METODOLOGÍAS ALTERNATIVAS PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS SOBRE TRM

Luisa Fernanda Ramírez Posada
Cecilia Maya Ochoa

Esta versión: Julio 31, 2009

RESUMEN

En este estudio se exploran métodos diferentes al tradicional binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979) para la valoración de opciones americanas, con el fin de identificar un método adecuado para la estimación del valor de este tipo de opciones cuando el activo subyacente es la tasa de cambio del dólar americano – peso colombiano denominada Tasa Representativa del Mercado -TRM. Se valida el buen ajuste y la versatilidad del método numérico de simulación de Monte Carlo, características que lo convierten en una metodología alternativa adecuada para la valoración de estos derivados. Adicionalmente, este método permite trabajar con el proceso estocástico real que describe el comportamiento del activo subyacente sin tener que hacer suposiciones sobre la dinámica del mismo, por ejemplo lognormalidad. De esta manera se logra obtener un precio más acorde con la realidad del activo financiero en aquellos casos en que se permite el ejercicio anticipado.

Palabras clave: Valoración de opciones, Opciones americanas, Método Monte Carlo, Derivados de tasa de cambio, GARCH Integrado.

ABSTRACT

This study explores some methods different from the traditional binomial (Cox, Ross, and Rubinstein, 1979) for American Options valuation aiming to identifying an appropriate method when the underlying asset is the exchange rate of the US Dollar to the Colombian Peso known as TRM (Representative Exchange Rate). We confirm the good performance and flexibility of the Monte Carlo method which translates into an adequate alternative for valuing these derivatives. Additionally, this method allows us to use the actual stochastic process of the underlying asset avoiding assumptions on its dynamics, e.g. lognormality. By doing this, we obtain a better estimation for options when early exercise is allowed which is in agreement with the true behavior of the asset.

Keywords: Option Valuation, American Options, Monte Carlo Method, Exchange Rate Derivatives, Integrated GARCH.

Agradecemos la participación de Tomás Olarte Hernández como auxiliar de investigación en este proyecto.

INTRODUCCIÓN

La valoración y la determinación de una estrategia óptima de ejercicio anticipado de las opciones americanas, sigue siendo uno de los problemas más difíciles de la teoría de valoración de opciones. Dada la evolución que durante los últimos años han tenido los instrumentos derivados en los mercados financieros internacionales, el inicio del mercado de derivados estandarizados en Colombia el pasado 1 de septiembre de 2008 y el crecimiento que estos instrumentos han presentado en el mercado sobre el mostrador (*Over the Counter - OTC*), cada vez cobra mayor importancia el desarrollo de metodologías de valoración para este tipo de instrumentos financieros.

Una opción es un derivado que le da a su titular el derecho a comprar -opción call- o a vender -opción put-, cierta cantidad de un activo específico, al precio de ejercicio determinado, en la fecha de expiración si es europea o en cualquier momento durante la vida de la opción si es americana. Debido a su característica de no linealidad derivada del hecho de que representan un derecho mas no una obligación, las opciones se han convertido en instrumentos derivados con múltiples usos y aplicaciones, adquiriendo cada vez más importancia en el desarrollo de los mercados financieros por la posibilidad que ofrecen de desarrollar productos estructurados, estrategias de especulación y ser instrumentos útiles para la cobertura de riesgos.

En el caso de los derivados estandarizados del mercado colombiano, el proyecto inicial de la BVC (Bolsa de Valores de Colombia) es el desarrollo de opciones europeas sobre diferentes activos, pero como este tipo de opciones sólo puede ejercerse en su fecha de expiración, en el futuro será necesario el desarrollo del mercado estandarizado de opciones americanas, instrumentos que actualmente se negocian en el mercado *OTC* colombiano. Dado lo anterior, se convierte en un reto importante el desarrollo de metodologías de valoración de opciones americanas, aplicables en el mercado colombiano y alternativas a la tradicional fórmula de valoración propuesta por Cox, Ross y Rubinstein en 1979.

Este trabajo busca explorar metodologías alternativas al tradicional método binomial para la valoración de opciones americanas *ITM* (*In the Money*), *OTM* (*Out of the Money*) y *ATM* (*At the Money*), a diferentes plazos sobre la TRM (Tasa de Cambio Representativa del Mercado peso colombiano-dólar americano). Se evalúan algunas soluciones analíticas y otras basadas en métodos numéricos, en particular el de simulación de Monte Carlo, haciendo énfasis en este último por las ventajas que presenta ya que es simple y flexible y además permite tener en cuenta las propiedades estocásticas del activo subyacente sin restringir sus características o hacer suposiciones sobre el comportamiento del mismo.

Este artículo se desarrolla de la siguiente manera: en la primera sección se presentan los principales métodos de valoración de opciones americanas que han sido propuestos en la literatura, en la segunda sección se aplica una selección de los métodos más comunes que asumen lognormalidad para la valoración de opciones americanas sobre la TRM, en la tercera se valoran estas opciones en el caso de volatilidad heterocedástica y finalmente se presentan las conclusiones del estudio.

1. MÉTODOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS

En 1973 la teoría de valoración de opciones sufrió una gran revolución con Fisher Black y Myron Scholes, quienes presentaron el primer modelo de valoración de estos instrumentos bajo el principio de no arbitraje. El modelo asume que el precio del activo subyacente sigue una distribución lognormal, que éste no genera pagos de dividendos ni ningún otro tipo de rendimiento durante la vigencia de la opción y es aplicable sólo a la valoración de opciones europeas. Posteriormente en 1983, Garman y Kohlhagen extienden el modelo de Black-Scholes a opciones europeas sobre tasa de cambio, considerando que para divisas el precio forward depende del diferencial positivo o negativo existente entre las tasas de interés doméstica y foránea, teniendo como supuesto adicional que el precio al contado o *spot* de dicho subyacente está gobernado por un movimiento geométrico Browniano. De acuerdo con este modelo, el valor de una opción call es:

$$C(S,T) = e^{-r_f T} SN(x + \sigma\sqrt{t}) - e^{r_d T} KN(x) \tag{1}$$

Donde:

$$x \equiv \frac{Ln(S/K) + \left(r_d - r_f - (\sigma^2/2)\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S: precio *spot* de la divisa (unidades de moneda doméstica por unidad de moneda extranjera)
K: precio de ejercicio de la opción
T: tiempo que le falta a la opción para la expiración
C(S,T): precio de la opción call europea
r_d*:* tasa de interés libre de riesgo doméstica
r_f*:* tasa de interés libre de riesgo foránea
σ: volatilidad de los retornos logarítmicos de la divisa
N(.): función de distribución normal acumulada

Los métodos anteriormente mencionados sólo son aplicables a la valoración de opciones europeas. Para valorar opciones americanas es necesario resolver el problema de ejercicio anticipado y para lograrlo se han propuesto diferentes soluciones. La primera aproximación a este problema fue desarrollada en 1979 por Cox, Ross y Rubinstein -CRR- con el modelo binomial. Este método asume que el precio del activo subyacente sigue un proceso binomial en períodos discretos de tiempo, luego la tasa de crecimiento del activo durante cada período puede tomar dos posibles valores: *u-1* con probabilidad *p* o *d-1* con probabilidad *1-p,* siendo *d* y *u* calculadas a partir de la volatilidad del activo subyacente. La tasa de interés libre de riesgo *r* se asume constante y se supone que los individuos pueden invertir y pedir dinero prestado a esa tasa. Asimismo no se tienen en cuenta impuestos, costos de transacción y requerimientos de cuentas de margen y se supone que todos los individuos pueden vender en corto cualquier cantidad de activo y hacer pleno uso de los recursos obtenidos por este medio. Adicionalmente requiere que si *r* es la tasa libre de riesgo en un período, debe cumplirse que $u > r > d$, porque en caso contrario se presentan oportunidades de arbitraje.

En cada período el titular de la opción debe elegir entre ejercerla o no, dependiendo de cuál de las alternativas le genera el mayor ingreso. Por ejemplo, al final del primer período de tiempo, una estrategia racional de ejercicio para una opción call implica que si el precio del activo subyacente aumenta el ingreso es C_u=max($0, uS - K$) con probabilidad *p* y si disminuye, el ingreso es C_d= max($0, dS - K$) con probabilidad $1 - p$.

Las principales características de este método tradicional de valoración de opciones americanas son: i) el precio de la opción depende únicamente de precio *spot* del activo subyacente *S,* de *u, d* y *r;* como la probabilidad *p* no aparece en la fórmula de valoración de la opción, así los inversionistas tengan diferentes expectativas sobre las probabilidades de los movimientos hacia arriba y hacia abajo del precio, de todas maneras están de acuerdo con la relación del precio de la opción con *S, d, u* y *r*. ii) El valor de la opción no depende de la aversión al riesgo de los inversionistas; el único supuesto que se hace sobre el comportamiento de los mismos es que prefieren más a menos fortuna y por esto tienen incentivos para aprovechar las oportunidades de arbitraje. iii) La única variable aleatoria de la que depende el precio de la opción es el precio del activo subyacente y no es función de los precios de otros activos o portafolios ni del portafolio de mercado que contiene todos los activos de la economía. Las características de los otros activos pueden influenciar indirectamente el precio de la opción pero a través del efecto en las variables determinantes del mismo, no individualmente.

Aplicando el principio de no arbitraje a un portafolio libre de riesgo que contiene una opción y delta unidades de subyacente, es posible calcular *p, 1-p* y el valor de la opción:

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \quad y \quad 1-p \equiv \frac{u-r}{u-d} \tag{2}$$

$$C = \frac{\left(pC_u + (1-p)C_d\right)}{r} \tag{3}$$

Como p siempre es mayor que cero y menor que uno, tiene las propiedades de una probabilidad y al ser derivada bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, se le conoce como probabilidad sintética de riesgo neutral con respecto al riesgo. Con base en esta probabilidad, el valor esperado del precio del activo subyacente es su precio *spot* creciendo a la tasa libre de riesgo:

$$E(S_T) = p(uS) + (1-p)(dS) = rS \tag{4}$$

De hecho, el valor de la opción puede ser interpretado como el valor presente del ingreso esperado de la misma, descontado a la tasa libre de riesgo, pero esto no implica que en equilibrio el retorno esperado de la opción sea la tasa de interés libre de riesgo.

El modelo binomial propone estimar el valor de la opción construyendo árboles binomiales que se resuelven usando una técnica de inducción hacia atrás. En cada uno de los períodos de tiempo en los cuales se divide el período de vida de la opción, ésta se valora exactamente igual. Se parte de la fecha de expiración y se hace un proceso de devolución en el tiempo hasta llegar al momento inicial en el cual se está haciendo la valoración. Por tanto, al tener más de un período de tiempo discreto, el valor del derivado depende del número de períodos en los que se divide el tiempo de vigencia de la opción n y de los parámetros *K, S, u, d y r* anteriormente definidos. En el caso de una opción call europea su valor está dado por la siguiente expresión:

$$C = \frac{\left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max\left[0, u^j d^{n-j} S - K\right] \right]}{r^n} \tag{5}$$

Siendo importante anotar que cuando $n \rightarrow \infty$ el modelo binomial aplicado a una opción europea converge al valor obtenido por el modelo Black-Scholes que asume que el precio del activo subyacente sigue una distribución lognormal.

En el caso de las opciones americanas, para hallar una estrategia de ejercicio anticipado es necesario valorar la opción en cada uno de los nodos que definen los períodos en los que se divide el tiempo de vida de la misma. De hecho, con base en este modelo, la valoración debe hacerse exclusivamente con base en consideraciones de arbitraje y de esta manera se logra solucionar el problema del ejercicio anticipado; sin embargo, para implementarlo es necesario tener presente su mayor desventaja: el requisito de un gran número de nodos para lograr una buena aproximación al verdadero valor de la opción.

En 1986 Boyle propone el modelo trinomial para la valoración de opciones, similar al binomial pero caracterizado por una convergencia más rápida ya que usa tres ramas en cada nodo en lugar de dos, al incluir la probabilidad p_m de que el precio del activo subyacente, además de aumentar o disminuir, pueda permanecer igual de un período de tiempo a otro. El cálculo de estas probabilidades se presenta a continuación:

$$p_u = \left(\frac{e^{(r-D)(T-t)/2} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/2}}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/2}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/2}}} \right)^2 \tag{6}$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/2}} - e^{(r-D)(T-t)/2}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/2}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/2}}} \right)^2 \tag{7}$$

$$p_m = 1 - p_d - p_u \tag{8}$$

Otro grupo de modelos propone una aproximación analítica para la valoración de opciones americanas, permitiendo obtener una fórmula aproximada, mas no exacta, que soluciona el problema de ejercicio anticipado que exhiben estos derivados. Entre estos métodos sobresalen los de aproximación cuadrática y los de fronteras planas de ejercicio anticipado.

Geske y Johnson (1984) proponen un modelo de aproximación cuadrática donde precisan que la valoración de opciones put americanas se asemeja a una serie de opciones Bermuda, donde el valor de la opción americana se obtiene cuando el número de fechas de ejercicio de las opciones Bermuda tiende a infinito. Para ello utilizan la técnica de extrapolación de Richardson (1910) que se explica con detalle en el Apéndice A.

En 1986 MacMillian propone el método de aproximación cuadrática para opciones put americanas sobre acciones sin dividendos, estudio que fue retomado por Barone-Adesi y Whaley (1987) para aplicarlo a opciones americanas sobre *commodities* y cualquier activo con costo de tenencia constante. Estos métodos se basan en soluciones exactas a aproximaciones de las ecuaciones diferenciales parciales del valor de la opción, definido éste como la suma del valor de la opción europea y la prima por ejercicio anticipado.

Los principales supuestos de Barone-Adesi y Whaley (1987) son consistentes con los introducidos por Black-Scholes (1973) y Merton (1973) y se presentan a continuación:

i) La tasa de interés de corto plazo *r* y el costo de tenencia *b* del activo subyacente se asumen constantes y proporcionales. Para el caso de opciones sobre divisas retoman a Garman y Kohlhagen (1983) quienes definen el costo de tenencia de la divisa como la diferencia entre la tasa libre de riesgo doméstica y la tasa libre de riesgo foránea *r**:

$$b = r - r^* \tag{9}$$

En ausencia de oportunidades de arbitraje, el supuesto de un costo de tenencia constante y proporcional sugiere que:

$$F = Se^{bT} \tag{10}$$

Siendo:
F: precio futuro del activo subyacente
S: precio *spot*
T: tiempo de expiración del contrato futuro

ii) Los cambios en el precio del activo subyacente siguen una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\frac{dS}{S} = \alpha\ dt + \sigma\ dz \tag{11}$$

Donde:
α: tasa de crecimiento instantánea esperada del activo
σ: desviación estándar instantánea
z: proceso de Wiener

Luego los movimientos en el precio futuro son descritos por:

$$\frac{dF}{F} = (\alpha - b)dt + \sigma\ dz \tag{12}$$

Si se asume cobertura dinámica mediante un portafolio libre de riesgo que combine la opción y el subyacente, la ecuación diferencial parcial que gobierna el movimiento del valor *V* de la opción put o call en el tiempo es:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss} + bSV_s - rV + V_t = 0 \tag{13}$$

Cuando se aplican las condiciones límite de las opciones americanas a la ecuación anterior no es posible obtener soluciones analíticas y es necesario usar una aproximación cuadrática para obtener el valor de la opción. Ésta se explica a continuación para el caso de una call:

La prima de ejercicio anticipado se define como el diferencial entre el precio de la opción americana *C* y la opción europea *c*:

$$\varepsilon_c(S,T) = C(S,T) - c(S,T) \tag{14}$$

$$\varepsilon_C(S,T) = K(T)f(S,K) \tag{15}$$

Haciendo $K(T) = 1 - e^{-rT}$ y la sustitución correspondiente, se obtiene que la aproximación de la ecuación diferencial de la prima de ejercicio anticipado es:

$$S^2 f_{ss} + NSf_s - (M/K)f = 0 \tag{16}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con dos soluciones lineales independientes de la forma aS^q con solución general:

$$f(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2} \tag{17}$$

Donde:

$M = \dfrac{2r}{\sigma^2} \quad y \quad N = \dfrac{2b}{\sigma^2}$

Luego:

$$aS^q (q^2 + (N-1)q - M/K) = 0 \tag{18}$$

$$q_1 = \frac{\left[-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}\right]}{2} \tag{19}$$

$$q_2 = \frac{\left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}\right]}{2} \tag{20}$$

Siendo:

$\dfrac{M}{K} > 0 \quad q_1 < 0 \quad y \quad q_2 > 0$

Con q_1 y q_2 conocidos se determinan a_1 y a_2.

Si $q_1 < 0$ y $a_1 \neq 0 \Rightarrow f \rightarrow \infty$ cuando $S \rightarrow 0$, lo cual es inaceptable porque la prima por ejercicio anticipado de la opción call americana vale menos cuando el precio del subyacente cae a cero, motivo por el que se restringe $a_1 = 0$ y se obtiene el valor de la opción call americana:

$$C(S,T) = c(S,T) + Ka_2 S^{q_2} \tag{21}$$

Hallando el valor crítico del precio del subyacente *S** por iteración usando el método de Newton Raphson, en la ecuación:

$$S^* - X = c(S^*, T) + Ka_2 S^{*q_2} \tag{22}$$

$$S^* - X = c(S^*, T) + \frac{\left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(d_1(S^*)\right)\right\} S^*}{q_2} \tag{23}$$

$$a_2 = \frac{\left\{1 - e^{(b-r)T} N(d_1(S^*))\right\}}{Kq_2 S^{*q_2 - 1}} \tag{24}$$

Siendo:

$$d_1 = \frac{Ln(S/X) + (b + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

El valor de la opción call americana está dado por:

Si $S < S^*$ $\quad C(S,T) = c(S,T) + A_2 (S/S^*)^{q_2}$

$S \geq S^*$ $\quad C(S,T) = S - X$ (25)

Donde:

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2}\left\{1 - e^{(b-r)T} N(d_1(S^*))\right\}$$

Cuando $b \geq r$ la opción call nunca es ejercida anticipadamente y se aplica Black-Scholes:

$$c(S,T) = Se^{(b-r)T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \tag{26}$$

Para el caso de una opción put americana, la ecuación diferencial de la prima está dada por:

$$\varepsilon_p(S,T) = P(S,T) - p(S,T) \tag{27}$$

$$P(S,T) = p(S,T) + Ka_1 S^{q_1} \tag{28}$$

El valor crítico del subyacente S^{**} se halla al resolver:

$$X - S^{**} = p(S^*, T) - \frac{\left\{1 - e^{(b-r)T} N\left(-d_1(S^{**})\right)\right\} S^{**}}{q_1} \tag{29}$$

$$a_1 = -\frac{\left\{1 - e^{(b-r)T} N(-d_1(S^{**}))\right\}}{K q_1 S^{**q_1 - 1}} \tag{30}$$

Luego:

Si *S > S** $\quad P(S,T) = p(S,T) + A_1 (S / S^{**})^{q_1}$

*S ≤ S** $\quad P(S,T) = X - S$ (31)

Donde:

$$A_1 = -\frac{S^{**}}{q_1}\left\{1 - e^{(b-r)T} N(-d_1(S^{**}))\right\}$$

Posteriormente, Bjerksund y Stensland (2002) proponen una aproximación diferente basada en dos fronteras planas de ejercicio anticipado, con base en su trabajo de 1993 *"Closed –form Approximation of American Options"* en el que proponían una sola frontera plana de ejercicio anticipado para hallar el precio de opciones americanas. Este modelo se explica en detalle en el Apéndice B.

En 1991 Breen utiliza la aproximación desarrollada por Geske y Johnson (1984) para mejorar la convergencia del modelo binomial proponiendo un árbol binomial acelerado que genera resultados que se sitúan entre los obtenidos por CRR y la aproximación de Geske y Johnson (1984). Chang, Chung y Stapleton (2001) extienden el modelo de Breen usando repetidamente la extrapolación de Richardson (1910) buscando predecir el intervalo del verdadero valor de la opción; sin embargo, similar al modelo de Geske y Johnson, el del árbol binomial acelerado tiene problemas de convergencia y de exactitud en algunos casos.

En 1999 Ju y Zhong basados en la aproximación cuadrática de MacMillan (1986) y Barone-Adesi y Whaley (1987) buscan mejorar dicha técnica desarrollando un método tan eficiente como ésta pero más ajustado en el caso de opciones de larga duración, para las cuales los resultados de la aproximación cuadrática original no son precisos, dado que permite hacer una buena estimación para opciones cortas y largas, pero para los casos intermedios de opciones con vigencia entre uno y cinco años, la valoración obtenida no es ajustada. La nueva aproximación introduce mejores resultados en las opciones cortas y largas y reduce los errores en maduraciones intermedias, pero tiene la desventaja de no converger en todos los casos.

Recientemente Andrikopoulos (2006) retoma la aproximación cuadrática y define el modelo propuesto por Barone-Adesi y Whaley (1987) como exacto y eficiente computacionalmente, pero menciona que a medida que aumenta el tiempo de vigencia de la opción, éste genera resultados menos exactos comparados con los obtenidos con otros métodos numéricos, motivo por el cual introduce un factor adicional para capturar el efecto de decaimiento del tiempo en el valor de la opción en el caso de plazos largos, usando una condición límite adicional y modelando el valor del derivado como el producto de dos funciones, una del tiempo y otra del precio del activo subyacente. El autor compara los resultados obtenidos por su método con el de aproximación cuadrática y CRR con 2,000 pasos, tomando este último como el valor verdadero de la opción y valora opciones a tres y seis meses y a tres y cuatro años, concluyendo que todos los métodos producen resultados similares y muy cercanos al precio verdadero para opciones a tres y seis meses, pero encuentra una ventaja en su propuesta para las opciones de largo plazo, las cuales han sido un desafío de las aproximaciones analíticas.

En conclusión, algunos de los métodos analíticos anteriormente expuestos logran una buena aproximación al valor de la opción americana, especialmente el método de aproximación cuadrática de Barone-Adesi y Whaley (1987) con las mejoras que han sido propuestas posteriormente. Sin embargo, todos ellos parten del supuesto de que el precio del activo subyacente sigue un proceso estocástico lognormal, lo cual no corresponde con la realidad de muchos de los activos financieros. En este caso, el activo subyacente objeto de estudio, la tasa de cambio representativa del mercado -TRM-, no cumple dicho supuesto como se demuestra en la siguiente sección, por lo que se decide explorar el método de simulación de Monte Carlo que se caracteriza por ser flexible al permitir que el subyacente siga cualquier proceso estocástico. En particular, Broadie y Glasserman (1997) en *"Pricing American-Style Securities using Simulation"* proponen una versión del mismo para la valoración de opciones americanas que se explica a continuación:

El problema de valorar una opción americana, por ejemplo una call, consiste en encontrar en todos los tiempos $t \leq T$:

$$C = \max_{t} \hat{E}\left(e^{-rt}\left(S_t - K\right)^{+}\right) \tag{32}$$

Donde $\hat{E}$ es el valor esperado neutral con respecto al riesgo.

Para solucionar este problema, los autores se enfocan en una aproximación discreta del tiempo y restringen las oportunidades de ejercicio en períodos de tiempo finitos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_d = T$. El procedimiento consiste en simular la trayectoria del precio del activo subyacente en cada período discreto de tiempo y posteriormente descontar el valor de la opción de cada una de las trayectorias simuladas, para finalmente promediar los resultados obtenidos en cada uno de los escenarios. El principal interrogante del problema consiste en descontar el valor de la opción correspondiente a cada trayectoria de precios, porque la estrategia óptima de ejercicio anticipado no es conocida y debe ser estimada vía simulación.

Con el objetivo de encontrar un intervalo de confianza válido para el precio de la opción se generan dos estimadores de su precio, uno sesgado hacia arriba y otro sesgado hacia abajo, pero los dos son asintóticamente insesgados y convergen al verdadero valor de la opción. Por medio de la combinación de ambos estimadores se obtiene un intervalo de confianza conservador y válido del precio de la opción. Estos estimadores están basados en árboles simulados parametrizados por *b,* número de ramas por nodo, donde los nodos son fijos en el tiempo y aparecen de acuerdo con el orden en el que fueron generados y no según el valor del nodo como en el caso de los árboles binomiales.

Los estimadores anteriormente mencionados están definidos por:

$$\Theta_t^{\alpha_t} = \max\left[h_t(S_t^{\alpha_t}), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} e^{-R_{t-1}^{\alpha_t j}} \Theta_{t+1}^{\alpha_t j} \right] \tag{33}$$

$$\theta_t^{\alpha_t} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \eta_t^{\alpha_t j} \quad \text{con} \quad \eta_t^{\alpha_t j} = \begin{cases} h_t(S_t^{\alpha_t}) \text{ si } h_t(S_t^{\alpha_t}) \geq \dfrac{1}{b-1}\displaystyle\sum_{i \neq j} e^{-R_{t+1}^{\alpha_t j}} \theta_{t+1}^{\alpha_t j} \\ e^{-R_{t+1}^{\alpha_t j}} \theta_{t+1}^{\alpha_t j} \qquad \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{34}$$

Donde Θ es el estimador sesgado hacia arriba, θ el estimador sesgado hacia abajo, S_t el precio del activo subyacente, e^{-R} el factor de descuento y $h_t(S)$ la retribución obtenida por ejercer la opción en el tiempo t.

Si C es el valor de la opción call americana con $d+1$ oportunidades de ejercicio en los tiempos t_i, $i=0,\ldots,d$, en la fecha de expiración el valor de la opción es conocido y en cada fecha anterior es definido como el máximo del valor obtenido de un ejercicio inmediato y el valor esperado de la opción en el período subsiguiente descontado. Finalmente, Θ es el estimador del valor de la opción en el nodo inicial sesgado hacia arriba, porque permite obtener un valor de la opción $E[\Theta] \geq C$, pero que converge a C cuando b se incrementa.

Para determinar el estimador sesgado hacia abajo, se separan las ramas de cada nodo en dos conjuntos; el primero es usado para decidir si se ejerce o no y el segundo para estimar el valor de continuar con la posición si es necesario. El estimador θ es sesgado hacia abajo porque $E[\theta] \leq C$.

El valor estimado del valor de la opción es determinado por un promedio simple de ambos estimadores:

$$0.5 \max\left\{ (S_0 - K)^+, \theta \right\} + 0.5\Theta \tag{35}$$

Y el intervalo de confianza está dado por:

$$[\max\left\{(S_0 - K)^+, \theta - z_{\alpha/2} desv(\theta)/\sqrt{n}\right\}, \Theta + z_{\alpha/2} desv(\Theta)/\sqrt{n}] \qquad (36)$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el cuantil *1- α/2* de la distribución normal estándar, S_0 el precio *spot* del activo subyacente, *K* el precio de ejercicio y *desv(.)* la desviación estándar del estimador.

Los autores proponen el método para valorar opciones americanas estándar de un solo activo que paga un dividendo continuo y cuyo precio es gobernado por un proceso geométrico Browniano, asumiendo que el precio del activo subyacente satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left[(r-\delta)\ dt + \sigma\ dz_t\right] \qquad (37)$$

Siendo:
z_t: un movimiento Browniano
r: tasa instantánea libre de riesgo
δ: la tasa instantánea de dividendo
σ>0: la volatilidad de los retornos del activo subyacente
$dt = t_i - t_{i-1}$ tomando *i* como el período de tiempo actual

Donde:
$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ es normalmente distribuido con media $\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt$ y varianza $\sigma^2 dt$

Dado S_{t-1}, S_t puede ser simulado usando:

$$S_t = S_{t-1} \times e^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\sqrt{dt}\ \varepsilon_t} \qquad (38)$$

Donde ε_t es una variable aleatoria normal estándar.

Para construir el árbol que permite hallar los estimadores con *b* número de ramas en cada nodo y *d* oportunidades de ejercicio, es necesario construir b^d precios, lo que implica un algoritmo exponencial de orden $n*b^d$ con *n* simulaciones, pero los autores recomiendan evitar el último ejercicio utilizando la fórmula de Black-Scholes, ya que desde t_{d-1} hasta t_d la opción es europea con plazo $\Delta t = t_d - t_{d-1}$ y de esta manera el orden del algoritmo se reduce a $n*b^{d-1}$. Una vez generado el árbol, es posible calcular el valor de la opción en cada nodo en la fecha de expiración; luego con un proceso de inducción hacia atrás en cada nodo se calcula el valor de la opción, el cual se compara con el resultado de un ejercicio inmediato hasta llegar de esta manera al nodo inicial en el tiempo *0*. Repitiendo el cálculo de los dos estimadores muchas veces, generando nuevos árboles vía simulación, se obtienen buenas aproximaciones a los valores de ambos estimadores como los respectivos promedios de todas las simulaciones. Posteriormente, se obtienen el error estándar y los intervalos de confianza de cada estimador que a su vez permiten obtener un intervalo de confianza conservador del precio de la opción, tomando el límite superior del intervalo de confianza del estimador sesgado hacia arriba y el límite inferior del intervalo de confianza del estimador sesgado hacia abajo.

Debido a la propiedad de los estimadores de ser consistentes e insesgados cuando las ramas del árbol tienden a infinito, es importante trabajar con un número adecuado de ramas para lograr su convergencia. El efecto en el tamaño del intervalo de confianza de aumentar una rama es similar al de duplicar el número de simulaciones, pero es más eficiente desde el punto de vista computacional debido a que el tiempo de corrida del algoritmo no se duplica tal como sucede con el incremento del número de simulaciones.

Broadie, Glasserman y Jain (1997) proponen mejorar la convergencia del método reduciendo el error estándar de la estimación utilizando como control de varianza el precio de la opción europea estimado con Black-Scholes y ramas antitéticas construidas a partir de la generación de dos grupos iguales de ramas en cada uno de los nodos. Las ramas del primer grupo son generadas de acuerdo con el método original, mientras que las del segundo son obtenidas con el antitético de las variables aleatorias usadas en la generación del primer grupo. Esta mejora permite reducir el sesgo del estimador porque equilibra los precios altos del activo con los bajos y viceversa. Adicionalmente, como sólo hay que generar la mitad de las ramas, logra disminuir el tiempo computacional en comparación con la aproximación original. Este método es diferente a la reducción de varianza antitética donde por cada trayectoria simulada se genera otra, usando los correspondientes aleatorios antitéticos.

Posterior a estos autores han sido propuestos diferentes métodos que usan simulación de Monte Carlo para la valoración de opciones americanas, pero que son altamente intensivos desde el punto de vista computacional. Entre estos se encuentran Longstaff y Schwartz (2001) quienes combinan mínimos cuadrados y simulación de Monte Carlo, lo cual exige mucho tiempo computacional además de requerir una base de datos de precios reales de opciones que se negocien en los mercados para poder ser implementado. Al igual que Broadie y Glasserman (1997), Fu, Laprise et al (2000) sugieren que el procedimiento de simulación más fácil de implementar es por medio de árboles, el cual, como se mencionó anteriormente, es un algoritmo exponencial función del número de oportunidades de ejercicio. Rogers (2002) sugiere una forma dual de valorar opciones americanas usando Monte Carlo con el método de optimización de martingalas Lagrangianas. En la siguiente sección se aplica el método de Broadie y Glasserman (1997) a opciones americanas sobre la TRM y se compara su desempeño con los métodos de aproximación analítica y discreta binomial y trinomial.

2. VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS SOBRE LA TRM ASUMIENDO LOGNORMALIDAD

La tasa de cambio representativa del mercado -TRM- es el indicador oficial de la tasa de cambio del peso colombiano por un dólar de los Estados Unidos y se calcula como el promedio aritmético de las tasas promedio ponderadas de compra y venta de divisas de las operaciones interbancarias y de transferencias de los intermediarios del mercado cambiario. Dicho indicador es calculado y certificado diariamente por la Superintendencia Financiera de Colombia con base en las operaciones registradas el día hábil inmediatamente anterior[1].

Inicialmente se aplican los modelos tradicionales para valorar opciones americanas sobre la TRM. Se valoran el 2 de marzo de 2009 opciones americanas put y call, *ITM, ATM* y *OTM* a 30, 90, 180 y 360 días, estimando los parámetros requeridos para la valoración a partir de la serie de retornos logarítmicos diarios del activo subyacente desde que existe en Colombia flexibilización cambiaria, tomando como período de referencia el comprendido de enero de 2000 a febrero de 2009, incluyendo sólo los días hábiles de negociación en Colombia que no son festivos en Estados Unidos de América y usando como fuente de precios el sistema de información Bloomberg. Para las tasas libres de riesgo doméstica y foránea se usan respectivamente las tasas de cierre del mercado colombiano de títulos TES tasa fija del día de la valoración y la curva Libor del dólar americano.

En particular, se aplican los métodos CRR, el modelo trinomial, la aproximación cuadrática de Barone-Adesi y Whaley (1987), las dos fronteras planas de ejercicio anticipado de Bjerksund y Stensland (2002) y el método de simulación de Monte Carlo propuesto por Broadie y Glasserman (1997) con el objetivo de indagar cuál es el método que permite obtener la mejor valoración de una opción americana sobre éste subyacente. Se toma como *benchmark* del valor correcto de la opción, el obtenido con el modelo trinomial generado con 10,000 pasos debido a que este método selecciona adecuadamente en cada nodo si hay o no ejercicio anticipado. Los resultados se comparan con los obtenidos con Black-Scholes para efectos de verificar el desempeño en aquellos casos en que no es óptimo el ejercicio anticipado. Los resultados de estas valoraciones para los plazos menor y mayor se presentan a continuación:

[1] Para mayor información sobre la metodología de cálculo se recomienda consultar la Circular Reglamentaria Externa del Banco de la República de Colombia DODM-146 del 21 de septiembre de 2004.

TABLA 1

RESULTADOS VALORACIÓN OPCIONES AMERICANAS T=30 DÍAS

Opción	Strike (COP/USD)	Trinomial	CRR	Aprox. Cuadratica	Dos Fronteras	Black Scholes
CALL	2,000	512.3674	512.3674	512.3674	512.3674	512.3674
	2,250	264.0434	264.0429	264.0434	264.0434	264.0434
	2,500	36.7251	36.3673	36.7254	36.7254	36.7254
	2,750	0.0171	0.0087	0.0171	0.0171	0.0171
	3,000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
PUT	2,000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2,250	0.0006	0.0002	0.0035	0.0006	0.0006
	2,500	22.4555	22.2996	22.4029	22.0837	21.0072
	2,750	250.0000	250.0000	250.0000	250.0000	232.6235
	3,000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	480.9310

Spot = 2,500 COP/USD, r_d=8.069%, r_f=0.4974%, σ=9.82%

TABLA 2

RESULTADOS VALORACIÓN OPCIONES AMERICANAS T=360 DÍAS

Opción	Strike	Trinomial	CRR	Aprox. Cuadratica	Dos Fronteras	Black Scholes
CALL	2,000	612.9054	612.9051	612.9055	612.9054	612.9054
	2,250	387.0754	387.0820	387.0756	387.0755	387.0755
	2,500	189.3930	189.2827	189.3943	189.3943	189.3943
	2,750	64.2153	64.1982	64.2157	64.2157	64.2157
	3,000	14.4264	14.3476	14.4275	14.4275	14.4275
PUT	2,000	0.1138	0.1132	0.1911	0.1095	0.1003
	2,250	4.5903	4.5885	5.1081	4.4861	3.7104
	2,500	51.7488	51.6941	51.5934	51.4327	35.4692
	2,750	250.0000	250.0000	250.0000	250.0000	139.7306
	3,000	500.0000	500.0000	500.0000	500.0000	319.3823

Spot = 2,500 COP/USD, r_d=8.582%, r_f=2.0887%, σ=9.82%

En el caso de las opciones call valoradas nunca se presenta ejercicio anticipado. Esto sucede cuando no hay un rendimiento importante durante la vigencia del derivado y en consecuencia el valor de la opción call americana es igual al de la europea. En este caso el valor de la tasa libre de riesgo foránea no es lo suficientemente atractivo para ninguno de los plazos en cuestión como para que un inversionista ejerza anticipadamente la opción americana y decida pagar prematuramente el precio pactado, incursionando en un costo de oportunidad.

Con base en lo anterior, se puede concluir que para opciones call los métodos de aproximación cuadrática y dos fronteras planas de ejercicio anticipado convergen, incluso mejor que el CRR o modelo binomial, al valor de la opción obtenido con Black-Scholes, verdadero valor del derivado cuando no se presenta ejercicio anticipado. Estas aproximaciones son más ajustadas que CRR debido a que este último es una aproximación en tiempo discreto diario, en tanto aquellas lo son en tiempo continuo. En cuanto al modelo trinomial, aún para el plazo mayor, éste logra una muy buena estimación a pesar de ser también una aproximación discreta, porque considera una rama adicional al binomial para cada periodo y para su aplicación se emplean 10,000 pasos en la construcción del árbol, lo cual lo acerca bastante al valor correcto de Black Scholes que es un modelo en tiempo continuo.

Para el caso de las opciones put cuando están muy por fuera del dinero, la aproximación cuadrática va en contravía de los otros métodos y sobreestima el valor de la opción; cuando la opción va entrando en el dinero, el modelo trinomial reconoce la mayor probabilidad de ejercicio anticipado y el mayor valor de la opción y finalmente, cuando la opción está muy dentro del dinero los resultados obtenidos por los diferentes métodos son muy similares.

De las dos aproximaciones analíticas en tiempo continuo, el valor de la opción obtenido por el método de dos fronteras planas de ejercicio anticipado es menor que el hallado por aproximación cuadrática, debido a que el primero impone una frontera factible mas no óptima de ejercicio anticipado que permite hallar el límite inferior del verdadero valor de la opción.

Para obtener resultados con buen ajuste empleando CRR es necesario implementar esta aproximación con un gran número de pasos, de lo contrario, sólo es un buen método en el caso de las opciones call y put americanas que se encuentran muy dentro del dinero.

A continuación se presentan los resultados de la valoración de las opciones a 30, 90 y 180 días obtenidos usando el método de simulación de Monte Carlo y asumiendo un comportamiento lognormal de la TRM. Para aplicarlo, en cada trayectoria se generan diariamente los precios según el proceso descrito anteriormente y se asumen uno, dos y cuatro ejercicios para luego aplicar la extrapolación de Richardson (1910), con el fin de aproximar los resultados a una valoración en tiempo continuo. Para el cálculo del valor de la opción con dos ejercicios, se hacen 1,000 simulaciones y árboles de 400 ramas y para el cálculo con cuatro ejercicios se usan 100 trayectorias generadas con árboles de 20 ramas. Nuevamente se toma como *benchmark* del verdadero valor de la opción el precio obtenido a partir del modelo trinomial con 10,000 pasos y para mejorar la convergencia del método y obtener eficiencia computacional se recurre a control de varianza y ramas antitéticas.

TABLA 3

RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS T=30 DÍAS

USANDO VOLATILIDAD CONSTANTE, CONTROL DE VARIANZA, RAMAS ANTITÉTICAS Y EXTRAPOLACIÓN

Opción	Spot (COP/USD)	1 período	2 períodos		4 períodos		Extrapolación			Trinomial	Error Relativo	Error Estimado
			Low	High	Low	High	Low	High	Mid			
	2,300	0.0675	0.0672	0.0672	0.0674	0.0674	0.0678	0.0678	0.0678	0.0675	0.50%	0.00%
			(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)						
	2,400	3.7446	3.7441	3.7441	3.7432	3.7432	3.7418	3.7418	3.7418	3.7444	0.07%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.001)						
CALL	2,500	36.7254	36.7260	36.7260	36.7258	36.7258	36.7254	36.7254	36.7254	36.7251	0.00%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.002)	(0.002)						
	2,600	117.3264	117.3261	117.3261	117.3263	117.3263	117.3268	117.3268	117.3268	117.3263	0.00%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.001)						
	2,700	215.6702	215.6702	215.6702	215.6703	215.6703	215.6706	215.6706	215.6706	215.6702	0.00%	0.00%
			(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)						
	2,300	200.0000	200.0001	200.0001	200.0000	200.0000	199.9997	199.9997	199.9997	200.0000	0.00%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.007)	(0.007)						
	2,400	100.0000	100.0035	100.0035	100.0487	100.0487	100.1228	100.1228	100.1228	100.0000	0.12%	0.00%
			(0.009)	(0.009)	(0.065)	(0.065)						
PUT	2,500	21.0072	21.7181	21.7181	21.9744	22.0701	22.1645	22.4196	22.2920	22.4555	0.73%	0.57%
			(0.003)	(0.003)	(0.021)	(0.022)						
	2,600	1.6496	1.6542	1.6542	1.6727	1.6740	1.7020	1.7055	1.7038	1.7098	0.35%	0.10%
			(0.001)	(0.001)	(0.002)	(0.002)						
	2,700	0.0349	0.0349	0.0349	0.0351	0.0351	0.0356	0.0356	0.0356	0.0357	0.19%	0.00%
			(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)						

Strike = 2,500 COP/USD, r_d=8.069%, r_f=0.4974%, σ=9.82%

Los valores entre paréntesis corresponden a los respectivos errores estándar del estimador.

TABLA 4

RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS T=90 DÍAS

USANDO VOLATILIDAD CONSTANTE, CONTROL DE VARIANZA, RAMAS ANTITÉTICAS Y EXTRAPOLACIÓN

Opción	Spot (COP/USD)	1 período	2 períodos		4 períodos		Extrapolación			Trinomial	Error Relativo	Error Estimado
			Low	High	Low	High	Low	High	Mid			
	2,300	5.0399	5.0412	5.0412	5.0412	5.0412	5.0407	5.0407	5.0407	5.0394	0.03%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.002)	(0.002)						
	2,400	25.1390	25.1381	25.1381	25.1377	25.1377	25.1372	25.1372	25.1372	25.1389	0.01%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.004)	(0.004)						
CALL	2,500	74.4759	74.4737	74.4737	74.4797	74.4797	74.4906	74.4906	74.4906	74.4753	0.02%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.004)	(0.004)						
	2,600	152.4900	152.4882	152.4882	152.4913	152.4913	152.4971	152.4971	152.4971	152.4902	0.00%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.003)	(0.003)						
	2,700	246.1069	246.1063	246.1063	246.1073	246.1073	246.1090	246.1090	246.1090	246.1068	0.00%	0.00%
			(0.001)	(0.001)	(0.002)	(0.002)						
	2,300	200.0000	200.0200	200.0200	200.0483	200.0483	200.0887	200.0887	200.0887	200.0000	0.04%	0.00%
			(0.012)	(0.012)	(0.086)	(0.086)						
	2,400	100.0000	100.0550	100.0550	100.0000	100.2037	99.8901	100.4332	100.1617	100.1704	0.01%	0.27%
			(0.031)	(0.031)	(0.298)	(0.219)						
PUT	2,500	28.9835	31.3883	31.3883	32.2854	32.5042	32.9790	33.5624	33.2707	33.5849	0.94%	0.88%
			(0.008)	(0.008)	(0.095)	(0.090)						
	2,600	7.3131	7.5417	7.5417	7.7367	7.7655	7.9855	8.0625	8.0240	8.0727	0.60%	0.48%
			(0.003)	(0.003)	(0.021)	(0.022)						
	2,700	1.2455	1.2540	1.2540	1.2799	1.2814	1.3204	1.3243	1.3224	1.3364	1.05%	0.15%
			(0.001)	(0.001)	(0.003)	(0.003)						

Strike = 2,500 COP/USD, r_d=8.634%, r_f=1.2642%, σ=9.82%

Los valores entre paréntesis corresponden a los respectivos errores estándar del estimador.

TABLA 5

RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS T=180 DÍAS

USANDO VOLATILIDAD CONSTANTE, CONTROL DE VARIANZA, RAMAS ANTITÉTICAS Y EXTRAPOLACIÓN

Opción	Spot (COP/USD)	1 período	2 períodos		4 períodos		Extrapolación			Trinomial	Error Relativo	Error Estimado
			Low	High	Low	High	Low	High	Mid			
CALL	2,300	22.8771	22.8814	22.8814	22.8822	22.8822	22.8822	22.8822	22.8822	22.8761	0.03%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.005)	(0.005)						
	2,400	58.5536	58.5593	58.5593	58.5594	58.5594	58.5575	58.5575	58.5575	58.5539	0.01%	0.00%
			(0.003)	(0.003)	(0.005)	(0.005)						
	2,500	117.2267	117.2285	117.2285	117.2260	117.2260	117.2213	117.2213	117.2213	117.2257	0.00%	0.00%
			(0.003)	(0.003)	(0.006)	(0.006)						
	2,600	195.3842	195.3853	195.3853	195.3842	195.3842	195.3819	195.3819	195.3819	195.3839	0.00%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.005)	(0.005)						
	2,700	285.7151	285.7175	285.7175	285.7154	285.7154	285.7110	285.7110	285.7110	285.7152	0.00%	0.00%
			(0.002)	(0.002)	(0.003)	(0.003)						
PUT	2,300	200.0000	200.0460	200.0460	200.3630	200.3630	200.8759	200.8759	200.8759	200.0000	0.44%	0.00%
			(0.034)	(0.034)	(0.220)	(0.220)						
	2,400	100.0000	100.0625	100.0625	100.0000	100.8975	99.8750	102.2683	101.0717	102.4131	1.31%	1.18%
			(0.049)	(0.049)	(0.429)	(0.245)						
	2,500	33.7910	38.3727	38.3727	39.9270	40.3465	40.9903	42.1089	41.5496	42.5312	2.31%	1.35%
			(0.015)	(0.015)	(0.160)	(0.152)						
	2,600	12.8424	13.8315	13.8315	14.3063	14.3939	14.7681	15.0016	14.8848	15.2275	2.25%	0.78%
			(0.008)	(0.008)	(0.064)	(0.065)						
	2,700	4.0671	4.2055	4.2055	4.3508	4.3665	4.5469	4.5886	4.5678	4.6355	1.46%	0.46%
			(0.003)	(0.003)	(0.016)	(0.018)						

Strike = 2,500 COP/USD, r_d=8.647%, r_f=1.7957%, σ=9.82%

Los valores entre paréntesis corresponden a los respectivos errores estándar del estimador.

Los resultados obtenidos usando simulación de Monte Carlo son satisfactorios y esta técnica presenta un buen ajuste de acuerdo con el error relativo de la estimación, el cual es calculado como el porcentaje de desviación del estimador medio del precio calculado a partir de la extrapolación, respecto al valor correcto de la opción de acuerdo con el modelo trinomial[2]. Dado que los estimadores sesgados hacia abajo y hacia arriba del precio de la opción son extrapolados separadamente, el intervalo final del precio de la opción no obedece a ningún nivel de confianza porque no se construye a partir de los errores de estimación y por tanto, no necesariamente el valor correcto de la opción está dentro del intervalo producto de la extrapolación, lo cual está en línea con los resultados obtenidos por Broadie, Glasserman y Jain (1997). El error relativo obedece a que en la simulación de Monte Carlo sólo se trabaja con uno, dos y cuatro ejercicios mientras que en el método trinomial se consideran ejercicios continuos logrando una mejor aproximación. Se concluye también que en el caso de una opción tipo Bermuda, este método de Monte Carlo se ajusta aún mejor por la naturaleza discreta de estas opciones.

[2] En algunos casos no necesariamente se cumple la condición P4 ≥ P2 ≥ P1 especialmente en el caso de las opciones para las que no hay ejercicio anticipado. Esto se debe a que cuando no hay ejercicio anticipado, el valor para uno, dos o cuatro ejercicios es exactamente igual, luego cualquier diferencia entre las valoraciones se debe únicamente a errores de estimación. Debido a la naturaleza aleatoria de la simulación lo importante es mirar si estadísticamente los valores son diferentes entre sí.

Con base en los resultados anteriormente mencionados, cabe anotar que a medida que aumenta el plazo de la opción, se va perdiendo precisión al usar la simulación de Monte Carlo porque este método considera un número limitado de posibilidades de ejercicio. Por ejemplo, en el caso de opciones a 180 días, para cuatro ejercicios cada uno se da cada 45 días y por tanto, la estimación del precio de una opción con posibilidad de ejercicio diario es menos exacta. Dado lo anterior, aún cuando el precio del activo subyacente tenga un comportamiento lognormal, sólo se recomienda usar el método de simulación de Monte Carlo para valorar opciones hasta de 90 días, pues aun cuando el error relativo alcanza un 1%, en términos monetarios es apenas del orden de 0,01 pesos por dólar. De esta manera, se valida la buena aproximación del método de simulación de Monte Carlo para la valoración de opciones americanas de corto plazo.

A diferencia de Broadie y Glasserman (1997) quienes suponen una distribución lognormal para el precio del activo subyacente, en la siguiente sección se estima el proceso real que sigue el activo objeto de estudio y se aplica el método Monte Carlo desarrollado por ellos para valorar opciones americanas sobre la TRM partiendo de dicho proceso con el objetivo de obtener una mejor aproximación al valor correcto de la opción.

3. VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS SOBRE LA TRM. EL CASO DE VOLATILIDAD HETEROCEDÁSTICA.

Para valorar adecuadamente las opciones americanas que se negocian actualmente en el mercado *OTC* es fundamental determinar cuál es el proceso real que sigue este activo subyacente, ya que asumir lognormalidad como lo hacen los métodos anteriores sin ser éste el caso, puede conducir a una incorrecta valoración de estas opciones. Las pruebas estadísticas de los retornos logarítmicos diarios de la serie se presentan en el Anexo 1 y evidencian la presencia de heterocedasticidad, característica de muchas de las series financieras.

De acuerdo con Bollerslev (1986) la heterocedasticidad puede ser modelada satisfactoriamente con modelos GARCH. Adicionalmente, en el período seleccionado inicialmente comprendido entre enero de 2000 y febrero de 2009 se encontraron varios cambios estructurales, el último de ellos en junio de 2008. Dada la poca historia disponible a partir de esa fecha para estimar un proceso estocástico, se tomaron los datos disponibles partiendo del cambio estructural anterior, es decir, el período de tiempo comprendido entre mayo de 2003 y abril de 2008. La serie resultante evidencia el hallazgo común en los estudios sobre volatilidad condicional, el cual consiste en la presencia de raíces unitarias en la estimación de la varianza, ya que en los coeficientes resultantes se encuentra que la suma de los parámetros que acompañan a los residuos al cuadrado y la varianza rezagados $\alpha_0+\ldots+\alpha_q+\beta_0+\ldots+\beta_q$ no es significativamente diferente de la unidad. Por ello, Engle y Bollerslev (1986) proponen los modelos GARCH Integrados -IGARCH (p,q)-, donde se restringen los coeficientes estimados del modelo de la siguiente manera:

$$\alpha_1 + ... + \alpha_q + \beta_1 + ... + \beta_q = 1 \tag{39}$$

El IGARCH hace parte de una amplia gama de modelos que se caracterizan por presentar persistencia en varianza, lo que significa que la información actual permanece importante para el pronóstico de la varianza condicional en todos los horizontes de tiempo, por tanto, las innovaciones de la varianza condicional tienen un efecto permanente y nunca pueden ser ignoradas.

Un modelo IGARCH (1,1) puede ser expresado de la siguiente manera:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \tag{40}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1-\beta_1) a_{t-1}^2 \tag{41}$$

Donde ε_t es una variable aleatoria i.i.d. con media cero y varianza 1 y $1>\beta_1>0$.

El fenómeno IGARCH puede estar causado por cambios de nivel en la volatilidad, sin embargo, las causas de la persistencia en volatilidad continúan siendo motivo de investigación. Dicha persistencia tiene grandes implicaciones por su impacto sobre la predictibilidad, aspecto que tiene importancia en la valoración de opciones ya que las innovaciones influyen en la varianza permanentemente.

Antes de proceder a identificar el proceso GARCH que se anticipa por la presencia de *clusters* de volatilidad en la serie de retornos logarítmicos diarios, se verifica la estacionariedad de la serie con las pruebas *Augmented* Dickey-Fuller, Phillips-Perron y Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin. Posteriormente se modela la media con una estructura ARMA, se verifica la existencia de efectos ARCH en los residuales con el LM test y se procede a hacer la modelación de la varianza hasta obtener residuales ruido blanco. Una vez estimado el proceso estocástico se pronostica la varianza de la serie y se modela el comportamiento del activo subyacente de acuerdo con el proceso encontrado, para con base en éste, calcular el valor real de la opción. Los resultados de la estimación del proceso IGARCH de la serie se presentan en la siguiente tabla y pueden verse en detalle en el Anexo 1.

TABLA 6
RESULTADOS ESTIMACIÓN PROCESO IGARCH DE LA TRM

ECUACIÓN DE LA MEDIA				
Parámetro	Coeficiente	Error Estándar	Estadístico z	Probabilidad
C	-0.0003	0.0001	-3.8277	0.0001
MA(1)	0.2133	0.0260	8.1967	0.0000
ECUACIÓN DE LA VARIANZA				
Parámetro	Coeficiente	Error Estándar	Estadístico z	Probabilidad
RESID(-1)^2	0.1307	0.0122	10.6914	0.0000
GARCH(-1)	0.8693	0.0122	71.0989	0.0000
GRADOS DE LIBERTAD DISTRIBUCIÓN T				
	Coeficiente	Error Estándar	Estadístico z	Probabilidad
	6.2626	0.7663	8.1723	0.0000

Una vez estimado el proceso real, es posible aplicar el método Monte Carlo en la forma sugerida por Broadie y Glasserman (1997). Este método de simulación se aplica en el caso de lognormalidad y en el del proceso real de la serie bajo análisis. Es esta segunda aplicación la que soporta el interés en este método ya que permite obtener una buena aproximación al valor correcto de la opción sin tener que recurrir a supuestos que no se ajustan a la realidad de estas series financieras, en particular, el hecho de que su varianza condicional no es constante a lo largo del tiempo. Cada vez que se vaya a hacer la valoración de las opciones se recomienda estimar nuevamente el proceso estocástico que sigue la serie precisamente porque los parámetros que describen su comportamiento no permanecen constantes en el tiempo.

Con base en Boyle (1977) con el necesario ajuste para el caso de divisas, las trayectorias de precio del activo subyacente en el caso de lognormalidad se calculan de acuerdo con el siguiente algoritmo, donde la media ha sido ajustada a la tasa apropiada para valoración de opciones neutral con respecto al riesgo:

$$S_t = S_{t-1} \times e^{\left(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}\ \varepsilon_t} \tag{42}$$

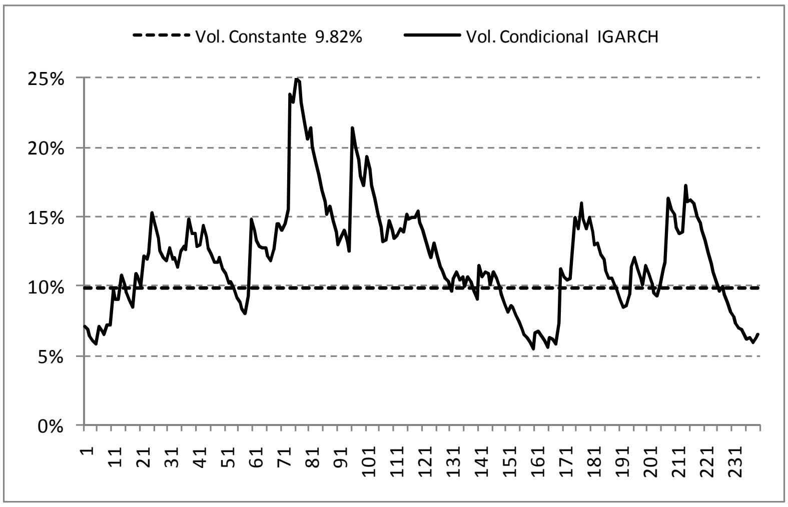
La expresión anterior puede utilizarse también en el caso de varianza no constante reemplazando la volatilidad constante σ por σ_t, volatilidad que no es constante en el tiempo de acuerdo con el respectivo proceso GARCH que describe el comportamiento del subyacente:

$$S_t = S_{t-1} \times e^{\left(r_d - r_f - \frac{\sigma_t^{\,2}}{2}\right)dt + \sigma_t\sqrt{dt}\ \varepsilon_t} \tag{43}$$

Es importante considerar que para hacer la valoración de opciones americanas en el caso de heterocedasticidad no se puede evitar el último ejercicio utilizando Black-Scholes (1973) tal como lo recomiendan Broadie y Glasserman (1997). Esto se debe precisamente al hecho de que la volatilidad no es constante en el tiempo y los ejercicios no son continuos por las limitaciones computacionales existentes, lo que hace necesario recurrir a unos pocos ejercicios discretos que después se extrapolan omitiendo, por ello, un tramo importante de la trayectoria de volatilidad. En este caso se recomienda evaluar la posibilidad de ejercicio anticipado en todos los periodos considerados para lo cual hay que utilizar el algoritmo de orden $n*b^d$.

La figura 1 compara la volatilidad diaria real de la TRM durante el último año con un escenario de volatilidad constante que es el asumido por los métodos referenciados en la sección previa, donde puede concluirse que asumir una volatilidad constante a lo largo del tiempo probablemente conduce a una inadecuada estimación del valor de la opción.

FIGURA 1
COMPARACIÓN VOLATILIDAD CONSTANTE Y HETEROCEDÁSTICA



En la figura 2 se presentan tres trayectorias de volatilidad generadas a partir del proceso estocástico real del activo subyacente, usadas para valorar opciones a 30 días y cuyo promedio durante el período es 9.82%, valor equivalente a la volatilidad con la que se valoraron las opciones bajo el supuesto de lognormalidad, lo que permite comparar los resultados obtenidos con el método Monte Carlo con heterocedasticidad con los del Monte Carlo lognormal o volatilidad constante presentados en la sección anterior:

FIGURA 2
SERIES DE VOLATILIDAD HETEROCEDÁSTICA USADAS PARA VALORAR OPCIONES A 30 DÍAS

Los resultados de la valoración de las opciones americanas usando estas tres series se muestran en la tabla 7:

TABLA 7
RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS T=30 DÍAS CON VOLATILIDAD HETEROCEDÁSTICA Y PROMEDIO DEL PERÍODO 9.82%

Opción	Spot (COP/USD)	Vol. 1	Vol. 2	Vol. 3	Vol. Constante 9.82%
CALL	2,300	0.0675	0.0675	0.0675	0.0678
	2,400	3.7446	3.7440	3.7440	3.7418
	2,500	36.7254	36.7242	36.7242	36.7254
	2,600	117.3264	117.3260	117.3260	117.3268
	2,700	215.6702	215.6702	215.6702	215.6706
PUT	2,300	200.0000	200.0000	200.0000	199.9997
	2,400	100.0000	100.0000	100.0000	100.1228
	2,500	22.5897	21.8916	22.4681	22.2920
	2,600	1.7491	1.6642	1.7434	1.7038
	2,700	0.0357	0.0349	0.0357	0.0356

Strike = 2,500 COP/USD, rd=8.069%, rf=0.4974%.

Aunque la volatilidad promedio de las tres series es igual, se observa que el valor de la opción depende del comportamiento de la serie de volatilidad en los tramos anteriores a los puntos donde ocurre el ejercicio anticipado. Al usar la primera y la tercera serie, los resultados se acercan porque ambas trayectorias son similares y el ejercicio anticipado está en los períodos tempranos de la opción; en cuanto a la segunda, aunque en el período de análisis la serie tiene la misma volatilidad promedio que las demás, ésta llega a tomar niveles muy bajos al inicio de la trayectoria por lo que a diferencia de las otras series, no hay lugar a un ejercicio anticipado al comienzo de la misma, lo que explica que el valor de las opciones para este último caso sea un poco menor. Este hecho evidencia el error en el que se incurre al utilizar volatilidad constante para estimar el valor de una opción cuando el activo subyacente de la misma se comporta de manera diferente, motivo por el cual ningún modelo que use el supuesto de lognormalidad es una buena técnica para valorar este tipo de opciones

A continuación se presentan tres trayectorias de volatilidad generadas a partir del proceso estocástico real del subyacente, las cuales exhiben diferentes volatilidades promedio durante el período en el que se va a hacer la valoración de las opciones.

FIGURA 3
SERIES DE VOLATILIDAD HETEROCEDÁSTICA DIFERENTES USADAS PARA VALORAR OPCIONES A 30 DÍAS

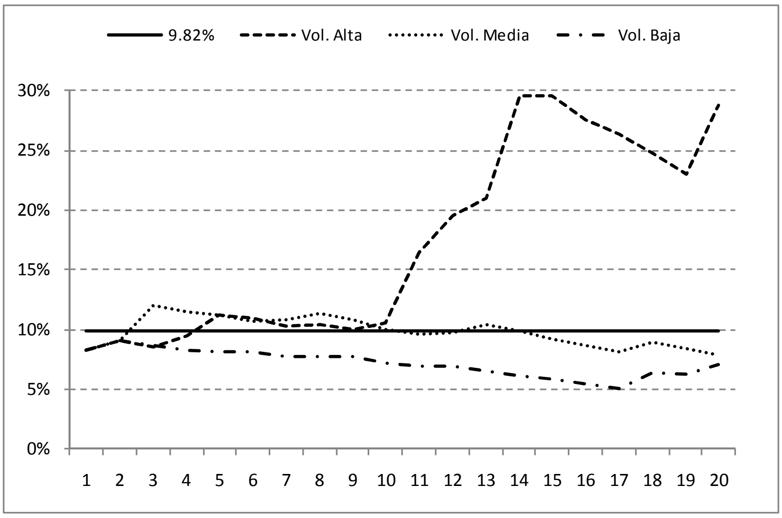


TABLA 8
RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES AMERICANAS T=30 DÍAS CON VOLATILIDADES HETEROCEDÁSTICAS DIFERENTES

Opción	Spot (COP/USD)	Vol. Alta $\sigma_{prom.}$ = 17.26%	Vol. Media $\sigma_{prom.}$ = 9.82%	Vol. Baja $\sigma_{prom.}$ = 7.17%
CALL	2,300	3.1330	0.0675	0.0012
	2,400	17.5915	3.7446	1.0026
	2,500	57.7696	36.7254	29.3882
	2,600	128.0700	117.3264	115.9350
	2,700	218.1646	215.6702	215.6357
PUT	2,300	200.0000	200.0000	200.0000
	2,400	104.0296	100.0000	100.0000
	2,500	42.4647	22.5897	15.4985
	2,600	12.4184	1.7491	0.2776
	2,700	2.5292	0.0357	0.0003

Strike = 2,500 COP/USD, rd=8.069%, rf=0.4974%.

En los resultados se observa que al usar tres trayectorias de volatilidad diferentes generadas a partir del mismo proceso IGARCH(1,1) que sigue la TRM, se obtienen valores muy distintos del precio de la misma opción. La diferencia obtenida en los resultados usando diferentes series de volatilidad heterocedástica, se genera porque el precio de la opción depende del comportamiento que presenta la volatilidad a lo largo del tiempo y del nivel de la misma en los diferentes puntos en los que se evalúan las posibilidades de ejercicio, los cuales varían según la trayectoria empleada. Esta dependencia del comportamiento de la serie de volatilidad, hace necesario simular un número suficiente de trayectorias haciendo uso del proceso estocástico real, lo que permite una adecuada estimación del valor de la opción porque, de lo contrario, es imposible anticipar cuál va a ser la trayectoria futura.

Por tanto, para proyectar adecuadamente el valor de una opción americana con volatilidad heterocedástica, es necesario hacer una extensión al modelo propuesto por Broadie y Glasserman (1997), en la que se simulen también *m* trayectorias de volatilidad y no sólo n trayectorias de precio, generando en cada una de éstas los estimadores sesgados hacia abajo y hacia arriba del valor de la opción, para poder encontrar unos límites reales del valor de la misma que estén en línea con el comportamiento real del activo subyacente. Para su implementación, la volatilidad empleada en el control de la varianza debe ser el promedio de la volatilidad en las trayectorias generadas, ya que así se recoge información de todas ellas y no se sesga la estimación a ninguna trayectoria en particular. Debido a que en las opciones call objeto de estudio no se presenta ejercicio anticipado, a continuación se presentan únicamente los resultados de la valoración de las opciones put usando 1,000 trayectorias de volatilidad:

TABLA 9

RESULTADOS MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES PUT AMERICANAS T=30 DÍAS Y 1,000 TRAYECTORIAS DE VOLATILIDAD HETEROCEDÁSTICA

Opción	Spot (COP/USD)	1 período		2 períodos		4 períodos		Extrapolación			Error Estimado	Trinomial
		Low	High	Low	High	Low	High	Low	High	Mid		
PUT	2,300	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	200.0000	0.00%	200.0000
		(0.085)	(0.085)	(0.084)	(0.083)	(0.082)	(0.081)					
	2,400	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	100.0000	0.00%	100.0000
		(0.142)	(0.142)	(0.138)	(0.137)	(0.136)	(0.131)					
	2,500	23.5220	23.5220	24.1147	24.1536	24.3443	24.5216	24.5296	24.9243	24.7270	0.80%	22.4555
		(0.000)	(0.000)	(0.013)	(0.013)	(0.017)	(0.017)					
	2,600	2.4557	2.4557	2.4599	2.4607	2.4692	2.4838	2.4834	2.5205	2.5020	0.74%	1.7098
		(0.000)	(0.000)	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.001)					
	2,700	0.0872	0.0872	0.0873	0.0873	0.0873	0.0884	0.0872	0.0900	0.0886	1.61%	0.0357
		(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.000)					

Strike = 2,500 COP/USD, rd=8.069%, rf=0.4974%, σ=9.82%

Los valores entre paréntesis corresponden a los respectivos errores estándar del estimador.

Con el procedimiento descrito se logra una mejor estimación del valor de las opciones cuando se presenta ejercicio anticipado ya que por la naturaleza heterocedástica de los retornos logarítmicos del activo subyacente, el precio de las opciones obtenido es mayor al hallado bajo el supuesto de lognormalidad en razón del mayor riesgo que agrega una volatilidad que no es constante. Con ello se corrobora nuevamente la importancia de recurrir al proceso estocástico real que sigue el activo subyacente de la opción para obtener una buena estimación de su precio.

CONCLUSIONES

La aproximación cuadrática y las dos fronteras planas de ejercicio anticipado son dos métodos analíticos de valoración de opciones americanas más ajustados que CRR debido a que, al igual que este último, reconocen la frontera de ejercicio anticipado pero tienen la ventaja de ser modelos en tiempo continuo, es decir, consideran ejercicios anticipados en cualquier instante. Cuando las opciones put están muy por fuera del dinero la aproximación cuadrática sobreestima el valor de la opción, pero cuando la opción está muy dentro del dinero los resultados obtenidos por los diferentes métodos analíticos son similares. Para obtener resultados con buen ajuste empleando CRR es necesario implementar esta aproximación con un gran número de pasos, siendo insuficiente una periodicidad diaria porque se convierte sólo en un buen método en el caso de las opciones call y put americanas que se encuentran muy dentro del dinero.

Los resultados obtenidos usando simulación de Monte Carlo son satisfactorios y esta técnica presenta un buen ajuste de acuerdo con el error relativo de la estimación para opciones hasta 90 días. Dado que la simulación presenta un número de oportunidades de ejercicio que crece exponencialmente, para valorar una opción americana que puede ser ejercida en cualquier momento, es necesario usar la técnica de extrapolación de Richardson (1910) propuesta por Chang, Chung y Stapleton (2001) para aproximar los resultados obtenidos a ejercicios continuos y lograr obtener eficiencia computacional y resultados alineados con la teoría de valoración de opciones americanas. Igualmente, las ramas antitéticas permiten mejorar consistentemente los resultados obtenidos usando únicamente simulación de Monte Carlo con control de varianza.

Dada la flexibilidad del método numérico de simulación de Monte Carlo para valorar opciones cuyo activo subyacente no tenga un comportamiento lognormal, cada vez que se vaya a hacer la valoración usando su comportamiento real, se recomienda estimar el proceso que está siguiendo en ese momento la serie en análisis y de esta manera se obtiene un precio de las opciones americanas más realista, porque va en línea con el comportamiento del activo subyacente. Si el caso es volatilidad no constante, para lograr una aproximación adecuada al valor de la opción es necesario extender el modelo propuesto por Broadie y Glasserman (1997), en forma tal que se generen no sólo n trayectorias de precio sino también *m* trayectorias de volatilidad, ya que así se recoge información de todas ellas y no se sesga la estimación a ninguna trayectoria en particular.

Con el procedimiento descrito se logra una mejor estimación del valor de las opciones sobre la TRM cuando se presenta ejercicio anticipado. Por la naturaleza heterocedástica de los retornos logarítmicos del activo subyacente, el precio de las opciones obtenido es mayor al hallado bajo el supuesto de lognormalidad en razón del mayor riesgo que agrega una volatilidad que no es constante. Con ello se corrobora nuevamente la importancia de recurrir al proceso estocástico real que sigue el activo subyacente de la opción para obtener una buena estimación de su precio.

A futuro es necesario profundizar en la extrapolación y desarrollar una metodología que permita usar un mayor número de ejercicios para el cálculo del valor de la opción. De esta manera se logran aproximar mejor a tiempo continuo los resultados obtenidos a partir del método de simulación de Monte Carlo, pues la presencia de heterocedasticidad hace más evidente la necesidad de tener posibilidades de ejercicio con mayor periodicidad, debido a los cambios continuos que se presentan en el nivel de volatilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrikopoulos, Andreas. (2006). Analytical approximations to the valuation of American Options: A boundary – optimality approach. Working Paper. University of the Aegean.

Banco de la República de Colombia. (2004). Circular Reglamentaria Externa DODM – 146.

Barone-Adesi, G. and Whaley, R. (1987). Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance, Vol XLII, N°2*, 301-320.

Bjerksund, P. and Stensland, G. (1993). Closed form approximation of American Options. *Scandinavian Journal of Management, Vol. 9, Suppl.* S88 – S99.

Bjerksund, P. and Stensland, G. (1993). American Exchange Options and a Put Call Transformation: A Note. *Journal of Business Finance & Accounting, 20(5).* 761-764.

Bjerksund, P. and Stensland, G. (2002). Closed form Valuation of American Options. 1 – 19. Extraído el 6 de enero de 2009 desde http://www.nhh.no/Admin/Public/DWSDownload.aspx?File=%2FFiles%2FFiler%2Finstitutter%2Ffor%2Fdp%2F2002%2F0902.pdf.

Boyle, P.P. (1977). Options: A Monte Carlo Approach. *Journal of Financial Economics, 4.* 323 -338.

Boyle, P., Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo Methods for Security Pricing. *Journal of Economic Dynamic and Control 21*. 1267 – 1321.

Boyle, P. (1986). Option Valuation Using a Three Jump Process. *International Options Journal, 3.* 7 -12.

Breen, R. (1991). The Accelerated Binomial Option Pricing Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 26, N°2*. 153 -164.

Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Pricing American-style Securities Using Simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control 21*. 1323 – 1352.

Broadie, M., Glasserman, P., and Jain, G. (1997). Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices. *Journal of Derivatives, 5 (1)*. 25 - 44.

Broadie, M. and Detemple, J. (1996). American Option Valuation: New Bounds Approximations and Comparison of Existing Methods. *Review of Financial Studies, Vol. 9, N°4.* 1211 – 1250.

Bunch, D. S. and Johnson, H. (1992). A simple Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach. *Journal of Finance, 47*. 809-816.

Campbell, J.Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997). The Econometrics of Financial Markets. New Jersey: Princeton University Press. 611 p.

Carriere, J. (1996). Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulations and Nonparametric Regression. *Insurance: Mathematics and Economics, 19.* 19 - 30.

Chang, Chuang-Chang., Chung, San-Lin. and Stapleton, Richard C. (2001). Richardson Extrapolation Techniques for Pricing American-style Options. *Draft May 21, 2001*.

Cox, J., Ross, S. and Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Jounal of Financial Economics, 3.* 229 - 263.

Engle, R. F. and Bollerslev, T. (1986). Modeling Persistence of Conditional Variances". *Econometric Reviews, 5.* 1 – 50.

Fisher, B. and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy, Vol. 81, N°3*. 637 – 654.

Fu, M.C., Laprise, S.B., Madan, D.B., Su, Y. and Wu, R. (2001). Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approches. *Journal of Computational Finance, Vol. 4, 3*. 39 – 88.

Garman, M. and Kohlhagen, W. (1983). Foreign Currency Option Values. *Journal of International Money and Finance, 2*. 231 - 237.

Geske, R. (1979). A Note on an Analytical Valuation Formula for Unprotected American Options on Stocks with Know Dividends. *Journal of Financial Economics, 7.* 375 - 380.

Geske, R. and Johnson, H.E. (1984). The American Put Option Valued Analytically. *Journal of Finance, 39, 5.* 1511 – 1524.

Hull, J. (2009). Option, Futures, and Other Derivatives. 7th Ed. New Jersey: Pearson- Prentice Hall.

Jamshidian, F. and Zhu, Yu. (1997). Scenario Simulation: Theory and Methodology. *Finance Stochast 1.* 43 - 67. Obtenido el 15 de enero, 2009 de la base de datos EBSCO.

Ju, N. and Zhong, R. (1999). An Approximate Formula for Pricing American Options. *Journal of Derivatives, 7, 2.* 31 - 40.

MacMillian, L. W. (1986). Analytic Approximation for the American Put Option". *Advances in Futures and Options Research 1.* 119 – 139.

Maya, C. and Torres, G. (2004) The Unification of Colombian Stock Market: A Step Towards Efficiency. Empirical Evidence. *Latin American Business Review (LABR), Vol. 5, N°4*. 69 – 98.

Maya, C. and Gómez, K. (2008). What Exactly is "Bad News" in Foreign Exchange Markets? Evidence from Latin American Markets. *Cuadernos de Economía, Vol 45.* 161 – 183.

Lamberton, D. and Lapeyre, B. (1996). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance Translated by Nicolas Rabeau and Francois Mantion. United States of America: Chapman & Hall/CRC.

Longstaff, F. and Schwartz, E. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies Spring 2001 Vol 14, N° 1*. 113 – 147.

Rogers, L.C. G. (2002). Monte Carlo Valuation of American Options. *Mathematical Finance, Vol 12, N°3. 271 – 286.*

Roll, R. (1977). An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends. *Journal of Financial Economics, 5*. 251 -258.

Whaley, R.E. (1981). On Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends. *Journal of Financial Economics, 9.* 207 – 211.

APÉNDICES

APÉNDICE A: TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN

La técnica de extrapolación de Richardson considera tres oportunidades de ejercicio durante la vida de la opción, las cuales son evaluadas separadamente:

P_1: valor de la opción al momento de la expiración calculada con base en Black-Scholes
P_2: valor calculado en la mitad de la vida de la opción y en el momento de la expiración
P_3: valor calculado en un tercio y dos tercios del plazo de la opción y en la expiración

El valor definitivo de la opción put P está dado por:

$$P = P_3 + \tfrac{7}{2}\left(P_3 - P_2\right) - \tfrac{1}{2}\left(P_2 - P_1\right) \qquad \text{A.1}$$

Sin embargo, en 1987 Omberg demuestra la no convergencia del método bajo ciertas condiciones, principalmente cuando hay pagos de dividendo cercanos a una de las fechas de ejercicio definidas para hacer la valoración. Bunch y Johnson (1992) modifican el modelo para mejorar su convergencia y la eficiencia computacional, reduciendo el número de ejercicios a dos puntos durante la vida de la opción. El valor de la put se calcula como sigue:

$$P = P_2^{Max} + (P_2^{Max} - P_1) \qquad \text{A.2}$$

Donde P_2^{Max} es el valor de la opción calculado en el punto de ejercicio seleccionado donde se maximiza el valor de la opción.

Bunch y Johnson (1992) mencionan que el primer punto de ejercicio para P_2^{Max} puede obtenerse examinando siete puntos de ejercicio *T/8, 2T/8, 3T/8, 4T/8, 5T/8, 6T/8 y 7T/8* y el segundo punto se establece en *T*, de esta manera mejora la exactitud de la estimación.

En 2001 Chang, Chung y Stapleton encuentran que si en la extrapolación de Richardson se da que $P_1 < P_2 > P_3$, se presenta el problema de convergencia, por tanto, siguen la sugerencia de Omberg (1987) para construir la secuencia de aproximación usando pasos de ejercicio geométricos [1,2,4,8…], generados por una duplicación en las fechas de ejercicio en lugar de los pasos aritméticos [1,2,3,4…] empleados por Geske y Johnson (1984) y de esta manera obtienen la fórmula modificada de Geske y Johnson:

$$P = P_4 + \tfrac{5}{3}\left(P_4 - P_2\right) - \tfrac{1}{3}\left(P_2 - P_1\right) \qquad \text{A.3}$$

Donde P_4 el valor de la opción ejercida en *T/4, 2T/4, 3T/4 y T*.

Como se usan pasos geométricos se puede asegurar que la condición $P_4 \geq P_2 \geq P_1$ siempre se cumple porque los puntos de ejercicio de P_4 incluyen todos los puntos de P_2 y estos a su vez incluyen todos los puntos de ejercicio de P_1. Esta modificación a la fórmula de Geske y Johnson supera sus deficiencias de convergencia y permite obtener resultados del precio de la opción con errores menores a los obtenidos con el uso de pasos aritméticos.

APÉNDICE B: MODELO DE DOS FRONTERAS PLANAS - BJERKSUND Y STENSLAND (2002)

Los supuestos básicos de este modelo son:

i) Una economía completa en tiempo continuo de Black– Scholes con una tasa libre de riesgo *r* positiva.
ii) El precio del activo subyacente sigue un movimiento geométrico Browniano de la forma:

$$S_t = Se^{\left\{\left(b-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\, W_t\right\}} \qquad \text{B.1}$$

Donde:
S: precio *spot* del activo subyacente
b<r: tasa de tendencia
σ: volatilidad
W_t*:* proceso de Weiner

Se definen dos fronteras planas de ejercicio anticipado, *X* es válida en el intervalo de tiempo de *0 a t* y *x* de *t a T,* siendo: *0 < t < T* y

$$X > x > K \quad y \quad t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)T \qquad \text{B.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{c}} = {} & \alpha(X)S^{\beta} - \alpha(X)\varphi(S,t/\beta,X,X) + \varphi(S,t/1,X,X) - \varphi(S,t/1,x,X) - K\varphi(S,t/0,X,X) + \\ & K\varphi(S,t/0,x,X) + \alpha(x)\varphi(S,t/\beta,x,X) - \alpha(x)\psi(S,T/\beta,x,X,x,t) + \psi(S,T/1,x,X,x,t) - \\ & \psi(S,T/1,K,X,x,t) - K\psi(S,T/0,x,X,x,t) + K\psi(S,T/0,K,X,x,t)\end{aligned} \qquad \text{B.3}$$

Donde:

$\alpha(X) \equiv (X-K)X^{-\beta}$ Siendo *K* es precio de ejercicio de la opción

$$\beta \equiv \left(\frac{1}{2}-\frac{b}{\sigma^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}$$

$$\varphi(S,T/\gamma,H,X) \equiv e^{\lambda T}S^{\gamma}\left\{N\left(-\frac{Ln\left(\frac{S}{H}\right)+\left(b+\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{X}{S}\right)^{K}N\left(-\frac{Ln\left(\frac{X^2}{SH}\right)+\left(b+\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}$$

$H \leq X$

$$\lambda = -r + \gamma b + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\sigma^2$$

$$K \equiv \frac{2b}{\sigma^2}(2\gamma-1)$$

$$\psi = \psi(S, T / \gamma, H, X, x, t)$$

$$\psi = \exp\{\lambda T\} S^{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} M\left(d_1, D_{1;} \sqrt{\frac{t}{T}}\right) - \left(\frac{X}{S}\right)^K M\left(d_2, D_{2;} \sqrt{\frac{t}{T}}\right) - \left(\frac{x}{S}\right)^K M\left(d_3, D_{3;} -\sqrt{\frac{t}{T}}\right) \\ + \left(\frac{x}{X}\right)^K M\left(d_4, D_{4;} -\sqrt{\frac{t}{T}}\right) \end{array} \right\}$$

Siendo M(˙,˙,˙) la función de distribución normal estándar bivariada.

$$d_1 = -\frac{Ln\left(\frac{S}{x}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = -\frac{Ln\left(\frac{X^2}{Sx}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_3 = -\frac{Ln\left(\frac{S}{x}\right) - \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_4 = -\frac{Ln\left(\frac{X^2}{Sx}\right) - \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$D_1 = -\frac{Ln\left(\frac{S}{H}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$D_2 = -\frac{Ln\left(\frac{X^2}{SH}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$D_3 = -\frac{Ln\left(\frac{x^2}{SH}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$D_4 = -\frac{Ln\left(\frac{Sx^2}{HX^2}\right) + \left(b + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Luego, las fronteras planas de ejercicio anticipado son:

$$X = X_T \quad y \quad x = X_{T-t} \qquad \text{B.4}$$

$$X_T = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - \exp(h(T))) \qquad \text{B.5}$$

Donde:

$$h_T = -\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right)\left(\frac{k^2}{(B_\infty - B_0)B_0}\right)$$

$$B_\infty \equiv \frac{\beta}{\beta - 1}K \quad y \quad B_0 \equiv \max\left(K, \left(\frac{r}{r-b}\right)K\right)$$

La solución anterior puede ser transformada de la siguiente manera para hallar el valor de la opción put americana por medio de la expresión:

$$P(S, K, T, r, b, \sigma) = C(K, S, T, r - b, -b, \sigma) \qquad \text{B.6}$$

ANEXOS

ANEXO 1: ANÁLISIS DE LA SERIE DE RETORNOS LOGARÍTMICOS

FIGURA 1.1
PRUEBA DE NORMALIDAD

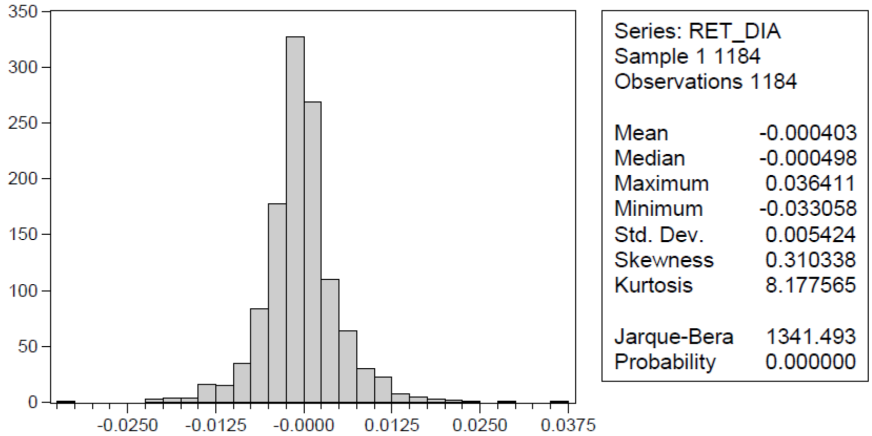


FIGURA 1.2
Q-Q PLOT

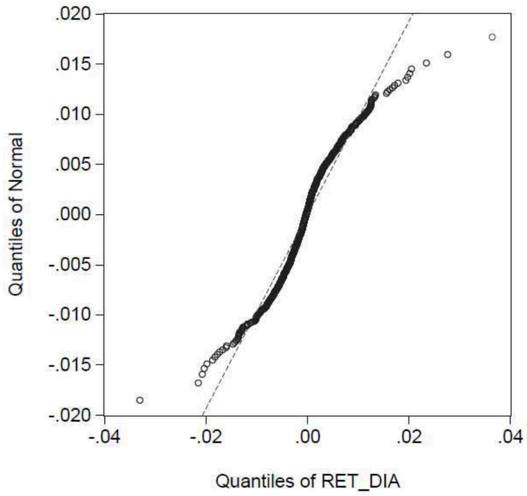


TABLA 1.1

LM TEST

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	14.78288	Prob. F(2,1181)	0.0000
Obs*R-squared	28.91695	Prob. Chi-Square(2)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 06/01/09 Time: 12:20
Sample: 1 1184
Included observations: 1184
Presample missing value lagged residuals set to zero.

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	8.22E-07	0.000156	0.005274	0.9958
RESID(-1)	0.155629	0.029088	5.350223	0.0000
RESID(-2)	-0.051081	0.029094	-1.755696	0.0794

R-squared	0.024423	Mean dependent var	6.45E-20
Adjusted R-squared	0.022771	S.D. dependent var	0.005424
S.E. of regression	0.005362	Akaike info criterion	-7.616393
Sum squared resid	0.033956	Schwarz criterion	-7.603530
Log likelihood	4511.905	Hannan-Quinn criter.	-7.611544
F-statistic	14.78288	Durbin-Watson stat	1.996218
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA 1.2

CAMBIO ESTRUCTURAL 1 DE MARZO DE 2003

Chow Breakpoint Test: 771
Null Hypothesis: No breaks at specified breakpoints
Varying regressors: All equation variables
Equation Sample: 1 2191

F-statistic	6.008221	Prob. F(1,2189)	0.0143
Log likelihood ratio	6.005473	Prob. Chi-Square(1)	0.0143
Wald Statistic	6.008221	Prob. Chi-Square(1)	0.0142

TABLA 1.3

CAMBIO ESTRUCTURAL 1 DE JUNIO DE 2008

Chow Breakpoint Test: 2036
Null Hypothesis: No breaks at specified breakpoints
Varying regressors: All equation variables
Equation Sample: 1 2191

F-statistic	12.20701	Prob. F(1,2189)	0.0005
Log likelihood ratio	12.18422	Prob. Chi-Square(1)	0.0005
Wald Statistic	12.20701	Prob. Chi-Square(1)	0.0005

TABLA 1.4

RESULTADO DE LA ESTIMACIÓN DEL PROCESO DE LA SERIE

Dependent Variable: RET_DIA
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution
Date: 06/01/09 Time: 16:50
Sample: 1 1184
Included observations: 1184
Convergence achieved after 14 iterations
MA Backcast: 0
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3)*RESID(-1)^2 + (1 - C(3))*GARCH(-1)

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000284	7.42E-05	-3.827728	0.0001
MA(1)	0.213318	0.026025	8.196675	0.0000
Variance Equation				
RESID(-1)^2	0.130717	0.012226	10.69139	0.0000
GARCH(-1)	0.869283	0.012226	71.09889	0.0000
T-DIST. DOF	6.262555	0.766316	8.172287	0.0000

R-squared	0.020794	Mean dependent var	-0.000403
Adjusted R-squared	0.018304	S.D. dependent var	0.005424
S.E. of regression	0.005374	Akaike info criterion	-8.130760
Sum squared resid	0.034083	Schwarz criterion	-8.113609
Log likelihood	4817.410	Hannan-Quinn criter.	-8.124295
F-statistic	8.352495	Durbin-Watson stat	2.108940
Prob(F-statistic)	0.000017		
Inverted MA Roots	-.21		

TABLA 1.5

CORRELOGRAMA DE RESIDUALES

Date: 06/01/09 Time: 16:51
Sample: 1 1184
Included observations: 1184
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.018	0.018	0.3871	
		2	-0.042	-0.042	2.4683	0.116
		3	-0.006	-0.004	2.5103	0.285
		4	0.035	0.033	3.9380	0.268
		5	0.032	0.030	5.1310	0.274
		6	0.014	0.016	5.3716	0.372
		7	0.000	0.003	5.3717	0.497
		8	0.042	0.043	7.5111	0.378
		9	0.046	0.043	10.003	0.265
		10	0.008	0.008	10.070	0.345
		11	-0.025	-0.023	10.844	0.370
		12	0.086	0.086	19.763	0.049
		13	-0.009	-0.019	19.852	0.070
		14	0.032	0.035	21.054	0.072
		15	-0.007	-0.009	21.113	0.099
		16	-0.009	-0.012	21.200	0.131
		17	-0.032	-0.039	22.395	0.131
		18	0.016	0.010	22.709	0.159
		19	-0.003	-0.007	22.723	0.201
		20	0.001	-0.003	22.725	0.250
		21	-0.020	-0.024	23.197	0.279
		22	0.006	0.005	23.244	0.331
		23	0.010	0.010	23.355	0.382
		24	-0.008	-0.015	23.423	0.436
		25	-0.021	-0.011	23.974	0.463
		26	0.033	0.030	25.276	0.447
		27	-0.005	-0.007	25.310	0.502
		28	-0.010	-0.009	25.435	0.550
		29	0.044	0.055	27.749	0.478
		30	0.017	0.013	28.112	0.512
		31	0.035	0.041	29.615	0.485
		32	-0.007	-0.010	29.681	0.534
		33	-0.086	-0.080	38.648	0.194
		34	0.042	0.040	40.849	0.164
		35	0.026	0.011	41.686	0.171
		36	-0.009	-0.010	41.789	0.200

TABLA 1.6

CORRELOGRAMA DE RESIDUALES AL CUADRADO

Date: 06/01/09 Time: 16:52
Sample: 1 1184
Included observations: 1184
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term(s)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.022	0.022	0.5585	
		2	0.030	0.029	1.6193	0.203
		3	-0.027	-0.028	2.4740	0.290
		4	-0.008	-0.007	2.5423	0.468
		5	-0.002	0.000	2.5451	0.637
		6	-0.012	-0.012	2.7083	0.745
		7	-0.004	-0.004	2.7264	0.842
		8	-0.007	-0.006	2.7882	0.904
		9	-0.033	-0.033	4.1059	0.847
		10	-0.026	-0.024	4.8935	0.843
		11	-0.034	-0.031	6.2409	0.795
		12	-0.017	-0.016	6.5724	0.833
		13	-0.025	-0.024	7.3031	0.837
		14	-0.021	-0.021	7.8213	0.855
		15	-0.044	-0.044	10.112	0.754
		16	-0.020	-0.020	10.581	0.782
		17	0.032	0.033	11.846	0.754
		18	0.018	0.013	12.220	0.787
		19	-0.015	-0.022	12.478	0.822
		20	0.068	0.067	18.119	0.515
		21	-0.028	-0.033	19.078	0.517
		22	0.078	0.071	26.406	0.191
		23	-0.002	-0.004	26.413	0.234
		24	-0.032	-0.043	27.658	0.229
		25	-0.014	-0.013	27.882	0.265
		26	0.004	0.007	27.903	0.312
		27	-0.027	-0.031	28.768	0.322
		28	-0.018	-0.018	29.169	0.353
		29	-0.030	-0.026	30.290	0.349
		30	-0.021	-0.022	30.821	0.374
		31	-0.007	-0.000	30.887	0.421
		32	-0.027	-0.023	31.760	0.428
		33	-0.002	0.003	31.764	0.479
		34	-0.039	-0.041	33.634	0.437
		35	-0.024	-0.021	34.317	0.453
		36	0.002	0.004	34.323	0.501

ANEXO 2: SIMULACIÓN MONTE CARLO - PSEUDOCÓDIGO

Para la simulación Monte Carlo hay dos funciones principales: MCAmericanOption que simula la opción un número dado de veces a través de la función AmericanOption, que construye un árbol simulado para la opción utilizando un recorrido en profundidad. Es esencial que el árbol simulado sea recorrido en profundidad almacenando la mínima cantidad de datos necesaria, porque en caso contrario, el algoritmo sería exponencial no sólo en tiempo sino también en memoria, limitando así la capacidad de simulación. Para el pseudocódigo, la palabra *low* se usa para referirse al estimador sesgado hacia abajo y la palabra *high* para el estimador sesgado hacia arriba.

MCAmericanOption: Requiere nroSims (número de simulaciones), ramas, ejercicios y los parámetros de la opción (Spot, Strike, tasa, volatilidad, plazo).

```
/* Se asigna la memoria necesaria */
real ctrl, bls, limite, signo = 1 (call) ó -1 (put)
real low, high, est, intervalo(2)       // Parámetros de salida
real estLow(i)  con i = 1,2,…,nroSims   // Estimadores Low
real estHigh(i) con i = 1,2,…,nroSims   // Estimadores High
real control(i) con i = 1,2,…,nroSims   // Control de varianza
/* Simulaciones */
para i desde 1 hasta nroSims
     /* Árbol simulado */
     low, high, ctrl ← AmericanOption(opción, ramas, ejercicios)
     estLow(i)  = low
     estHigh(i) = high
     control(i) = ctrl
fin para
/* Control de varianza */
ctrl = promedio(control)
bls  = BlackScholes(opción)
low  = promedio(estLow) - ctrl + bls // Estimador Low
high = promedio(estHigh)- ctrl + bls // Estimador High

/* Se puede retornar low, high, est, intervalo */

// El valor de la opción, y por lo tanto sus estimadores, tiene un límite
// inferior dado por (Spot-Strike)+ para opciones call o (Strike-Spot)+
// para las put
limite = max(0, signo*(Spot-Strike))
low  = max(limite, low)
high = max(limite, high)

est = 0.5*low+ 0.5*high   // Estimador del valor de la opción
Zα/2 = 1-α/2 cuantil de la distribución normal estándar
intervalo(1) = max(limite, low  - Zα/2*desviación(estLow))
intervalo(2) = max(limite, high + Zα/2*desviación(estHigh))
```

La función MCAmericanOption muestra cómo utilizar los resultados de la construcción de un árbol simulado para obtener los estimadores y el intervalo de confianza. En la construcción del árbol simulado se requiere la función AmericanOption, la cual tiene un árbol de estimadores (*low* o *high*) y el control de varianza basado en la valoración de la opción europea.

AmericanOption: Requiere las ramas, ejercicios y los parámetros de la opción (Spot, Strike, tasa, volatilidad, plazo).

```
/* b = Nro de ramas y d = nro de ejercicios. Como se usa la primera
/* posición para almacenar los datos actuales, todos los vectores y
/* matrices van desde 1 hasta d+1 */
real control, signo = 1 (call) ó -1 (put)
real w(j) con j = 1,2,…,d+1  // Posición de la rama en cada ejercicio
real precio(i,j) con i = 1,…,b y j = 1,…,d+1  // Árbol de precios
real estima(i,j) con i = 1,…,b y j = 1,…,d+1  // Árbol de estimadores
/* Inicialización */
precio(1,1) = Spot
w(1) = 1
control = 0
para j desde 2 hasta d+1
     w(j) = 1
     precio(w(j),j) = GenerarPrecio(precio(w(j-1),j-1),opción)
fin para
/* Procesamiento del árbol */
j = d+1
mientras j > 0
     caso 1: j=d+1 y w(j)<b // último ejercicio, rama intermedia
        estima(w(j),j) = 'Estimador del nodo'
        /* Control de Varianza */
        control = control + OpciónEuropea(precio(w(j),j),opción)
        /* Generación del siguiente precio*/
        w(j) = w(j)+1
        precio(w(j),j) = GenerarPrecio(precio(w(j-1),j-1),opción)
     fin caso 1
     caso 2: j=d+1 y w(j)=b // último ejercicio, última rama
        estima(w(j),j) = 'Estimador del nodo'
        control = control + OpciónEuropea(precio(w(j),j),opción)
        w(j) = 0
        j = j-1
     fin caso 2
     caso 3: j<d+1 y w(j)<b // ejercicio y rama intermedia
        estima(w(j),j) = 'Estimador del nodo'
        si j>1
           w(j) = w(j)+1
           precio(w(j),j) = GenerarPrecio(precio(w(j-1),j-1),opción)
           para i desde j+1 hasta d+1
              w(i) = 1
              precio(w(i),i) = GenerarPrecio(precio(w(i-1),i-1),opción)
           fin para
           j = d+1
        sino
           j = 0
        fin si
     fin caso 3
     caso 4: j<d+1 y w(j)=b // ejercicio intermedio, última rama
           estima(w(j),j) = 'Estimador del nodo'
           w(j) = 0
           j = j-1
     fin caso 4
fin mientras
control = control / (b^d) // Para el promedio hay b^d precios en d+1
/* Retornar el estimador y el control de varianza
/* NOTA: Todos los resultados deben darse en valor presente*/
retornar estima(1,1) y control
```