Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 3, número 6, diciembre de 2007, páginas 63–89

Sobre un ideal minimal de operadores definido a través de espacios de interpolación

On a minimal operator ideals defined by means of interpolation spaces

María Eugenia Puerta Yepes[1] y Gabriel Ignacio Loaiza Ossa[2]

Recepción: 23-jul-2007/Modificación: 30-nov-2007/Aceptación: 30-nov-2007
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En el presente trabajo se introduce una norma tensorial definida mediante espacios de interpolación de espacios ℓ^p y se caracteriza el ideal minimal de operadores asociado, en el sentido de [1].

Palabras claves: productos tensoriales, ideales, operadores, espacios de interpolación.

Abstract

In this paper we introduce a tensonorm defined by interpolation spaces of ℓ^p spaces and characterize the minimal operator associated in the sense of [1].

Key words: tensor products, operators, ideals, interpolation spaces.

[1] Doctor en Ciencias Matemáticas, mpuerta@eafit.edu.co, profesor titular, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[2] Doctor en Ciencias Matemáticas, gloaiza@eafit.edu.co, profesor titular, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

1 Introducción

Los trabajos de Matter [2, 3] de la década de los ochenta, introducen un nuevo ideal maximal de operadores, llamado ideal de operadores (p, σ)-absolutamente continuos, $1 \leq p < \infty$, $0 < \sigma < 1$, en relación con las propiedades de superreflexividad de los espacios de Banach. Lo más significativo de estos ideales es su estrecha relación con procedimientos de cálculo típicos de la teoría de espacios de interpolación. Esta situación se puede observar en [3], donde aparecen espacios de interpolación definidos por el método real como herramientas esenciales en la caracterización de ciertos operadores propios de la teoría de Matter. Por la misma época, los trabajos de Pisier pusieron de manifiesto la utilidad de considerar la relación profunda que existe entre ideales de operadores y normas tensoriales [4]. Como fruto de la síntesis de ambas teorías se constituye lo que se puede llamar una teoría clásica de normas tensoriales e ideales de operadores presentada en el trabajo de Defant y Floret [1], destacando la correspondencia entre ideales de operadores y normas tensoriales. A partir de [1], al ideal maximal asociado a una norma tensoral α se le llama ideal de operadores α–integrales, y al minimal, ideal de operadores α–nucleares.

Sin embargo, aunque en los trabajos de Matter, los ideales son maximales, no hay ningún estudio en relación con las normas tensoriales subyacentes. Estas relaciones fueron estudiadas en el caso $1 < p < \infty$ en [5], caracterizándose los correspondientes ideales de operadores nucleares e integrales mediante factorizaciones, en las que de nuevo aparecen ciertos espacios de interpolación como elemento central. El estudio del caso $p = 1$ fue presentado en [6]. Todos estos trabajos muestran el papel que pueden desarrollar los espacios de interpolación a la hora de definir nuevas normas tensoriales más generales que las clásicas, planteándose de manera inmediata el problema de caracterizar los operadores asociados de tipo nuclear e integral.

En este trabajo se define en primera instancia una norma tensorial, a partir de espacios de interpolación entre espacios ℓ^p, y finalmente se caracteriza el ideal minimal de operadores asociado.

2 Conceptos básicos y notación

Cuando se haga referencia a un espacio vectorial, se asume que el cuerpo de los escalares serán los reales $\mathbb{R}$. No obstante, todos los resultados son válidos, con procedimiento análogo, si el cuerpo de escalares es complejo. Dados dos espacios de Banach E y F, se denota por $\mathcal{L}(E,F)$ el espacio de operadores lineales y continuos de E en F. Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, el operador adjunto de T será $T' \in \mathcal{L}(F',E')$. Se mencionan algunos conceptos preliminares.

2.1 Normas tensoriales e ideales de operadores

De acuerdo con [1], se presentan algunas nociones básicas acerca de ideales de operadores y normas tensoriales.

Un ideal de operadores entre espacios de Banach es un functor $\mathfrak{A}$ que asocia a cada par de espacios de Banach E y F un subconjunto $\mathfrak{A}(E,F)$ de $\mathcal{L}(E,F)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones: para espacios de Banach arbitrarios E, F, G y H

1. $\forall x' \in E', \forall y \in F \quad x' \otimes y \in \mathfrak{A}(E,F)$
2. $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{A}(E,F) \quad S_1 + S_2 \in \mathfrak{A}(E,F)$
3. $\forall R \in \mathcal{L}(G,H), \forall S \in \mathfrak{A}(F,G), \forall T \in \mathcal{L}(E,F) \quad R \circ S \circ T \in \mathfrak{A}(E,H)$.

En tal caso, para cada par de espacios de Banach (E,F), a $\mathfrak{A}(E,F)$ se le llama componente del ideal $\mathfrak{A}$ repecto a E y F. Es claro que la componente $\mathfrak{A}(E,F)$ de $\mathfrak{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E,F)$.

Sea $\mathfrak{A}$ un ideal y α un functor que asocia a cada componente $\mathfrak{A}(E,F)$ una norma (cuasinorma o seminorma), tal que para cada R en $\mathcal{L}(G,H)$, S en $\mathfrak{A}(F,G)$ y T en $\mathcal{L}(E,F)$ se verifica que $\alpha(R \circ S \circ T) \leq \|R\|\alpha(S)\|T\|$. A la pareja $(\mathfrak{A}, \alpha)$ se le llama ideal normado (cuasinormado o seminormado).

Ahora, si E y F son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$, se denota por $B(E,F)$ el espacio de aplicaciones bilineales y continuas de $E \times F$ en $\mathbb{R}$. Cada elemento $(x,y) \in E \times F$ define una forma lineal canónica sobre $B(E,F)$ denotada por el símbolo $x \otimes y$ y definida para cada $\varphi \in B(E,F)$ por

$\langle x \otimes y, \varphi \rangle := \varphi(x, y)$. Se llama producto tensorial de los espacios vectoriales E y F y, se denota $E \otimes F$, al subespacio vectorial del dual algebraico de $B(E, F)$ generado por el conjunto de formas lineales $x \otimes y$ con $x \in E$ y $y \in F$. Los elementos de $E \otimes F$ se llaman tensores y cada uno admite representaciones de la forma $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Dados los espacios vectoriales E, F, G, H y las aplicaciones lineales $A : E \to F$ y $B : G \to H$ se llama producto tensorial de aplicaciones, a la aplicación $A \otimes B : E \otimes G \to F \otimes H$ definida para cada $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ en $E \otimes G$ por $(A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \otimes B(y_i) \in F \otimes H$.

Cuando en el producto tensorial de dos espacios E y F, se tenga definida una norma α, se hará referencia al espacio vectorial normado como $E \otimes_\alpha F$ y a su complección como $E \widehat{\otimes}_\alpha F$. A la norma de un elemento cualquiera $z \in E \otimes F$, se le denotará por $\alpha(z; E, F)$ o por $\alpha(z)$. Una norma α definida en el producto tensorial $E \otimes F$ se dice que es razonable si verifica que $\alpha(x \otimes y) = \|x\|_E \|y\|_F$ para todo $x \in E$, $y \in F$, y que para todo $x' \in E'$ y $y' \in F'$, $x' \otimes y' \in (E \otimes_\alpha F)'$ y $\|x' \otimes y'\|_{(E \otimes_\alpha F)'} = \|x'\|_{E'} \|y'\|_{F'}$.

Una norma tensorial α es un functor que hace corresponder a cada par de espacios normados (E, F) una norma sobre $E \otimes F$ formando un nuevo espacio normado.

Se dice que una norma tensorial α es un tensornorma si verifica que para cada par de espacios normados E y F, $\alpha(\cdot, E, F)$ es una norma razonable en $E \otimes F$, y además satisface la propiedad métrica de las aplicaciones, esto es, dados los espacios normados E_1, E_2, F_1, F_2 y las aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$, $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$, se debe tener que $A \otimes B \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_\alpha E_2, F_1 \otimes_\alpha F_2)$ y que $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|$.

De acuerdo con [1], el siguiente es un criterio equivalente a la definición de tensornorma: sea α una asignación que a cada pareja de espacios normados E y F en cierta clase de espacios $\mathcal{A}$, que contenga a la clase de espacios de dimensión finita, le hace corresponder una función real $\alpha(\cdot; E, F)$. α es una tensornorma en $\mathcal{A}$ si y sólo si verifica las siguientes propiedades:

a) $\alpha(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$ para todo E y F en $\mathcal{A}$

b) $\alpha(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$

c) Se cumple la propiedad métrica de las aplicaciones en $\mathcal{A}$.

2.2 Espacios de interpolación

A continuación se enuncian las definiciones pertinentes sobre espacios de interpolación obtenidos por el método real y algunos resultados necesarios para el eje de este trabajo.

Una pareja (A_0, A_1) de espacios de Banach A_0 y A_1 se dice que es una pareja compatible si existe un espacio vectorial topológico de Hausdorff E, tal que A_0 y A_1 son subespacios de E.

Sea (A_0, A_1) una pareja compatible correspondiente a un espacio de Hausdorff E. Se denota por $A_0 + A_1$ al conjunto de elementos $x \in E$ que son representables en la forma $x = x_0 + x_1$ para algún $x_0 \in A_0$ y $x_1 \in A_1$. Para x en $A_0 + A_1$, se define

$$\|x\|_{A_0+A_1} = \text{ínf}\left\{\|x_0\|_{A_0} + \|x_1\|_{A_1}\right\}, \tag{1}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in A_0$ y $x_1 \in A_1$. Para cada elemento $x \in A_0 \cap A_1$ se define

$$\|x\|_{A_0 \cap A_1} = \text{máx}\left\{\|x\|_{A_0}, \|x\|_{A_1}\right\}. \tag{2}$$

Si (A_0, A_1) es una pareja compatible, entonces $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ son espacios de Banach bajo las normas en (2) y (1) respectivamente (ver [7], lema 2.3.1). Si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1 se verifica

$$(A_0 \cap A_1)' = A_0' + A_1', \qquad (A_0 + A_1)' = A_0' \cap A_1'.$$

Un espacio de Banach X se dice que es un espacio intermedio respecto de una pareja compatible (A_0, A_1) si $A_0 \cap A_1 \subset X \subset A_0 + A_1$, con inclusiones respectivas continuas.

Para el método de interpolación real existen diversas construcciones, que básicamente responden a los llamados métodos de interpolación generales de tipo $\mathcal{J}$ y de tipo $\mathcal{K}$, con sus versiones continua y discreta. Estos métodos generales de construcción son equivalentes, aunque no iguales (ver [7]).

Método $\mathcal{K}$. Dada una pareja compatible de espacios de Banach (A_0, A_1), se define la función $\mathcal{K}(\cdot, \cdot, (A_0, A_1)) :]0, \infty[\times (A_0 + A_1) \to [0, \infty[$ para cada

$x \in A_0 + A_1$ y $t > 0$, por

$$\mathcal{K}(t, x, (A_0, A_1)) = \text{ínf}\left\{ \|x_0\|_{A_0} + t\,\|x_1\|_{A_1} / x = x_0 + x_1 \right\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de $x = x_0 + x_1$ con $x_0 \in A_0$ y $x_1 \in A_1$. Si no hay lugar a confusión, la notación general $\mathcal{K}(t, x, (A_0, A_1))$ se sustituirá por la más sencilla $\mathcal{K}(t, x)$.

Sea $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Se define el espacio de interpolación $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}$ como el conjunto de los $x \in A_0 + A_1$ tales que

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{K}(t,x)}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si} \quad 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} \frac{\mathcal{K}(t,x)}{t^\theta} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

es finita. Se puede probar que $\|\cdot\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}}$ es una norma en $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}$.

Método $\mathcal{J}$. Dada una pareja compatible de espacios de Banach (A_0, A_1), se define la función $\mathcal{J}(\cdot, \cdot, (A_0, A_1)) :]0, \infty[\times (A_0 \cap A_1) \to [0, \infty[$ para cada $x \in A_0 \cap A_1$ y $t > 0$, por

$$\mathcal{J}(t, x) = \mathcal{J}(t, x, (A_0, A_1)) = \text{máx}\{\|x\|_{A_0}, t\,\|x\|_{A_1}\}.$$

Sea $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Se define el espacio de interpolación $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}}$ como el conjunto de elementos $x \in A_0 + A_1$ que son representables en la forma

$$x = \int_0^\infty \frac{u(t)}{t} dt \tag{3}$$

donde $u : [0, \infty[\to A_0 \cap A_1$ es una función fuertemente medible y la integral $\int_0^\infty \frac{u(t)}{t} dt$ es convergente en el espacio suma $A_0 + A_1$ y además

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}}} := \text{ínf} \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{J}(t,u(t))}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si} \quad 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} \frac{\mathcal{J}(t,u(t))}{t^\theta} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

es finita. El ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de x de la forma (3). Se puede probar que $\|\cdot\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}}}$ es una norma en $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}}$. También se puede probar que $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}}$ es isomorfo a $(A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}$.

Con vista a las relaciones isométricas, si $A_0 \cap A_1$ es denso en A_0 y en A_1 se verifican las relaciones de dualidad (ver proposición 3.1.21 en [8])

$$\mathcal{K}(t, x', (A'_0, A'_1) = \sup_{x \in A_0 \cap A_1} \frac{|\langle x', x\rangle|}{\mathcal{J}(t^{-1}, x, (A_0, A_1))}$$

$$\mathcal{J}(t, x', (A'_0, A'_1) = \sup_{x \in A_0 \cap A_1} \frac{|\langle x', x\rangle|}{\mathcal{K}(t^{-1}, x, (A_0, A_1))},$$

y entonces se tiene mediante el teorema 3.7.1 en [7] que para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q < \infty$ se cumple la isometría

$$((A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{J}})' = (A'_0, A'_1)_{\theta,q',\mathcal{K}}\,.$$

En cambio, en general, con respecto a la dualidad en el método $\mathcal{K}$, sólo se puede afirmar que $(A'_0, A'_1)_{\theta,q',\mathcal{J}}$ es isomorfo a $((A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}})'$ y que $(A'_0, A'_1)_{\theta,1,\mathcal{J}}$ es isomorfo al dual de la clausura de $A_0 \cap A_1$ en $(A_0, A_1)_{\theta,\infty,\mathcal{K}}$.

Por otra parte, si $1 \leq q < \infty$ las aplicaciones inclusión

$$\begin{aligned} I_{1q} &: A_0 \cap A_1 \to (A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}}\,, \\ J_{1q} &: (A_0, A_1)_{\theta,q,\mathcal{K}} \to A_0 + A_1\,, \end{aligned} \tag{4}$$

tienen norma menor o igual que ϖ_q y ϖ_q^{-1} respectivamente (ver teorema 3.3.1 en [8]), donde

$$\varpi_q = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\text{mín}\,\{1, t\}}{t^\theta}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si} \quad 1 \leq q < \infty\,. \tag{5}$$

Retículos de Banach. Se establece ahora la notación y definiciones referentes al tema y para una mejor ilustración se cita a [9, 10, 11, 12].

Un espacio vectorial real E, se dice que es un espacio vectorial ordenado cuando está provisto de una relación de orden parcial $\leq$ (reflexiva, antisimétrica y transitiva) compatible con la estructura algebraica de E, en el sentido de que satisface los dos siguientes axiomas:

1. Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in E$
2. Si $x \leq y$, entonces $\alpha x \leq \alpha y$ para todo $\alpha \geq 0$.

Un elemento x en un espacio vectorial ordenado E es llamado positivo si $x \geq 0$. El conjunto de todos los elementos positivos de E se denota por E^+, es decir, $E^+ := \{x \in E \,/ x \geq 0\}$.

Un retículo vectorial es un espacio vectorial real ordenado E en el que los elementos

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \text{ y } \ x \wedge y := \inf\{x, y\}$$

existen en E para todo $x, y \in E$. Si se define para un $x \in E$ cualquiera, $x^+ := x \vee 0$ y $x^- := (-x) \vee 0$, se puede descomponer x como $x = x^+ - x^-$, llamando x^+ su parte positiva y x^- su parte negativa y notando que $x^+, x^- \in E^+$ y que $x^+ \wedge x^- = 0$. Se define también $|x| := x \vee (-x)$ y se le llama *módulo* de x, que también se puede descomponer como $|x| = x^+ + x^-$.

Un conjunto A de un retículo vectorial E se dice que es *sólido* si para todo $x \in A$ y para todo $y \in E$, tales que $|y| \leq |x|$, se verifica que $y \in A$.

Un retículo vectorial topológico es un retículo vectorial dotado de una topología Hausdorff que posee una base de entornos de cero que son conjuntos sólidos.

Una seminorma (norma) $p(.)$ en un retículo vectorial topológico se dice que es una seminorma (norma) de retículo si $|x| \leq |y|$ implica que $p(x) \leq p(y)$. Un retículo vectorial topológico se dice que es normado si su topología viene dada mediante una sola norma de retículo. Si además es completo, se dice que el retículo es de Banach.

Todos los espacios de sucesiones que aparecen en este trabajo, son retículos de Banach y sus propiedades reticulares serán necesarias en varios de los desarrollos presentados.

3 Norma tensorial definida a partir de espacios de interpolación

En esta sección se presenta la norma tensorial, con la que se dotará de una topología al producto tensorial entre dos espacios de Banach, permitiendo en la próxima sección introducir el ideal minimal de operadores asociado a dicha tensornorma. Previamente se obtendrán algunos resultados sencillos sobre espacios de interpolación entre espacios ℓ^p, que tendrán importancia decisiva en la definición de la norma tensorial asociada al ideal minimal de operadores.

En particular, en este trabajo se considerará la pareja compatible $\lambda = (\ell^{p_0}, \ell^{p_1})$ con $1 < p_0 \leq p_1 < \infty$ y su pareja dual $\lambda' = (\ell^{p_0'}, \ell^{p_1'})$. Se denotará por $\lambda_{q,\mathcal{J}}$, $\lambda_{q,\mathcal{K}}$ los espacios de interpolación obtenidos mediante el método $\mathcal{J}$ y $\mathcal{K}$, respectivamente, a partir de la pareja λ. Análogamente se denota por $\lambda'_{q,\mathcal{J}}$, $\lambda'_{q,\mathcal{K}}$ los espacios de interpolación obtenidos a partir de la pareja λ'. Con esta notación, si $1 \leq q < \infty$ y $0 < \theta < 1$ el espacio dual $(\lambda_{q,\mathcal{J}})' = ((\ell^{p_0}, \ell^{p_1})_{\theta,q,\mathcal{J}})' = (\ell^{p_0'}, \ell^{p_1'})_{\theta,q',\mathcal{K}} = \lambda'_{q',\mathcal{K}}$. Obsérvese que $(\lambda_{q,\mathcal{J}})' \neq \lambda'_{q,\mathcal{J}}$. Teniendo presente lo dicho antes para la dualidad en el método $\mathcal{K}$, dado que el espacio $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ es reflexivo si $1 \leq q < \infty$, se verifica la isometría

$$(\lambda'_{q',\mathcal{K}})' = \lambda_{q,\mathcal{J}}\,.$$

Para el caso $q = 1$, sea $X_\infty^{p_0'p_1'} = \overline{\ell^{p_0'} \cap \ell^{p_1'}}^{(\ell^{p_0'},\ell^{p_1'})_{\theta,\infty,\mathcal{K}}}$ la clausura de $\ell^{p_0'} \cap \ell^{p_1'} = \ell^{p_1'}$ en $\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}$, se verifica que $(X_\infty^{p_0'p_1'})'$ es isométrico al espacio $\lambda_{1,\mathcal{J}}$. En efecto, sea $\varphi \in \left(X_\infty^{p_0'p_1'}\right)'$. Por la observación del teorema 3.7.1 en [7], $\varphi \in \lambda_{1,\mathcal{J}}$, luego φ puede describirse como una sucesión $(x_i) \in \lambda_{1,\mathcal{J}}$ y se tiene entonces que

$$\|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} = \|\varphi\|_{(\lambda_{1,\mathcal{J}})''} = \sup_{\|(z_i)\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}} \leq 1} |\langle (x_i), (z_i)\rangle|$$

y dado $\epsilon > 0$, existe $(z_i) \in \lambda'_{\infty,\mathcal{K}}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|(z_i)\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}} \leq 1$ y

$$\|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} \leq |\langle (x_i), (z_i)\rangle| + \epsilon = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i z_i\right| + \epsilon \leq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i z_i\right| + 2\epsilon\,.$$

Sean $\mathbf{e}_i := (0, \ldots, 1, 0, \ldots) \in \lambda'_{\infty,\mathcal{K}}$.
Como $\left\|\sum_{i=1}^k z_i \mathbf{e}_i\right\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}} \leq \|(z_i)\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}} \leq 1$ y $\sum_{i=1}^k z_i \mathbf{e}_i \in \ell^{p_1'} \subset X_\infty^{p_0'p_1'}$, se tiene

$$\|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} \leq \sup_{\|(w_i)\|_{X_\infty^{p_0'p_1'}} \leq 1} |\langle (x_i), (w_i)\rangle| + 2\epsilon = \|\varphi\|_{(X_\infty^{p_0'p_1'})'} + 2\epsilon\,,$$

y dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario y $(\lambda_{1,\mathcal{J}})' = \lambda'_{\infty,\mathcal{K}}$

$$\|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} \leq \|\varphi\|_{(X_\infty^{p_0'p_1'})'} = \sup_{\|w\|_{X_\infty^{p_0'p_1'}} \leq 1} |\langle \varphi, w\rangle|$$

$$\leq \sup_{\|w\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}}\leq 1} |\langle \varphi, w\rangle| \leq \|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} \|w\|_{\lambda'_{\infty,\mathcal{K}}} \leq \|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}}$$

lo cual implica que $\|\varphi\|_{\lambda_{1,\mathcal{J}}} = \|\varphi\|_{(X_\infty^{p'_0 p'_1})'}$.

Lema 1. *Para* $1 \leq q \leq \infty$, $\|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \varpi_q^{-1}$ *y* $\|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}} = \varpi_q$.

Demostración. Sea $1 < h_0, h_1 < \infty$. Considérense las inclusiones canónicas

$$I_{1q}^{h_0h_1} : \ell^{h_0} \cap \ell^{h_1} \to (\ell^{h_0}, \ell^{h_1})_{\theta,q,\mathcal{K}} \qquad I_{2q}^{h_0h_1} : (\ell^{h_0}, \ell^{h_1})_{\theta,q,\mathcal{K}} \to \ell^{h_0} + \ell^{h_1}$$
$$J_{1q}^{h_0h_1} : \ell^{h_0} \cap \ell^{h_1} \to (\ell^{h_0}, \ell^{h_1})_{\theta,q,\mathcal{J}} \qquad J_{2q}^{h_0h_1} : (\ell^{h_0}, \ell^{h_1})_{\theta,q,\mathcal{J}} \to \ell^{h_0} + \ell^{h_1}\,.$$

Obsérvese que si $1 < q < \infty$, $\left(J_{1q}^{h_0h_1}\right)' = I_{2q'}^{h'_0h'_1}$. Por tanto, como para $\lambda_{q,\mathcal{K}} = (\ell^{p_0}, \ell^{p_1})_{\theta,q,\mathcal{K}}$, $p_0 < p_1$ es verdad que $\ell^{p'_0} + \ell^{p'_1} = \ell^{p'_0}$ y $\ell^{p_0} \cap \ell^{p_1} = \ell^{p_0}$. Así, por (4) y (5) se tiene que para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}} = \left\|\left(I_{1q}^{p_0p_1}(\mathbf{e}_j)\right)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}} \leq \left\|I_{1q}^{p_0p_1}\right\| \|(\mathbf{e}_j)\|_{\ell^{p_0}} \leq \varpi_q$$

$$1 = \|(\mathbf{e}_j)\|_{\ell^{p_1}} = \left\|\left(I_{2q}^{p_0p_1}(\mathbf{e}_j)\right)\right\|_{\ell^{p_1}} \leq \left\|I_{2q}^{p_0p_1}\right\| \|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}} \leq \frac{1}{\varpi_q} \|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}}$$

luego, $\|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{K}}} = \varpi_q$.

Por otra parte, de $\left(I_{2q}^{p_0p_1}\right)' = J_{1q'}^{p'_0p'_1}$, $\left(I_{1q}^{p_0p_1}\right)' = J_{2q'}^{p'_0p'_1}$, (4) y (5) se tiene $\left\|J_{2q'}^{p'_0p'_1}\right\| = \left\|\left(I_{1q}^{p_0p_1}\right)'\right\| = \left\|I_{1q}^{p_0p_1}\right\| \leq \varpi_q$ y por tanto, repitiendo el mismo razonamiento anterior con las aplicaciones $I_{1q'}^{p'_0p'_1} : \ell^{p'_1} \to \lambda'_{q',\mathcal{K}}$ y $I_{2q'}^{p'_0p'_1} : \lambda'_{q',\mathcal{K}} \to \ell^{p'_0}$, se obtiene que $\|(\mathbf{e}_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \frac{1}{\varpi_q}$.

Ahora, si $1 < h_0, h_1 < \infty$, sea $X_\infty^{h_0h_1}$ la clausura de $\ell^{h_0} \cap \ell^{h_1}$ en $(\ell^{h_0}, \ell^{h_1})_{\theta,\infty,\mathcal{J}}$ y las inclusiones canónicas $J_{1\infty}^{h_0h_1} : \ell^{h_0} \cap \ell^{h_1} \to X_\infty^{h_0h_1}$ $J_{2\infty}^{h_0h_1} : X_\infty^{h_0h_1} \to \ell^{h_0} + \ell^{h_1}$.

Según lo dicho en los teoremas anteriores de dualidad, se verifica que $\left(J_{1\infty}^{h_0h_1}\right)' = I_{21}^{h'_0h'_1}$ y $(X_\infty^{h_0h_1})' = \lambda'_{1,\mathcal{K}} = (\ell^{h'_0}, \ell^{h'_1})_{\theta,1,\mathcal{K}}$ y por tanto puede hacerse una prueba análoga a la anterior. ■

Un resultado en relación a este tema y que será relevante en los desarrollos es:

Teorema 1. *(Krée, ver [13] o [7], teorema 5.2.1) Si* $1 \leq q \leq \infty$, *la identidad entre* $(L^{p_0}(\Omega, \mathcal{M}, \mu), L^{p_1}(\Omega, \mathcal{M}, \mu))_{\theta,q}$ *y el espacio de Lorentz* $L^{\overline{p}q}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, *es un isomorfismo, donde* $\overline{p}$ *está definido mediante la igualdad* $\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, *con constantes de equivalencia entre las normas correspondientes independientes de* (Ω, μ).

Definición 1. *Dados un espacio de sucesiones* η *y un espacio normado* E, *se definen las funciones:*

$\pi_\eta : E^{\mathbb{N}} \longmapsto \mathbb{R}^+$, $\varepsilon_\eta : E^{\mathbb{N}} \longmapsto \mathbb{R}^+$, *mediante (siendo* $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$ *)*

$$\begin{aligned} \pi_\eta\left((x_i)\right) \ &: = \left\|(\|x_i\|)_{i=1}^{\infty}\right\|_\eta \\ \varepsilon_\eta\left((x_i)\right) \ &: = \sup_{\|x'\|_{E'} \leq 1} \left\|\left(\left|\langle x_i, x'\rangle\right|\right)_{i=1}^{\infty}\right\|_\eta . \end{aligned}$$

Si se tiene una sucesion finita $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en E, se define $\pi_\eta((x_i)_{i=1}^n) = \pi_\eta((x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots))$ y $\varepsilon_\eta\left((x_i)_{i=1}^n\right) = \varepsilon_\eta\left((x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\right)$.

Se define ahora el funcional que permitirá establecer una tensornorma.

Definición 2. *Sean* E *y* F *espacios normados. Se define la función* $g_\lambda(\cdot; E, F) : E \otimes F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *para todo* z *en el espacio* $E \otimes F$:

$$g_\lambda(z; E, F) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij})_{j=1}^{k_i})\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})_{j=1}^{k_i})\right\},$$

tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de la forma $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$.

Teorema 2. *La función* g_λ *es una norma tensorial en la clase de los espacios normados.*

Demostración. Se realiza la prueba haciendo uso del criterio 12.2 de [1] para normas tensoriales.

(1) Sean E y F espacios normados. Véase que $g_\lambda(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$. De la definición de g_λ se sigue inmediatamente que $g_\lambda\left(z; E, F\right) \geq 0$ y que $g_\lambda\left(\delta z; E, F\right) = |\delta|\, g_\lambda\left(z; E, F\right)$ para todo $z \in E \otimes F$ y todo $\delta \in \mathbb{R}$. Basta ver entonces que $g_\lambda(\cdot; E, F)$ verifica la desigualdad triangular para todo z_1, $z_2 \in E \otimes F$.

Dados $z_1, z_2 \in E \otimes F$ y $\epsilon > 0$, por definición de ínfimo existen representaciones $z_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}^1 \otimes y_{ij}^1 \qquad z_2 = \sum_{i=n+1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}^2 \otimes y_{ij}^2$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}^1))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}^1)) \leq g_\lambda(z_1; E, F) + \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y}$$
$$\sum_{i=n+1}^{m} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}^2))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}^2)) \leq g_\lambda(z_2; E, F) + \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Entonces $z_1 + z_2$ admite una representación $z_1 + z_2 = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} u_{ij} \otimes v_{ij}$, donde $u_{ij} = x_{ij}^1$ y $v_{ij} = y_{ij}^1$ si $1 \leq i \leq n$, y $u_{ij} = x_{ij}^2$ y $v_{ij} = y_{ij}^2$ si $n{+}1 \leq i \leq m$, con lo cual,

$$\begin{aligned} g_\lambda(z_1 + z_2; E, F) &\leq \sum_{i=1}^{n+m} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((u_{ij}))\,\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((v_{ij})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}^1))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}^1)) + \sum_{i=n+1}^{m} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}^2))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}^2)) \\ &\leq g_\lambda(z_1; E, F) + g_\lambda(z_2; E, F) + \epsilon\,, \end{aligned}$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $g_\lambda(z_1 + z_2; E, F) \leq g_\lambda(z_1; E, F) + g_\lambda(z_2; E, F)$.

(2) Se verá ahora que $g_\lambda(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}){=}1$.

Si $E = \mathbb{R}$ se tiene que $E' = \mathbb{R}$ y $\{\beta \in E' / \|\beta\| \leq 1\} = \{\beta \in \mathbb{R} / |\beta| \leq 1\}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha\beta$. Considérese una representación cualquiera de $1 \otimes 1$ de la forma

$$1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij}. \tag{6}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\beta_{ij})) &= \sup_{|\gamma| \leq 1} \|(|\beta_{ij}\gamma|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} = \sup_{|\gamma| \leq 1} |\gamma|\ \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\ &= \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} = \pi_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\beta_{ij})) \end{aligned} \tag{7}$$

ya que $\gamma = 1$ es uno de los valores admisibles para la definición. Ahora, como $1 \otimes 1$ es una forma bilineal sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por definición de tensor es cierto que

$$1 = |\langle 1 \otimes 1, 1 \otimes 1 \rangle| = \left| \left\langle 1 \otimes 1, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \beta_{ij} \right|,$$

y por la relación de dualidad entre los espacios $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ y $\lambda'_{q',\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left(|\alpha_{i1}|, |\alpha_{i2}|, ,.., |\alpha_{ik_i}|, ..., 0 \right), \left(|\beta_{i1}|, |\beta_{i2}|, ..., |\beta_{ik_i}|, ..., 0 \right) \right\rangle \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|(|\alpha_{ij}|)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} = \sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \left((\alpha_{ij}) \right) \pi_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((\beta_{ij}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \left((\alpha_{ij}) \right) \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((\beta_{ij}) \right),
\end{aligned}$$

con lo cual, tomando ínfimos sobre las representaciones de la forma (6),

$$g_\lambda \left(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R} \right) \geq 1\,. \tag{8}$$

Recíprocamente, si en la representación (6) se hace $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ para $i, j \neq 1$ y $\alpha_{11} = \beta_{11} = 1$, se sigue entonces que

$$g_\lambda \left(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R} \right) \leq \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \left((1, 0, \ldots, 0) \right) \; \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((1, 0, \ldots, 0) \right), \tag{9}$$

y de (7)

$$\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((1, 0, \ldots, 0) \right) = \pi_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((1, 0, \ldots, 0) \right) = \|(1, 0, \ldots, 0)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}\,. \tag{10}$$

Además $\pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \left((1, 0, \ldots, 0) \right) = \|(1, 0, \ldots, 0)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}$.

Por otra parte, en la sección de conceptos básicos sobre espacios de interpolación, se prueba que $\|\mathbf{e}_i\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} = \varpi_q$ y $\|\mathbf{e}_i\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \varpi_q^{-1}$, para una cierta constante positiva ϖ_q. Entonces, considerando (10) y (9), se tiene

$$g_\lambda \left(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R} \right) \leq \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \left((1, 0, ..., 0) \right) \; \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \left((1, 0, ..., 0) \right) \leq 1\,. \tag{11}$$

Y de (11) y (8) $\quad g_\lambda \left(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R} \right) = 1$.

(3) Finalmente, se verá que g_λ satisface la propiedad métrica de las aplicaciones. Sean $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ y $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y considérese la aplicación $A \otimes B : E_1 \otimes_{g_\lambda} E_2 \to F_1 \otimes_{g_\lambda} F_2$. Supóngase que $\|B\| \neq 0$ (si $B = 0$ la desigualdad a demostrar es trivial). Para cada representación $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E_1 \otimes E_2$,

$$(A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} A(x_{ij}) \otimes B(y_{ij}) \in F_1 \otimes F_2 .$$

Por ser $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ un retículo, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((A(x_{ij}))) &= \|(\|A(x_{ij})\|)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \leq \|(\|A\| \, \|x_{ij}\|)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\ &= \|A\| \, \|(\|x_{ij}\|)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \|A\| \, \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij})) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}(B(y_{ij})) &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \|(|\langle B(y_{ij}), y' \rangle|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\ &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \|(|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|)\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\ &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\| \|B'\| \left(\left| \left\langle y_{ij}, \tfrac{B'(y')}{\|B'\|} \right\rangle \right| \right) \right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\ &= \|B'\| \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\| \left(\left| \left\langle y_{ij}, \tfrac{B'(y')}{\|B'\|} \right\rangle \right| \right) \right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \end{aligned}$$

y como $\left\| \frac{B'(y')}{B'} \right\| \leq \frac{\|B'\| \|y'\|}{\|B'\|} \leq 1$ y $\|B'\| = \|B\|$, se sigue que

$$\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}(B(y_{ij})) \leq \left\|B'\right\| \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) .$$

Por consiguiente, de todo lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} g_\lambda((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &\leq \sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}(A(x_{ij})) \, \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}(B(y_{ij})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|A\| \, \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij})) \, \|B\| \, \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) \\ &= \|A\| \, \|B\| \sum_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij})) \, \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) , \end{aligned}$$

y tomando ínfimos sobre las distintas representaciones de z, se tiene

$$g_\lambda((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \, \|B\| \, g_\lambda(z; E_1, E_2) ,$$

con lo cual

$$\|A \otimes B\| = \sup_{g_\lambda(z;E_1,E_2)\leq 1} g_\lambda\left((A \otimes B)(z); F_1, F_2\right) \leq \|A\| \, \|B\|$$

que es lo que se quería probar. ■

Para caracterizar los elementos del espacio complección de $E \otimes F$, bajo la norma tensorial g_λ se usa una de las propiedades importantes heredadas de los espacios ℓ^p, por los espacios de tipo $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ y $\lambda_{q,\mathcal{K}}$ la cual es la propiedad de convergencia seccional, que consiste en que dada una sucesión $(x_i) \subset \lambda_{q,\mathcal{J}}$, (lo mismo para el espacio $\lambda_{q,\mathcal{K}}$) para cada $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$

$$\left\| \sum_{k=j}^{\infty} x_k \mathbf{e}_k \right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \leq \epsilon\,.$$

La demostración del teorema siguiente se omite por ser una prueba que, aunque no es corta, sigue una metodología muy estandar en matemáticas.

Teorema 3. *1) Sean E y F espacios normados. Todo elemento z del espacio $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$ puede ser representado como suma de una serie convergente en $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$ del tipo*

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad n_i \in \mathbb{N},\ \ x_{ij} \in E,\ \ y_{ij} \in F \ \ j = 1, \ldots, n_i, \forall i \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \infty\,.$$

Además, denotando por $g_\lambda(z)$ la norma de $z \in E\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$, se verifica

$$g_\lambda(z) = \operatorname{ínf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) \right\}$$

tomando el ínfimo sobre todas las posibles representaciones de z como serie infinita y con la condición dada.

2) Sean E y F espacios normados. Toda serie

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}, \quad x_{ij} \in E,\ y_{ij} \in F\ \forall i,j \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \infty$$

es convergente en $E\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$.

4 Operadores $\boldsymbol{\lambda_{q,\mathcal{J}}}$–nucleares

En esta sección, el objetivo central es mostrar la caracterización del ideal minimal de operadores asociado a la tensornorma g_λ, a través de factorizaciones en las que interviene el espacio de interpolación real $\lambda_{q,\mathcal{J}}$. Los elementos de cada componente del ideal se llamarán operadores $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nucleares.

En general, de acuerdo con [1], un método para construir el ideal minimal de operadores asociado a una norma tensorial finitamente generada α en la clase de espacios de Banach es el siguiente: dados un par de espacios de Banach E, F existe una aplicación inyectiva y continua con norma menor o igual que uno $\Phi_\alpha : E' \otimes_\alpha F \to \mathcal{L}(E,F)$ de manera que para todo $z \in E' \otimes_\alpha F$ con representación $z = \sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes y_i$, se verifica que $\Phi_\alpha(z) = T_z$ tal que $T_z(x) = \sum_{i=1}^{n} < x'_i, x > y_i$.

La aplicación Φ_α se puede extender con continuidad a la complección del α–producto tensorial. Se denota por $\hat{\Phi}_\alpha$ a la extensión de la aplicación. Los operadores de su conjunto imagen se dice que son α–nucleares y el conjunto formado por ellos se denota por $\mathfrak{U}(E,F)$. En tal caso el ideal minimal resulta ser el ideal que tiene como componentes los $\mathfrak{U}(E,F)$. Se resalta que a pesar de que Φ_α es inyectiva, $\hat{\Phi}_\alpha$ no tiene porque serlo.

Este estudio se puntualizará en el caso en que $\alpha = g_\lambda$, de esta manera se considera la aplicación $\Phi_{g_\lambda} : E' \otimes_{g_\lambda} F \to \mathcal{L}(E,F)$.

Dados E, F espacios de Banach, la forma de los elementos del espacio complección permite definir una aplicación canónica no necesariamente inyectiva

$\Phi_{E,F}: E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F \to \mathcal{L}(E,F)$ tal que

$$\forall z = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} x'_{ij}\otimes y_{ij} \in E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F\,, \tag{12}$$

$$\text{con} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \infty\,, \tag{13}$$

para todo $x\in E$, $\quad \Phi_{E,F}(z)(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left\langle x'_{ij}, x\right\rangle y_{ij}$.

En efecto, por la dualidad entre $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ y $\lambda'_{q',\mathcal{K}}$, dado $\epsilon > 0$, si se toma $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, por la convergencia de (13), se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=n}^{n+h}\sum_{j=1}^{n_i}\left\langle x'_{ij},x\right\rangle y_{ij}\right\| &\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=n}^{n+h}\sum_{j=1}^{n_i}\left|\left\langle x'_{ij},x\right\rangle\right|\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right| \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=n}^{n+h}\|x\|\left\langle\left(\left\|x'_{ij}\right\|\right),\left(\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right)\right\rangle \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\|x\|\sum_{i=n}^{n+h}\left\|\left(\left\|x'_{ij}\right\|\right)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\left\|\left(\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right)\right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\
&\leq \|x\|\sum_{i=n}^{n+h}\pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) \leq \epsilon\,\|x\|\,.
\end{aligned}$$

Luego, la sucesión de sumas parciales de la serie correspondiente a $\Phi_{E,F}(z)(x)$ es de Cauchy en F y entonces convergente en F. Además, si se toman dos representaciones para z de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} x'_{ij}\otimes y_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\overline{x}'_{ij}\otimes\overline{y}_{ij}$$

para todo $x\in E$, $y'\in F'$, se tiene que $x\otimes y' \in \left(E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F\right)' = (E'\otimes_{g_\lambda}F)'$ (por ser g_λ una norma tensorial) y entonces

$$\left\langle z, x\otimes y'\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\left\langle x'_{ij},x\right\rangle\left\langle y_{ij},y'\right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\left\langle\overline{x}'_{ij},x\right\rangle\left\langle\overline{y}_{ij},y'\right\rangle\,,$$

y dado que y' es arbitrario en F', se obtiene

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\left\langle x'_{ij},x\right\rangle y_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_i}\left\langle \overline{x}'_{ij},x\right\rangle \overline{y}_{ij}$$

luego $\Phi_{E,F}$ está bien definida.

Por otra parte, dado $\epsilon>0$ existe una representación de z en la forma

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}x'_{ij}\otimes y_{ij}$$

tal que por definición de $g_{\lambda}(z)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}))\leq g_{\lambda}(z)+\epsilon\,. \tag{14}$$

En consecuencia, por (12) y (14)

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{E,F}(z)\| &= \sup_{\|x\|_E\leq 1}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\left\langle x'_{ij},x\right\rangle y_{ij}\right\|\right\}\\
&\leq \sup_{\|x\|_E\leq 1}\left\{\sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\left|\left\langle x'_{ij},x\right\rangle\right|\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right\}\\
&\leq \sup_{\|x\|_E\leq 1}\left\{\sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}\|x\|\left\langle\left(\left\|x'_{ij}\right\|\right),\left(\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right)\right\rangle\right\}\\
&\leq \sup_{\|x\|_E\leq 1}\|x\|\left\{\sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left(\left\|x'_{ij}\right\|\right)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\left\|\left(\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right)\right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}\right\}\\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left(\left\|x'_{ij}\right\|\right)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\left\|\left(\left|\left\langle y_{ij},y'\right\rangle\right|\right)\right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}))\leq g_{\lambda}(z)+\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Luego, dado que $\epsilon>0$ es arbitrario, tomando ínfimo sobre todas las representaciones de z

$$\|\Phi_{E,F}(z)\|\leq g_{\lambda}(z)$$

y de esto se sigue que $\|\Phi_{E,F}\| \leq 1$. Por tanto, las aplicaciones $\Phi_{E,F}(z) : E \to F$ y $\Phi_{E,F} : E'\widehat{\otimes}F \to \mathcal{L}(E,F)$ son continuas.

Definición 3. *Sean E y F espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ se llama $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nuclear si $T = \Phi_{E,F}(z)$ para algún $z \in E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$.*

Es fácil ver que el conjunto de todos los operadores $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nucleares de E en F, denotado por $\mathfrak{N}_{g_\lambda}(E,F)$, es un ideal de operadores normado cuando está provisto de la norma

$$\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) := \text{ínf}\left\{g_\lambda(z)\,/T = \Phi_{E,F}(z),\; z \in E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F\right\}.$$

Es claro que $\mathbf{N}_{g_\lambda}$ es la norma del espacio cociente $E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F/Ker(\Phi_{E,F})$. Como $E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F$ es un espacio de Banach, también lo es $\mathfrak{N}_{g_\lambda}(E,F)$.

El espacio de Bochner $\ell^1[\eta]$, con η el espacio de interpolación definido mediante el método $\mathcal{J}$, y que se ha denotado antes como $\lambda_{q,\mathcal{J}}$, permitirá la caracterización de los operadores $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nucleares en términos de factorizaciones.

Teorema 4. *Sean E y F espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nuclear si y sólo si factoriza en la forma*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & F \\ \ell^\infty[\ell^\infty] \arrow[r, "D"] & \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}] \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

Diagrama único

donde A y B son continuas y D es un operador diagonal positivo continuo. Además $\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) := \text{ínf}\{\|A\|\,\|D\|\,\|B\|\}$ tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles del tipo indicado.

Demostración. $[\Longrightarrow]$ Si $T : E \to F$ es un operador $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nuclear, se verá que T factoriza en la forma $T = BDA$ con A, B y D como antes. Para cada $\epsilon > 0$ existe una representación

$$z = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} x'_{ij} \otimes y_{ij} \in E'\widehat{\otimes}_{g_\lambda}F\,, \tag{15}$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \mathbf{N}_{g_\lambda}(T) + \epsilon$$

y $T(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \left\langle x'_{ij}, \cdot \right\rangle y_{ij}$. Nótese además que si $\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$, sería $y_{ij} = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n_i$ (recuérdese que $\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}$ es una norma en $\lambda'_{q',\mathcal{K}}(F)$) y el sumando i-ésimo de (15) definiría la aplicación nula de E en F y por tanto se suprimiría dicho sumando i-ésimo en (15). Análogamente se puede suponer que $y_{ij} \neq 0$ para todo i, j. Así pues, escribiendo para cada $i \in \mathbb{N}$, $C_i = \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}\left((y_{ij})_{j=1}^{n_i}\right)$ se tiene

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} x'_{ij} \otimes y_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} C_i x'_{ij} \otimes \frac{y_{ij}}{C_i},$$

y llamando $\widetilde{x}'_{ij} = C_i x'_{ij}$ y $\widetilde{y}_{ij} = \frac{y_{ij}}{C_i}$, se obtiene

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((\widetilde{x}'_{ij})) = \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}(C_i(x'_{ij})) = \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}))$$

y

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\widetilde{y}_{ij})) = \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}\left(\left(\frac{y_{ij}}{C_i}\right)\right) = 1,$$

luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((\widetilde{x}'_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \mathbf{N}_{g_\lambda}(T) + \epsilon \tag{16}$$

y

$$T(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \left\langle \widetilde{x}'_{ij}, \cdot \right\rangle \widetilde{y}_{ij}.$$

Se define $A : E \to \ell^\infty[\ell^\infty]$, por

$$\forall x \in E, \quad A(x) = \left(\left(\frac{\left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x \right\rangle}{\left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\|} \right)_{j=1}^{n_i} \right)_{i=1}^{\infty}.$$

Claramente A es lineal y continua ya que

$$\begin{aligned}
\|A(x)\| &= \left\| \left(\left(\frac{\left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x \right\rangle}{\left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\|} \right)_{j=1}^{n_i} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell^\infty[\ell^\infty]} \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \frac{\left| \left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x \right\rangle \right|}{\left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\|},\ j = 1, 2, \ldots n_i \right\} \right) \leq \|x\|
\end{aligned}$$

y por tanto, $\|A\,(x)\| \leq \|x\|$, luego

$$\|A\| \leq 1\,. \tag{17}$$

Sea $D : \ell^\infty[\ell^\infty] \to \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$, la aplicación definida por

$$\forall((\eta_{ij})) \in \ell^\infty[\ell^\infty], \quad D(((\eta_{ij}))) = \left(\left(\eta_{ij} \left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\| \right)_{j=1}^{n_i} \right)_{i=1}^{\infty}.$$

D está bien definida, es continua y lineal. En efecto, por las propiedades de retículos y (16)

$$\begin{aligned}
\|D(((\eta_{ij})))\| &= \left\| \left(\left(\eta_{ij} \left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\| \right)_{j=1}^{n_i} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \left(\eta_{ij} \left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\| \right)_{j=1}^{n_i} \right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \{ |\eta_{ij}| \,/ j = 1, 2, \ldots n_i \} \left\| \left(\left(\left\| \widetilde{x}'_{ij} \right\| \right)_{j=1}^{n_i} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|((\eta_{ij}))\|_{\ell^\infty[\ell^\infty]} \, \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((\widetilde{x}'_{ij})_{j=1}^{n_i}) \\
&\leq \|((\eta_{ij}))\|_{\ell^\infty[\ell^\infty]} \, (\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) + \epsilon).
\end{aligned}$$

Con lo que D es un operador diagonal y

$$\|D\| \leq \mathbf{N}_{g_\lambda}(T) + \epsilon\,. \tag{18}$$

Por último, se define $B : \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}] \to F$ por

$$\forall((\beta_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}] \quad B(((\beta_{ij}))) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} \widetilde{y}_{ij}\,. \tag{19}$$

La aplicación B es lineal y continua, pues si $y' \in F'$ con $\|y'\|_{F'} \leq 1$, como $\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\widetilde{y}_{ij})) = 1$ para todo i y $((\beta_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ y $h \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=n+1}^{n+h} \|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \leq \varepsilon\,.$$

Y por tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=n+1}^{n+h}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\widetilde{y}_{ij}\right\| &= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\left|\left\langle\sum_{i=n+1}^{n+h}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\left|\sum_{i=n+1}^{n+h}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\left\langle\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle\right| \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=n+1}^{n+h}\left|\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\left\langle\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=n+1}^{n+h}\left|\left\langle(\beta_{ij}), (\left\langle\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle)\right\rangle\right| \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1}\sum_{i=n+1}^{n+h}\|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\left\|\left(\left|\left\langle\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle\right|\right)\right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{n+h}\|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\,\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\widetilde{y}_{ij})_{j=1}^{n_i}) \\
&= \sum_{i=n+1}^{n+h}\|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \leq \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Luego, la serie (19) tiene una sucesión de sumas parciales que es Cauchy y por tanto converge. Entonces de modo análogo

$$\begin{aligned}
\|B(\beta_{ij})\| &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\widetilde{y}_{ij}\right\| = \sup_{\|y'\|\leq 1}\left|\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{ij}\widetilde{y}_{ij}, y'\right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\,\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((\widetilde{y}_{ij}))
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|(\beta_{ij})\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \|((\beta_{ij}))\|_{\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]}\,.$$

En consecuencia, B está bien definida, es lineal y continua con

$$\|B\| \leq 1\,. \tag{20}$$

Finalmente por (16) se tiene

$$\begin{aligned} BDA\,(x) &= B\left(D\left(\left(\left(\frac{\left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x\right\rangle}{\left\|\widetilde{x}'_{ij}\right\|}\right)_{j=1}^{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= B\left(\left(\left(\left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x\right\rangle\right)_{j=1}^{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} \left\langle \widetilde{x}'_{ij}, x\right\rangle \widetilde{y}_{ij} = T\,(x)\,. \end{aligned}$$

Además, por (18), (20) y (17)

$$\|A\|\,\|D\|\,\|B\| \leq \mathbf{N}_{g_\lambda}(T) + \epsilon\,.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de T como las del diagrama único

$$\text{ínf}\,\{\|A\|\,\|D\|\,\|B\|\} \leq \mathbf{N}_{g_\lambda}(T)\,. \tag{21}$$

[$\Longleftarrow$] Recíprocamente, sean T un operador que factoriza como indica el diagrama único y $\alpha = \text{ínf}\,\|A\|\,\|D\|\,\|B\|$ para todas las factorizaciones posibles. Se verá que T es $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nuclear. Dado $\epsilon > 0$, sean A, B y D tales que $T = BDA$ y

$$\|A\|\,\|D\|\,\|B\| \leq \alpha + \epsilon\,.$$

Sean $\mathbf{e}_j := (0, \ldots, 1, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ y $E_{ij} = (0, 0, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots) \in (\ell^\infty[\ell^\infty])'$, donde $\mathbf{e}_j$ está colocado en el eje i-ésimo. Entonces, como A' está definida de $(\ell^\infty[\ell^\infty])'$ en E', sea $A'\,(E_{ij}) = u'_{ij} \in E'$. La familia $\left\{u'_{ij}\ /i, j \in \mathbb{N}\right\}$ es acotada en E' ya que

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \left\|u'_{ij}\right\| = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \left\|A'\,(E_{ij})\right\| \leq \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \left\|A'\right\| \|E_{ij}\| = \left\|A'\right\| = \|A\|\,. \tag{22}$$

Ahora bien, si $x \in E$ y $A(x) = ((\eta_{ij})) \in \ell^\infty[\ell^\infty]$ como $E_{ij} \in (\ell^\infty[\ell^\infty])'$, entonces

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad \eta_{ij} = \langle A(x), E_{ij} \rangle = \left\langle x, A'(E_{ij}) \right\rangle = \left\langle x, u'_{ij} \right\rangle,$$

es decir,

$$\forall x \in E, \; A(x) = \left(\left\langle u'_{ij}, x \right\rangle\right) \in \ell^\infty[\ell^\infty]. \tag{23}$$

De otro lado, como $D : \ell^\infty[\ell^\infty] \to \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$ es diagonal, existe $((b_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$ tal que $D(((\beta_{ij}))) = ((b_{ij}\beta_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$. La sucesión

$$((1, 1, \ldots,), (1, 1, \ldots,), \ldots,) \in \ell^\infty[\ell^\infty]$$

y

$$D(((1, 1, \ldots,), (1, 1, \ldots,), \ldots,)) = ((b_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$$

con

$$\|((b_{ij}))\|_{\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]} \leq \|D\|. \tag{24}$$

Finalmente, para cada i, $j \in \mathbb{N}$ se denota por y_{ij} la imagen de E_{ij} bajo B, es decir $B(E_{ij}) = y_{ij}$. Luego, si $((\alpha_{ij})) \in \ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$, entonces, por la propiedad de convergencia seccional en $\lambda_{q,\mathcal{J}}$

$$((\alpha_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} E_{ij}$$

y dado que B es lineal y continua

$$B(((\alpha_{ij}))) = B\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} B(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_{ij}.$$

En conclusión, por (23)

$$\begin{aligned}
T(x) &= BDA(x) = BD\left(\left(\left(\left\langle u'_{ij}, x \right\rangle\right)\right)\right) = B\left(\left(\left(b_{ij}\left\langle u'_{ij}, x \right\rangle\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\left\langle u'_{ij}, x \right\rangle y_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle b_{ij} u'_{ij}, x \right\rangle y_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x'_{ij}, x \right\rangle y_{ij}
\end{aligned}$$

donde se ha definido $x'_{ij} = b_{ij}u'_{ij}$ para cada i, $j \in \mathbb{N}$.

Se tiene entonces $T(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle x'_{ij}, \cdot\right\rangle y_{ij}$. Por el apartado **(2)** del teorema 3, sólo resta ver que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) < \infty$.

Teniendo presente que para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) &= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1} \left\|\left(\left|\left\langle y_{ij}, y'\right\rangle\right|\right)\right\|_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}} \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1} \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left\langle y_{ij}, y'\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1} \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left\langle B(E_{ij}), y'\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'}\leq 1} \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \left|\left\langle B\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j E_{ij}\right), y'\right\rangle\right| \\
&= \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \left\|B\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j E_{ij}\right)\right\| \\
&\leq \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \|B\| \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j E_{ij}\right\|_{\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]} \\
&= \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \|B\| \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\
&= \sup_{\|(\beta_j)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}\leq 1} \|B\| \left\|(\beta_j)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} = \|B\|.
\end{aligned}$$

Por (22), (24) y las propiedades reticulares de $\lambda_{q,\mathcal{J}}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{\lambda_{q,\mathcal{J}}}((x'_{ij}))\varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\|\left(\left\|b_{ij}u'_{ij}\right\|\right)\right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \varepsilon_{\lambda'_{q',\mathcal{K}}}((y_{ij}))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|B\| \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \left(|b_{ij}| \, \|u'_{ij}\| \right) \right\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\
&\leq \|A\| \, \|B\| \sum_{i=1}^{\infty} \|(|b_{ij}|)\|_{\lambda_{q,\mathcal{J}}} \\
&= \|A\| \, \|B\| \, \|((b_{ij}))\|_{\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]} \\
&\leq \|A\| \, \|B\| \, \|D\| \leq \alpha + \epsilon \,.
\end{aligned}
$$

Entonces, por el teorema 3, T es $\lambda_{q,\mathcal{J}}$–nuclear y $\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) \leq \alpha + \epsilon$, y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario $\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) \leq \alpha$. Luego, teniendo presente (21), se sigue que

$$\mathbf{N}_{g_\lambda}(T) = \text{ínf} \, \|A\| \, \|B\| \, \|D\|$$

para todas las factorizaciones de T indicadas. ■

5 Conclusiones

1. Se logra definir una tensornorma g_λ a partir de espacios de interpolación entre espacios ℓ^p.
2. El ideal minimal asociado a la tensornorma en el sentido de [1] se caracteriza mediante factorizaciones que involucran a los espacios de Bochner $\ell^1[\lambda_{q,\mathcal{J}}]$ y $\ell^\infty[\ell^\infty]$.

Referencias

[1] Andreas Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, ISBN 0444890912. North Holland, 1992. Referenciado en 63, 64, 65, 66, 73, 78, 88

[2] U. Matter. *Absolutely continuous operators and super–reflexibility*. Mathematische Nachrichten, ISSN 0025–584X, 130, 193–216 (1987). Referenciado en 64

[3] U. Matter. *Factoring through interpolation spaces and super–reflexive Banach spaces*. Roumaine Math. Pures Appl., ISSN 0035–3965, 34, 147–156 (1989). Referenciado en 64

[4] Gilles Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, ISBN 0–8218–0710–2. AMS, Conference Board of the Math. Sciences. Regional Conference Series in Math. 60. Providence, Rhode Island, 1987. Referenciado en 64

[5] J. A. López Molina and E. A. Sánchez Pérez. *On operator ideals related to* $(p;\sigma)$*–absolutely continuous operators*. Studia Mathematica, ISSN 0039–3223, **138**(1), 25–40 (2000). Referenciado en 64

[6] G. Arango, J. A. López Molina and M. J. Rivera. *Characterization of* $g\infty$*,* σ*–integral operators*. Mathematische Nachrichten, ISSN 0025–584X, 9, **278**(9), 995–1014 (2005). Referenciado en 64

[7] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces, an introduction*, ISBN 3540078754. Springer Verlag, Berlin, New York, 1976. Referenciado en 67, 69, 71, 73

[8] Ju A. Brudyi and N. Ja Krugljak. *Interpolation Functors and Interpolation spaces*, ISBN 0444880011. **1** North Holland, Amsterdam, 1991. Referenciado en 69

[9] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces I and II*, ISBN 3540606289. Springer Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, 1977 y 1979. Referenciado en 69

[10] Helmut H. Schaeffer. *Banach lattices and positive operators*, ISBN–10 3540069364. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, 1974. Referenciado en 69

[11] Peter Meyer–Nieberg. *Banach Lattices*, ISBN 3540542019. Springer–Verlag, Berlin and Heildelberg, New York, 1991. Referenciado en 69

[12] H. E. Lacey. *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, ISBN 9780387065625. Springer–Verlag New York, 1974. Referenciado en 69

[13] Paul Krée. *Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés ni complets. Applications*. Annales de L'Institut Fourier, ISSN (électronique) 1777–5310, **17**(2), 137–174 (1967). Referenciado en 73