947031 \cdot (t+3,080909224)}) \quad (28)$$

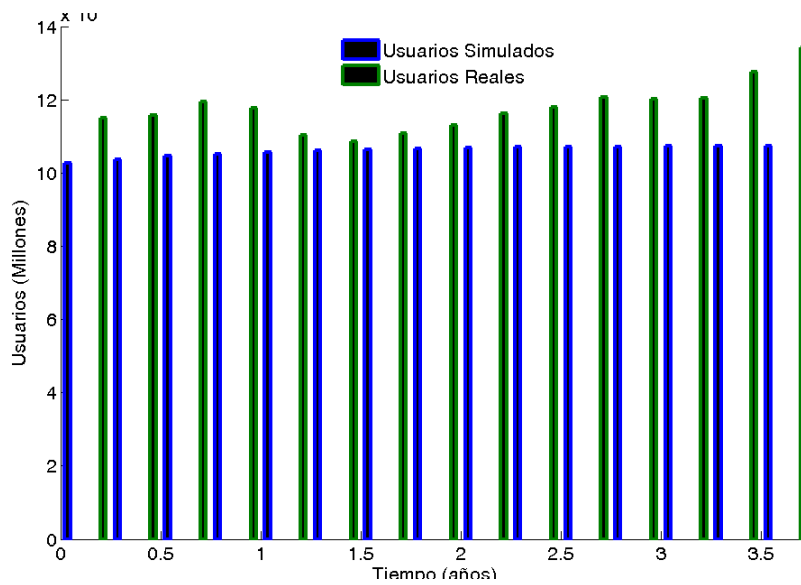


Figura 6: Modelo de crecimiento de usuarios

Y la evolución de crecimiento del mercado esta dado por la ecuación (29), ver figura 7.

$$\dot{X}(t) = 10751365,71 \cdot e^{-0,999947031 \cdot (t+3,080909224)} \quad (29)$$

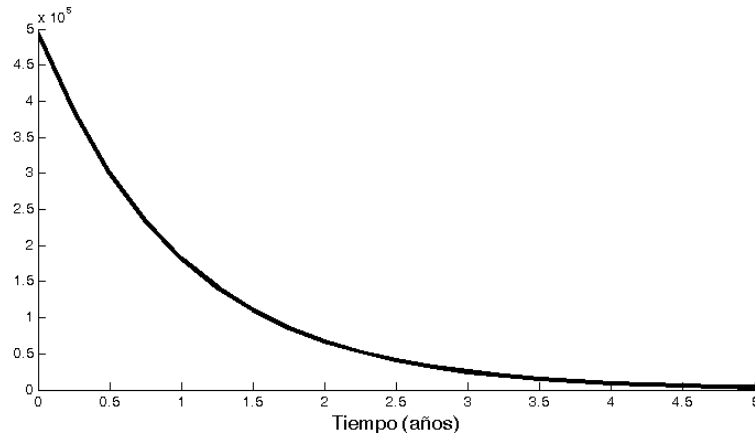


Figura 7: Evolución de crecimiento del mercado

■ Validación del Modelo en Espacio de Estados

Con las constantes k_{ij} que se obtuvieron en el proceso de identificación de parámetros, se construye el modelo en espacio de estados ecuaciones (21), (22), (23) y (24) el cual representa el mercado de Telecomunicaciones Móviles en Colombia; con el fin de validar el comportamiento de este modelo se simula utilizando el Matlab, Simulink, ver figura 8.

A partir de esta simulación se obtiene información relacionada con el comportamiento del crecimiento de usuarios, de acuerdo al modelo Cricelli et al (2002), para los operadores de telefonía móvil en Colombia.

En la figura 9 se observa el comportamiento del crecimiento de usuarios para el operador A (Claro), en la figura 10 se observa el comportamiento del crecimiento de usuarios para el operador B (Movistar), en la figura 11 se observa el comportamiento del crecimiento de usuarios para el operador C (Tigo) y en la figura 12 se observa el comportamiento del crecimiento de usuarios para el operador D (UFF).

Analizando el comportamiento de los resultados obtenidos en las figuras 9, 10, 11, y 12 se observa que el modelo obtenido en variables de estado aplica a operadores con características específicas, no es un modelo válido para el operador A (dominante) y D (operador móvil virtual), esto se puede deber a que el modelo propuesto es un modelo altamente lineal, y en las circunstancias de la industria de las telecomunicaciones móviles en Colombia el modelo no se ajusta a esa linealidad en los operadores A y D.

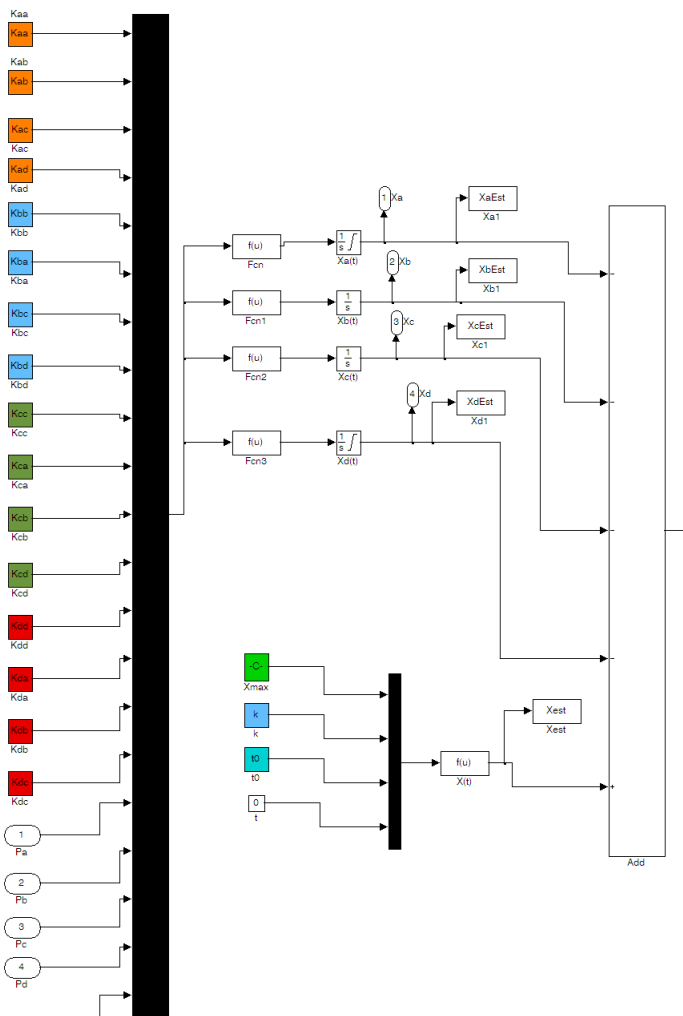


Figura 8: Modelo en Espacio de Estados en Simulink

En los anexos se encuentran las tablas con los datos reales del sistema y los resultados obtenidos mediante las técnicas de estimación de parámetros del capítulo 2.

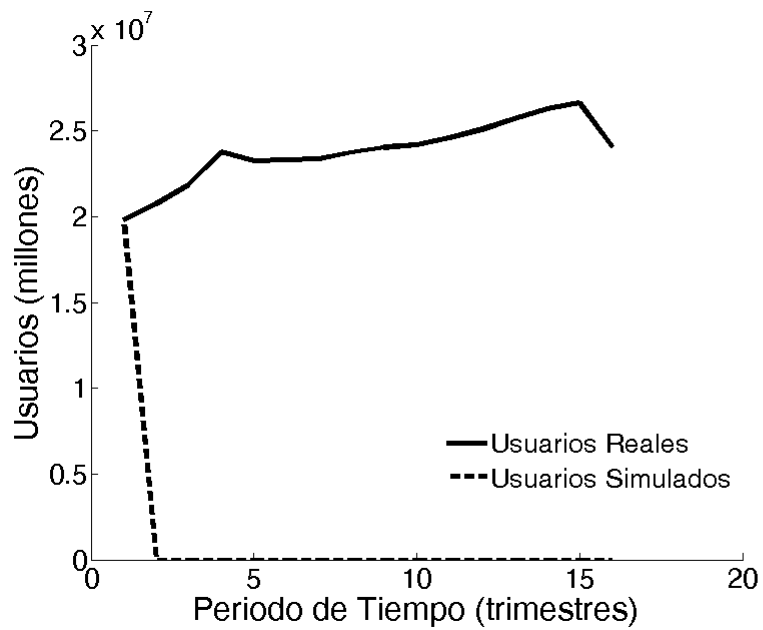


Figura 9: Crecimiento de usuarios para operador A

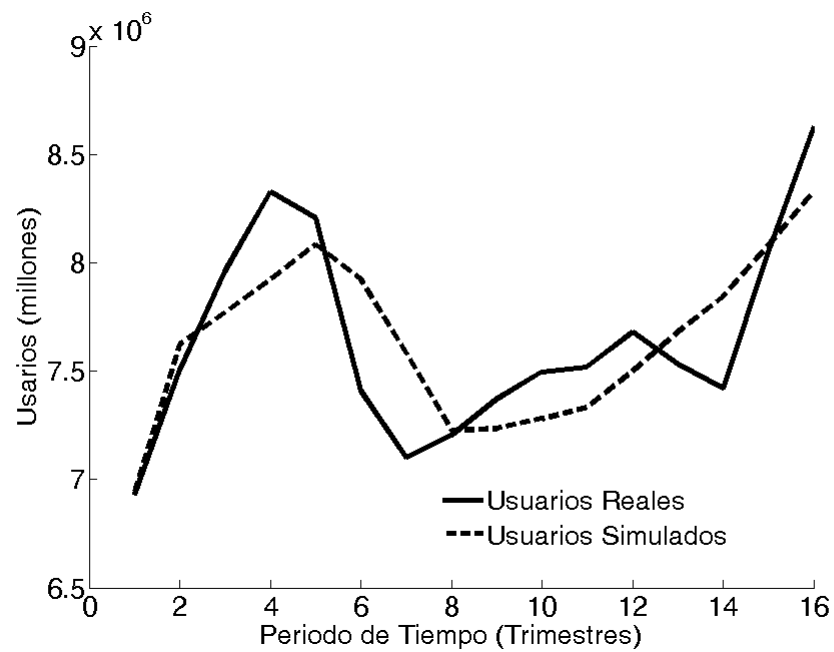


Figura 10: Crecimiento de usuarios para operador B

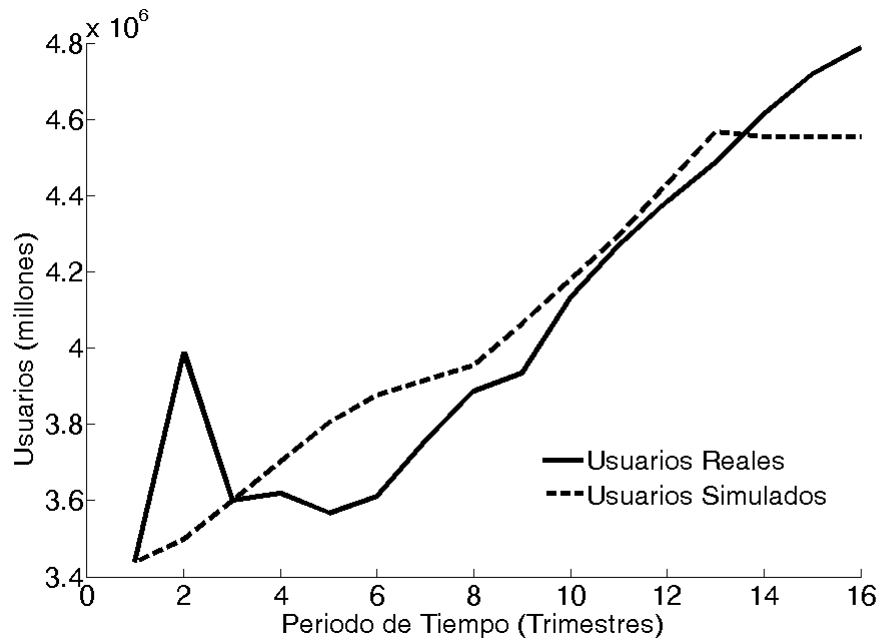


Figura 11: Crecimiento de usuarios para operador C

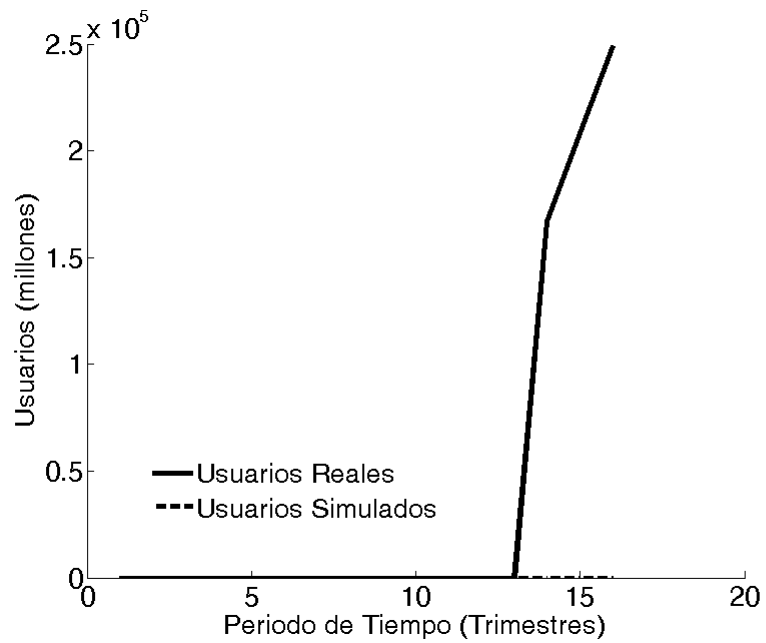


Figura 12: Crecimiento de usuarios para operador D

3.3. Modelo Híbrido

A continuación se presenta una mejora al modelo presentado en la sección anterior. Este modelo se denomina modelo híbrido dado que combina la estructura del modelo en espacio de estados, con un modelo basado en redes neuronales que intenta describir los errores de estimación para los operadores móviles. Esto es, un modelo de la incertidumbre asociada a factores de mercado diferentes de las diferencias de precios.

Las redes neuronales son utilizadas para modelar el error, entendiendo el error como la diferencia entre los usuarios reales y los usuarios obtenidos con el modelo básico, ecuación 30.

$$\xi = |x_{Real} - x_{ss}| \quad \xi(p, x) \quad (30)$$

El modelo híbrido sería entonces:

$$\hat{x} = f(x, p, \theta) + \xi(p, x) \quad \theta : \text{parámetros estimados} \quad (31)$$

De la sección anterior se tiene que el error de modelado o incertidumbre asociada al modelo en espacio de estados, puede estar asociada a altas no linealidades. Para analizar un poco estas no linealidades se argumentan los siguientes aspectos:

- **Componentes de la cadena de valor de los servicios de telecomunicaciones:** la cadena de valor en la industria de las telecomunicaciones se resume en los siguientes componentes:
 - Infraestructura: consistente en equipos de telecomunicaciones, espectro radioeléctrico y un conjunto de operaciones.
 - Servicio de facturación y costo de tarifas.

- Servicios y productos a ofrecer sobre las redes de telecomunicaciones.
- Interface con el usuario final: consistente en distribución, mercadeo, atención al cliente, entre otros.

El primero de estos competentes es fundamental para el crecimiento en número de suscriptores de un operador de telecomunicaciones, dado que a una mayor infraestructura técnica y un mayor despliegue de redes se puede llegar a obtener mayor penetración de los servicios de telecomunicaciones por parte del operador, así mismo se puede contar con una mejor calidad de los servicios; aspectos como el mercadeo y la atención al cliente son importantes a la hora de captar clientes y posicionar una marca. Todos estos factores están a disposición del operador de acuerdo a su capacidad económica, y que a su vez inciden en la toma de decisión de los suscriptores en el momento de elegir la empresa de telecomunicaciones a la que desean afiliarse, factores que inducen a la aparición de grandes monopolios en las empresas de telecomunicaciones en el mundo.

- **Diferencias entre llamadas on net y off net:** es importante aclarar cuales son los tipos de llamadas que se pueden realizar y cuales son los elementos involucrados; En general una llamada requiere: una estación trasceptora (BTS) que transmite, reciba y controle la señal; un centro de suicheo móvil (MSC) que enruta la llamada hacia o desde la red (GSM) a través del registro de localización de llamadas (HLR) y el (VLR) registrador de visitantes. Las llamadas on net son las que se hacen entre suscriptores de un mismo operador, las llamadas off net son las que se hacen entre suscriptores pertenecientes a operadores diferentes. Las llamadas on net utilizan la infraestructura de una misma red mientras que las llamadas off net utilizan la infraestructura de redes diferentes, situación que incrementa los costos operacionales de una llamada por los cargos de acceso que deben ser pagados por la prestación del servicio de infraestructura para recibir llamadas de otro operador.

Si en el mercado de telecomunicaciones que se analiza hay un operador dominante, este genera estrategias de precios para los suscriptores dentro de su red, lo que constituye un factor que afecta la entrada de nuevos suscriptores a la red aumentando la lealtad

de los clientes y el reconocimiento de la marca, incrementando la externalidad de la red, la cual surge debido a que una red es más valorada por los usuarios en la medida en que más suscriptores se afilien a ella o utilicen productos compatibles con el mismo, las diferencias de precios entre llamadas on net y off net incentivan el tráfico al interior de la red y desincentivan el tráfico hacia otras redes, aumentando el atractivo relativo propio, de un lado haciendo que el usuario tome en cuenta el tamaño del operador al momento de su elección y de otro lado generando costos de cambio endógenos, dado que para un usuario resulta muy costoso cambiar de operador.

En este sentido la linealidad del sistema está condicionada por los precios, y más específicamente por la diferencia de precios entre llamadas on net y off net pues a través de las tarifas de las llamadas los operadores compiten por la entrada de nuevos suscriptores a su red. Una característica importante en esta industria es que la creación de un primer producto involucra un muy alto costo, mientras que el costo marginal de productos o reproducciones es prácticamente nulo Herguera-García et al (2007).

- **Cargos de interconexión:** las tarifas de las llamadas están altamente condicionadas por los cargos de interconexión, costo fijado por un operador o ente regulador para la terminación de las llamadas en una red, para nuestro caso, en donde existe un operador dominante (monopolio) si éste operador fija un alto costo para la terminación de llamadas de otros operadores, elevaría los costos de las llamadas de los operadores rivales, dejándolos en condiciones de imposibilidad para competir en el mercado.

La fijación de las tarifas de interconexión facilita la aparición de acuerdos colusionarios entre operadores en la industria de las telecomunicaciones, en donde por ejemplo, dos operadores se unen para fijar tarifas de interconexión entre sí sin contar con otros operadores, provocando la aparición de acuerdos anticompetitivos tendientes a aumentar los monopolios. En los últimos años el costo de interconexión ha sido estudiado y analizado por los entes reguladores de muchos países, con la finalidad de evitar la aparición de comportamientos anticompetitivos.

Como se puede observar, el cargo de interconexión en las circunstancias antes mencionadas puede inducir a que la industria de las

telecomunicaciones se comporte como un sistema no lineal, para el caso Colombiano, lo que afecta la modelación del sistema con base en los modelos planteados por Cricelli, en donde se asume un cierto grado de linealidad del sistema.

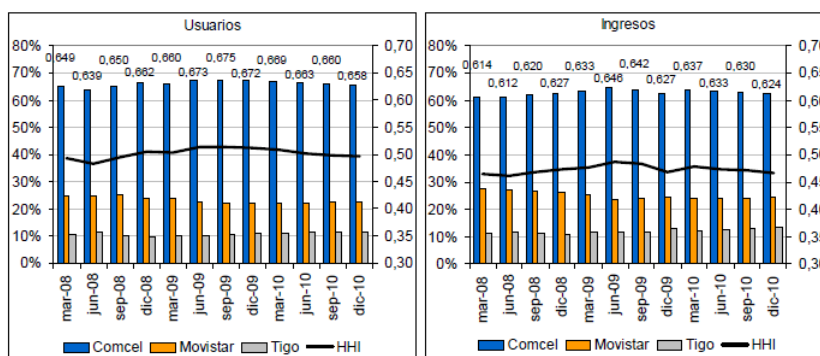
- **Condiciones de competencia:** De acuerdo a estudios realizados por la Comisión de Regulación de Telecomunicaciones CRC, se ha constatado en Colombia la posición de dominio de un operador móvil en el mercado, tal situación ha llevado a establecer dos medidas regulatorias importantes en este mercado, la primera tiene que ver con una regulación tarifaria sobre el diferencial de los precios on net y off net del operador con posición de dominio y la segunda tiene que ver con la obligación impuesta al operador dominante de poner a disposición de los proveedores de contenidos y aplicaciones una oferta mayorista.

De acuerdo a la CRC la medida regulatoria para establecer la diferencia tarifaria entre precios de llamadas on net y off net consiste en que la tarifa off net de cada uno de los planes tarifarios del operador dominante debe ser menos o igual a la suma de la tarifa on net del respectivo plan y el cargo de acceso, el cargo de acceso también es establecido por la CRC, incluyendo planes promocionales.

Esta medida regulatoria busca reducir los precios relativos que acentúan las externalidades de la red y el efecto club, que para el caso de Colombia la concentración de usuarios y de ingresos por parte del operador dominante es una de las más altas en el mundo, superado solo por México y Ecuador según la CRC, ver figura 13, tal situación evidencia que el mercado de telecomunicaciones en Colombia es un mercado muy atípico frente al resto de países en el mundo.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el modelo híbrido de telecomunicaciones en Colombia, figuras 14, 15, 16 y 17.

Como puede observarse con el modelo híbrido se corrigen los resultados obtenidos con el modelo en espacio de estados, en especial para el operador A (dominante) y D (móvil virtual), los cuales no habían sido posibles de modelar.



Fuente: SIUST, MinTIC

Figura 13: Concentración de Usuarios e Ingresos en Colombia

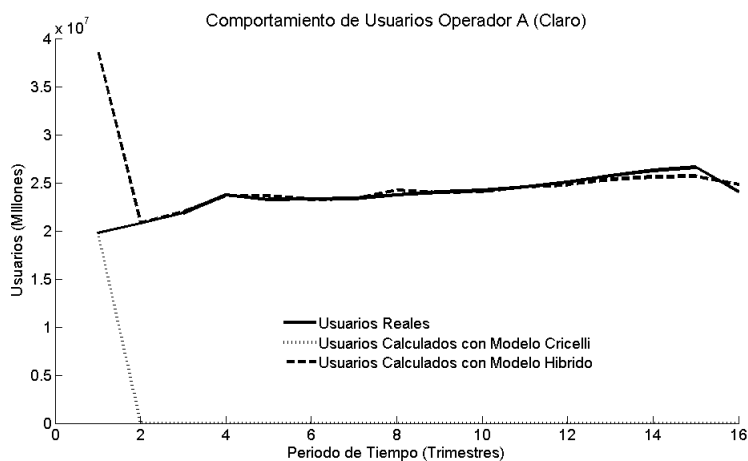


Figura 14: Comportamiento de usuario operador A (Claro)

3.4. Modelo de Redes Neuronales

Dado que el modelo en espacio de estados, que es un modelo lineal, no consiguieron los resultados esperados para modelar el mercado de telecomunicaciones móviles en Colombia, en especial para los operadores A y D, se utilizaron redes neuronales, las cuales como ya se mencionó anteriormente, luego de ser entrenadas adquieren la capacidad de aprender y reproducir el comportamiento de un sistema a partir de datos conocidos en el mismo.

Para la modelación con redes neuronales se utilizaron como datos de partida los datos conocidos del mercado, y que se utilizaron también para el caso de modelación en espacios de estados, esto es, los usuarios en modalidad

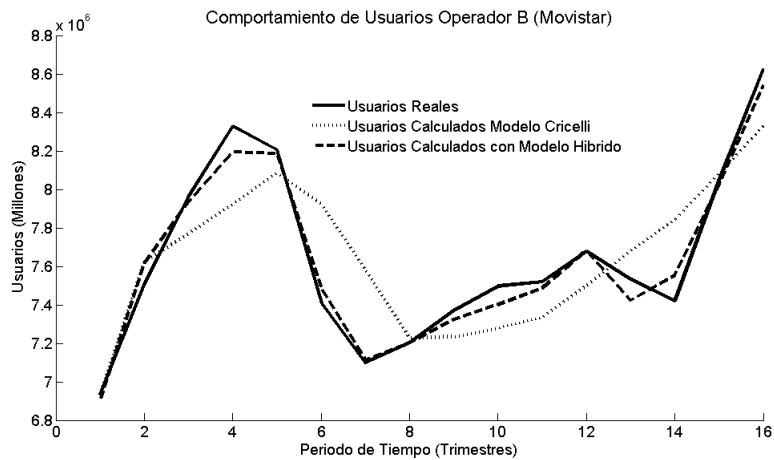


Figura 15: Comportamiento de usuario operador B (Movistar)

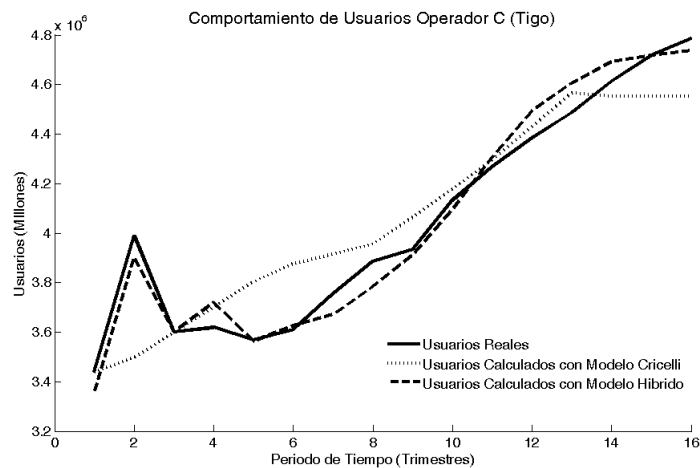


Figura 16: Comportamiento de usuario operador C (Tigo)

prepago de cada uno de los operadores y los precios off net.

Para la construcción de las redes neuronales se utilizó la interface gráfica del Matlab Network/Data Manager, la cual constituye una ventana o área de trabajo para crear redes neuronales, verlas, entrenarlas, simularlas y luego exportar los resultados obtenidos al workspace; la interface gráfica cuenta con un menú en el que se pueden seleccionar aspectos como: tipo de red, datos de entrada, función objetivo, función de entrenamiento, función de aprendizaje, número de capas, número de neuronas y función de transferencia. Para entrenar las redes se utilizaron los usuarios y los precios (input data) y como

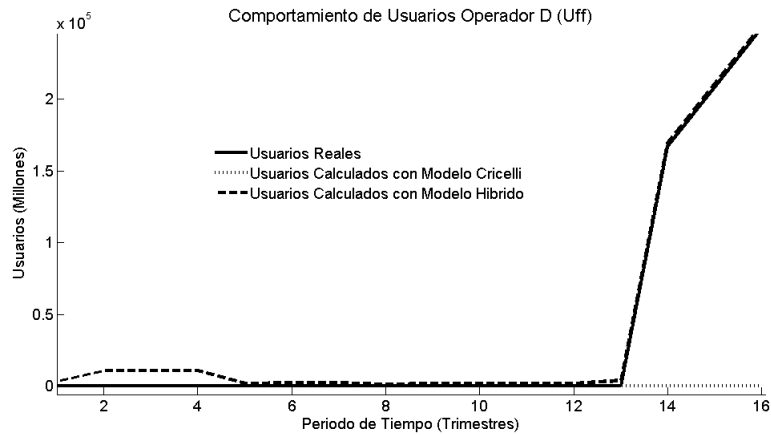


Figura 17: Comportamiento de usuario operador D (UFF)

función objetivo se tomaron los usuarios (target data).

Luego de muchas simulaciones con diferentes tipos de redes y configuraciones, se seleccionaron aquellas con mejores resultados, en las tablas 2, 3, 4 y 5 se presenta una selección de las redes neuronales con mejores resultados para cada uno de los operadores y resaltado con color gris la red con mejor respuesta en cada caso.

Para cada uno de los operadores, las gráficas de las simulaciones de las redes neuronales con mejor respuesta de salida son las que se presentan en las figuras 18, 19 20 y 21:

Network Type	Training Function	Adaption Learning Function	Performance Function	Number of Layers	Number of Neurons	Transfer Function
Feed-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	MSE	5	5	PURELIN
Feed-forward backprop	TRAINGDM	LEARNGDM	MSE	10	10	PURELIN
Feed-forward distributed time delay	TRAINLM	LEARNGD	SSE	8	8	TANSIG
Feed-forward distributed time delay	TRAINGDM	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Feed-forward time-delay	TRAINSOG	LEARNGD	SSE	5	5	TANSIG
Feed-forward time-delay	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	12	12	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	8	8	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINSOG	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG

Tabla 2: Tipos de Redes Operador A

A continuación se muestran las gráficas de respuesta del comportamiento de usuarios con las redes neuronales, la gráfica 22 representa el comportamiento de los usuarios para el operador A (Claro), la gráfica 23 el comportamiento de usuarios para el operador B (Movistar), la gráfica 24 el comportamiento de usuarios para el operador C (Tigo) y la gráfica 25 el comportamiento de usuarios para el operador D (Uff).

Network Type	Training Function	Adaption Learning Function	Performance Function	Number of Layers	Number of Neurons	Transfer Function
Feed-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	MSE	5	5	PURELIN
Feed-forward backprop	TRAINGDM	LEARNGDM	MSE	10	10	PURELIN
Feed-forward distributed time	TRAINLM	LEARNGD	SSE	8	8	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	12	12	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	8	8	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINSOG	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINSOG	LEARNGD	SSE	10	10	TANSIG

Tabla 3: Tipos de Redes Operador B

4. Analisis de Resultados

4.1. Introducción

En esta sección se hace un análisis de los resultados obtenidos durante el proceso de modelación del mercado de telecomunicaciones móviles, partiendo de las diferentes gráficas que representan el comportamiento del número de usuarios para cada uno de los operadores y su correspondiente error, así mismo se analiza el comportamiento del mercado en función de las variables que intervienen en éste como son: condiciones de entrada al mercado, diferencias entre precios on net y off net, efecto club, costos de cambio exógenos, entre otros.

Network Type	Training Function	Adaption Learning Function	Performance Function	Number of Layers	Number of Neurons	Transfer Function
Feed-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	MSE	5	5	PURELIN
Feed-forward backprop	TRAINGDM	LEARNGDM	MSE	10	10	PURELIN
Feed-forward distributed time delay	TRAINLM	LEARNGD	SSE	8	8	TANSIG
Feed-forward distributed time delay	TRAINGDM	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Feed-forward time-delay	TRAINSCG	LEARNGD	SSE	5	5	TANSIG
Feed-forward time-delay	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	10	10	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	12	12	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	8	8	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINSCG	LEARNGDM	MSE	10	10	PURELIN

Tabla 4: Tipos de Redes Operador C

4.2. Resultados Obtenidos

4.2.1. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Operador A (Claro)

De la figura 26 se puede evidenciar que para el operador A el modelo en espacio de estados no fue posible (modelo lineal), para este operador solo fue posible la modelación usando técnicas de inteligencia artificial, obteniéndose una mejor respuesta con el modelo de redes neuronales.

En cuanto al error obtenido en la modelación se induce de la figura 27 que el modelo en espacio de estado presenta un error casi del 100 %, lo que permite determinar que es un modelo no válido para este operador, en cuanto al modelo híbrido y al modelo con redes neuronales se puede ver que los errores en la modelación se presentan de manera alternada, con porcentajes de error muy semejantes.

Network Type	Training Function	Adaption Learning Function	Performance Function	Number of Layers	Number of Neurons	Transfer Function
Feed-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	MSE	5	5	PURELIN
Feed-forward distributed time delay	TRAINLM	LEARNGD	SSE	8	8	TANSIG
Feed-forward time-delay	TRAINSOG	LEARNGD	SSE	5	5	TANSIG
Layer Recurrent	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	12	12	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGDM	SSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	10	10	PURELIN
Cascade-forward backprop	TRAINLM	LEARNGD	MSE	10	10	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINGDA	LEARNGDM	MSE	8	8	TANSIG
Cascade-forward backprop	TRAINSOG	LEARNGDM	MSE	8	8	TANSIG

Tabla 5: Tipos de Redes Operador D

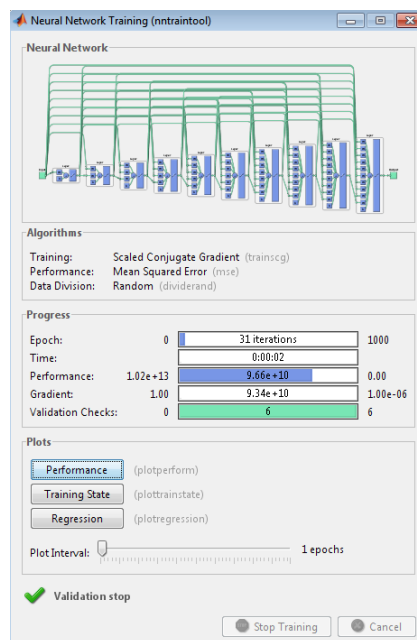


Figura 18: Red neuronal para Operador A

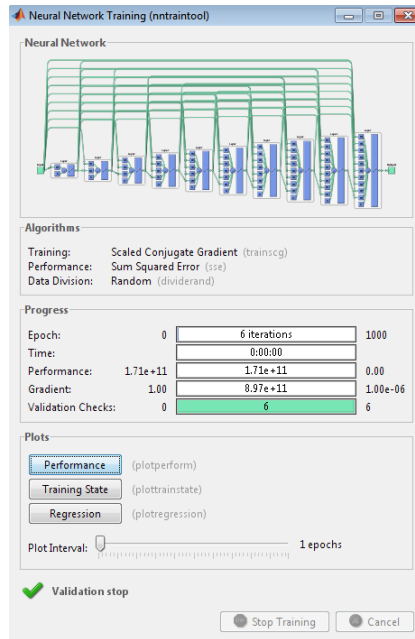


Figura 19: Red neuronal para Operador B

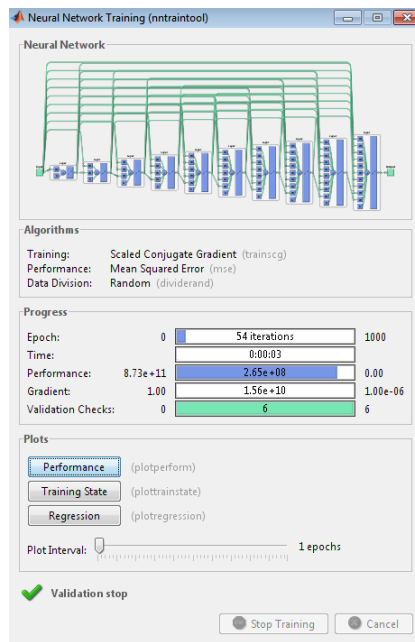


Figura 20: Red neuronal para Operador C

4.2.2. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Operador B (Movistar)

De la figura 28 se observa que para el operador B el modelo en espacio de estados tiene un comportamiento que asemeja el comportamiento real de

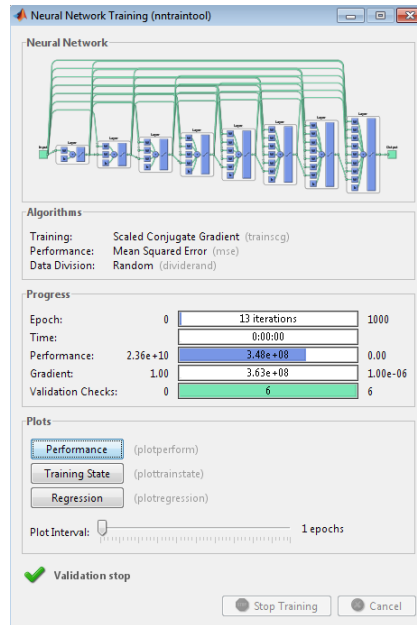


Figura 21: Red neuronal para Operador D

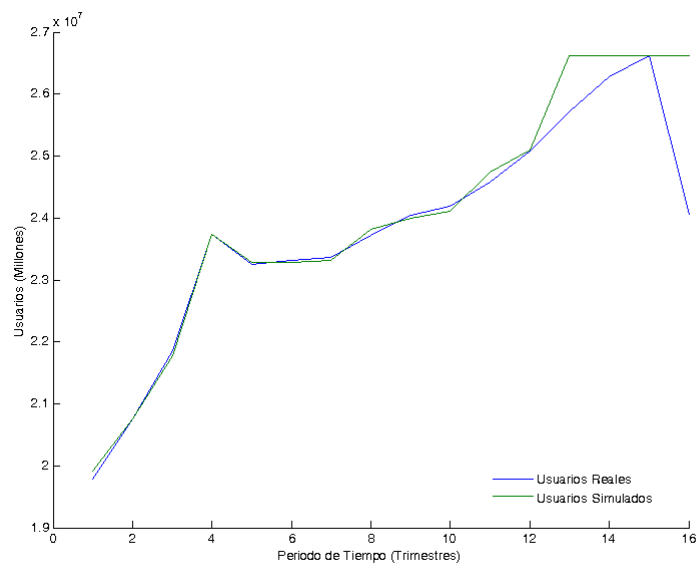


Figura 22: Comportamiento de Usuarios Operador A con Red Neuronal

usuarios, pero se aprecia un cierto retraso en la respuesta del modelo, con los modelos híbrido y en redes neuronales se corrige esta situación, obteniéndose para este caso una mejor respuesta con el modelo híbrido.

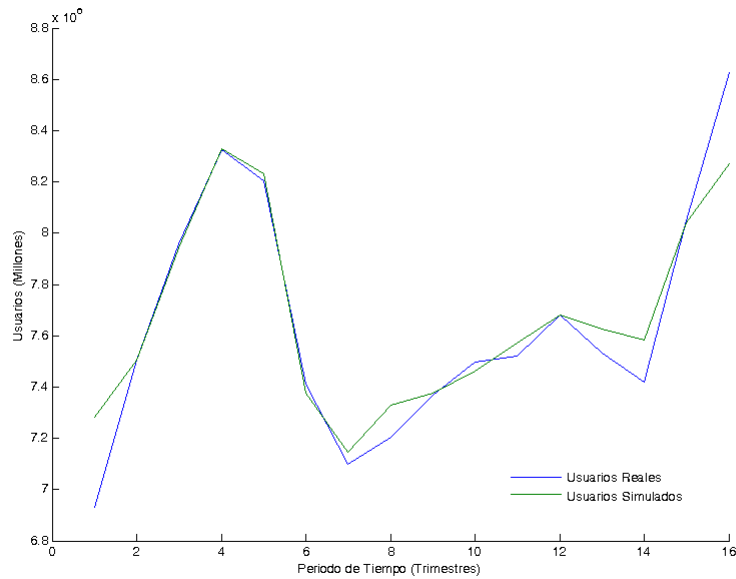


Figura 23: Comportamiento de Usuarios Operador B con Red Neuronal

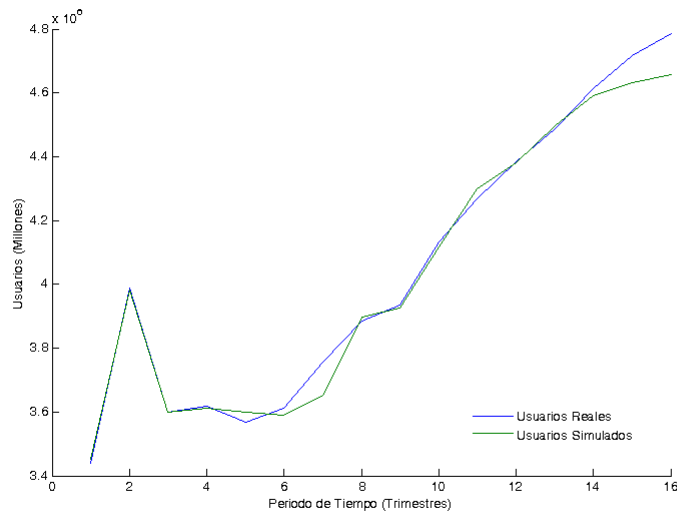


Figura 24: Comportamiento de Usuarios Operador C con Red Neuronal

En cuanto al error obtenido con la modelación se deduce de la figura 29 que el modelo en espacio de estados presenta un error considerable en algunos periodos de tiempo, se deduce que el modelo híbrido tiene un menor error

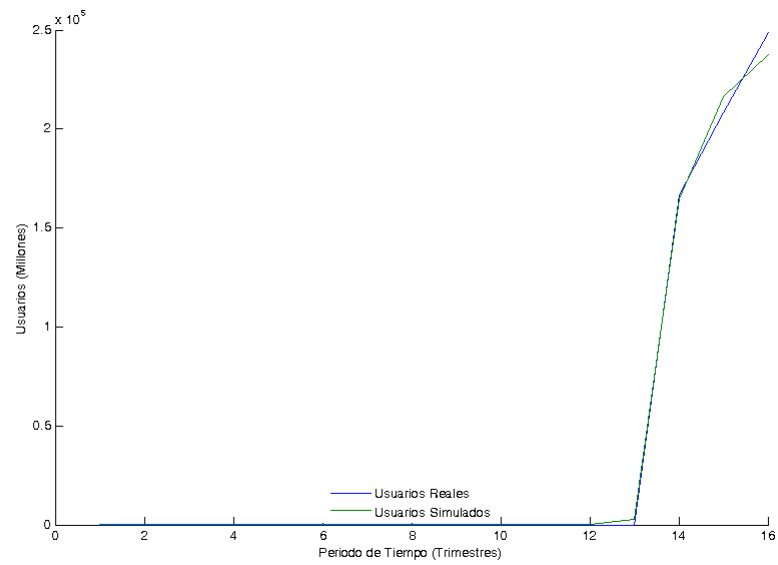


Figura 25: Comportamiento de Usuarios Operador D con Red Neuronal

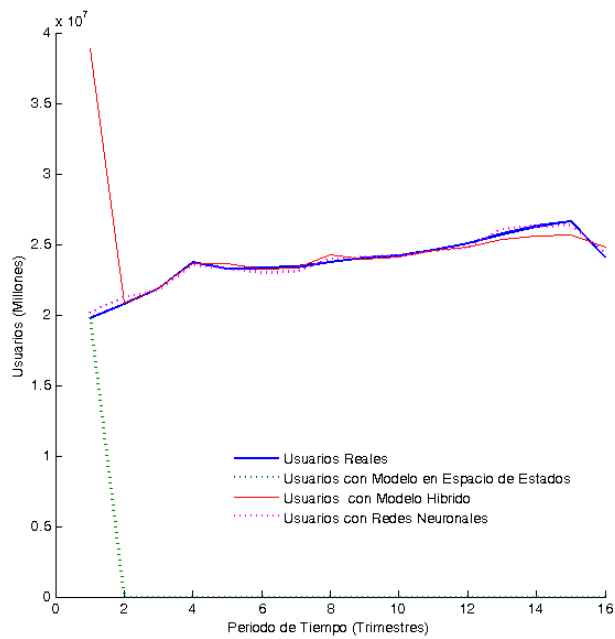


Figura 26: Resultados de modelación operador A

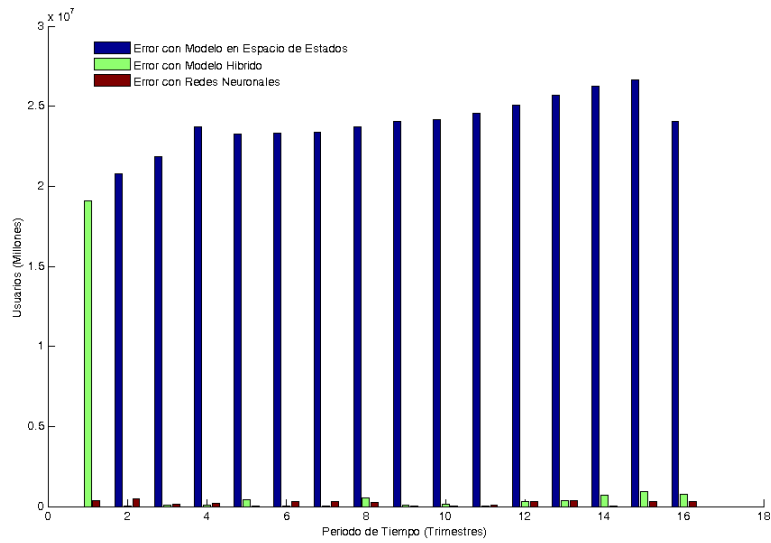


Figura 27: Errores en modelacion Operador A

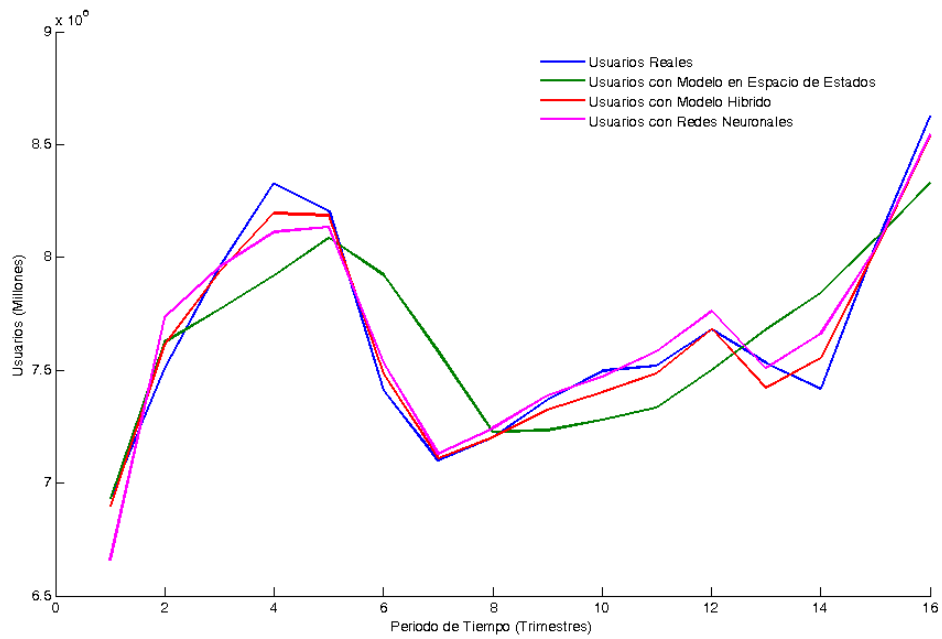


Figura 28: Resultados de modelación del Operador B

que el modelo con redes neuronales, lo que presume que para este operador es mejor utilizar este modelo para su estimación.

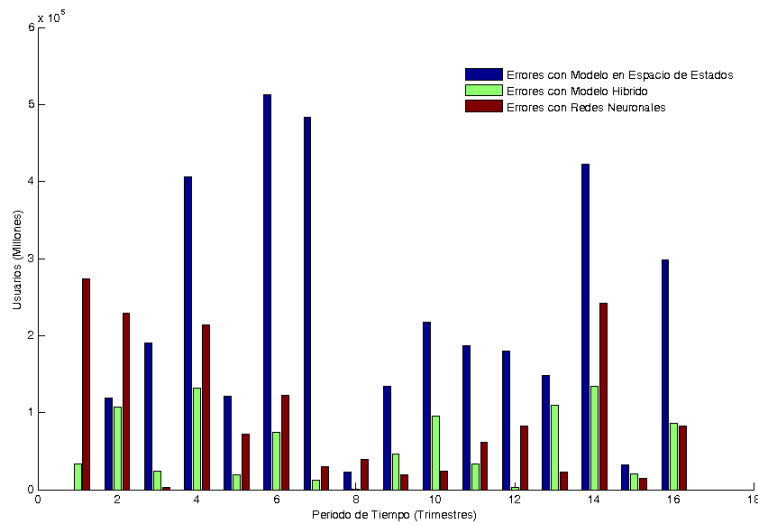


Figura 29: Errores en modelacion Operador B

4.2.3. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Operador C (Tigo)

De la figura 30 se observa que el modelo en espacio de estados conserva la tendencia del comportamiento real de usuarios, sin embargo se observa un error considerable en el modelo para algunos periodos de tiempo, el modelo híbrido permite corregir esta situación y se observa un comportamiento con este modelo muy parecido al comportamiento real de usuarios, el modelo con redes neuronales es mejor aunque no tiene presente un cambio brusco al inicio de la modelación, se induce que para este operador el modelo con redes neuronales es el que presenta un menor error por periodo de tiempo.

De la figura 31 se observa que el error del modelo en espacio de estados es considerable, pero al igual que en el caso anterior este modelo se corrige con el modelo híbrido, dado que el modelo híbrido presenta un comportamiento muy similar al de los usuarios reales, en cuanto al modelo con redes neuronales se observa que el error disminuye aun más con el tiempo siendo ambos modelos híbrido y neuronal buenos para modelar el comportamiento de usuarios.

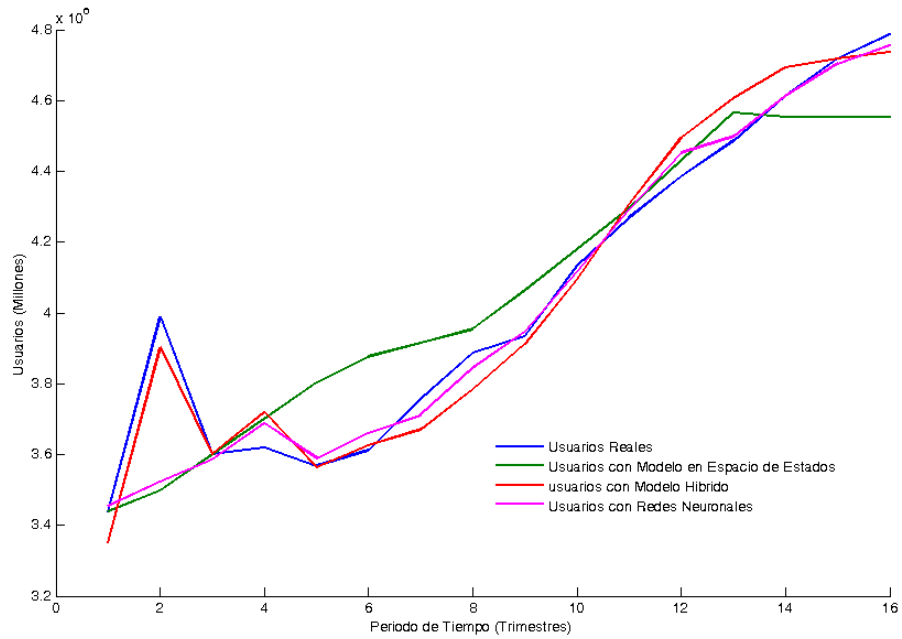


Figura 30: Resultados de Modelacion del Operador C

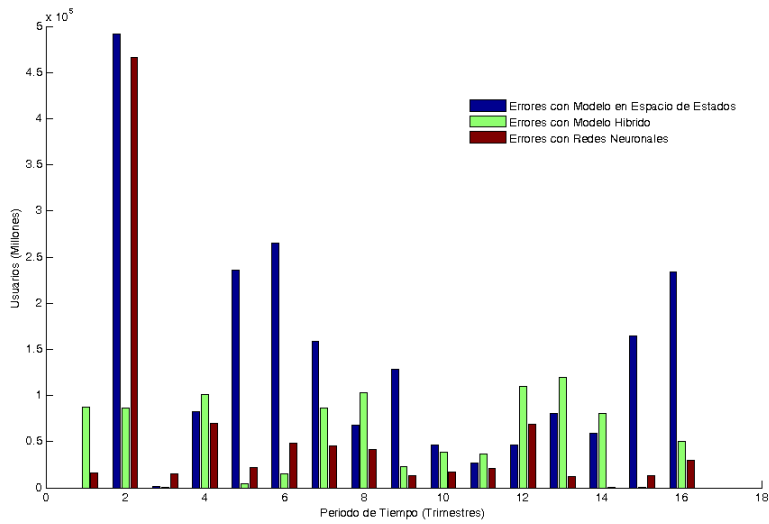


Figura 31: Errores en modelacion Operador C

4.2.4. Resultados de la Modelación de Usuarios para el Operador D (UFF)

De la figura 32 se observa que el modelo en espacio de estados definitivamente no sirve para modelar el comportamiento de usuarios del operador

D, el modelo híbrido permite corregir de alguna manera el error en el modelo, el modelo neuronal es el que mejor se ajusta al comportamiento real del operador.

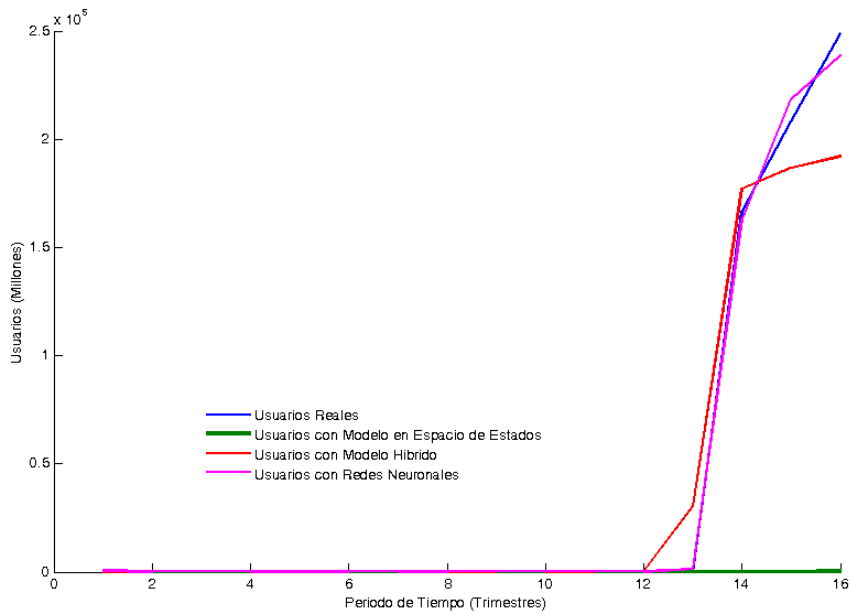


Figura 32: Resultados de Modelacion del Operador D

Observando la figura 33 se ratifica que el mejor modelo para el operador es el de redes neuronales, pues es el que presenta un menor error.

4.3. Análisis de la Modelación del Mercado de Telecomunicaciones Móviles

De los resultados obtenidos se infiere que en las condiciones en las que se desarrolla el mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia, la posibilidad de modelar el sistema es bastante difícil utilizando modelos lineales, en especial la modelación del crecimiento del mercado en función de los precios, se observa que las variables que intervienen en el mercado no son proporcionales a la respuesta encontrada en la modelación, por lo que se

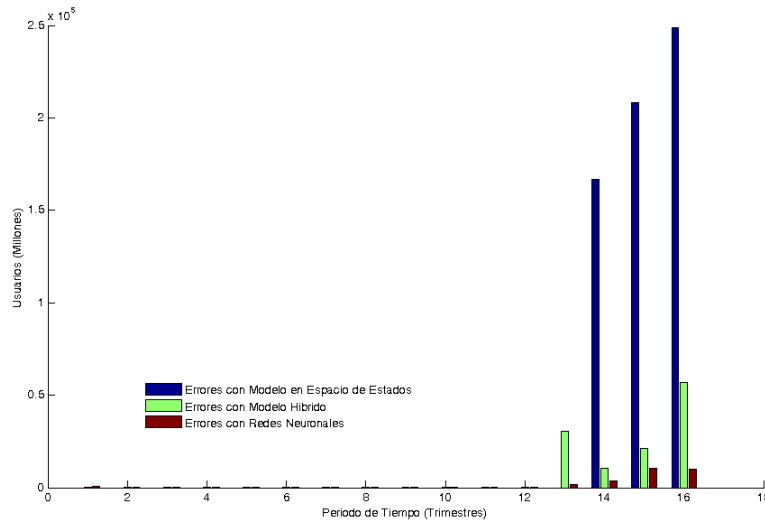


Figura 33: Errores en modelacion Operador D

infiere que el sistema no es lineal, razón por la que se opta por utilizar otras técnicas de modelación, para el caso inteligencia artificial, de forma que se pueda estimar el comportamiento del sistema.

Algunas de las variables que intervienen en el comportamiento de este sistema, ya se mencionaron en el capítulo anterior, altos costos en la infraestructura, diferencia de precios on net y off net, cargos de interconexión, entre otros, estas situaciones de alguna manera han generado variables adicionales que deben ser tenidas en cuenta y que afectan el comportamiento del mercado, de acuerdo a la CRC algunas de estas consideraciones adicionales son las siguientes:

4.3.1. Inversión y Cobertura

En la figura 34 se presenta la inversión realizada por los operadores en Colombia en los últimos años, esta inversión se refleja en la participación a nivel de usuarios que tienen los operadores en el mercado. Datos del año 2010.

Adicional a la inversión se tiene el nivel de cobertura, el cual se observa en la figura 35, Datos del año 2010

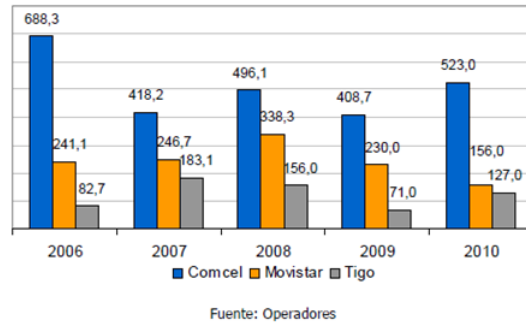


Figura 34: Inversion en Capital CAPEX

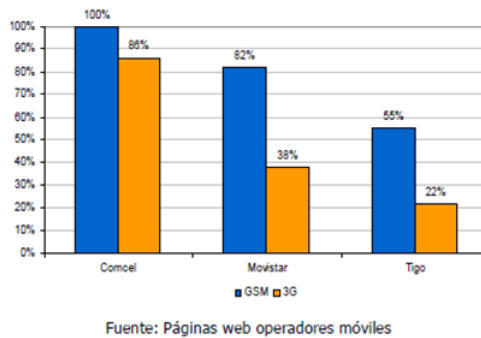


Figura 35: Inversion en Cobertura

Sí estas variables son tenidas en cuenta en la participación de usuarios en el mercado es evidente que el operador dominante, Claro, ha hecho un esfuerzo mayor a nivel de inversión y a nivel de cobertura que se ve reflejado en el comportamiento del mercado.

4.3.2. Tráfico on net y off net

Las diferencias de precios on net y off net afectan significativamente el comportamiento del mercado, esto se refleja en el tráfico generado en los operadores, de la figura 36 se observa que para el operador dominante Claro (antes Comcel) solo entre un 15 % y un 20 % por ciento de su tráfico es off net, el restante es on net, esto indica mayores ingresos para el operador dado que no se incurren en gastos de interconexión con otros operadores; para los operadores Movistar y Tigo se observa que el tráfico off net es más alto

lo que indica que su tráfico on net es más bajo, por ende estos operadores incurren en cargos de interconexión más altos que el operador dominante lo que implica un nivel de ingreso más bajo para ellos.

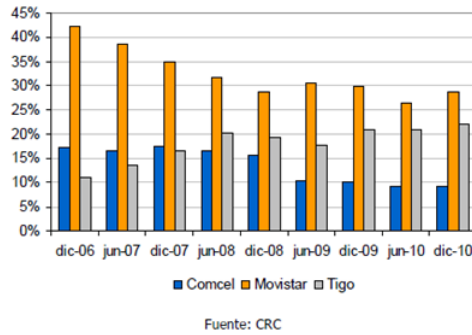


Figura 36: Proporción Tráfico off net Total

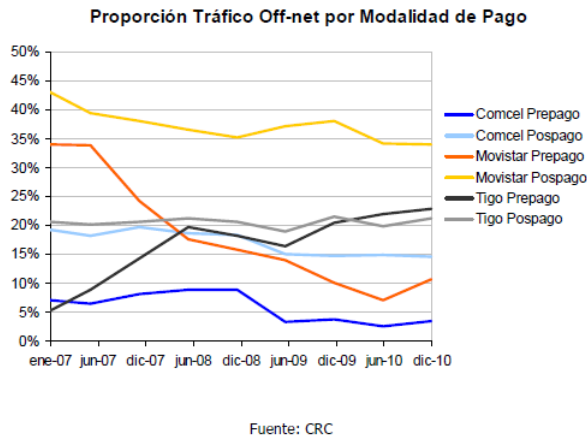


Figura 37: Proporción Tráfico off net por segmento

De la figura 37 se observa que la diferencia de precios on net y off net aumenta el efecto club del operador dominante, pues el tráfico off net de éste operador siempre es más bajo que el de los otros operadores independiente de la modalidad de pago de los usuarios, en modalidad prepago, por ejemplo, los usuarios de Claro (antes Comcel) prácticamente no llaman a usuarios de otros operadores, mientras que los usuarios de Movistar y Tigo lo hacen en una proporción muchísimo mayor.

Otras consideraciones importantes a tener en cuenta en la modelación de este mercado es el nivel de satisfacción de los usuarios que redundan en su beneficio social, así mismo es importante tener en cuenta aspectos como costos de cambio endógenos que significa el costo que debe pagar el usuario de un operador por cambiar de operador.

De las consideraciones anteriores se evidencia que para la modelación de un mercado como el de las telecomunicaciones las variables que intervienen son muchísimas, la participación de usuarios es difícil de modelar solo con la información de los precios que básicamente es la información que se tiene disponible por parte de los operadores, en Colombia como en muchos países del mundo este mercado se ve marcado por situaciones como: barreras de entrada, costos de infraestructura, concentración de usuarios, distorsión de tarifas, concentración de tráfico on net, entre otras. Con la entrada de un nuevo operador virtual al mercado UFF, no se evidencian cambios significativos en el comportamiento del mercado, se debe esperar un tiempo más para analizar el comportamiento del mercado con la entrada de otros operadores móviles virtuales como: Virgin Mobile Colombia y Éxito Móvil Colombia, el operador dominante sigue ampliando su monopolio en el mercado, los operadores Movistar y Tigo en los últimos años han realizado esfuerzos considerable en inversión y cobertura que se han reflejado en el aumento del número de suscriptores a sus redes, pero no impactan en el comportamiento global del mercado; adicional a la entrada de los operadores móviles se tiene el tema de la portabilidad numérica, medidas regulatorias adoptadas en Colombia con la finalidad de reducir el monopolio del operador dominante.

5. Conclusiones y Recomendaciones

Se obtiene una modelación aproximada al mercado de las telecomunicaciones móviles en Colombia, modelos basados en datos de usuarios y precios disponibles en las páginas web del Ministerio de Telecomunicaciones de Colombia, en este caso modeló de crecimiento de usuarios para los operadores de redes móviles: Claro, Movistar y Tigo y para el operador móvil virtual Uff.

En primer lugar se realizó una modelación del crecimiento de usuarios en espacio de estados, usando como referencia los modelos de Cricelli et al (2002), los cuales se utilizaron para modelar este mismo mercado en Italia, se inicia con la identificación de las variables que intervienen en el mercado y se utilizan técnicas de identificación de parámetros para la construcción del modelo de Colombia, de los resultados obtenidos se infiere que este modelo solo fue válido para dos operadores (Movistar y Tigo) lo que deja evidenciar que este mercado es no lineal; para el operador dominante (Claro) y el operador entrante (Uff) la modelación no fue posible con esta técnica, esto puede deberse a las condiciones de competencia y estrategias de precios que no son los mismos para todos los competidores. Se concluye entonces que esta técnica de modelación puede ser válida solo bajo ciertas condiciones del mercado, dado que no se cuenta con la suficiente información del mismo.

A partir del modelo obtenido en espacio de estados se construyó un modelo híbrido, para lo cual se modeló el error del modelo anterior, este error se modeló utilizando técnicas de inteligencia artificial (redes neuronales) con lo que el modelo híbrido se convierte en la suma del modelo en espacio de estados y el error, esta técnica de modelación permitió la modelación del comportamiento usuarios de los cuatro operadores, siendo muy apropiada para predecir el comportamiento del mercado.

Finalmente se utilizó como técnica de modelación solamente redes neuronales, dado que esta técnica tiene la capacidad de aprendizaje a partir de los datos conocidos en el sistema, esta técnica de modelación fue la más acertada para reproducir el comportamiento del mercado.

En el desarrollo de este trabajo se incorporaron conocimientos del área de la matemática y del área específica de las telecomunicaciones, dada la carencia de modelación de este mercado en Colombia se inicia con la identificación de las variables que intervienen en este sector, se hace un rastreo de las técnicas que a nivel Internacional se han desarrollado para modelar

matemáticamente el mercado y a partir de datos reales del mercado se implementa, se simula y se valida.

Se presentan entonces unos resultados que a futuro servirán para el análisis del mercado y para el desarrollo de nuevas aplicaciones, estos resultados pueden ser tenidos en cuenta por entes reguladores, operadores de telefonía móvil y otras agremiaciones del sector para preveer y analizar el impacto de medidas regulatorias que se implementen en el sector, adicionalmente para el desarrollo de futuras aplicaciones que de tipo académico se desarrollen para el conocimiento del sector de las telecomunicacines.

6. Anexos

6.1. Glosario

Se presentan a continuacion las definiciones de la estructura del modelo:

- Ingreso: es el flujo de salarios, intereses o dividendos y demas cosas de valor, recibida durante un periodo de tiempo. Los ingresos se distribuyen en forma de salarios, beneficios, rentas e intereses.
- Beneficios: es el ingreso total menos los costos que se pueden cargar adecuadamente a los bienes vendidos. Diferencia entre los ingresos por venta y el costo de oportunidad total de los recursos involucrados en la produccion de los bienes.
- Duopolio: es una estructura de mercado donde solo existen dos vendedores.
- Excedente del consumidor: es la diferencia entre la cantidad que un consumidor estaria dispuesto a pagar por un bien y la cantidad que paga en realidad. Esta diferencia surge porque las utilidades marginales (en terminos de dolares) de todas las unidades excepto la ultima, supera al precio. Bajo determinadas circunstancias, el valor monetario del excedente del consumidor puede medirse (usando una grafica de la curva de demanda) como el area bajo la curva de demanda pero por encima de la linea de precios.
- Ganancia: aumento del valor de un activo de capital, como tierra o acciones, donde la ganancia esta en la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra del activo.
- Oferta: valor total de los bienes y servicios que las empresas estarian dispuestas a producir en un periodo dado. La oferta agregada es una funcion de los insumos disponibles, la tecnologia y el nivel de precios.
- Demanda: gasto total, deseado o planteado durante un periodo determinado. Esta determinada por el nivel agregado de precios e influyen en ella la inversion interna, las exportaciones netas, el gasto del estado, la funcion de consumo y la oferta de dinero.
- Utilidad: denota satisfaccion, se refiere a la manera en que los consumidores ordenan diversos bienes y servicios. Placer o beneficio subjetivo

que una persona deriva de consumir un bien o servicio. Es una construcción científica que los economistas usan para comprender la forma en que los consumidores racionales dividen sus recursos limitados entre los bienes que les proporcionan satisfacción.

- Utilidad marginal: denota la utilidad adicional que se obtiene del consumo de una unidad adicional de un bien.
- Competencia perfecta: es un mercado en el que no existe empresa o consumidor grande como para afectar el precio de mercado.
- Existen ineficiencias del mercado, cuando hay efectos exógenos o externalidades, que implican la imposición involuntaria de costos o beneficios. Las externalidades se presentan cuando las empresas o las personas imponen costos u otorgan beneficios a quienes no participaron en esa transacción de mercado.
- Costo fijo: en ocasiones llamado costo indirecto representa el gasto monetario total en que se incurre aunque no se produzca nada; no varía aunque cambie la cantidad de producción. Consiste de alquileres, pagos contractuales, pagos de intereses, etc. Los mismos que deben pagarse si no se realiza la actividad o si la producción se modifica.
- Costo variable: representa los gastos que varían con el nivel de producción e incluye todos los costos que no son fijos.
- Costo total: es el gasto monetario total mínimo necesario para obtener cada nivel de producción.
- Costo marginal: es el costo adicional de producir una unidad más.
- Equilibrio de Nash: en teoría de juegos, es el conjunto de estrategias de los jugadores en el que ninguno de ellos puede mejorar su pago, dada la estrategia del otro. Es decir, dada la estrategia del jugador A, el jugador B no puede mejorar y dada la estrategia del jugador B, A tampoco puede. El equilibrio de Nash también se llama equilibrio no cooperativo

6.2. Tablas de Datos

Usuarios reales:

Trimestre	X_A	X_B	X_C	X_D
2008-01	19777799	6931695	3438676	0
2008-02	20756049	7505969	3989111	0
2008-03	21856072	7959711	3600808	0
2008-04	23736894	8327339	3619082	0
2009-01	23250378	8206134	3567722	0
2009-02	23310839	7409561	3611161	0
2009-03	23369866	7099041	3756788	0
2009-04	23726122	7203217	3886518	0
2010-01	24038364	7368976	3934690	0
2010-02	24190115	7497086	4132741	0
2010-03	24574349	7520510	4268486	0
2010-04	25077970	7679058	4384164	0
2011-01	25709973	7531441	4486225	0
2011-02	26274488	7420004	4613021	166772
2011-03	26619576	8047568	4717900	208108
2011-04	24063690	8626823	4787055	248942

Tabla 6: Usuarios de Telefonía Móvil Prepago

Dado que los operadores para los periodos de tiempo señalados no presentan una tarifa única en calidad prepago, se presentan en la siguiente tabla los precios promedios en calidad Off Net en pesos Colombianos:

Trimestre	P _A On Net	P _B On Net	P _C On Net	P _D On Net
2008-01	739	502	259	0
2008-02	521	502	259	0
2008-03	521	502	259	0
2008-04	521	502	259	0
2009-01	521	374	284	0
2009-02	604	374	284	0
2009-03	604	374	284	0
2009-04	422	374	284	0
2010-01	422	387	289	0
2010-02	422	387	289	0
2010-03	373	387	289	0
2010-04	373	387	289	0
2011-01	373	374	197	216
2011-02	341	374	197	216
2011-03	341	374	197	216
2011-04	341	374	197	216

Tabla 7: Precios Promedios Telefonía Móvil Prepago (sin IVA)

Bibliografía

- [1] Armstrong, Mark, (2004). *Network interconnection with asymmetric networks and heterogeneous calling patterns*. ELSEVIER Information Economics and Policy, Vol. 16, pp. 375-390.
- [2] Armstrong, Mark, (2006). *Competition in two-sided markets*. RAND Journal of Economics, Vol. 37, pp. 668-691.
- [3] Armstrong, M., Wright, J., (2007). *Mobile Call Termination*, <http://ssrn.com/abstract=1014322>.
- [4] Banerjee, A., Dippon, C., (2009). *Voluntary relationships among mobile network operators and mobile virtual network operators: An economic explanation*. ELSEVIER Information Economics and Policy, Vol. 21, pp. 72-84.
- [5] Berger, Ulrich, (2005). *Bill-and-keep vs. cost-based access pricing revisited*. ELSEVIER Economics Letters, Vol. 86, pp. 107-112.
- [6] Cambini, C., Valletti, T., (2003). *Network competition with discrimination: bill-and-keep is not so bad after all*. ELSEVIER Economics Letters, Vol. 81, pp. 205-213.

- [7] Comisión de Regulación de Comunicaciones - CRC, (abril de 2010). *Utilización de infraestructura y redes de otros servicios en la prestación de servicios de telecomunicaciones*, www.crcom.gov.co.
- [8] Comisión de Regulación de Comunicaciones - CRC, (agosto de 2010). *Diagnóstico del mercado Voz Saliente Móvil*, www.crcom.gov.co.
- [9] Comisión de Regulación de Comunicaciones - CRC, (diciembre de 2010). *Agenda Regulatoria 2011*, www.crcom.gov.co.
- [10] Comisión de Regulación de Comunicaciones - CRC, (febrero de 2011). *Remuneración de Redes en Convergencia*, www.crcom.gov.co.
- [11] Comisión de Regulación de Comunicaciones - CRC, (agosto de 2011). *Condiciones regulatorias y de mercado: Operador Móvil Virtual*, www.crcom.gov.co.
- [12] Cricelli, L., Gataldi, M., Levialdi, N., (2001). *Strategic behaviours in international telecommunications system*. ELSEVIER Int. J. Production Economics, Vol. 69, pp. 141-149.
- [13] Cricelli, L., Gataldi, M., Levialdi, N., (2002). *The Impact of Competition in the Italian Mobile Telecommunications Market*. Networks and Spatial Economics, Vol. 2, pp. 239-253.
- [14] Cricelli, L., Di Pillo, F., Gataldi, M., Levialdi, N., (2005). *Mobile networks competition and asymmetric regulation of termination charges*. Telecommunications modeling, policy and technology, Chapter 7, pp 123-152.
- [15] Cricelli, L., Grimaldi, M., Levialdi, N., (2011). *The competition among mobile network operators in the telecommunication supply chain*. ELSEVIER Int. J. Production Economics Vol. 131, pp. 22-29.
- [16] Cricelli, L., Grimaldi, M., Levialdi, N., (2012). *The impact of regulating mobile termination rates and MNO-MVNO relationships on retail prices*. ELSEVIER Telecommunications policy Vol. 36, pp. 1-12.
- [17] Jang, J.S.R., Sun, C.T., Mizutani, E. (1997), *Neuro-Fuzzy and Soft Computing*. Prentice Hall.
- [18] Herguera-García, I., Aguilar-Barcelo, (2004), *El Papel de las Tarifas de Interconexión en las Industrias en Red*. MAPRA 4733.

- [19] Hoernig, SteffenI, (2007), *On-net and off-net pricing on asymmetric telecommunications networks*. ELSEVIER Information Economics and Policy, Vol. 19, pp. 171-188.
- [20] Hoernig, SteffenI, (2008), *Market Penetration and Late Entry in Mobile Telephony*, <http://www.NETinst.org>.
- [21] Jeon, D., Laffon, J., Tirole, J., (2004), *On the receiver-pays principle*, RAND Journal of Economics, Vol. 35, pp. 85-110.
- [22] Lafont, J., Rey, P., Tirole, J., (1998), *Network competition: I. Overview and nondiscriminatory pricing*. RAND Journal of Economics, Vol. 29.
- [23] Liu, Q., Serfes, K., (2007), *Price discrimination in two-sided markets*. www.NETinst.org.
- [24] Páginas de los operadores de comunicaciones móviles de Colombia, de la CRC, del Ministerio de Tecnologías de la información y las comunicaciones MinTIC, SIUST. 2012 - 2013.
- [25] Oporto, Samuel, *SISTEMAS INTELIGENTES: Introducción a las Redes Neuronales*, <http://www.wiphala.net/oporto>.
- [26] Mathworks, (2012), *Neural Network Toolbox*.
- [27] Stennek, J., Tangeras,T., (2008), *Intense Network Competition*. www.NETinst.org.
- [28] Valletti , Tomasso, (2006), *Differential pricing, parallel trade and the incentive to invest*. ELSEVIER Journal of International Economics, Vol. 70, pp. 314-324.
- [29] Yaipairoj, S., Harmantzis F., (2004), *Priority Telephony System with Pricing Alternatives*, Springer.