

Programa Óptimo para la Asignación de Recursos en Redes Wi-Fi con Infraestructura

Albeiro de Jesús Aguirre Gaviria

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín, Colombia
Noviembre 2014

Programa Óptimo para la Asignación de Recursos en Redes Wi-Fi con Infraestructura

Albeiro de Jesús Aguirre Gaviria

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de:
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director:

Ph.D. Juan José Jaramillo Jiménez

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín, Colombia
Noviembre 2014

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

Agradecimientos

Mis sinceros agradecimientos a la universidad EAFIT, por haberme dado la oportunidad de desempeñarme como estudiante de la maestría y pertenecer a este proyecto de investigación.

Una inmensa gratitud al profesor Juan José Jaramillo por brindarme asesoría en este proyecto; sus observaciones y correcciones fueron fundamentales en todo el proceso del proyecto.

Agradecimientos a mi madre Thelma y a Zenaida, quienes me dieron siempre su apoyo moral incondicional, por último, a mi hijo Maximiliano quien me regaló gran parte de su tiempo en la elaboración de este trabajo.

Resumen

Este trabajo estudia los aspectos de un programa óptimo de asignación de recursos en redes Ad-hoc, el cual se basa en el trabajo conjunto de dos algoritmos [1], uno que controla la llegada de paquetes elásticos y otro que transmite paquetes elásticos e inelásticos en la red. Siendo la red Wi-Fi con infraestructura un caso particular de las redes Ad-hoc, se propone este programa óptimo para el estudio del comportamiento de los déficits de paquetes inelásticos y las colas de paquetes elásticos en el tráfico de datos en una red Wi-Fi con infraestructura. Esto se debe a que el programa óptimo incorpora en su modelo el cumplimiento de los requisitos en los tiempos de retraso máximo de los paquetes inelásticos en el tráfico de datos y el servicio del mejor esfuerzo, dos de los grandes retos que deben afrontar hoy en día las redes inalámbricas.

Índice general

Introducción	1
1. Marco tecnológico	4
1.1. Algunos aspectos de redes inalámbricas	5
1.1.1. Interferencia en redes inalámbricas	6
1.1.2. Canal activo o inactivo de un enlace	7
1.2. Flujos elásticos e inelásticos	7
1.3. La red Wi-Fi	8
1.4. Protocolos de red Wi-Fi	9
1.5. Capa física en Wi-Fi	11
1.6. Capa de enlace en Wi-Fi	12
1.6.1. Protocolo CSMA/CA	12
1.6.2. Funciones de coordinación de acceso al medio de Wi-Fi	16
1.7. Canalización del espectro de las redes Wi-Fi	17
2. Aspectos preliminares y problema de optimización	19
2.1. Asunciones del modelo de red	19
2.2. Formulación del problema	22
2.3. Solución del problema por descomposición dual	27
3. Algoritmo dinámico y resultados de convergencia	33
3.1. Algoritmo controlador y algoritmo programador	34
3.2. Igualdad entre dos programaciones	35
3.3. Descripción de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$	45
3.4. Resultados de convergencia	50
4. Simulaciones	85
4.1. Grafo de interferencia	85
4.2. Variación del parámetro ϵ	87
4.3. Variación del parámetro T	88
4.4. Variación del parámetro w_l	91
4.5. Comparaciones entre el algoritmo programador y CSMA/CA y PCF	93
Conclusiones	95
Bibliografía	98

Introducción

Las redes Wi-Fi que dan acceso a la Internet son de mucha importancia para millones de usuarios, ya que no requieren de cableado para tener acceso a Internet y además le permiten a las personas tener movilidad durante una conexión en una determinada área de acceso. Las áreas de acceso Wi-Fi abundan en muchas partes tales como en los hogares, en las bibliotecas, en los parques, en las universidades, entre otros. La propagación de áreas Wi-Fi en muchos lugares ha tenido gran acogida dado que se implementan como tecnologías de acceso a Internet de bajo costo; inclusive existen grupos de expertos como [2] que difunden de forma gratuita ideas para que las comunidades en vías de desarrollo construyan sus propias redes Wi-Fi.

Las conexiones que establecen los usuarios a Internet en una área Wi-Fi, las hacen a través de la utilización de múltiples dispositivos electrónicos denominados estaciones inalámbricas tales como los portátiles, los smartphones (celulares inteligentes), las consolas de videojuegos, las tabletas, y otros que incorporan en sus tecnologías la conexión a Wi-Fi. Dichos dispositivos permiten el uso de una gran variedad de aplicaciones como el correo electrónico, la navegación Web, las videollamadas, la radio por Internet y otras aplicaciones que la red Wi-Fi debe soportar de la misma manera como lo hacen las redes cableadas.

En el tráfico de datos en conexiones en redes Wi-Fi se presentan grandes desafíos que son generales en las redes inalámbricas; un desafío es el de la congestión que es producida por el alto crecimiento del tráfico, mientras que otro desafío es el de incorporar aplicaciones multimedia con requisitos de retardo máximo, los cuales hacen que se presenten ciertas probabilidades de pérdida de datos en la red. La congestión ocurre debido al espacio limitado de memoria o buffer de los equipos implicados en la red. Muchas aplicaciones multimedia de audio y video son muy sensibles al retardo durante el envío y a la variabilidad del tiempo en la entrega (jitter).

Otro aspecto a considerar en Wi-Fi es el protocolo IP (Internet Protocol) implementado en la Internet, el cual se basa en proporcionar un servicio de mejor esfuerzo a todos los datos que transporta, es decir, hace todo lo posible por trasladar cada dato desde el emisor al receptor tan rápido como es posible, pero no promete ningún tipo de garantías respecto al retardo que pueda sufrir un paquete durante el envío ni tampoco la presencia de jitter [3].

Para el caso general de redes inalámbricas, con los desafíos mencionados, se ha buscado la manera de asignar recursos y encontrar un buen desempeño en la red donde la optimización y los procesos estocásticos han sido herramientas de gran utilidad para hallar una solución. Existen estudios de optimización basados en algoritmos en que no fueron consideradas las pérdidas de paquetes de datos, como los de [4], [5] y [6] de acuerdo a [1]. Otros estudios en que si se tuvieron en cuenta las pérdidas de paquetes de datos pero con soluciones aproximadas, algunos como [7] y [8] según [1].

Para redes Wi-Fi, algunos trabajos se basan en realizar variantes de los mismos protocolos fundamentados en los estándares de calidad de servicio para Wi-Fi, los cuales hacen heurísticas que dan soluciones parciales a la garantía de calidad de servicio más no presentan un modelo general que establezcan dicha garantía; casos particulares se pueden ver en [9] y [10].

La presente propuesta se basa en el modelo expuesto en [1] analizando como caso particular las redes Wi-Fi con infraestructura. Este modelo combina la optimización y los procesos estocásticos para redes inalámbricas en general que están en modo Ad-hoc. Esto es, redes que no requieren de infraestructura, los nodos pueden comunicarse con otros siempre y cuando estén en sus rangos de transmisión y sus enlaces no interfieren el uno con el otro. El modelo elabora un algoritmo programador y un controlador de congestión en los que se incorporan paquetes de datos con requisitos de intervalos de tiempo y con servicio de mejor esfuerzo.

Dado que las redes Wi-Fi son un caso particular de redes Ad-hoc de gran importancia comercial, se utilizará el modelo antes mencionado para estudiar algunos de los desafíos de las redes Wi-Fi de acuerdo a los siguientes objetivos.

Objetivo general

Exponer los aspectos de un programa óptimo que asigna recursos a redes en modo Ad-hoc y, haciendo uso de tales aspectos, estudiar el comportamiento de los déficits de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en el tráfico de datos de una red Wi-Fi con infraestructura.

Objetivos específicos

- Describir algunos aspectos en las comunicaciones de las redes Wi-Fi.
- Comprobar los resultados de convergencia del programa óptimo.

- Detallar las pruebas de algunos resultados implicados en el programa óptimo que fueron reducidas u omitidas.
- Explicar el comportamiento de los déficits de paquetes inelásticos y las colas de paquetes elásticos en una red Wi-Fi con infraestructura, a través de simulaciones del programa óptimo.

Para dar cumplimiento a los anteriores objetivos el trabajo se ha estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se hace una descripción de algunos aspectos básicos de la teoría de redes inalámbricas, los cuales son fundamentales para comprender el modelo de [1] y tener presente algunos elementos en el diseño del tipo de red Wi-Fi en la que se simula el programa óptimo. El capítulo 2 se dedica al estudio del programa óptimo, mostrando sus aspectos preliminares: asunciones del modelo de red, el problema formulado por optimización y los aspectos relacionados en la solución por descomposición dual. En el capítulo 3 se describen los algoritmos de control de congestión y programador, se hacen las pruebas detalladas de los resultados de convergencia presentados en el modelo, se comprueba la igualdad entre dos programaciones lineales de paquetes en la red dada en el modelo, se describen y comprueban algunas propiedades de la cadena de Markov de los déficits de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en la red. Todo esto se debe a que las pruebas y las descripciones de los resultados implicados en el modelo en [1] fueron reducidas u omitidas. En el capítulo 4 se diseña una red particular Wi-Fi con infraestructura con algunas condiciones basadas en el capítulo 1, luego se describe el comportamiento de los déficits y las colas en la red, a través de simulaciones en Matlab del programa óptimo, variando los parámetros ϵ , T y w_l , los cuales sirven como base para el estudio de cualquier red Wi-Fi con infraestructura. Por último, en las conclusiones se presentan los resultados del trabajo de acuerdo a los propósitos planteados.

Capítulo 1

Marco tecnológico

Dado que el estudio de las redes inalámbricas es bastante amplio, en el presente capítulo los temas que se exponen serán descritos en forma sucinta. Las dos primeras secciones están dedicadas a algunos aspectos relevantes que se deben tener en cuenta en cualquier red inalámbrica de datos, aspectos de gran importancia para la comprensión de las secciones posteriores. Además, pueden servir como base para la comprensión de algunos elementos del modelo de red y de otros elementos del programa óptimo que serán estudiados en el capítulo 2. Elementos como enlace, canal, interferencia, flujos de paquetes elásticos e inelásticos y otros, serán explicados en estas dos primeras secciones. Las siguientes cuatro secciones están dedicadas al estudio de los protocolos de las redes Wi-Fi, que ayudan a entender cómo se comunican los dispositivos en una red Wi-Fi de conexión a Internet y cómo algunos de ellos se pueden relacionar con aspectos del programa óptimo expuestos en el capítulo 2. Uno de los aspectos que se describen es cómo los dispositivos en las transmisiones de una red Wi-Fi evitan las interferencias entre ellos, justificando porqué se tienen en cuenta las restricciones por interferencia en el programa óptimo, tales restricciones serán explicadas en detalle en el capítulo 2. Otro aspecto es cómo un dispositivo Wi-Fi, antes de transmitir, explora si el canal está activo ó inactivo, caso que corresponde al estado del canal conocido en el modelo de red del capítulo 2. Además, la descripción que se hará del protocolo CSMA/CA y la función de coordinación puntual PCF en Wi-Fi, permitirá que en el capítulo 4 se puedan comparar con el algoritmo programador. Una similitud que tienen la red Wi-Fi con infraestructura con el programa óptimo del capítulo 3, es que algunos dispositivos de la red pueden transmitir simultáneamente siempre y cuando cumplan con las restricciones de interferencia. En el caso de Wi-Fi dicho cumplimiento estará dado por la transmisión en algunos canales no solapados, lo cual se abordará en la última sección de este capítulo. Por otro lado, la descripción de los aspectos de Wi-Fi en las dos últimas secciones de este capítulo, permite que en el capítulo 4 se exponga la simulación del programa óptimo a partir de una red Wi-Fi particular.

1.1. Algunos aspectos de redes inalámbricas

La información que transmite la red Internet pertenece al uso de aplicaciones como los correos electrónicos, las páginas web, los videos en vivo, las descargas de archivos y otras; las cuales pueden transitar por redes cableadas o por redes inalámbricas. Una de las características de la información que se envía entre un emisor y un receptor en la Internet es que se puede representar por códigos, por ejemplo, los códigos binarios de ceros y unos. Otra característica es que la información se divide en paquetes de datos, con el fin de transportarse en la red. Cuando los paquetes de datos llegan a la red deciden las distintas rutas hasta llegar a su destino y cuando transitan por redes inalámbricas lo hacen por ondas electromagnéticas a determinados rangos de frecuencias.

Cabe señalar que existen diferentes tipos de redes inalámbricas. Una de ellas son las que convergen en voz o video, por ejemplo, las que tienen tecnologías de radioteléfonos; estas no se enmarcan en este estudio. Otras son las redes inalámbricas de datos, las que transportan información como las de Internet. Una de ellas es la red Wi-Fi, donde se enfoca el presente trabajo. En adelante, cuando se mencione redes inalámbricas, se hará referencia a redes inalámbricas de datos. De igual manera, se llamará enlace inalámbrico a la comunicación entre un dispositivo emisor y un dispositivo receptor en una red inalámbrica.

Según la teoría de redes, la información a transmitir en un enlace inalámbrico se debe hacer en un canal. El canal es una banda de frecuencias del espectro de radio que se encarga de transportar la información; en el caso de redes Wi-Fi algunos canales están en las bandas de 2.4 GHz y 5 GHz, los cuales se pueden consultar en [2]. Un aspecto a tener en cuenta en un enlace inalámbrico es que en la transmisión de paquetes en un canal, algunos de estos se pueden perder a causas de las interferencias, aspecto que será explicado en la subsección 1.1.1. La figura 1.1 ilustra la comunicación entre un emisor y un receptor de una red inalámbrica en un canal con posibilidad de interferencia.

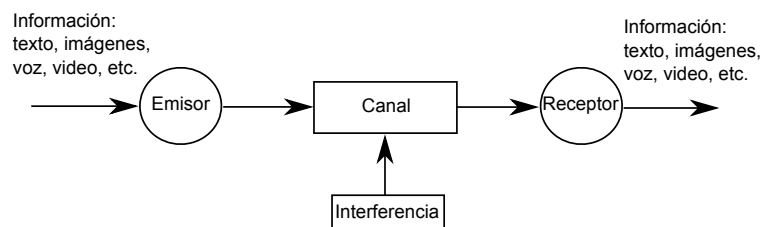


Figura 1.1: Comunicación en un canal con posible interferencia.

Por otro lado, en un sentido abstracto, las redes inalámbricas se pueden ilustrar por me-

dio de grafos. Los nodos del grafo representan los dispositivos inalámbricos o usuarios de la red y las aristas representan los enlaces de la red. La figura 1.2 ilustra dos ejemplos de redes inalámbricas, una red Wi-Fi con infraestructura, donde cada nodo o usuario puede establecer un enlace con un nodo central denominado punto de acceso (AP, Access Point); donde el AP permite a los usuarios conectarse a la Internet. El otro ejemplo, es una red Ad-hoc como se menciona en la introducción del trabajo, donde cada nodo tiene un enlace con el nodo vecino que está a su alcance. En el contexto de las redes que permiten el acceso a Internet, una red Wi-Fi con infraestructura se puede ver como un caso particular de una red Ad-hoc.

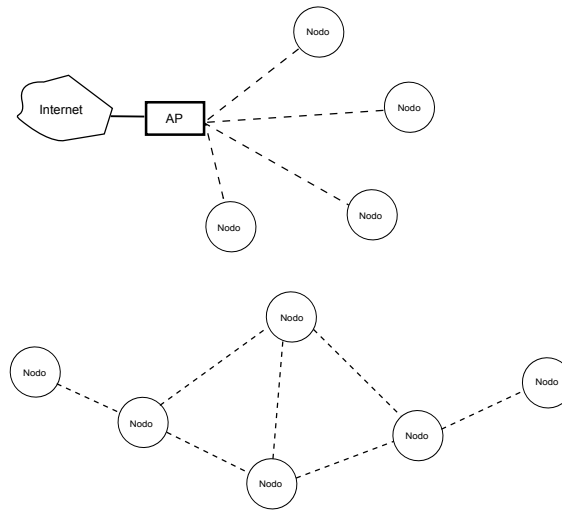


Figura 1.2: Dos grafos de redes inalámbricas.

1.1.1. Interferencia en redes inalámbricas

En la sección 1.1 se mencionó que la información en redes inalámbricas se transmite a través de ondas electromagnéticas a determinados rangos de frecuencias, por lo cual, cuando se propagan las ondas electromagnéticas a través de un canal en un enlace, puede haber interferencia con otras ondas electromagnéticas que están en el mismo canal. Por el principio de superposición, cuando interfieren dos o más ondas, se puede dar una interferencia constructiva o destructiva en las ondas resultantes, siempre y cuando tengan la misma longitud de onda y diferencia de fase constante. En algunas ocasiones, estas interferencias en una red inalámbrica pueden presentarse entre los mismos dispositivos de la red o por otras fuentes de radio diferentes a los de la red. El caso particular de interferencia entre dispositivos que están en un mismo canal en una red Wi-Fi será estudiado en la subsección 1.6.1.

Otros tipos de interferencia que se manejan en la teoría de redes referente a la propaga-

ción de las ondas electromagnéticas son: la atenuación de las ondas, debido a que atraviesan objetos, y la propagación multicamino, cuando la onda o partes de la onda se refleja en los objetos y en el suelo, tomando varios caminos con diferentes distancias entre el emisor y el receptor. Para mayores detalles de estos tipos de interferencia se pueden ver en [3].

1.1.2. Canal activo o inactivo de un enlace

En la sección 1.1 se mencionó que el canal de un enlace inalámbrico es una banda de frecuencias por la cual se transmiten los paquetes. Dependiendo de la tecnología en la red inalámbrica, la red puede tener un método en cuanto al uso del canal; para el caso particular de redes Wi-Fi en la sección 1.5 se describirá diferentes métodos de uso del canal. En el uso del canal, la red puede tener un alcance en la transmisión de unos pocos metros hasta decenas de kilómetros. Este alcance en la transmisión hace que se presente un área de acceso a la red, la cual permite a los usuarios tener movilidad dentro del área y mantener posibilidades de enlaces a la red.

La movilidad del usuario en el área de acceso hace que el canal en que se comunica el usuario pueda estar activo, es decir, el usuario recibe los paquetes que le envían o los paquetes que él envía son recibidos, en el caso contrario, el canal puede estar inactivo. El canal inactivo se puede dar por alguno de los siguientes casos. En esa movilidad del usuario en el área de acceso, en una transmisión de paquetes, se puede presentar una alta interferencia por los obstáculos, la cual puede permitir que los paquetes no lleguen a su destino. Otro caso es que, a medida que aumenta la distancia entre el emisor y el receptor, las ondas electromagnéticas van disminuyendo su intensidad, por lo que en algún momento no se detecta la señal y no se pueda transmitir. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, redes como Wi-Fi tienen mecanismos para detectar si el canal está activo ó inactivo, los cuales serán discutidos en la subsección 1.6.1.

1.2. Flujos elásticos e inelásticos

En primer lugar, téngase en cuenta que la información que transita en la Internet se divide en paquetes. Ahora, se considerará que un flujo de datos es una sucesión de paquetes que provienen de una fuente, en el cual los paquetes tienen una dirección específica para la llegada a su destino. Los flujos de datos se pueden clasificar en flujos elásticos e inelásticos. Los flujos elásticos corresponden a aquellas aplicaciones en las que no hay requisitos en los retardos en la entrega de paquetes, incluso la entrega puede ser prolongada, lo único que importa es que los paquetes lleguen completos e íntegros. Aplicaciones como el correo electrónico, la navegación web, las descargas completas de archivos de video o audio que luego se ejecutan son algunos ejemplos de flujos elásticos. En cambio, los flujos inelásticos corresponden a ciertas aplicaciones multimedia que tienen requisitos de retardo; el no cumplimiento de ellos ocasionan la pérdida parcial o completa de paquetes. Según [3] las aplicaciones multimedia

de flujos inelásticos se clasifican en flujo de audio y video almacenado, flujo de audio y video en vivo y flujo de audio y video interactivo en tiempo real.

El flujo de audio y video almacenado son aplicaciones que reproducen archivos de audio y video desde un servidor; tienen como características que durante la reproducción se pueden pausar, adelantar o retroceder; además, mientras están en un punto de la reproducción se van descargando partes posteriores del archivo, sin la necesidad de esperar una descarga total para la ejecución del archivo. Una desventaja en la calidad del servicio es, que durante la reproducción el audio y video se detenga o se presentan partes incompletas, debido a los retardos de paquetes en la entrega.

El flujo de audio y video en vivo, corresponde en su mayoría a las aplicaciones que prestan servicio de televisión o radio por Internet en vivo. Una de las características en la reproducción es que un cliente no puede avanzar a las partes posteriores del audio y video, debido a que se reproduce en vivo. De igual manera, la calidad del servicio en la reproducción presenta la misma desventaja que el flujo de audio y video almacenado, pero tiene menos restricciones en el retardo que el flujo de audio y video interactivo en tiempo real.

El flujo de audio y video interactivo en tiempo real, corresponde a las aplicaciones que prestan servicios de comunicación en tiempo real, tales como las videollamadas y videoconferencias. Son flujos muy restrictivos en los retardos de paquetes que se envían de un emisor a un receptor, los retardos no deben superar unos pocos milisegundos, deben ser aquellos que el ser humano no pueda percibir. Otra afectación de estos flujos en la calidad de su servicio es la presencia de jitter, el cual hace que se presente sobresaltos en la reproducción del audio y video interactivo.

1.3. La red Wi-Fi

Una de las redes que permiten tener conexión a la red global Internet es la red inalámbrica Wi-Fi con infraestructura como la ilustrada en uno de los grafos de la figura 1.2. Este tipo de red abunda en muchas partes y son muchos los dispositivos que incorporan conexión a Wi-Fi. A las redes Wi-Fi en general se identifican con el estándar 802.11 dado por el IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers), a este estándar se adiciona algunas letras para diferenciar las distintas tecnologías Wi-Fi y de algunas especificaciones generales. Por ejemplo 802.11a y 802.11b se diferencian en la velocidad máxima de transmisión de datos, cómo se modula la señal para transmitir los datos, el alcance en la transmisión y otros; en [2] se pueden consultar estos y otros aspectos de los estándares Wi-Fi.

Para establecer la comunicación entre un emisor y un receptor en una red inalámbrica con conexión a Internet se necesitan de unos protocolos que establecen un conjunto de reglas

Aplicación 7
Presentación 6
Sesión 5
Transporte 4
Red 3
Enlace 2
Física 1

Figura 1.3: Capas del modelo OSI.

y normas para comunicarse entre sí. Según [3] un protocolo, “es el que define el formato y el orden de los mensajes intercambiados entre dos o más entidades que se comunican, así como las acciones tomadas en la transmisión o recepción de un mensaje u otro suceso”. La red Wi-Fi con infraestructura utiliza dos importantes conjuntos de protocolos, los protocolos TCP/IP (Protocolos de Transmisión y de Internet) que se basan en la transmisión de datos entre dispositivos con conexiones a Internet y el modelo OSI (Interconexión de sistemas abiertos), que es un modelo teórico que describe el modo en que se desplazan los datos de un emisor a un receptor; estos dos modelos tienen algunas similitudes y algunas diferencias. Son muchos los textos de redes dedicados al estudio de estos protocolos, aspectos esenciales a este tema son expuestos en la siguiente sección 1.4, empezando por el abstracto modelo OSI y luego el modelo TCP/IP el que en la práctica se utiliza.

1.4. Protocolos de red Wi-Fi

El modelo OSI fue implementado por la ISO (International Standards Organization) como un modelo de referencia para las comunicaciones en red, el cual divide en siete capas el proceso de transmisión de los datos entre un emisor y un receptor. Respecto a las capas del modelo OSI según [2], cada capa agrupa algunas funciones, cada capa es independiente de las capas que la rodean y cada una se apoya de los servicios prestados por la capa inferior mientras que proporciona sus servicios a la capa superior. La figura 1.3 ilustra las siete capas del modelo OSI.

- La capa física. Se refiere al uso del medio en el que se van a transportar los datos, como el cable coaxial y la fibra óptica en redes cableadas y el espectro de radio en redes inalámbricas. Esta capa define los métodos de cómo se van a transmitir las señales en el medio físico; para el caso específico de redes Wi-Fi, se describen en la sección 1.5.

- La capa de enlace. También se le conoce como capa MAC (control de acceso al medio), se encarga de comunicar dispositivos adyacentes en la red, utiliza los servicios de la capa física, organiza los datos que se transmiten y corrobora que los datos lleguen sin errores. Para el caso específico de redes Wi-Fi, será descrita en la sección 1.6.
- La capa de red. Permite la interconexión entre redes, se encarga de transferir los paquetes de un enlace a otro en la selección de la ruta entre un emisor y un receptor; el protocolo más común de ésta capa es el IP (protocolo de Internet).
- La capa de transporte. Se encarga de lograr una comunicación confiable entre el emisor y el receptor, asegurando que los paquetes se reorganicen y lleguen sin errores.
- La capa de sesión. Describe el control del diálogo entre las aplicaciones del emisor y receptor, también puede hacer procedimientos de comprobación entre puntos, de manera que si hay una falla en un determinado punto puede retransmitir desde el último punto de comprobación y no desde el inicio.
- La capa de presentación. Define como se representan los datos antes de que lleguen a la aplicación, debido a que diferentes dispositivos tienen diferentes maneras de representar datos como los colores, imágenes, números, caracteres y otros. Realiza las conversiones necesarias para que un dispositivo pueda interpretarlas.
- La capa de aplicación. Describe cómo interactúan los datos con las aplicaciones. Por ejemplo algunos protocolos de ésta capa tales como FTP (para la transferencia de archivos), HTTP (para el acceso de páginas web), HTTPS (para transferencia de hipertexto seguro y encriptado), SMTP (para el correo electrónico) y otros, aplicaciones que a diario se utilizan en la comunicación por la red Internet.

Los protocolos TCP (Protocolo de Control de Transmisión) y el IP (Protocolo de Internet), son los más importantes en la red Internet. Se le conocen conjuntamente TCP/IP, fueron desarrollados para permitir que cooperen dos sistemas terminales remotos a fin de compartir recursos a través de la red. A diferencia del modelo OSI, utiliza solamente cinco capas: la capa física, la capa de enlace, la capa de red/IP, la capa de transporte y la capa de aplicación. La figura 1.4 ilustra las cinco capas TCP/IP.

Los protocolos TCP/IP hacen que la tres últimas capas del modelo OSI, ilustradas en la figura 1.3, queden en una sola capa denominada aplicación y deja intacta las otras capas. Las primeras tres capas son destinadas a la interoperabilidad entre los diferentes equipos de distintos fabricantes, la capa cuatro para todos aquellos equipos que utilicen TCP/IP y lo de la capa cinco se destina para todas las aplicaciones que se comparten en la comunicación entre emisores y receptores. Todas estas capas se utilizan para las conexiones a la red Internet. Un mayor estudio de los protocolos OSI y TCP/IP se puede ver en [3].

Aplicación 5
Transporte 4
Red/IP 3
Enlace 2
Física 1

Figura 1.4: Capas TCP/IP.

Los protocolos TCP/IP hacen parte de los protocolos que se utilizan en Wi-Fi. Las diferencias entre los protocolos TCP/IP de redes Wi-Fi con los de redes cableadas, radican en las dos primeras capas de TCP/IP, la capa física y la capa de enlace. Estas dos capas son muy importantes en Wi-Fi, por lo cual en forma sucinta se expondrá en las siguientes dos secciones.

1.5. Capa física en Wi-Fi

La capa física se refiere al uso del medio en el que se van a transportar los datos, en el caso de Wi-Fi el medio es radioeléctrico. En Wi-Fi la capa física está dividida en dos, la subcapa PLCP (Physical Layer Convergence Procedure) que define una forma de mapear los datos en tramas susceptibles de ser transmitidas o recibidas a través de la capa PMD. La subcapa PMD (Physical Medium Dependent) es la encargada de la transmisión de las tramas de datos, ésta subcapa es la que se detalla a continuación.

La importancia de entender la subcapa PMD, radica en que esta explica cómo Wi-Fi transmite la información en el complejo medio radioeléctrico. Pero antes, hay que entender que cualquier tipo de información que se desea transmitir en Wi-Fi tiene una señal de banda de base, la cual primero pasa a un proceso de modulación, que consiste en modificar la señal de banda de base para luego pasarla al medio radioeléctrico a través de una señal con frecuencia más alta llamada portadora.

Existen diferentes técnicas de modulación en redes Wi-Fi, basadas en el espectro expandido, el cual consiste en ensanchar más el ancho de banda del que realmente se necesita en la transmisión de los datos, como ya se ha explicado. A continuación se presentan métodos de espectro expandido.

La modulación de espectro expandido por salto de frecuencia FHSS, consiste en dividir la banda de frecuencias de la transmisión de datos en varias frecuencias o subcanales, de manera que cada tramo de la información va saltando de un subcanal a otro, y cuyo tiempo

de permanencia es inferior a los 400 milisegundos. El patrón de los saltos se hace de forma aleatoria y se debe conocer tanto en el emisor como en el receptor.

El método de espectro expandido por secuencia directa DSSS consiste en remplazar cada bit de la información original a transmitir por una secuencia de bits representados a través de un código pseudoaleatorio, los cuales están en proporción directa al número de bits utilizados, donde la señal esparcida tiene una banda más ancha que la banda de base. La señal que genera el código pseudoaleatorio es independiente a la señal de la información original.

La multiplexación ortogonal por división de frecuencias OFDM, consiste en dividir la señal de ancho de banda en un conjunto de subportadoras con frecuencias específicas transmitidas paralelamente, en vez de utilizar una sola portadora de banda ancha. Las subportadoras se pueden traslapar sin que afecte a los datos transmitidos, el espaciamiento entre ellas es el adecuado y su separación es la misma entre portadoras consecutivas.

1.6. Capa de enlace en Wi-Fi

Como se mencionó en la sección 1.4 la capa de enlace se encarga de comunicar los dispositivos adyacentes a la red, organiza los datos que se transmiten y corrobora que lleguen sin errores. La capa de enlace en Wi-Fi está dividida en dos subcapas la LLC (Logical Link Control) reglamentada por [11] y la MAC (Medium Access Control) reglamentada por [12], en lo que sigue el estudio se centrará a la capa MAC de Wi-Fi.

En una red Wi-Fi con infraestructura cuando un dispositivo inalámbrico se asocia con un AP, estos empiezan a mandarse paquetes de datos entre sí; pero cuando existen más de un dispositivo inalámbrico que desean comunicarse con el AP a través de un mismo canal, debe existir un protocolo que coordine las transmisiones entre los dispositivos y el AP, es ahí donde entra en funcionamiento el protocolo MAC. En el uso de la terminología de aquí en adelante, en algunas ocasiones se llamará estación (STA) a cada nodo de la red Wi-Fi, a menos que sea necesario clarificarlo.

1.6.1. Protocolo CSMA/CA

Un protocolo MAC para redes es el de acceso múltiple por sondeo de portadora CSMA (Carrier Sense Multiple Access), para Wi-Fi se especifica como el protocolo CSMA/CA con evasión de colisión CA (Collision Avoidance), para redes alámbricas se implementa el protocolo CSMA/CD con detección de colisión CD (Collision Detection). El CSMA se ha diseñado para estaciones que comparten un mismo medio o canal de comunicación, con accesos aleatorios al canal, en los cuales al detectarse colisiones de paquetes en las transmisiones, las STAs transmisoras deberán retransmitir la información.

La figura 1.5 ilustra el modo de funcionamiento general del protocolo CSMA/CA en la capa MAC tanto en el emisor (Tx) como en el receptor (Rx) en una red Wi-Fi. Primero, el Tx tiene los paquetes listos (DATA) para enviar. Luego comprueba si el canal está disponible, enviando una trama corta de datos de solicitud de transmisión denominada RTS (Request To Send) al Rx, la cual contiene las direcciones MAC del Tx y del Rx. La estación Rx al recibir la trama RTS, en caso de que esté disponible para recibir información, contestará con una trama corta de preparado para enviar CTS (Clear To Send). En el caso de que Rx no esté disponible, el Tx retiene los paquetes durante un tiempo e intentará enviar de nuevo RTS. Al recibir CTS el Tx, asume que el canal está disponible y enviará DATA con determinada probabilidad, luego el Rx enviará una trama ACK (ACKnowledged) de que los paquetes fueron admitidos. En caso de no recibir ACK pudo haber colisiones de paquetes, la estación Tx vuelve a enviar RTS. Todos estos procedimientos se realizan en un número definido de veces para lograr que los paquetes lleguen exitosamente.

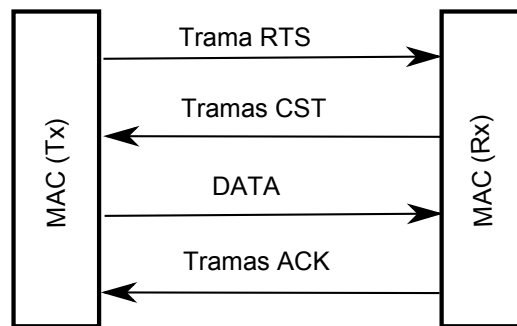


Figura 1.5: Modo de funcionamiento general CSMA/CA en Wi-Fi.

Un aspecto del modo CSMA/CA de Wi-Fi en la prevención de la colisión de paquetes es que agrega un tiempo de retroceso exponencial aleatorio en el caso de que el canal se encuentre ocupado, el cual se hace más eficiente al no detectar el canal todo el tiempo. A continuación se explican las ventajas y desventajas de CSMA/CA en Wi-Fi cuando las STAs transmiten en el mismo canal.

Una de las ventajas de CSMA/CA en Wi-Fi es la solución al problema del nodo oculto, el cual consiste en que una estación desea comunicarse con otra sin notar la presencia de una tercera. La figura 1.6 ilustra un poco esta situación. El nodo Tx_1 está comunicándose con el nodo Rx_1 , cuando el nodo Tx_2 transmita a Rx_1 , se presentará una colisión de paquetes en Rx_1 . Debido a que Tx_1 y Tx_2 no se pueden escuchar uno al otro para poder transmitir a Rx_1 , esto es porque ambos no están en sus regiones de transmisión. En cambio, si Tx_3 se comunica con Rx_2 no habría problema de nodo oculto, puesto que Tx_3 detectaría la presencia de Tx_2 por estar en su región de transmisión.

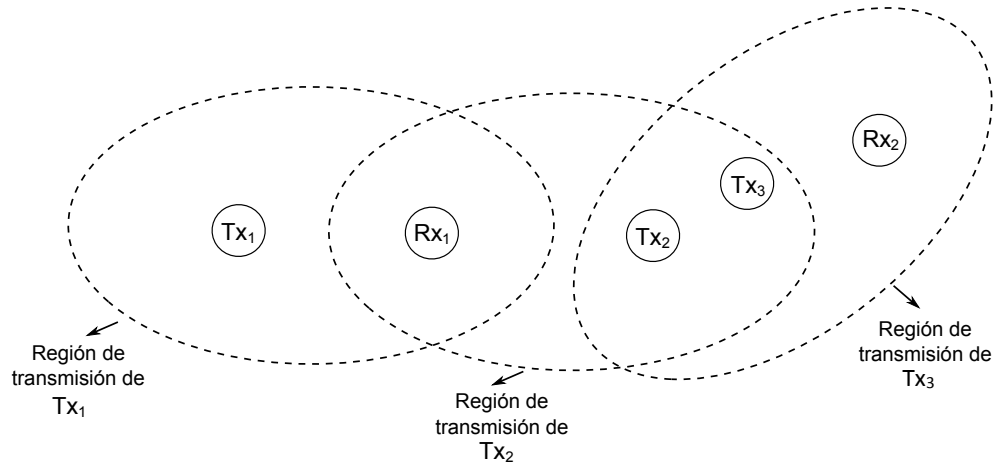


Figura 1.6: Problema del nodo oculto.

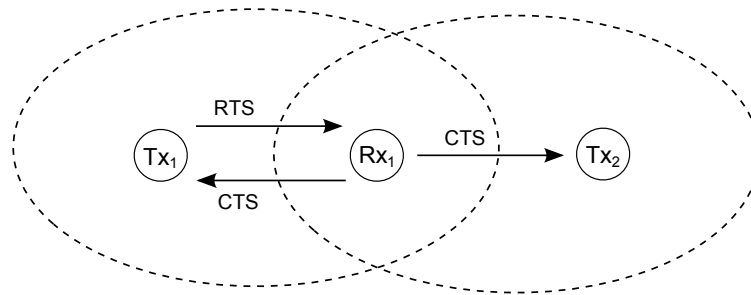


Figura 1.7: Solución del problema del nodo oculto en Wi-Fi.

La solución que presenta Wi-Fi al problema del nodo oculto está en el envío de las tramas de datos RTS/CTS, mencionadas anteriormente. La figura 1.7 ilustra esta solución. Cuando Tx_1 desea comunicarse con Rx_1 le envía RTS, para establecer la comunicación Rx_1 envía CTS a todos los transmisores asociados a él, por tanto Tx_2 escuchará que Rx_1 está ocupado por lo que postergará su transmisión para evitar colisiones.

Otra ventaja de CSMA/CA en Wi-Fi es la solución al problema del nodo expuesto, el cual se debe cuando un Tx desea comunicarse a un Rx en la presencia de otras transmisiones de redes vecinas. El Tx tendrá el problema de detectar que el medio está ocupado; la figura 1.8 ilustra este problema. El nodo B le está transmitiendo al nodo A. El nodo C detecta que el canal está ocupado debido a que escucha la transmisión entre B y A, por tanto C no puede transmitir a D, donde lo ideal es que C pueda comunicarse con D.

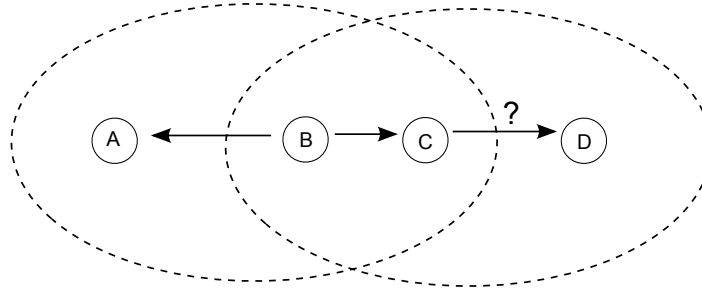


Figura 1.8: Problema del nodo expuesto.

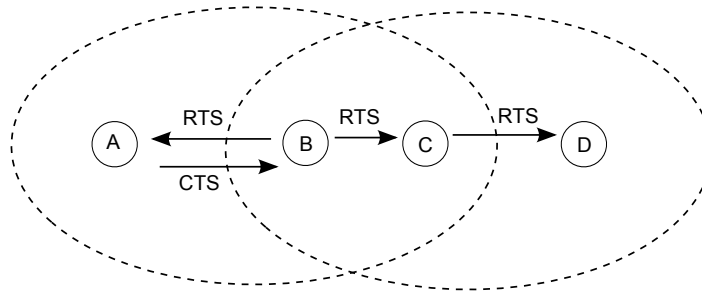


Figura 1.9: Solución del problema del nodo expuesto en Wi-Fi.

La figura 1.9 ilustra la solución al problema del nodo expuesto en Wi-Fi. La solución también está en la utilización de envío de las tramas RTS/CTS. El emisor transmite RTS y el receptor responde con CTS, cuando los vecinos escuchan CTS permanecen en silencio, pero al escuchar RTS y no CTS empiezan a transmitir.

Una de las desventajas de CSMA/CA en Wi-Fi es que existe la posibilidad de que dos o más estaciones transmitan datos simultáneamente al detectar el canal libre, por lo cual se pueden presentar colisiones de paquetes. Otra es la que tiene que ver con la calidad del enlace para la recepción de las tramas de datos, debido a otras interferencias, como las que fueron abordadas en la subsección 1.1.1. Por tanto, durante la transmisión hay que reconocer si los paquetes han llegado exitosamente o se han perdido durante la propagación.

En la siguiente subsección se verá cómo las estaciones en una red Wi-Fi se coordinan para acceder al canal de comunicación con en el fin de evitar las colisiones de paquetes durante las transmisiones, para lo cual, se describen algunos subniveles de la capa MAC en Wi-Fi que explican las coordinaciones de acceso al canal.

1.6.2. Funciones de coordinación de acceso al medio de Wi-Fi

Los diferentes modos de acceso al medio en Wi-Fi se describen por las siguientes funciones de coordinación, las cuales están representadas en la siguiente figura 1.10.

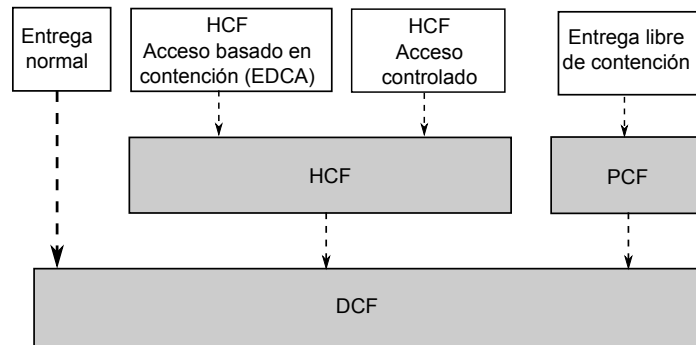


Figura 1.10: Funciones de coordinación de acceso al medio.

La función de coordinación distribuida DCF. Está en el nivel inferior de MAC, basada en CSMA/CA, como se explicó en la subsección 1.6.1, utiliza técnicas de acceso aleatorio en la contienda por el medio. Según [13] el modo DCF presenta dificultades en las transmisiones de aplicaciones multimedia, las cuales son limitadas por el tiempo y requieren ciertos requisitos de ancho de banda, retardo y jitter (variabilidad en el envío de paquetes). Esto se debe a que todas las estaciones compiten por el acceso al canal con la misma prioridad, no hay mecanismos para priorizar el tráfico de tiempo real y de diferenciación con el de datos. Cuando el tráfico es muy alto el rendimiento de la red se degrada.

La función de coordinación puntual PCF. Está por encima del subnivel DCF, según [12] es un método opcional para configurar redes Wi-Fi con infraestructura. El punto de acceso AP actúa como un punto coordinador que controla las transmisiones de paquetes de las STAs con el fin de eliminar la contienda entre ellas por el canal durante un periodo limitado de tiempo. Se puede considerar PCF para transmisiones de información crítica de audio y video, las cuales son limitadas por el tiempo. Aún así, se presentan dificultades, por ejemplo, es impredecible cuánto demora la transmisión de datos de una STA sondeada al AP, donde el periodo libre de contienda es limitado.

La función de coordinación híbrida HCF. En [12] se implementa como un método teórico de la calidad de servicio (QoS) en redes Wi-Fi, dicho método no da garantías de un funcionamiento correcto y óptimo. Incorpora la función HCF para la diferenciación del tráfico. La HCF combina DCF y PCF, permite un conjunto uniforme de secuencias de intercambio de frames de datos utilizados en la transmisión de datos con QoS durante los periodos de contención y libre de contención. Para ello utiliza el acceso al canal distribuido mejorado

(EDCA) y el mecanismo de acceso controlado del canal (HCCA). En [10] se pueden ver algunas mejoras de HCF en cuanto a la utilización del canal y en la diferenciación del tráfico en EDCA.

1.7. Canalización del espectro de las redes Wi-Fi

Como ya se ha explicado, el canal para redes Wi-Fi es un rango o banda de frecuencias en el espectro de radio. Para redes Wi-Fi hay un espectro de frecuencias permitido, el cual se divide en múltiples rangos de frecuencias denominados canales. En redes Wi-Fi con infraestructura, los APs tienen diferentes canales que permiten la comunicación con las estaciones que están en sus áreas de acceso, donde los canales pueden ser configurados por el administrador de la red. En [2] se pueden consultar los diferentes canales de los APs con estándares 802.11b/g y 802.11a.

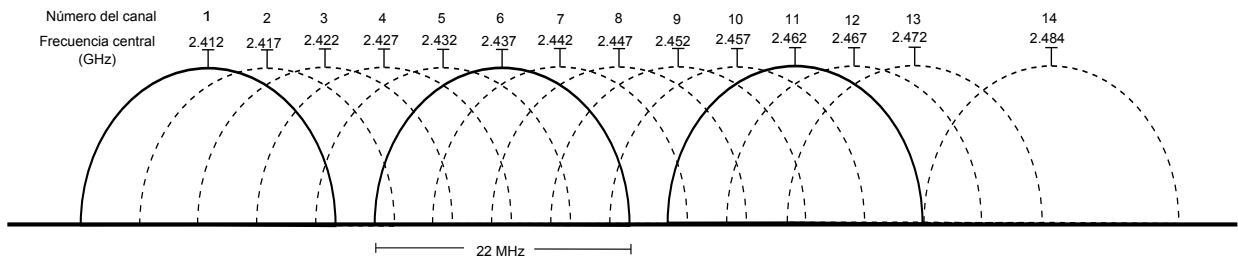


Figura 1.11: Solapamiento de canales 802.11 b/g.

Al tener una red Wi-Fi con diferentes canales, se pueden dar algunos canales que no se solapan entre sí. La figura 1.11 ilustra intuitivamente como se dan los canales en 802.11 b/g, y algunos canales que no se solapan entre sí tales como 1, 6 y 11. Esta canalización del espectro Wi-Fi presenta algunas ventajas en la red. Una de las ventajas es tener canales que no se solapan entre sí, donde las estaciones pueden transmitir simultáneamente sin interferir entre ellas. La figura 1.12 ilustra una red Wi-Fi con dos canales no solapados, un nodo A que puede enviar a un nodo B mientras que simultáneamente C envía al nodo D sin que halla interferencia. Otras de las ventajas según [2] es que se pueden cubrir áreas extensas con acceso Wi-Fi.

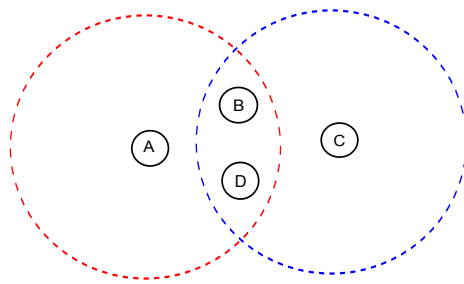


Figura 1.12: Prevención de colisión con canales no solapados.

Capítulo 2

Aspectos preliminares y problema de optimización

Este capítulo se dedica al estudio del programa óptimo de [1] en: aspectos preliminares del programa óptimo, aspectos relacionados con la formulación del problema por optimización estática y aspectos de la solución por el método de descomposición dual. Por tal motivo, en la primera sección se describen las distintas asunciones del modelo de red del programa óptimo, con algunas que se pueden sustentar desde el capítulo 1. Estas asunciones hacen parte de la base de todo el programa óptimo, en las que fundamentan la formulación del problema por optimización estática que se expone en la sección siguiente; fundamentan el algoritmo dinámico del capítulo 3 y también fundamentan algunas pruebas del capítulo 3. Además, algunas de ellas contribuyen a la explicación del comportamiento de las colas de paquetes elásticos y déficit de paquetes inelásticos de nuestra red Wi-Fi en el capítulo 4. La segunda sección tiene como fin formular el problema por optimización estática. Para esto se presentan previamente algunas definiciones y restricciones, que se pueden implementar en cualquier red inalámbrica. La última sección se dedica al análisis de la solución dual del problema, basada en los multiplicadores de Lagrange y sirve como fundamento para encontrar un algoritmo dinámico basado en el óptimo del problema, el cual se expone en el capítulo 3.

2.1. Asunciones del modelo de red

La primera asunción parte del hecho de que cualquier red inalámbrica se puede representar por medio de grafos, como se ha expuesto en la sección 1.1. Ahora en el sentido de las transmisiones, se utilizará un grafo dirigido, dado por un conjunto $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, donde \mathcal{N} representa el conjunto de los nodos de la red y \mathcal{L} es el conjunto de los enlaces direccionales. Un enlace direccional l está conformado por un par de nodos (n_i, n_j) con $i \neq j$ y $n_i, n_j \in \mathcal{N}$, donde el nodo n_i puede transmitir al nodo n_j .

En la asunción anterior los enlaces de la red, serán enumerados de 1 hasta $|\mathcal{L}|$. De aquí

en adelante se denota $l \in \mathcal{L}$ para decir que $l \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\}$.

En la segunda asunción, se considera el tráfico en la red como una mezcla de flujos elásticos e inelásticos, tal como se vió en la sección 1.2. Donde se debe entender que los paquetes elásticos corresponden a los flujos elásticos y los paquetes inelásticos a los flujos inelásticos. De la misma manera, se considera que los paquetes inelásticos tienen restricciones de tiempo de retraso máximo, por lo cual, al no cumplirlas durante una transmisión, los paquetes inelásticos se pueden perder. En cambio, los paquetes elásticos no tienen esas restricciones.

La tercera asunción tiene que ver con el tiempo para las transmisiones de paquetes en toda la red. Aquí no se consideran los tiempos que utiliza Wi-Fi para las transmisiones, tales como: el tiempo de retroceso exponencial aleatorio en que se detecta el canal a ser libre, mencionado en la subsección 1.6.1, y el tiempo limitado de Wi-Fi en modo PCF como se mencionó en la subsección 1.6.2. Se utiliza el tiempo para las transmisiones que propone [1] en el estudio de nuestra red Wi-Fi con infraestructura, el cual lo denomina frame.

Un frame está determinado por el tiempo límite de retraso máximo de los paquetes inelásticos, el cual está dividido en pequeños intervalos de tiempo de duración fija denominados time slots, donde un conjunto de T time slots consecutivos forman un frame. Además el time slot es un tiempo necesario en los que se pueden transmitir exitosamente los paquetes en el canal de cada enlace de la red. La figura 2.1 da una representación intuitiva de un frame.

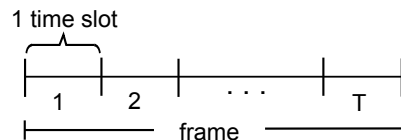


Figura 2.1: Conformación de un frame en el modelo de [1].

La cuarta asunción es, que las llegadas de los paquetes a la red solo ocurren al inicio del frame y son independientes entre diferentes frames. En [1] no se considera que las llegadas de los paquetes ocurren en todo tiempo, el cual lo deja como trabajo futuro.

La quinta asunción es consecuencia de la segunda y tercera asunción. Cada paquete inelástico tiene un tiempo límite de T time slots, si falla ese tiempo límite es descartado en la red, por lo que se requiere una probabilidad de pérdida p_l en cada $l \in \mathcal{L}$.

La sexta asunción es para el tráfico elástico. Para cada enlace $l \in \mathcal{L}$ se dispone de una función de utilidad $U_l(\cdot)$, la cual depende de la tasa media de llegadas elásticas por frame denotada por x_{el} . Se asume que $U_l(x_{el})$ es una función cóncava.

La séptima asunción es para las llegadas de los paquetes inelásticos en toda la red en un frame dado, recordando que ocurren al inicio del frame. Donde se representa el número de llegadas de paquetes inelásticos en cada enlace, mediante el vector $a_i = (a_{il})_{l \in \mathcal{L}}$. Además, en este aspecto de las llegadas inelásticas se asume que a_{il} es una variable aleatoria con media x_{il} y varianza σ_{il}^2 .

La octava asunción está dada por las siguientes probabilidades. Para todo frame y $l \in \mathcal{L}$, se tiene que:

$$P(a_{il} = 0) > 0 \quad \text{y} \quad P(a_{il} = 1) > 0. \quad (2.1)$$

Para un frame dado y un enlace de la red, estas probabilidades se pueden interpretar respectivamente como: la probabilidad de que no lleguen paquetes inelásticos al enlace y la probabilidad de que llegue un paquete inelástico al enlace son distintas de cero. Estas probabilidades serán utilizadas posteriormente en la descripción de las propiedades de la cadena de Markov definida por el déficit de paquetes inelásticos y cola de paquetes elásticos, las cuales serán explicadas en el capítulo 3.

La novena asunción es para las llegadas elásticas, similar a la séptima asunción. Para un frame dado, el vector $a_e = (a_{el})_{l \in \mathcal{L}}$ representa el número de llegadas de paquetes elásticos en cada enlace.

La décima asunción es para el estado del canal. El estado del canal indica el número de paquetes que pueden transmitirse exitosamente por enlace en un frame. Dependiendo de la tecnología inalámbrica se pueden determinar dichos valores. En el caso particular de Wi-Fi, se pueden determinar los valores del estado del canal estudiando una característica como la velocidad de transmisión medida en paquetes por unidad de tiempo. En todo caso, al no tener los valores concretos del estado del canal, se designa el estado del canal con el vector $c = (c_l)_{l \in \mathcal{L}}$, donde c_l indica el número de paquetes en el enlace l que pueden transmitirse exitosamente en todo time slot en un frame dado. Además, se asume que el estado del canal se mantiene constante durante todo el frame, independiente entre diferentes frames e independiente de las llegadas. Por otro lado, el estado del canal se puede estudiar en dos casos, estado del canal conocido y estado del canal desconocido.

En el caso del canal conocido, se asume que se conoce el estado del canal al inicio del frame. Esta alternativa de conocer el estado del canal antes de transmitir, hace que la tecnología de la red inalámbrica tenga algún mecanismo en el que determine si los paquetes se transmitirán exitosamente. En particular, un estado del canal, transmitir cero paquetes, se da cuando se conoce que el canal está inactivo, como se explica en la subsección 1.1.2. Además, una red Wi-Fi tiene un mecanismo de determinar si los paquetes se pueden transmitir exitosamente, como se vió en la sección 1.6.1. En este caso del estado del canal conocido, se asume que c_l es una variable aleatoria no negativa, con media \bar{c}_l y varianza $\sigma_{c_l}^2$.

El otro caso es la del estado del canal desconocido, en la que se logra establecer el estado del canal al final del frame y no al principio del frame. Este estudio se enfoca por el caso del estado del canal conocido. Un estudio en el estado del canal desconocido se puede ver en [1].

2.2. Formulación del problema

El propósito de ésta sección es formular un problema de optimización estática, el cual permite elegir un programa factible de paquetes elásticos e inelásticos al inicio de todo frame y que sirva a todos los enlaces de la red. Pero antes se presentan las siguientes definiciones y restricciones en la red que son fundamentales para la comprensión del problema de optimización estática y de secciones posteriores.

Programa factible. Un programa factible es una pareja de matrices denotada por $s = (s_{il,t}, s_{el,t})$, donde $s_{il,t}$ y $s_{el,t}$ indican respectivamente el número de paquetes inelásticos y número de paquetes elásticos que pueden ser programados para la transmisión en todo $l \in \mathcal{L}$ y $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, donde se puede ver que s tiene un tamaño de $|\mathcal{L}| \times 2T$.

Restricciones en la red. Sean las llegadas inelásticas dadas por el vector a_i y el estado del canal por el vector c , como los mencionamos en la séptima y décima asunción de la sección 2.1, se tienen las siguientes restricciones en la red:

$$\sum_{t=1}^T s_{il,t} \leq a_{il} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

$$s_{il,t} + s_{el,t} \leq c_l \text{ para todo } l \in \mathcal{L}, t \in \{1, 2, \dots, T\} \quad (2.3)$$

La restricción (2.2) afirma que en todo frame, el número de paquetes inelásticos que pueden programarse exitosamente para la transmisión en cada enlace es acotado por el número de llegadas inelásticas en cada enlace. Los paquetes inelásticos que se programan son aquellos que no han expirado, debido a sus tiempos de retardo máximo, como se mencionó en la segunda asunción de la sección 2.1. Por otra parte, la restricción (2.3) afirma que en cada enlace y en todo time slot de un frame, el número de paquetes que se pueden programar exitosamente no pueden exceder el número de paquetes que pueden transmitirse exitosamente, como lo indica el estado del canal en cada enlace.

Restricciones por interferencia. En la subsección 1.1.1 se definió cómo en una red inalámbrica se pueden presentar interferencias entre los mismos dispositivos cuando transmiten en un mismo canal. Además en las subsecciones 1.6.1 y 1.6.2 se abordaron algunos mecanismos que utiliza Wi-Fi para evitar las interferencias entre las estaciones cuando transmiten en un mismo canal. Esto permite decir que se deben cumplir ciertas restricciones por

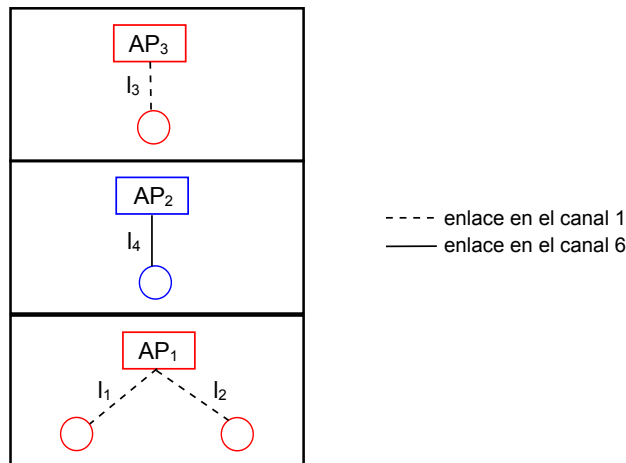


Figura 2.2: Una red Wi-Fi con tres APs, los cuales dos están en canales solapados.

interferencia entre los enlaces cuando la transmisión se hace en un mismo canal.

La figura 2.2 muestra una red Wi-Fi con infraestructura en un edificio de tres pisos, la cual permite ilustrar las restricciones por interferencia entre los enlaces. La red está conformada por tres puntos de acceso con estándar 802.11b, como se mencionó en la sección 1.7, donde sus regiones de transmisión coinciden con todo el edificio. Los puntos de acceso AP_1 y AP_3 están en el canal 1 y el AP_2 está en el canal 6 que no se solapa con el canal 1. Además, las estaciones de un piso del edificio establecen enlaces con el AP del mismo piso. Luego, al tener en cuenta las transmisiones en canales no solapados, explicadas en la sección 1.7, se puede decir que los enlaces l_1 , l_2 y l_3 interfieren entre sí, por lo cual si se activa uno de ellos los otros dos permanecerán inactivos; en cambio, cualquiera de estos tres enlaces pueden activarse simultáneamente con l_4 .

De lo anterior, en la programación de paquetes se deben cumplir las restricciones por interferencia entre los enlaces. Así, cuando $s_{il,t} + s_{el,t} > 0$ el enlace l puede ser programado para transmitir en un time slot t de un frame; y cuando, $s_{il_m,t} + s_{el_m,t} > 0$ y $s_{il_n,t} + s_{el_n,t} > 0$ en un time slot t de un frame, los enlaces l_m y l_n pueden ser programados para transmitir simultáneamente sin haber interferencia entre ellos.

Conjunto de programas factibles. El conjunto de todos los programas factibles es denotado por $\mathcal{S}(a_i, c)$ cuando el estado de las llegadas es a_i y el estado del canal es c , donde $\mathcal{S}(a_i, c)$ cumple todas las restricciones por interferencia entre los enlaces y las restricciones (2.2) y (2.3).

		time slot					
		1	2	3	4	5	6
Paquetes inelásticos	l_1	1	0	0	0	0	0
	l_2	0	1	0	0	0	0
	l_3	0	0	0	0	0	0
	l_4	0	0	1	0	0	0
Paquetes elásticos	l_1	0	0	1	0	0	0
	l_2	0	0	0	1	1	0
	l_3	0	0	0	0	0	1
	l_4	1	0	0	1	0	0

Figura 2.3: Un ejemplo de programa factible.

Ejemplo 2.2.1. Para la red de la figura 2.2 se describe un programa factible de los posibles que se pueden dar. Supóngase que los cuatro enlaces de la red se puedan programar cumpliendo las restricciones por interferencia entre enlaces mencionadas anteriormente. Se asume un frame con seis time slot, un canal que siempre está activo, un vector $c = (1, 1, 1, 1)$ el cual significa que puede transmitirse un sólo paquete en todo time slot y un vector de llegadas inelásticas $a_i = (1, 1, 0, 1)$, las cuales se dan al inicio del frame. Por tanto, un programa factible para ésta red se puede ilustrar mediante la figura 2.3. \diamond

En el programa factible representado en la figura 2.3, se pueden ver el cumplimiento de las restricciones por interferencia entre enlaces y las restricciones (2.2) y (2.3). Por ejemplo, se observa que en $t = 1$ y $t = 3$, los enlaces l_1 y l_4 fueron programados simultáneamente, de la misma manera en $t = 4$, l_2 y l_4 fueron programados simultáneamente. En el enlace l_3 se puede ver que $\sum_{t=1}^6 s_{il_3,t} = 0 \leq a_{il_3} = 0$ el cual cumple con (2.2), además, $s_{il_3,t} + s_{el_3,t} \leq c_{l_3} = 1$ con $t \in \{1, 2, \dots, 6\}$ cumple con (2.3). Por otro lado, en el enlace l_2 ; $\sum_{t=1}^6 s_{el_2,t} = 2$, en lo cual no hay restricción.

Continuando con el propósito de formular el problema por optimización estática, hay que tener presente una probabilidad $P(s \mid a_i, c)$. La cual es la probabilidad de usar el programa factible s dado que las llegadas inelásticas son a_i y el estado del canal es c ; además, los paquetes inelásticos están sujetos a una probabilidad de pérdida que no supere a p_l , como se describe en la cuarta asunción de la sección 2.1. Otro aspecto a tener presente, es la elección de paquetes elásticos dados por el vector a_e , la cual permita que las colas de paquetes elásticos se mantengan estables en la red. Para estos aspectos deben tenerse en cuenta las siguientes definiciones.

En primer lugar, se denota como $\mu_i(a_i, c)$ el **valor esperado de los paquetes inelásticos a transmitir** o a ser servidos cuando las llegadas inelásticas son a_i y el estado del canal es c . De manera similar se denota $\mu_e(a_i, c)$ como el **valor esperado de los paquetes elásticos**

a transmitir cuando las llegadas inelásticas son a_i y el estado del canal es c . Además, para cada enlace y todo frame se deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\mu_{il}(a_i, c) \leq \sum_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{t=1}^T s_{il,t} P(s | a_i, c) \quad (2.4)$$

$$\mu_{el}(a_i, c) \leq \sum_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{t=1}^T s_{el,t} P(s | a_i, c). \quad (2.5)$$

Puede interpretarse (2.4) de la siguiente manera: para cada frame, el valor esperado de paquetes inelásticos por transmitir en un enlace l es menor o igual al valor esperado del total de intentos de programaciones inelásticas durante todo el frame en el enlace l . De forma similar puede interpretarse (2.5). Por otro lado, se define el servicio esperado para el tráfico en un enlace l como:

$$\begin{aligned} \mu_{il} &\stackrel{def}{=} \sum_{a_i} \sum_c \mu_{il}(a_i, c) P(c) P(a_i) \\ \mu_{el} &\stackrel{def}{=} \sum_{a_i} \sum_c \mu_{el}(a_i, c) P(c) P(a_i), \end{aligned}$$

los cuales, al cumplir requisitos de calidad de servicio (QoS) y restricciones de capacidad, se relacionan por

$$\mu_{il} \geq x_{il}(1 - p_l) \quad \text{y} \quad x_{el} \leq \mu_{el}.$$

La primera de éstas desigualdades, afirma que el servicio esperado para el tráfico inelástico en un enlace para cualquier frame, debe ser mayor o igual a la media de llegadas exitosas de paquetes inelásticos en el inicio del frame. La segunda desigualdad afirma que la tasa media de llegadas elásticas por frame en un enlace debe ser menor o igual al servicio esperado para el tráfico elástico. Sin embargo, en las anteriores restricciones se asume que $x_{il}(1 - p_l) > 0$ para todo $l \in \mathcal{L}$, para evitar trivialidades en resultados posteriores.

Teniendo en cuenta las definiciones y restricciones para el servicio esperado de paquetes elásticos e inelásticos mencionadas anteriormente, se definen las siguientes regiones de capacidad, las cuales son importantes en la formulación del problema por optimización estática, la solución del problema por descomposición dual y en los resultados de convergencia del capítulo 3. Además, en el uso de la notación del presente trabajo, de aquí en adelante se denota E como un valor esperado.

Definición 2.2.1. *La región de capacidad para llegadas a_i fijas y estado del canal c fijo, está dada por:*

$$\mathcal{C}(a_i, c) \stackrel{def}{=} \left\{ (\bar{\mu}_{il}, \bar{\mu}_{el})_{l \in \mathcal{L}} : \text{ existe } \bar{s} \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH}, \bar{\mu}_{il} \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t}, \bar{\mu}_{el} \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\},$$

donde $\mathcal{S}(a_i, c)_{CH}$ es el cascarón convexo de $\mathcal{S}(a_i, c)$. \diamond

Ahora, al tener en cuenta la definición de cascarón convexo para un conjunto de matrices con números reales, se tiene que el cascarón convexo de $\mathcal{S}(a_i, c)$ estaría dado por

$$\mathcal{S}(a_i, c)_{CH} = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j s_j : \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, s_j \in \mathcal{S}(a_i, c), \text{ para } j = 1, 2, \dots, k \right\}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, se define

$$\mu(a_i, c) \stackrel{def}{=} (\mu_{il}(a_i, c), \mu_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}}.$$

Por lo anterior, (2.4) y (2.5) permiten concluir que

$$\mu(a_i, c) \in \mathcal{C}(a_i, c).$$

Definición 2.2.2. *La región de capacidad total de la red se define como:*

$$\mathcal{C} \stackrel{def}{=} \left\{ (\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} : \text{para todo } a_i \text{ y } c, \text{ existe } (\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c), \right. \\ \left. \text{donde } \mu_{il} = E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)] \text{ y } \mu_{el} = E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)] \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \right\},$$

además,

$$\mu \stackrel{def}{=} (\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}.$$

\diamond

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones y restricciones, un vector $w \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}$ donde \mathbb{R}_+ es el conjunto de reales no negativos, una función U_l como se define en la sexta asunción de la sección 2.1 y un vector x_e de las tasas media de llegadas elásticas por frame de todos los enlaces, se formula el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} & \max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(x_{el}) + w_l \mu_{il} \\ & \text{sujeto a} \\ & \mu_{il} \geq x_{il}(1 - p_l) \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \\ & 0 \leq x_{el} \leq \mu_{el} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se asume w_l como un parámetro no negativo, el cual se describe en el capítulo 4 en las simulaciones del programa óptimo de [1] en el tipo de red Wi-Fi considerada; donde tiene un impacto en el comportamiento de las colas de paquetes elásticos y déficit de paquetes inelásticos en la red. Además, según [1] se asume que las llegadas inelásticas y los requisitos de probabilidad de pérdida son factibles para que el anterior problema de optimización estática pueda tener una solución (μ^*, x_e^*) .

2.3. Solución del problema por descomposición dual

Esta sección tiene como fin detallar algunos aspectos que fueron reducidos u omitidos en [1] en la solución por descomposición dual del problema (2.7). En primer lugar, se muestra que la región factible del problema es un conjunto convexo, con el objeto de implementar en el problema una función dual como la define [14]. Luego, con la condición de Slater en [15], la cual se verifica en [1], se puede ver que el problema tiene una dualidad fuerte; y por último, con el propósito de encontrar (μ^*, x_e^*) desde un análisis en la función dual del problema, se puede establecer un algoritmo iterativo en el que se involucran multiplicadores de Lagrange para dar con la solución del problema. Este algoritmo sirve como base para el algoritmo dinámico del programa óptimo, el cual se explica en el capítulo 3.

En primera instancia, se puede verificar que el conjunto \mathcal{F} de todos los puntos de $\mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}$ que satisfacen las limitaciones y restricciones de (2.7), es un conjunto convexo. Para esto, sean

$$(\ddot{\mu}, \ddot{x}_e) \in \mathcal{F}, \quad (\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{F} \text{ y } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Se probará que

$$\theta(\ddot{\mu}, \ddot{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{F}.$$

Por hipótesis, se tiene que

$$(\ddot{\mu}, \ddot{x}_e) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}, \quad (\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|},$$

además de las definiciones de \mathcal{C} en 2.2.2 y del vector x_e , se tiene que

$$\ddot{\mu} = (\ddot{\mu}_{il}, \ddot{\mu}_{el})_{l \in \mathcal{L}}, \quad \ddot{x}_e = (\ddot{x}_{el})_{l \in \mathcal{L}}, \quad \hat{\mu} = (\hat{\mu}_{il}, \hat{\mu}_{el})_{l \in \mathcal{L}} \quad \text{y} \quad \hat{x}_e = (\hat{x}_{el})_{l \in \mathcal{L}}.$$

Por lo que se cumplen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\mu}_{il} &\geq x_{il}(1 - p_l), \\ 0 &\leq \ddot{x}_{el} \leq \ddot{\mu}_{el}, \\ \hat{\mu}_{il} &\geq x_{il}(1 - p_l), \\ 0 &\leq \hat{x}_{el} \leq \hat{\mu}_{el}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$.

Se probará primero que

$$\theta(\ddot{\mu}, \ddot{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}.$$

Se puede ver que

$$\theta(\ddot{\mu}, \ddot{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e) = (\theta\ddot{\mu} + (1 - \theta)\hat{\mu}, \theta\ddot{x}_e + (1 - \theta)\hat{x}_e),$$

de donde

$$\theta\ddot{x}_e + (1 - \theta)\hat{x}_e \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|},$$

falta verificar que

$$\theta\ddot{\mu} + (1 - \theta)\hat{\mu} \in \mathcal{C}.$$

Al tener $\ddot{\mu} \in \mathcal{C}$ y $\hat{\mu} \in \mathcal{C}$ y de 2.2.2 se tiene que: para todo a_i y c existen

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(a_i, c) &= (\dot{\mu}_{il}(a_i, c), \dot{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c) \\ \check{\mu}(a_i, c) &= (\check{\mu}_{il}(a_i, c), \check{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c),\end{aligned}$$

tales que para todo $l \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned}\ddot{\mu}_{il} &= E[\dot{\mu}_{il}(a_i, c)] & \ddot{\mu}_{el} &= E[\dot{\mu}_{el}(a_i, c)] \\ \hat{\mu}_{il} &= E[\check{\mu}_{il}(a_i, c)] & \hat{\mu}_{el} &= E[\check{\mu}_{el}(a_i, c)].\end{aligned}$$

De esto, se tiene que para todo $l \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned}\theta\ddot{\mu}_{il} + (1 - \theta)\hat{\mu}_{il} &= E[\theta\dot{\mu}_{il}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{il}(a_i, c)], \\ \theta\ddot{\mu}_{el} + (1 - \theta)\hat{\mu}_{el} &= E[\theta\dot{\mu}_{el}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{el}(a_i, c)].\end{aligned}\tag{2.9}$$

Además

$$\begin{aligned}\theta\dot{\mu}_{il}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{il}(a_i, c) &\in \mathcal{C}(a_i, c), \\ \theta\dot{\mu}_{el}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{el}(a_i, c) &\in \mathcal{C}(a_i, c).\end{aligned}$$

En efecto. Como $\dot{\mu}(a_i, c) \in \mathcal{C}(a_i, c)$ y $\check{\mu}(a_i, c) \in \mathcal{C}(a_i, c)$, existen:

$$\dot{s} = (\dot{s}_{il,t}, \dot{s}_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH} \quad \text{y} \quad \check{s} = (\check{s}_{il,t}, \check{s}_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH} \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L},$$

tales que,

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_{il}(a_i, c) &\leq \sum_{t=1}^T \dot{s}_{il,t} & \dot{\mu}_{el}(a_i, c) &\leq \sum_{t=1}^T \dot{s}_{el,t} \\ \check{\mu}_{il}(a_i, c) &\leq \sum_{t=1}^T \check{s}_{il,t} & \check{\mu}_{el}(a_i, c) &\leq \sum_{t=1}^T \check{s}_{el,t}.\end{aligned}$$

De esto, se tiene que

$$\theta\dot{\mu}_{il}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{il}(a_i, c) \leq \sum_{t=1}^T (\theta\dot{s}_{il,t} + (1 - \theta)\check{s}_{il,t}).\tag{2.10}$$

Por otro lado, utilizando la definición de cascarón convexo (2.6), se puede deducir que

$$\theta\dot{s}_{il,t} + (1 - \theta)\check{s}_{il,t} \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH},$$

donde

$$\theta\dot{\mu}_{il}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{il}(a_i, c) \in \mathcal{C}(a_i, c);$$

y de la misma manera se puede probar que

$$\theta\check{\mu}_{el}(a_i, c) + (1 - \theta)\check{\mu}_{el}(a_i, c) \in \mathcal{C}(a_i, c).$$

Luego, por (2.9) y la definición 2.2.2 se puede decir que

$$\theta\check{\mu} + (1 - \theta)\hat{\mu} \in \mathcal{C},$$

de donde

$$\theta(\check{\mu}, \check{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}.$$

Ahora, se probará que $\theta(\check{\mu}, \check{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e)$ cumple con las restricciones de (2.7).

De las restricciones (2.8) y $0 \leq \theta \leq 1$, se puede ver que

$$\begin{aligned} \theta\check{\mu}_{il} + (1 - \theta)\hat{\mu}_{il} &\geq \theta x_{il}(1 - p_l) + (1 - \theta)x_{il}(1 - p_l) \\ &= x_{il}(1 - p_l) \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$. También se puede ver que

$$0 \leq \theta\check{x}_{el} + (1 - \theta)\hat{x}_{el} \leq \theta\check{\mu}_{el} + (1 - \theta)\hat{\mu}_{el} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}.$$

En consecuencia,

$$\theta(\check{\mu}, \check{x}_e) + (1 - \theta)(\hat{\mu}, \hat{x}_e) \in \mathcal{F},$$

por lo que \mathcal{F} es un conjunto convexo.

Ahora, en la solución de un problema de optimización con restricciones, el método dual con multiplicadores de Lagrange es una herramienta de gran ayuda para encontrar dicha solución. Por lo cual se puede utilizar la siguiente definición de función dual de [14],

$$D(\delta) = \inf \{ f(x) + \delta^T \mathbf{g}(x) : x \in \Omega \};$$

donde $f(x)$ es la función objetivo, δ^T el vector de multiplicadores de Lagrange, $\mathbf{g}(x)$ el vector de las funciones $g_i(x) \leq 0$ en las restricciones y Ω un conjunto convexo en el cual f y \mathbf{g} están definidas.

Utilizando ésta definición de función dual en su forma equivalente para un problema de maximización y de que la región factible \mathcal{F} es un conjunto convexo, la función dual para el problema (2.7), estaría dada por

$$D(\delta_i, \delta_e) = \max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \begin{array}{l} U_l(x_{el}) + w_l \mu_{il} - \delta_{el}[x_{el} - \mu_{el}] \\ -\delta_{il}[x_{il}(1 - p_l) - \mu_{il}] \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

sujeta a

$$x_{el} \geq 0 \text{ para todo } l \in \mathcal{L}.$$

Por otro lado, en optimización si p^* es el valor de la función objetivo obtenido de la solución del problema primal y d^* es el valor de la función objetivo obtenido de la solución del problema dual, la brecha de la dualidad se define como $p^* - d^*$. Ahora, si $p^* = d^*$, entonces la brecha de la dualidad es cero y se dice que se mantiene una dualidad fuerte en el problema. Teniendo en cuenta esto, [1] verifica la condición de Slater de [15], en el cual se puede afirmar que el problema (2.7) tiene una dualidad fuerte. Por tanto, el valor de la función objetivo de (2.7) debido a la solución del problema primal, es igual al valor de la función objetivo de (2.11) obtenido de la solución del problema dual. Esto es

$$D(\delta_i^*, \delta_e^*) = \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*,$$

donde una la solución del problema dual se puede indicar como

$$(\delta_i^*, \delta_e^*) \in \arg \min_{\delta_{il} \geq 0, \delta_{el} \geq 0} D(\delta_i, \delta_e).$$

Dicha solución se puede interpretar como un punto (δ_i, δ_e) que hace que $D(\delta_i, \delta_e)$ alcance su valor mínimo en (2.11), el cual permite que el valor máximo de la función objetivo esté acotado.

En lo que sigue, se tomará como punto de partida un análisis de (2.11) para encontrar (μ^*, x_e^*) y no $D(\delta_i^*, \delta_e^*)$, el cual permite establecer un algoritmo iterativo para hallar la solución al problema de optimización. En primer lugar, se intentará descomponer el problema en dos subproblemas, por lo que se inicia reagrupando los términos de la función objetivo en $D(\delta_i, \delta_e)$ tal como

$$\max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el}] + \sum_{l \in \mathcal{L}} [(w_l + \delta_{il}) \mu_{il} + \delta_{el} \mu_{el}] - \sum_{l \in \mathcal{L}} [\delta_{il} x_{il} (1 - p_l)] \right\}.$$

En esto último, desde el punto de vista de $\mathcal{C} \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}$, se puede ver que $U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el}$ depende de x_e , $(w_l + \delta_{il}) \mu_{il} + \delta_{el} \mu_{el}$ depende de μ , y $\delta_{il} x_{il} (1 - p_l)$ se puede ver como un término constante en la función objetivo. Además, teniendo en cuenta que $U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el}$ es cóncava, se puede descomponer el problema en los siguientes subproblemas:

$$\max_{x_{el} \geq 0} U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el} \quad (2.12)$$

$$\max_{\mu \in \mathcal{C}} \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l + \delta_{il}) \mu_{il} + \delta_{el} \mu_{el} \quad (2.13)$$

En el subproblema (2.13) puede verse que la función objetivo es lineal y que los términos δ_{il} y δ_{el} son no negativos. Por lo que el óptimo $\mu^* = (\mu_{il}^*, \mu_{el}^*)$ debe tomar valores muy grandes. Pero, por la definición 2.2.2 y las restricciones (2.4) y (2.5) hacen que μ_{il}^* y μ_{el}^* estén acotadas por combinaciones convexas de $\sum_{t=1}^T s_{il,t}^*$ y $\sum_{t=1}^T s_{el,t}^*$ respectivamente. Entonces el subproblema (2.13) puede representarse como:

$$\max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ (w_l + \delta_{il}) \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \delta_{el} \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\},$$

dado unas llegadas a_i y un estado del canal c .

En cuanto al subproblema (2.12), no es específico hasta que valor puede llegar la tasa media de llegada elástica x_{el} , por lo que se fija un tope $X_{max} > 0$, el cual es un parámetro muy grande. Por lo tanto, este subproblema puede representarse como:

$$\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el}$$

Ahora, en la búsqueda del óptimo del problema se establece un algoritmo iterativo. Representando k como la k -ésima iteración, dicho algoritmo es

$$\tilde{x}_{el}^*(k) \in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) - \delta_{el}(k) x_{el} \quad (2.14)$$

$$\tilde{s}^*(a_i, c, k) \in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ [w_l + \delta_{il}(k)] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \delta_{el}(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\} \quad (2.15)$$

$$\tilde{\mu}_{il}^*(k) = \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i, c, k) P(c) P(a_i)$$

$$\tilde{\mu}_{el}^*(k) = \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i, c, k) P(c) P(a_i),$$

donde los multiplicadores de Lagrange en cada paso k son actualizados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta_{il}(k+1) &= \{\delta_{il}(k) + \epsilon[x_{il}(1-p_l) - \tilde{\mu}_{il}^*(k)]\}^+ \\ \delta_{el}(k+1) &= \{\delta_{el}(k) + \epsilon[\tilde{x}_{el}^*(k) - \tilde{\mu}_{el}^*(k)]\}^+, \end{aligned}$$

en los cuales $\epsilon > 0$ es un parámetro fijo y $\alpha^+ \stackrel{def}{=} \max\{\alpha, 0\}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

A partir de (2.11) se puede notar que el vector de multiplicadores de Lagrange afirma que $\delta_i(k) = (\delta_{il}(k))$ y $\delta_e(k) = (\delta_{el}(k))$ para todo $l \in \mathcal{L}$, además sabiendo que $\epsilon > 0$, se utiliza el siguiente cambio de variables:

$$\epsilon \hat{d}(k) = \delta_i(k)$$

$$\epsilon \hat{q}(k) = \delta_e(k)$$

Teniendo en cuenta este cambio de variables y multiplicando las funciones objetivos de (2.14) y (2.15) por ϵ^{-1} , en las cuales se dan subproblemas equivalentes, el algoritmo iterativo se

reescribe como

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{el}^*(k) &\in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - \hat{q}_l(k) x_{el} \\
 \tilde{s}^*(a_i, c, k) &\in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + \hat{d}_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \hat{q}_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\} \\
 \tilde{\mu}_{il}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i, c, k) P(c) P(a_i) \\
 \tilde{\mu}_{el}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i, c, k) P(c) P(a_i),
 \end{aligned}$$

además, los actualizadores de multiplicadores de Lagrange debido a este cambio de variables estarían dados por

$$\begin{aligned}
 \epsilon \hat{d}_l(k+1) &= \left\{ \epsilon \hat{d}_l(k) + \epsilon [x_{il}(1-p_l) - \tilde{\mu}_{il}^*(k)] \right\}^+ \\
 \epsilon \hat{q}_l(k+1) &= \left\{ \epsilon \hat{q}_l(k) + \epsilon [\tilde{x}_{el}^*(k) - \tilde{\mu}_{el}^*(k)] \right\}^+.
 \end{aligned}$$

Sin embargo en cada actualizador, al saber que $\epsilon > 0$ y extraerlo como factor común en el lado derecho de la igualdad, se puede eliminar ϵ . Por lo que los actualizadores de multiplicadores de Lagrange en el algoritmo iterativo pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_l(k+1) &= \left[\hat{d}_l(k) + x_{il}(1-p_l) - \tilde{\mu}_{il}^*(k) \right]^+ \\
 \hat{q}_l(k+1) &= \left[\hat{q}_l(k) + \tilde{x}_{el}^*(k) - \tilde{\mu}_{el}^*(k) \right]^+.
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Algoritmo dinámico y resultados de convergencia

El presente capítulo tiene como propósito detallar las pruebas que fueron reducidas u omitidas en los resultados de convergencia en [1], por lo que en la primera sección se expone los algoritmos de [1] basados en la búsqueda del óptimo, los cuales sirven como base para las pruebas en secciones posteriores. La segunda sección tiene como fin probar un resultado presentado en [1], cuya prueba fue omitida, el cual es importante en la prueba de un lema presentado en la cuarta sección. Para realizar la prueba de este resultado se utiliza aspectos de la topología, el análisis funcional y la teoría de la programación lineal, con los cuales se pretende dar coherencia y consistencia a las pruebas posteriores. La tercera sección se dedica a describir las propiedades de irreducible y aperiódica de la cadena de Markov del déficit de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en la red, cuya descripción fue omitida en [1]. Estas propiedades son importantes en la prueba del primer corolario presentado en la cuarta sección. La cuarta sección se dedica a detallar las pruebas de los resultados de convergencia presentados en [1], en las que tienen como herramienta fundamental los procesos estocásticos.

Antes de exponer las secciones de este capítulo, se debe aclarar que las pruebas de los resultados que aparecen en [1], no hacen parte de un cuerpo estructurado de tipo matemático. Por lo que se intenta en este capítulo dar un orden formal a dichos resultados. Partiendo de los lemas o proposiciones que justifican los pasos intermedios de los resultados fuertes. Además, las pruebas sirven para justificar de manera formal las simulaciones del capítulo 4, por lo que el capítulo 4 estaría en parte incompleto sin el respectivo análisis formal desarrollado en el presente capítulo.

3.1. Algoritmo controlador y algoritmo programador

En esta sección se exponen los algoritmos de [1] que permiten servir paquetes en cualquier red inalámbrica, los cuales trabajan conjuntamente, están basados en la búsqueda del óptimo y hacen que se mantenga una estabilidad en la red, la cual se probará en la sección 3.4. A partir del algoritmo iterativo descrito en la última parte de la sección 2.3, [1] propone un algoritmo de control de congestión y un algoritmo programador. El algoritmo de control de congestión consiste en lo siguiente: para un frame k , se tiene que

$$\tilde{x}_{el}^*(k) \in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - q_l(k)x_{el}, \quad (3.1)$$

donde $q_l(k)$ es la longitud de la cola en un enlace l . Debido a que $\tilde{x}_{el}^*(k)$ está relacionada con la tasa de llegadas elásticas, [1] define una nueva variable aleatoria entera no negativa, la cual relaciona el número de paquetes elásticos que serán permitidos a entrar en la red en un frame. Para un enlace $l \in \mathcal{L}$, dicha variable se define como $\tilde{a}_{el}(k)$ con media $\tilde{x}_{el}^*(k)$ y con varianza acotada superiormente por σ_e^2 . Además se asumen las siguientes probabilidades, para garantizar que la cadena de Markov que se describirá en la sección 3.3 sea irreducible y aperiódica

$$P(\tilde{a}_{el}(k) = 0) > 0 \quad \text{y} \quad P(\tilde{a}_{el}(k) = 1) > 0. \quad (3.2)$$

Estas probabilidades se pueden interpretar de manera similar a las probabilidades de llegadas inelásticas en la octava asunción de la sección 2.1.

El algoritmo programador es el siguiente: para un frame k , unas llegadas inelásticas $a_i(k)$ y un estado del canal $c(k)$, se tiene que

$$\tilde{s}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}, \quad (3.3)$$

donde $d_l(k)$ y $q_l(k)$ son respectivamente el tamaño del déficit de paquetes inelásticos en el enlace l y el tamaño de la cola de paquetes elásticos en el enlace l . Además los vectores $d(k) = (d_l(k))_{l \in \mathcal{L}}$ y $q(k) = (q_l(k))_{l \in \mathcal{L}}$ son actualizados de un frame a otro frame de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d_l(k+1) &= [d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+ \\ q_l(k+1) &= [q_l(k) + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

La aparición del término $\tilde{a}_{il}(k)$ en (3.4) viene de la cuarta y quinta asunciones de la sección 2.1, de que las llegadas de paquetes a la red se dan al inicio de un frame k y que los paquetes inelásticos tienen una probabilidad de pérdida p_l en cada enlace l . Por lo que $\tilde{a}_{il}(k)$ se define como una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $1 - p_l$. Puede interpretarse $\tilde{a}_{il}(k)$ como el número total de llegadas exitosas al inicio de un frame k en un enlace l , donde cada vez que llegue exitosamente un paquete inelástico en el enlace l al inicio del frame k se va adicionando un uno al contador del déficit.

Por lo anterior puede afirmarse que en (3.4) para un frame k , los términos $\tilde{a}_{il}(k)$ y $\tilde{a}_{el}(k)$ representan respectivamente el número de paquetes inelásticos y elásticos que llegan exitosamente a un enlace l , en cambio, los términos $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ e $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ representan respectivamente el número de paquetes inelásticos y elásticos que se pueden servir exitosamente en el enlace l .

Una explicación detallada del funcionamiento de los algoritmos (3.1) y (3.3) en el comportamiento del déficit de paquetes inelásticos y cola de paquetes elásticos en la red Wi-Fi considerada, a medida que varían los parámetros ϵ , T y w_l de los algoritmos se estudiará en algunas secciones del capítulo 4.

3.2. Igualdad entre dos programaciones

El propósito de ésta sección es probar una igualdad entre dos programaciones de maximización desde un resultado que establece [1], el cual es fundamental en la prueba del lema 3.4.3. Una de las programaciones tiene como función objetivo la del algoritmo programador (3.3) definida sobre el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y la otra con la misma función objetivo pero definida sobre $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$. En primer lugar, se probará que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ son conjuntos compactos. Para ello, se plantean algunas definiciones topológicas y un teorema de compacidad de [16] y algunas proposiciones que son resultados ya probados en los textos básicos de Análisis Funcional, en las cuales se utilizarán posteriormente en la prueba de que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ sean compactos. Luego, teniendo en cuenta la compacidad de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ y la teoría de programación lineal en [14], se probará la igualdad de las dos programaciones mencionadas anteriormente.

Primero, téngase en cuenta que el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es el conjunto de todos los programas factibles cuando el estado de llegadas es a_i y el estado del canal es c en el frame k , el cual está descrito por las siguientes matrices de programaciones factibles de paquetes

inelásticos y paquetes elásticos respectivamente.

$$(s_{il,t})_{|L| \times T} = \begin{bmatrix} s_{i1,1} & s_{i1,2} & \cdots & s_{i1,T} \\ s_{i2,1} & s_{i2,2} & \cdots & s_{i2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i|L|,1} & s_{i|L|,2} & \cdots & s_{i|L|,T} \end{bmatrix}$$

$$(s_{el,t})_{|L| \times T} = \begin{bmatrix} s_{e1,1} & s_{e1,2} & \cdots & s_{e1,T} \\ s_{e2,1} & s_{e2,2} & \cdots & s_{e2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{e|L|,1} & s_{e|L|,2} & \cdots & s_{e|L|,T} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) = \left\{ (s_{il,t}, s_{el,t}) : (s_{il,t}, s_{el,t}) \in (s_{il,t})_{|L| \times T} \times (s_{el,t})_{|L| \times T} \right\},$$

para todo $l \in \mathcal{L}$ y $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. En los cuales todo $s = (s_{il,t}, s_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ cumplen las restricciones (2.2) y (2.3), además de las restricciones por interferencia. Puede afirmarse que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es un conjunto finito de parejas de matrices con enteros no negativos; además, $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ como se define en (2.6), son conjuntos de $\mathbb{R}_{|L| \times T} \times \mathbb{R}_{|L| \times T}$.

En lo que sigue, se presentan algunos resultados del Análisis Funcional sin pruebas, pues ya están presentadas en los textos básicos de esta área. Esto se hace con el propósito de deducir que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ son conjuntos compactos. En primer lugar, considérense las siguientes definiciones topológicas en [16].

Definición 3.2.1. *Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X (o función de distancia sobre X), esto es, una función definida sobre $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ se cumple que:*

1. El valor de $d(x, y)$ es un real, finito y no negativo.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

◇

En lo subsiguiente téngase en cuenta que $X = (X, d)$ es un espacio métrico, $x_0 \in X$ y r es un número real tal que $r > 0$.

Definición 3.2.2. *Se llama bola abierta centrada en x_0 y radio r , al conjunto:*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

◇

Definición 3.2.3. Se llama bola cerrada centrada en x_0 y radio r , al conjunto:

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

◇

Definición 3.2.4. Un subconjunto M de un espacio métrico X se dice que es un conjunto abierto si y sólo si para cada $x \in M$, existe una bola con centro en x que está contenida en M .

◇

Una forma equivalente de ésta última definición se puede deducir como

$$M \text{ es abierto si y sólo si para todo } x \in M, \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq M. \quad (3.6)$$

Definición 3.2.5. Un subconjunto K de un espacio métrico X es un conjunto cerrado, si su complemento (en X) es abierto, es decir, $K^c = X - K$ es abierto.

◇

Definición 3.2.6. Un conjunto no vacío $M \subseteq X$ es un conjunto acotado si su diámetro

$$\delta(M) = \sup_{x, y \in M} d(x, y)$$

es finito.

◇

Teniendo en cuenta lo anterior se puede probar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Un conjunto no vacío M es acotado si y sólo si M está contenido en alguna bola.

◇

Con el objeto de probar que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ son conjuntos compactos, se consideran una definición y un teorema sobre compacidad en [16].

Definición 3.2.7. Un espacio métrico X se dice que es compacto si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Ahora, un subconjunto M de X se dice que es compacto si M es compacto considerado como un subespacio de X , es decir, si cada sucesión en M tiene una subsucesión convergente cuyo límite es un elemento de M .

◇

Teorema 3.2.1. En un espacio normado X de dimensión finita, todo conjunto $M \subseteq X$ es compacto si y sólo si M es cerrado y acotado.

◇

En lo subsiguiente se denota \mathcal{M} como el conjunto de todas las matrices reales de orden $|L| \times T$; también, se denota \mathcal{M}^n con n un entero positivo, como el conjunto de todos los vectores con n componentes cuyas entradas son matrices de \mathcal{M} . Ahora, el anterior teorema permite definir una métrica en \mathcal{M}^n , donde \mathcal{M} es un espacio vectorial normado cuya métrica inducida por la norma se define como:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{M},$$

donde la norma $\|\cdot\|$, se conoce como la norma euclídea para una matriz A de orden $p \times q$, dada por

$$\|A\| = \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 3.2.2. *La siguiente función d'' sobre \mathcal{M}^n :*

$$d''(x, y) = \max \{ \|x_1 - y_1\|, \|x_2 - y_2\|, \dots, \|x_n - y_n\| \},$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{M}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{M}^n$, define una métrica sobre \mathcal{M}^n . \diamond
 La prueba de la anterior proposición se basa en que la función d'' debe cumplir las condiciones de la definición 3.2.1 y algunas propiedades de la norma $\|\cdot\|$. Por tanto, puede afirmarse que (\mathcal{M}^n, d'') con n un entero positivo, es un espacio métrico. Además, por teoría básica de Análisis Funcional, \mathcal{M}^n es un espacio normado con dimensión finita. Ahora, como $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ son subconjuntos del espacio normado \mathcal{M}^2 , cuya dimensión es finita, para probar que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ sean conjuntos compactos, sólo basta probar que ambos sean cerrados y acotados por el teorema 3.2.1.

Proposición 3.2.3. *El conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es cerrado.* \diamond

La prueba de la anterior proposición se basa en uno de los resultados de la teoría básica del Análisis Funcional, de que cualquier conjunto finito es un conjunto cerrado. Al saber que el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es un conjunto finito, como se mencionó al inicio de esta sección, se puede decir que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es cerrado.

Proposición 3.2.4. *El conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es acotado.* \diamond

Prueba: Primero, se define una bola cerrada con centro en $\mathbf{0} = (0_{|L| \times T}, 0_{|L| \times T})$ y radio $T^{1/2} \|c\|$, donde $c = (c_l)$ con $l \in \mathcal{L}$:

$$\bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|) = \{ x = (x_{il,t}, x_{el,t}) \in \mathcal{M}^2 : d''(x, \mathbf{0}) \leq T^{1/2} \|c\| \}.$$

Se probará que

$$\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|).$$

Téngase en cuenta que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es un conjunto de parejas de matrices con enteros no negativos. Sea $s = (s_{il,t}, s_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, donde $s = (s_{il,t}, s_{el,t}) \in \mathcal{M}^2$. Luego, por la restricción (2.3) se tiene que para todo $l \in \mathcal{L}$, $t \in \{1, 2, \dots, T\}$

$$s_{il,t} \leq c_l, \quad s_{el,t} \leq c_l,$$

donde

$$s_{il,t}^2 \leq c_l^2, \quad s_{el,t}^2 \leq c_l^2.$$

Entonces para todo $l \in \mathcal{L}$

$$\sum_{t=1}^T s_{il,t}^2 \leq T c_l^2, \quad \sum_{t=1}^T s_{el,t}^2 \leq T c_l^2,$$

donde

$$\left[\sum_{l=1}^{|L|} \sum_{t=1}^T s_{il,t}^2 \right]^{1/2} \leq T^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{|L|} c_l^2 \right]^{1/2}, \quad \left[\sum_{l=1}^{|L|} \sum_{t=1}^T s_{el,t}^2 \right]^{1/2} \leq T^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{|L|} c_l^2 \right]^{1/2}$$

es lo mismo que

$$\|s_{il,t}\| \leq T^{1/2} \|c\|, \quad \|s_{el,t}\| \leq T^{1/2} \|c\|.$$

Entonces

$$\max \{ \|s_{il,t} - 0_{|L| \times T}\|, \|s_{el,t} - 0_{|L| \times T}\| \} \leq T^{1/2} \|c\|,$$

luego

$$d''(s, \mathbf{0}) \leq T^{1/2} \|c\|,$$

por tanto $s \in \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$. En consecuencia, para todo $s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ implica que $s \in \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$, de donde $\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$. Ahora, por la proposición 3.2.1 puede afirmarse que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es acotado. ■

Proposición 3.2.5. *El conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es compacto.* ◇

Prueba: Como consecuencia del teorema 3.2.1 y las proposiciones 3.2.3 y 3.2.4, el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es compacto. ■

Proposición 3.2.6. *El conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es compacto.* ◇

Prueba: Primero se probará que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es cerrado. Supóngase que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ no es cerrado, entonces por la definición 3.2.5, $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}^c$ no es abierto; además, formalmente por el contrarrecíproco de (3.6) esto significa:

$$\begin{aligned} & \text{existe } x \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}^c, \text{ tal que } x = (x_1, x_2), \text{ además} \\ & \text{para todo } r > 0, B(x, r) \not\subseteq \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}^c, \end{aligned}$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned} & \text{existe } x \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}^c, \text{ tal que } x = (x_1, x_2), \text{ además} \\ & \text{para todo } r > 0, B(x, r) \cap \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH} \neq \phi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como existe $x \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}^c$, se tiene que $x \notin \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$. Ahora, sea $\epsilon > 0$, entonces por (3.7) se tiene que:

$$B(x, \epsilon) \cap \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH} \neq \phi,$$

esto es

$$\text{existe } z = (z_1, z_2) \text{ tales que } z \in B(x, \epsilon) \text{ y } z \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH},$$

de donde

$$d''(x, z) < \epsilon, \quad z = \sum_{j=1}^r \lambda_j s_j, \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad s_j \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \text{ para } j = 1, 2, \dots, r.$$

De esto, por la definición de la métrica d'' en la proposición 3.2.2 se obtiene que

$$\max \{ \|x_1 - z_1\|, \|x_2 - z_2\| \} < \epsilon,$$

donde

$$\begin{aligned}\|x_1 - z_1\| &\leq \text{máx} \{\|x_1 - z_1\|, \|x_2 - z_2\|\} < \epsilon \\ \|x_2 - z_2\| &\leq \text{máx} \{\|x_1 - z_1\|, \|x_2 - z_2\|\} < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x_1 - z_1\| < \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0 \\ 0 &\leq \|x_2 - z_2\| < \epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0\end{aligned}$$

Por otro lado, téngase en cuenta la siguiente propiedad de números reales:

$$\text{Si para todo } \epsilon > 0; 0 \leq a < \epsilon \text{ entonces } a = 0.$$

Por lo que

$$\|x_1 - z_1\| = 0 \text{ y } \|x_2 - z_2\| = 0,$$

además por propiedad de la norma $\|\cdot\|$, se tiene

$$x_1 - z_1 = 0_{|L| \times T} \quad \text{y} \quad x_2 - z_2 = 0_{|L| \times T},$$

de donde

$$x = (x_1, x_2) = (z_1, z_2) = z = \sum_{j=1}^r \lambda_j s_j$$

con

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad s_j \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, r.$$

Entonces $x \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es absurdo; en consecuencia, $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es cerrado.

Ahora se probará que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es acotado.

Se puede ver que si $x = (x_{il,t}, x_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$, entonces

$$x = (x_{il,t}, x_{el,t}) = \sum_{j=1}^r \alpha_j s^j, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad s^j \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \text{ para } j = 1, 2, \dots, r,$$

donde

$$x_{il,t} = \sum_{j=1}^r \alpha_j s_{il,t}^j, \quad x_{el,t} = \sum_{j=1}^r \alpha_j s_{el,t}^j.$$

Como cada $(s_{il,t}^j, s_{el,t}^j) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ para $j = 1, 2, \dots, r$; por (2.3) se tiene que para todo $l \in \mathcal{L}$, $t \in \{1, 2, \dots, T\}$

$$s_{il,t}^j \leq c_l, \quad s_{el,t}^j \leq c_l,$$

donde

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j s_{il,t}^j \leq \sum_{j=1}^r \alpha_j c_l, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j s_{el,t}^j \leq \sum_{j=1}^r \alpha_j c_l$$

para todo $l \in \mathcal{L}$, $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. Por otro lado, se sabe que $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, por lo que

$$x_{il,t} \leq c_l \text{ para todo } l \in \mathcal{L}, t \in \{1, 2, \dots, T\}$$

$$x_{el,t} \leq c_l \text{ para todo } l \in \mathcal{L}, t \in \{1, 2, \dots, T\}.$$

Entonces

$$\sum_{t=1}^T x_{il,t}^2 \leq T c_l^2 \text{ para todo } l \in \mathcal{L}$$

$$\sum_{t=1}^T x_{el,t}^2 \leq T c_l^2 \text{ para todo } l \in \mathcal{L},$$

luego

$$\left[\sum_{l=1}^{|\mathcal{L}|} \sum_{t=1}^T x_{il,t}^2 \right]^{1/2} \leq T^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{|\mathcal{L}|} c_l^2 \right]^{1/2}, \quad \left[\sum_{l=1}^{|\mathcal{L}|} \sum_{t=1}^T x_{el,t}^2 \right]^{1/2} \leq T^{1/2} \left[\sum_{l=1}^{|\mathcal{L}|} c_l^2 \right]^{1/2},$$

de donde

$$\|x_{il,t}\| \leq T^{1/2} \|c\|, \quad \|x_{el,t}\| \leq T^{1/2} \|c\|$$

con $c = (c_l)$ y $l \in \mathcal{L}$. Por lo tanto con $c \in \mathbb{R}^{|\mathcal{L}|}$, se deduce que

$$\text{máx} \{ \|x_{il,t} - 0_{|\mathcal{L}| \times T}\|, \|x_{el,t} - 0_{|\mathcal{L}| \times T}\| \} \leq T^{1/2} \|c\|,$$

de donde

$$d''(x, \mathbf{0}) \leq T^{1/2} \|c\|,$$

esto es $x \in \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$. Por tanto, para todo $x \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ implica que $x \in \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$, lo cual significa que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH} \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}, T^{1/2} \|c\|)$ y por la proposición 3.2.1 puede afirmarse que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es acotado. En consecuencia, $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es cerrado y acotado, por el teorema 3.2.1 $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es compacto. ■

El siguiente resultado es de gran importancia para la prueba del lema 3.4.3, el cual a su vez tiene una relevancia para los resultados posteriores.

Proposición 3.2.7.

$$\text{máx}_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} =$$

$$\text{máx}_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}$$

◇

Prueba: En primer lugar, existen las soluciones óptimas para estos dos problemas de maximización. En efecto, el teorema de Weierstrass en [14], afirma que una función continua f definida sobre un conjunto compacto S alcanza un punto mínimo en S ; es decir, existe un $x^* \in S$ tal que para todo $x \in S$, $f(x) \geq f(x^*)$. Teniendo en cuenta este teorema en su forma equivalente para un problema de maximización, y que la función objetivo en (3.3) es continua por ser lineal, además el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ sobre el cual está definida la función objetivo es compacto por la proposición 3.2.5, se puede afirmar que existe una solución óptima para

$$\max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}. \quad (3.8)$$

De la misma manera, usando la proposición 3.2.6, podemos decir que existe una solución óptima para

$$\max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}. \quad (3.9)$$

Por otro lado, dado que $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ es un conjunto finito de parejas de matrices, cuyas entradas son enteros finitos no negativos; esto implica que las soluciones óptimas en (3.8) y (3.9) toma valores finitos. Ahora, téngase en cuenta el siguiente corolario y definición sobre punto extremo en las propiedades básicas de programación lineal en [14]. El corolario afirma que si existe una solución óptima finita al problema de programación lineal, existe una solución óptima finita el cual es un punto extremo del conjunto restricción. La definición de punto extremo afirma que si en un conjunto convexo C , un punto $x \in C$ se denomina punto extremo de C , si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ con $x_1, x_2 \in C$ y $\lambda \in (0, 1)$ implica que $x = x_1 = x_2$.

De lo anterior, se puede afirmar que en (3.9) existe un punto extremo $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ tal que s^* es una solución óptima. Además $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$.

En efecto. Como $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ y teniendo en cuenta la definición de cascarón convexo en (2.6), entonces

$$s^* = \sum_{j=1}^p \lambda_j s_j, \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad s_j \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k)), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

De lo anterior se tienen los siguientes tres casos para los λ_j con $j = 1, 2, \dots, p$. El primer caso, consiste en que si existe algún $\lambda_k > 1$ para $k = 1, 2, \dots, p$, entonces por lo anterior, $\sum_{j=1}^p \lambda_j > 1$; lo cual es absurdo, este caso no se puede dar. El segundo caso es, que si existe

algún $\lambda_k = 1$ para $k = 1, 2, \dots, p$, entonces los demás $\lambda_{j \neq k} = 0$, por lo cual

$$\begin{aligned} s^* &= \lambda_k s_k + \sum_{j=1, j \neq k}^p \lambda_j s_j \\ &= 1 \cdot s_k \\ &= s_k. \end{aligned}$$

Pero, dado que $s_k \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, entonces en este segundo caso se puede afirmar que $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$. Ahora sólo queda un tercer caso, en que todos los $\lambda_j < 1$, esto es $\lambda_j \in [0, 1)$ para $j = 1, 2, \dots, p$.

Defínase el conjunto B sobre los anteriores λ_j ,

$$B = \{\lambda_j : \lambda_j \neq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Por lo cual es posible afirmar que $B \neq \phi$, esto se debe a que si

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_j \in [0, 1) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p,$$

esto implica que no todos los λ_j sean ceros, donde se garantiza que B tenga algunos elementos de los p posibles, los cuales son distintos de ceros y menores que uno. Además, de esto puede afirmarse que B tiene mínimo. Sea

$$\lambda_m = \text{mín } B,$$

donde

$$\lambda_m + \sum_{j=1, j \neq m}^p \lambda_j = 1.$$

De lo anterior, se tiene que

$$0 < \lambda_m < 1,$$

entonces

$$0 < 1 - \lambda_m < 1.$$

Dado que $0 \leq \lambda_j < 1$ para $j = 1, 2, \dots, p$, de donde

$$\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_m} \geq 0,$$

ahora, desarrollando

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq m}^p \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_m} &= \frac{\sum_{j=1, j \neq m}^p \lambda_j}{1 - \lambda_m} \\ &= \frac{1 - \lambda_m}{1 - \lambda_m} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $s_j \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ para $j = 1, 2, \dots, p$, sea

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1, j \neq m}^p \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_m} s_j \\ &= \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_m} s_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_m} s_2 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{1 - \lambda_m} s_{m-1} \\ &\quad + \frac{\lambda_{m+1}}{1 - \lambda_m} s_{m+1} + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_m} s_p. \end{aligned}$$

Por tanto, por (2.6) se puede afirmar que $y \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$. Pero

$$y = \frac{1}{1 - \lambda_m} \sum_{j=1}^p \lambda_j s_j - \frac{\lambda_m}{1 - \lambda_m} s_m$$

esto es

$$y = \frac{1}{1 - \lambda_m} s^* - \frac{\lambda_m}{1 - \lambda_m} s_m,$$

despejando s^* se tiene que

$$s^* = (1 - \lambda_m)y + \lambda_m s_m,$$

donde $y \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ y $s_m \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$.

Por propiedades de conjuntos convexos, $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ es convexo y $\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \subseteq S(a_i(k), c(k))_{CH}$. De lo anterior, $s_m \in S(a_i(k), c(k))_{CH}$, $y \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$ y $\lambda_m \in (0, 1)$. Luego, como s^* es un punto extremo de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$, se tiene que $s^* = s_m$; por lo que en éste tercer caso $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$. En consecuencia, por los tres casos anteriores $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$.

Ahora, sean $\bar{s} = (\bar{s}_{il,t}, \bar{s}_{el,t})$ y un punto extremo $s^* = (s_{il,t}^*, s_{el,t}^*)$ de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}$, soluciones óptimas de (3.8) y (3.9) respectivamente. Como $\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) \subseteq S(a_i(k), c(k))_{CH}$, se tiene que $\bar{s} \in S(a_i(k), c(k))_{CH}$ y por (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\} \\ &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t}^* + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}^* \right\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

de la misma manera, como $s^* \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ y por (3.8) se tiene que

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t}^* + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}^* \right\} \\ &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Luego, de (3.10) y (3.11) puede concluirse que

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\} \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t}^* + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}^* \right\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} & \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} = \\ & \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \end{aligned}$$

■

3.3. Descripción de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$

En esta sección se describe de manera informal que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ del déficit de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en la red es irreducible y aperiódica. En primer lugar se describirá como el déficit y las colas definen un proceso estocástico y una cadena de Markov. Luego, debido al impacto en el servicio de paquetes en toda la red por parte del algoritmo programador (3.3), se describirá como la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ se hace irreducible y aperiódica.

Considérese que el proceso $(d(k), q(k))$ define un proceso estocástico. Se puede observar que en todos los frames k del proceso los déficits y las colas en cada enlace determinados por (3.4) son variables aleatorias. Esto se debe a que los déficits y las colas de cada enlace dependen respectivamente de las llegadas $\tilde{a}_{il}(k)$ y $\tilde{a}_{el}(k)$, las cuales son variables aleatorias como se describen en la sección 3.1; además, a estas llegadas se les van adicionando respectivamente un contador déficit y una cola que se van adquiriendo durante el proceso. Otro aspecto que influye en el tamaño de estos déficits y colas de cada enlace y en cada frame k es que dependen respectivamente del servicio de paquetes $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ e $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ determinados por la solución de (3.3). Por lo tanto se puede afirmar que en todos los frames k del proceso, $d_l(k)$ y $q_l(k)$ son variables aleatorias. Luego, al tener una colección de vectores aleatorios $d(k) = (d_l(k))_{l \in \mathcal{L}}$ y $q(k) = (q_l(k))_{l \in \mathcal{L}}$ de todos los frames k del proceso, se obtiene que $(d(k), q(k))$ define un proceso estocástico.

Ahora, téngase en cuenta la siguiente definición de cadena de Markov de estado discreto en [17]: Sea T un subconjunto de números reales y \mathcal{E} un conjunto finito o infinito contable.

Una colección de \mathcal{E} de variables aleatorias $(x(t) : t \in T)$ es un proceso de Markov de estado discreto con espacio estado \mathcal{E} si

$$\begin{aligned} & P[x(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid x(t_n) = i_n, x(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, x(t_1) = i_1] \\ & = P[x(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid x(t_n) = i_n], \end{aligned}$$

siempre que $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ están en T , i_1, i_2, \dots, i_{n+1} están en \mathcal{E} y

$$P[x(t_n) = i_n, x(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, x(t_1) = i_1] > 0.$$

Esto significa que la probabilidad condicional de cualquier evento futuro dados los eventos pasados y el estado actual, es independiente de los eventos pasados y sólo depende del estado actual del proceso. Para el caso que se aborda, el conjunto \mathcal{E} de estados puede ser finito o infinito contable, cuyos elementos representan los estados del proceso en un frame k . Esto es, para un frame k se describe un estado $i \in \mathcal{E}$ como

$$i = \left[\begin{array}{cc} d_{i1}(k) & q_{i1}(k) \\ d_{i2}(k) & q_{i2}(k) \\ \vdots & \vdots \\ d_{il}(k) & q_{il}(k) \end{array} \right]_{l \in \mathcal{L}}.$$

El estado i representaría los déficits de paquetes inelásticos y las colas de paquetes elásticos en todos los enlaces $l \in \mathcal{L}$ para un frame k .

Por otro lado, obsérvese que los vectores de actualización (3.4) para los déficits de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en la red dependen del estado actual del proceso. Esto es, $(d(k+1), q(k+1))$ depende de lo que se da en el estado actual de un frame k tales como $d_l(k)$, $\tilde{a}_{il}(k)$, $I_{ii}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$, $q_l(k)$, $\tilde{a}_{el}(k)$ e $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ para todo $l \in \mathcal{L}$. Además, $(d(k+1), q(k+1))$ no depende de los eventos pasados al frame k , el cual hace que el proceso sea independiente de la historia del sistema, por tanto el proceso $(d(k), q(k))$ define una cadena de Markov.

La cadena de Markov $x(k) = (d(k), q(k))$ es de tiempo homogéneo, debido a que para un frame k_1 , la cadena está en un estado $x(k_1)$ y para un frame $k_1 + k_2$, la cadena está en el estado $x(k_1 + k_2)$; luego la cadena de pasar del estado $x(k_1)$ al estado $x(k_1 + k_2)$ depende de lo que transcurrió de k_1 hasta $k_1 + k_2$, por lo cual el cambio de estado dependió de $k_1 + k_2 - k_1 = k_2$ instantes de tiempo. Debe aclararse que un instante de tiempo es el tamaño de un frame. De lo anterior, puede afirmarse que para $t > s$, $P_{ij}(s, t)$ sólo depende a través de $t - s$, de donde

$$P_{ij}(s, t) = P_{ij}(t - s). \quad (3.12)$$

De manera informal en lo que sigue se describe que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es irreducible y aperiódica.

En primer lugar, téngase en cuenta lo siguiente. Según [1] las probabilidades (2.1) y (3.2), nos dan la garantía de que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es irreducible y aperiódica. Por lo cual en esta cadena de Markov, se utilizarán estas probabilidades en el análisis de las probabilidades de transición de los estados del déficit o de la cola en un enlace particular l . Esto se debe a que si el análisis se hace para todos los enlaces $l \in \mathcal{L}$, habrá que tener en cuenta la política de servicio de paquetes por parte del programador (3.3), las relaciones de interferencia entre los enlaces, las probabilidades de transición entre los estados y de otras situaciones que se puedan dar. En lo que sigue en la descripción de irreducibilidad y aperiocidad de la cadena de Markov, se hará el análisis para un sólo déficit de paquetes inelásticos en un enlace particular l , aunque de forma similar se puede hacer para una cola de paquetes elásticos en el enlace l .

Considérese la siguiente definición de cadena de Markov irreducible en [17]: Una cadena de Markov X de espacio estado contable \mathcal{E} de tiempo homogéneo es irreducible si para todo $i, j \in \mathcal{E}$, existe un $s > 0$ tal que $P_{ij}(s) > 0$.

Sean los vectores i, j que pertenecen al espacio \mathcal{E} de $(d(k), q(k))$. Supóngase que j es un estado superior que i . En este caso, téngase en cuenta que durante el transcurso de un tiempo t mayor que un instante de tiempo, al enlace l le están llegando paquetes y que por alguna circunstancia el programador está sirviendo otros enlaces y a éste no, por lo que no se examinará lo que suceda en los otros enlaces. Por otro lado, por la cuarta asunción de la sección 2.1 se asume que las llegadas solo ocurren al inicio del frame y que son independientes entre diferentes frames. Con los supuestos mencionados, los posibles estados h de un déficit de paquetes inelásticos en un frame k en el enlace l , podrían tomar valores de cualquier entero no negativo. Si se supone que un estado m superior a h , entonces debe de existir n instantes de tiempo menores o iguales a t para alcanzar el estado m , donde cada instante de tiempo es el tamaño de un frame; por tanto, es posible afirmar que la probabilidad de transición del estado h en el frame k hasta el estado m en el frame $k + n$ está dada por

$$\begin{aligned} & P_{hm}(k, k + n) \\ &= P_{h,h+1}(k, k + 1)P_{h+1,h+2}(k + 1, k + 2) \cdots P_{m-1,m}(k + n - 1, k + n) \\ &+ \sum P[\text{de otros caminos del estado } h \text{ al estado } m \text{ en } n \text{ instantes de tiempo}]. \end{aligned}$$

Ahora, como la cadena de Markov es de tiempo homogéneo, por (3.12) se tiene que

$$P_{hm}(n) = P_{h,h+1}(1)P_{h+1,h+2}(1) \cdots P_{m-1,m}(1) + \sum P[\text{de otros caminos}],$$

donde

$$P_{hm}(n) \geq P_{h,h+1}(1)P_{h+1,h+2}(1) \cdots P_{m-1,m}(1)$$

es lo mismo que

$$P_{hm}(n) \geq P(a_{il} = 1)P(a_{il} = 1) \cdots P(a_{il} = 1),$$

pero por (2.1) se deduce que

$$P(a_{il} = 1)P(a_{il} = 1) \cdots P(a_{il} = 1) > 0.$$

Por lo tanto existe $n > 0$ tal que $P_{hm}(n) > 0$. Teniendo en cuenta éste análisis para un enlace particular l con ciertos estados del déficit o de la cola, además de las condiciones que han sido mencionadas, como la política de servicio del programador, las relaciones de interferencia entre enlaces y otras; al generalizar dicho análisis para todos los enlaces $l \in \mathcal{L}$ puede asumirse que para todo $i, j \in \mathcal{E}$ con j superior a i , existe $s > 0$ tal que $P_{ij}(s) > 0$.

Considérese ahora el caso $i = j$. Para este caso, supóngase que no están llegando paquetes y no hay servicio en todos los enlaces en un tiempo t mayor que un instante de tiempo. Sea k un frame en el proceso de no llegar paquetes y de que no hay servicio en todos los enlaces. Sea h el estado del déficit en el enlace l en el frame k , entonces debe de existir n instantes de tiempo menores o iguales a t en que se permanece en el mismo estado h . Luego, la probabilidad de permanencia en el estado h desde el frame k hasta el frame $k + n$ estaría dada por

$$P_{hh}(k, k + n) = P_{hh}(k, k + 1)P_{hh}(k + 1, k + 2) \cdots P_{hh}(k + n - 1, k + n) \\ + \sum P[\text{de otras permanencias en el estado } h \text{ en } n \text{ instantes de tiempo}],$$

de donde

$$P_{hh}(k, k + n) \geq P_{hh}(k, k + 1)P_{hh}(k + 1, k + 2) \cdots P_{hh}(k + n - 1, k + n).$$

Luego, por (3.12) se tiene que

$$P_{hh}(n) \geq P_{hh}(1)P_{hh}(1) \cdots P_{hh}(1)$$

es lo mismo que

$$P_{hh}(n) \geq P(a_{il} = 0)P(a_{il} = 0) \cdots P(a_{il} = 0),$$

pero por (2.1) se sabe que

$$P(a_{il} = 0)P(a_{il} = 0) \cdots P(a_{il} = 0) > 0.$$

Entonces existe $n > 0$ tal que $P_{hh}(n) > 0$. Por lo cual, puede asumirse que para todo $i \in \mathcal{E}$ existe $s > 0$, tal que $P_{ii}(s) > 0$.

Ahora supóngase que j es un estado inferior que i . Primero se analizará como el estado i llega al estado de vector cero. En este caso por un periodo muy largo de tiempo no van a llegar paquetes y el programador (3.3) siempre está sirviendo paquetes, eventualmente los déficits van a llegar al estado cero. Lo que significa que van a existir instantes de tiempo tales que existen unos estados inferiores al estado i hasta llegar al estado cero. Esto se debe

a la política del programador en la evacuación de paquetes para elegir la ruta que llegue a cero. Una política es de ir evacuando aquellos paquetes inelásticos que están en los déficits que son mayores al tamaño de las colas de paquetes elásticos, cuando el parámetro ϵ del algoritmo (3.3) varía, tal como se explicará en la sección 4.2.

Haciendo el análisis para un sólo enlace l , cuyo déficit de paquetes inelásticos está en un estado h y quiere llegar a un estado inferior m . Por tanto, se puede afirmar que eventualmente debe existir n_1 instantes de tiempo en que

$$P_{h0}(n_1) > 0.$$

Ahora para subir del estado cero al estado j , el análisis para el enlace l es similar al primer caso que se abordó en la comparación de los estados i, j . Esto es, existe n_2 instantes de tiempo tales que

$$P_{0m}(n_2) > 0.$$

Luego, haciendo $n = n_1 + n_2$ y por probabilidades de transición entre estados se tiene que

$$P_{hm}(n) \geq P_{h0}(n_1)P_{0m}(n_2) > 0.$$

Por tanto, existe $n > 0$, tal que $P_{hm}(n) > 0$. Por tanto, se puede asumir que para todo $i, j \in \mathcal{E}$ con j inferior a i , existe $s > 0$ tal que $P_{ij}(s) > 0$. En consecuencia, teniendo en cuenta los casos anteriores se puede asumir que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es irreducible.

Ahora se describirá cómo la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ se puede asumir como aperiódica, es decir, que el periodo de cada estado de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ sea igual a uno. En [17] se define el periodo de un estado i como el

$$M.C.D \{k \geq 0 : P_{ii}(k) > 0\}.$$

Puede interpretarse $P_{ii}(k)$ como la probabilidad de que el proceso de haber iniciado en el estado i en k instantes de tiempo regrese al mismo estado i . En lo que sigue, téngase en cuenta que el análisis de estados se hará para el caso particular del déficit en un enlace l , de forma similar se puede hacer para la cola en un enlace l .

Supóngase que el proceso estaba en el estado cero en un frame k . Además, supóngase que en ese estado cero para los siguientes frames consecutivos $k + 1, k + 2, k + 3, \dots$, donde las transiciones han transcurrido en un tiempo igual a un instante de tiempo, el proceso mantendrá el déficit en el estado cero en el caso de que en el enlace l no hayan llegadas inelásticas; por lo cual

$$P_{00}(k, k + n) \geq P_{00}(k, k + 1)P_{00}(k + 1, k + 2) \cdots P_{00}(k + n - 1, k + n), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Como la cadena de Markov es de tiempo homogéneo, por (3.12) se tiene

$$P_{00}(n) \geq P_{00}(1) \cdots P_{00}(1),$$

y por (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned} P_{00}(n) &\geq P(a_{il} = 0) \cdots P(a_{il} = 0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Esto es $P_{00}(n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Ahora el

$$M.C.D \{n \in \mathbb{Z}^+ : P_{00}(n) > 0\} = 1,$$

puede afirmarse que el periodo del estado cero del déficit en un enlace l es igual a 1. Por lo cual se puede asumir que el periodo del estado cero de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es igual a 1. Por otro lado, considérese la siguiente proposición en [17]: Si una cadena de Markov X es irreducible, todos los estados tienen el mismo periodo. Teniendo en cuenta ésta proposición, asumiendo que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es irreducible y que el periodo del estado cero es 1, por tanto se puede decir que todos los estados de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ tendrán periodo igual a 1. En consecuencia $(d(k), q(k))$ es aperiódica.

3.4. Resultados de convergencia

En esta sección se desarrollan las pruebas de los resultados de convergencia del programa óptimo en [1]. Los dos primeros lemas son fundamentales para la prueba del tercer lema; donde las pruebas de estos dos primeros lemas se basan en el drift de la función de Lyapunov de [17] para los estados de los déficits y colas de la red respectivamente. Se probará que dichos drift van a estar acotados superiormente. El tercer lema, al igual que los dos primeros, se fundamenta en el drift de la función de Lyapunov para los estados de los déficits y colas conjuntamente, en el cual se probará que dicho drift va a estar acotado superiormente. Como consecuencia del tercer lema, aparece el primer corolario; en el que se probará que el valor esperado del total de los déficits y las colas durante el servicio es acotado superiormente. El segundo corolario, es una consecuencia del programa óptimo, en el cual se probará que la tasa media de llegada inelásticas es menor o igual a la tasa de partida de paquetes inelásticos. El cuarto lema es una variante del tercer lema, cuya prueba es importante para la prueba del último teorema del presente trabajo. Por último, se probará detalladamente el teorema que plantea [1] en los resultados de convergencia, como una consecuencia de todo el programa óptimo.

Lema 3.4.1. *Dado un frame k tenemos los eventos $d(k) = d$ y $q(k) = q$ y si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$, tales que*

$$\mu_{il}(\Delta) \geq x_{il}(1 - p_l) \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \tag{3.13}$$

y

$$\mu_{el}(\Delta) > 0 \text{ para todo } l \in \mathcal{L}, \quad (3.14)$$

son ciertas, entonces

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \end{aligned}$$

para alguna constante B_8 no negativa, donde $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ está dada por la solución de (3.3). \diamond

Prueba: Teniendo como guía el lado izquierdo de la desigualdad a probar, se determina el drift de la función de Lyapunov en [17], para los estados de los déficits de paquetes inelásticos, definido como $E[V(d(k+1)) \mid d(k) = d] - V(d)$, donde la función de Lyapunov V es no negativa sobre el conjunto contable de estados para los déficits inelásticos. En este caso, se define $V(d) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2$. Además, teniendo en cuenta los vectores de actualización en (3.4), las propiedades del valor esperado y la siguiente propiedad de los números reales: para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $[\alpha^+]^2 \leq \alpha^2$, donde $\alpha^+ = \max\{0, \alpha\}$. Por tanto

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}, \end{aligned}$$

luego por desarrollo algebraico en el lado derecho de la desigualdad y valor esperado se obtiene

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, recuérdese que en la sección 3.1 se asumió que $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial, donde se interpreta $\tilde{a}_{il}(k)$ como el número total de llegadas exitosas inelásticas al inicio de un frame k en un enlace l . Además en la misma sección también se definió que $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ como el número de paquetes inelásticos que se pueden servir exitosamente

en el enlace l en un frame k . Por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{il}(k) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\geq 0 \\ \tilde{a}_{il}^2(k) - 2\tilde{a}_{il}(k) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) &\leq \tilde{a}_{il}^2(k) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \\ [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 &\leq \tilde{a}_{il}^2(k) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \\ \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y propiedades del valor esperado y desigualdades, se obtiene

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, por (3.5) y (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) &= \left[\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* \right]^2 \\ &\leq a_{il}^2(k), \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \leq \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} a_{il}^2(k).$$

De esto y propiedades de valor esperado y desigualdades

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + a_{il}^2(k) \right], \end{aligned}$$

además por ser el valor esperado un operador lineal, puede concluirse que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [E[\tilde{a}_{il}(k)] - E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} E[\tilde{a}_{il}^2(k)] + E[a_{il}^2(k)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por otro lado, considérese ahora las siguientes deducciones. En primer lugar, para el cálculo de la varianza de una variable aleatoria X , se utilizará el siguiente resultado de [18], si $E[X]$ existe se tiene que

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2. \tag{3.16}$$

Ahora, la variable aleatoria $a_{il}(k)$ tiene media x_{il} y varianza σ_{il}^2 , por (3.16) se tiene que

$$E [a_{il}^2(k)] = x_{il}^2 + \sigma_{il}^2. \quad (3.17)$$

De [18] puede considerarse el siguiente teorema de esperanza condicional: Sean X, Y variables aleatorias reales definidas sobre un espacio de probabilidad y h una función real tal que $h(X)$ es una variable aleatoria. Si $E[h(X)]$ existe, entonces

$$E[h(X)] = E[E[h(X) | Y]]. \quad (3.18)$$

En la sección 3.1 se asumió que la variable aleatoria $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $1 - p_l$, además de la séptima asunción de la sección 2.1 x_{il} es la media de la variable aleatoria a_{il} . Por lo tanto, por (3.18) en el frame k puede afirmarse que

$$\begin{aligned} E [\tilde{a}_{il}(k)] &= E [E[\tilde{a}_{il}(k) | a_{il}(k) = a_{il}]] \\ &= E [a_{il}(1 - p_l)] \\ &= (1 - p_l)E[a_{il}] \\ &= (1 - p_l)x_{il} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $1 - p_l$, se tiene que la varianza para ésta variable aleatoria condicionada en el evento $a_{il}(k) = a_{il}$ es

$$Var(\tilde{a}_{il}(k)) = a_{il}p_l(1 - p_l),$$

teniendo en cuenta esto, además por (3.18), (3.19) y (3.16) puede concluirse que

$$\begin{aligned} E [\tilde{a}_{il}^2(k)] &= E [E[\tilde{a}_{il}^2(k) | a_{il}(k) = a_{il}]] \\ &= E[a_{il}p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2] \\ &= p_l(1 - p_l)E[a_{il}] + x_{il}^2(1 - p_l)^2 \\ &= x_{il}p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De lo anterior, al remplazar (3.17), (3.19) y (3.20) en (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned} &E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [(1 - p_l)x_{il} - E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il}p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2. \end{aligned}$$

Además en la sección 2.2 se asumió que para todo enlace l y frame k , $x_{il}(1 - p_l) > 0$. Por otra parte, como la varianza de cualquier variable aleatoria es no negativa, puede deducirse que para todo $l \in \mathcal{L}$

$$x_{il}p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2 > 0.$$

De esto

$$B_8 = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l (1 - p_l) + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2$$

$$> 0.$$

Por otro lado, de la sección 2.3, en la descripción del algoritmo iterativo, el parámetro $\epsilon > 0$. Por lo anterior,

$$E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [(1 - p_l)x_{il} - E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]]$$

$$= B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (1 - p_l)x_{il}$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right]. \quad (3.21)$$

Teniendo presente que el déficit $d_l \geq 0$ para todo $l \in \mathcal{L}$ y al asumir que (3.13) es cierta, se deduce que

$$d_l x_{il} (1 - p_l) \leq d_l \mu_{il}(\Delta) \text{ para todo } l \in \mathcal{L},$$

de donde

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta).$$

Por lo anterior y propiedades de la desigualdad, se concluye que

$$E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta)$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right],$$

para alguna constante B_8 no negativa, $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ dada por la solución de (3.3). ■

El siguiente lema se basa en que el drift de la función de Lyapunov para los estados de las colas de paquetes elásticos en la red está acotado superiormente. El inicio de la prueba del siguiente lema es similar al lema anterior 3.4.1, además junto con este lema 3.4.1 son fundamentales para la prueba del lema 3.4.3.

Lema 3.4.2. *Dado que en el frame k tenemos los eventos $d(k) = d$ y $q(k) = q$ y si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tales que (3.13) y (3.14) son ciertas, entonces*

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{ E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta) \} \end{aligned}$$

para alguna constante $B_9 > 0$, donde x_e^* y $\tilde{x}^*(k)$ son las soluciones de (2.7) y (3.1) respectivamente. \diamond

Prueba: El inicio de la prueba es similar al de la prueba del lema 3.4.1, donde se encontró el drift de la función de Lyapunov para los estados de las colas elásticas con $V(q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l^2$. Teniendo en cuenta los vectores de actualización (3.4) y la propiedad $[\alpha^+]^2 \leq \alpha^2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$; puede afirmarse que

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, por desarrollo algebraico en el lado derecho de la desigualdad se tiene que

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l [\tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] \end{aligned}$$

De la sección 3.1, $\tilde{a}_{el}(k)$ es el número de paquetes elásticos a entrar en la red en un enlace l para un frame k , además $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ son los paquetes elásticos que se pueden servir o programar exitosamente en el enlace l durante el frame k , por tanto

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_{el}(k) \cdot I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0 \\ & [\tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \leq \tilde{a}_{el}^2(k) + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y por propiedades de valor esperado y desigualdades, se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (2.3) y (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (\tilde{s}_{il,t}^* + \tilde{s}_{el,t}^*) &\leq \sum_{t=1}^T c_l \\ \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* &\leq \sum_{t=1}^T c_l - \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq \sum_{t=1}^T c_l - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq c_l T - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q). \end{aligned}$$

Al sumar esta última desigualdad con la desigualdad $0 \leq I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$, como se deduce en la sección 3.1, puede concluirse que

$$I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \leq c_l T,$$

de donde

$$I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \leq c_l^2 T^2.$$

Teniendo en cuenta esto y las propiedades de valor esperado y desigualdades, se llega a

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] &- \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &\leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + c_l^2 T^2 \right]. \end{aligned}$$

Ahora, dado que de la sección 3.1 $\tilde{a}_{el}(k)$ es una variable aleatoria con media $\tilde{x}_{el}^*(k)$ y varianza acotada superiormente por σ_e^2 , es decir $Var(\tilde{a}_{el}(k)) \leq \sigma_e^2$. Por el resultado (3.16) para la varianza se puede afirmar que

$$\begin{aligned} E[\tilde{a}_{el}^2(k)] - \tilde{x}_{el}^{*2}(k) &\leq \sigma_e^2 \\ E[\tilde{a}_{el}^2(k)] &\leq \sigma_e^2 + \tilde{x}_{el}^{*2}(k). \end{aligned} \tag{3.22}$$

De otro lado, la solución de (3.1) estaría dada por $\tilde{x}_{el}^*(k)$, por lo cual

$$0 \leq \tilde{x}_{el}^*(k) \leq X_{max},$$

de esto se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{el}^{*2}(k) &\leq X_{max}^2 \\ \sigma_e^2 + \tilde{x}_{el}^{*2}(k) &\leq \sigma_e^2 + X_{max}^2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Luego por transitividad de (3.22) y (3.23), es posible establecer

$$\begin{aligned} E[\tilde{a}_{el}^2(k)] &\leq \sigma_e^2 + X_{max}^2 \\ \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} E[\tilde{a}_{el}^2(k)] &\leq \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (\sigma_e^2 + X_{max}^2) \end{aligned}$$

De esta última desigualdad, y propiedades de valor esperado y desigualdades, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
 & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_e^2 + X_{max}^2 + c_l^2 T^2 \right] \\
 & = \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[\tilde{a}_{el}(k)] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_e^2 + X_{max}^2 + E[c_l^2 T^2]
 \end{aligned}$$

Como $E[\tilde{a}_{el}(k)] = \tilde{x}_{el}^*(k)$ para todo $l \in L$; además, por (3.16) en el cálculo de la varianza para la variable aleatoria c_l dada en la décima asunción de la sección 2.1, se puede establecer que

$$\begin{aligned}
 E[c_l^2] &= \sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2 \\
 \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} E[c_l^2 T^2] &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2) T^2.
 \end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned}
 & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
 & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{x}_{el}^*(k) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (\sigma_e^2 + X_{max}^2) + (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2) T^2.
 \end{aligned}$$

Además, en la sección 2.3, se estableció que $X_{max} > 0$ es un parámetro muy grande, entonces

$$\sigma_e^2 + X_{max}^2 + (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2) T^2 > 0 \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L},$$

luego al sustituir

$$\begin{aligned}
 B_9 &= \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (\sigma_e^2 + X_{max}^2) + (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2) T^2 \\
 &> 0,
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
 & \leq B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{x}_{el}^*(k) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
 & = B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)].
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

De otro lado, como (3.14) es cierta y $X_{max} > 0$ es un parámetro muy grande se tiene que

$$0 < \mu_{el}(\Delta) \leq X_{max},$$

además como $\tilde{x}_{el}^*(k)$ es la solución óptima de (3.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) - q_l \mu_{el}(\Delta) &\leq \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \\ - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] &\leq - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) - q_l \mu_{el}(\Delta) \right]. \end{aligned}$$

De esto último y propiedades de las desigualdades, puede afirmarse que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] &- \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ \leq B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) - q_l \mu_{el}(\Delta) \right] &+ \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \end{aligned}$$

Asociando términos en el lado derecho de la desigualdad, es posible concluir

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] &- \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ \leq B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))) &- \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{ E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta) \} \end{aligned}$$

para alguna constante $B_9 > 0$. ■

Lema 3.4.3. *Considere la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tales que (3.13) y (3.14) son ciertas, entonces*

$$\begin{aligned} E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] &- V(d, q) \\ \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \} \end{aligned}$$

para algunas constantes positivas B_1, B_2, B_3 , todo $\epsilon > 0$, donde $\tilde{x}_e(k)$ es la solución a (3.1), $I_i^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución a (3.3). ◇

Prueba: Antes, defínase el conjunto $\mathcal{C}/(1 + \Delta)$ como:

$$\mathcal{C}/(1 + \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} \mu(\Delta) = (\mu_{il}(\Delta), \mu_{el}(\Delta))_{l \in \mathcal{L}} : \text{ existe } (\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}, \\ (\mu_{il}, \mu_{el}) = (1 + \Delta) \mu(\Delta) \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \end{array} \right\}$$

Dado que existe un punto $\mu(\Delta) = (\mu_{il}(\Delta), \mu_{el}(\Delta)) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$, entonces existe $(\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}$, tal que $(\mu_{il}, \mu_{el}) = (1 + \Delta)\mu(\Delta)$ para todo $l \in \mathcal{L}$. Ahora, por la definición 2.2.2 existe $(\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$ para todo a_i y c ; tales que

$$\begin{aligned}\mu_{il} &= E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)] \\ \mu_{el} &= E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)]\end{aligned}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$. Pero,

$$\begin{aligned}\mu_{il} &= (1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) \\ \mu_{el} &= (1 + \Delta)\mu_{el}(\Delta),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) &= E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)] \\ (1 + \Delta)\mu_{el}(\Delta) &= E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)]\end{aligned}\tag{3.25}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$.

Por otro lado, considérese la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Al determinar el drift de ésta función definida para los estados de los déficits y colas de la red, al tener en cuenta (3.4) para hallar $(d(k+1), q(k+1))$ y propiedades del valor esperado, es posible establecer que

$$\begin{aligned}& E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &= E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \right]^2 + \left[[q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \right]^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2 + q_l^2}{2} \\ &= E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \right]^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ &\quad + E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[[q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \right]^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Entonces por los lemas 3.4.1 y 3.4.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_8 + B_9 - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
 & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta)\},
 \end{aligned}$$

haciendo $B_1 = B_8 + B_9 > 0$ y organizando términos en el lado derecho de la desigualdad, se llega a

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \quad (3.27) \\
 & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)].
 \end{aligned}$$

Como en lo anterior, existe $(\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$, por la definición 2.2.1 existe $(\bar{s}_{il,t}, \bar{s}_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH}$, con

$$\bar{\mu}_{il}(a_i, c) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t}, \quad \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \quad (3.28)$$

Luego, como $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ y $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtienen de la solución de (3.3), entonces

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*, \quad I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*,$$

donde $\tilde{s}^* = (\tilde{s}_{il}^*, \tilde{s}_{el}^*)$ es una solución de (3.3), esto es

$$\tilde{s}^* \in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}.$$

Por tanto, por la proposición 3.2.7 puede concluirse que

$$\tilde{s}^* \in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{CH}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}.$$

De esto, y dado que $(\bar{s}_{il,t}, \bar{s}_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i, c)_{CH}$, se tiene que

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\} \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* + q_l \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* \right\},$$

de donde

$$- \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* + q_l \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* \right\} \leq - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\},$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned} & - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right\} \\ & \leq - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right] \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\}. \end{aligned}$$

Determinando el valor esperado en ambos lados de esta última desigualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} & - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \leq - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pero, por (3.28)

$$- \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \leq -\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \quad - \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \leq -\bar{\mu}_{el}(a_i, c).$$

Ahora como w_l es un parámetro no negativo en (2.7), $\epsilon > 0$, $d_l \geq 0$ y $q_l \geq 0$, y lo anterior es posible afirmar que

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \leq - \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) \\ & \quad - q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \leq - q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c), \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$, luego al sumar estas dos últimas desigualdades

$$- \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} - q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \leq - \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) - q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c)$$

y por propiedades del valor esperado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & -E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right] \\
 & \leq -E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \right]
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por transitividad entre (3.29) y (3.30) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & -E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
 & \leq -E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \right],
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

de esta última desigualdad (3.31) y (3.27), se deduce que

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]
 \end{aligned}$$

y al remplazar los valores esperados de (3.25) en ésta desigualdad, se llega a

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (1 + \Delta) \mu_{el}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)].
 \end{aligned}$$

Ahora, en el lado derecho de la desigualdad realizando operaciones entre los términos y agrupando algunos, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}
 \end{aligned}$$

Al designar

$$B_2 = \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\}, \text{ donde } B_2 \text{ es constante para todos los enlaces;}$$

$$B_3 = \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\}, \text{ donde } B_3 \text{ es constante para todos los enlaces.}$$

Además, como $\Delta > 0$, $x_{il}(1-p_l) > 0$, y teniendo en cuenta (3.13) y (3.14), es posible concluir que B_2 y B_3 son constantes positivas. Por otro lado, también se sabe que $\min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\} \leq \mu_{il}(\Delta)$ y $\min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\} \leq \mu_{el}(\Delta)$, de donde

$$\begin{aligned} -\Delta \mu_{il}(\Delta) &\leq -\Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\} = -B_2 \\ -\Delta \mu_{el}(\Delta) &\leq -\Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\} = -B_3 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} &E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &\leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

con B_1, B_2, B_3 constantes positivas y todo $\epsilon > 0$. ■

El lema anterior tiene como consecuencia el siguiente corolario, el cual será utilizado para explicar el comportamiento de los déficits y las colas en la red Wi-Fi a medida que varía el parámetro ϵ en los algoritmos controlador y programador en la sección 4.2. En la prueba del siguiente corolario, se tiene como aspecto importante la prueba de que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es recurrente positiva.

Corolario 3.4.1. *Si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tales que (3.13) y (3.14) son ciertas, entonces el servicio esperado del total del déficit y la longitud de la cola en la red está acotado superiormente por*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \leq B_4 + \frac{1}{\epsilon} B_5,$$

donde

$$B_4 = \frac{B_1}{\min \{B_2, B_3\}}$$

y

$$B_5 \leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min \{B_2, B_3\}}$$

◇

Prueba: Supóngase que existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tales que (3.13)

y (3.14) son ciertas, entonces por el lema 3.4.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
 & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}
 \end{aligned}$$

para algunas constantes positivas B_1, B_2, B_3 , todo $\epsilon > 0$, donde $\tilde{x}_e(k)$ es la solución a (3.1), $I_i^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución a (3.3). Esto es lo mismo que

$$\begin{aligned}
 & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
 & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \\
 & \quad + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta)\}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por otro lado, por propiedades de desigualdades en los reales, se puede afirmar que

$$\begin{aligned}
 U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta)) & \leq |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))| \\
 & \leq |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|,
 \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|. \tag{3.33}$$

Ahora, como (3.13) es cierta, $w_l \geq 0$ y $1 + \Delta > 0$ se tiene que

$$-w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) \leq -w_l(1 + \Delta)x_{il}(1 - p_l) \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 & w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) \\
 & \leq w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)x_{il}(1 - p_l).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Luego, dado que $x_{il}(1 - p_l) > 0$, puede afirmarse que

$$-w_l(1 + \Delta)x_{il}(1 - p_l) \leq 0,$$

de donde

$$w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)x_{il}(1 - p_l) \leq w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \tag{3.35}$$

y por transitividad de (3.34) y (3.35)

$$w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) \leq w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)],$$

de esto

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta)\} \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \quad (3.36)$$

Por tanto, de (3.32), (3.33) y (3.36), se obtiene

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)], \end{aligned}$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned} B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & \quad + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ahora, como $B_2 > 0$ y $B_3 > 0$ se tiene que

$$0 < \min\{B_2, B_3\} \leq B_2 \quad \text{y} \quad 0 < \min\{B_2, B_3\} \leq B_3,$$

además como $d_l \geq 0$ y $q_l \geq 0$ entonces

$$d_l \cdot \min\{B_2, B_3\} \leq B_2 d_l \quad \text{y} \quad q_l \cdot \min\{B_2, B_3\} \leq B_3 q_l,$$

de donde

$$d_l \leq \frac{B_2}{\min\{B_2, B_3\}} d_l \quad \text{y} \quad q_l \leq \frac{B_3}{\min\{B_2, B_3\}} q_l,$$

y de esto

$$d_l + q_l \leq \frac{B_2}{\min\{B_2, B_3\}} d_l + \frac{B_3}{\min\{B_2, B_3\}} q_l.$$

Por tanto,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \leq \frac{B_2}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + \frac{B_3}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l. \quad (3.38)$$

Luego, por (3.37) se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{B_2}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + \frac{B_3}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \\ & \leq \frac{B_1}{\min\{B_2, B_3\}} + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} V(d, q) \\ & \quad - \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]. \end{aligned}$$

Ahora, por transitividad entre esta última desigualdad con (3.38) y haciendo $B_4 = \frac{B_1}{\min\{B_2, B_3\}}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) &\leq B_4 + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} (|U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} V(d, q) \\ &\quad - \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q], \end{aligned}$$

y al determinar el valor esperado en ambos lados de la desigualdad se puede afirmar que

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] &\leq B_4 + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} (|U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]] \\ &\quad + \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[V(d, q)] \\ &\quad - \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]]. \end{aligned}$$

Luego, dado que $E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]$ es un valor esperado condicionado en el evento $d(k) = d, q(k) = q$, se deduce que

$$\begin{aligned} E[E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]] &= E[E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \mid d(k) = d, q(k) = q]] \\ &= E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))], \end{aligned} \quad (3.39)$$

además por la misma propiedad de valor esperado también se tiene que

$$E[E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]] = E[V(d(k+1), q(k+1))], \quad (3.40)$$

de esto,

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] &\leq B_4 + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} (|U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon \min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \\ &\quad + \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[V(d, q)] \\ &\quad - \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} E[V(d(k+1), q(k+1))]. \end{aligned}$$

Por otro lado en un frame k , dado que se conoce el estado del déficit y la cola en el frame k , esto es $d(k) = d$ y $q(k) = q$, la función de Lyapunov V evaluada en (d, q) toma un valor

constante en el frame k . Entonces, el valor esperado de $V(d(k), q(k))$ dado el evento $d(k) = d$, $q(k) = q$ es igual al valor de $V(d, q)$ en el frame k , es decir

$$E[V(d(k), q(k)) \mid d(k) = d, q(k) = q] = V(d, q),$$

además por propiedades de valor esperado, es posible afirmar que

$$\begin{aligned} E[V(d, q)] &= E[E[V(d(k), q(k)) \mid d(k) = d, q(k) = q]] \\ &= E[V(d(k), q(k))]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Teniendo en cuenta esto y propiedades de límite superior de sucesiones se puede establecer que

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \\ &\leq B_4 + \frac{1}{\epsilon \min \{B_2, B_3\}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\min \{B_2, B_3\}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ahora, teniendo que $\tilde{x}_{el}^*(k)$ es solución de (3.1), (3.14) es cierta y X_{max} es un parámetro muy grande, puede afirmarse que

$$0 \leq \tilde{x}_{el}^*(k) \leq X_{max}, \quad 0 \leq \mu_{el}(\Delta) \leq X_{max},$$

de donde

$$\begin{aligned} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| &\leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| \\ |U_l(\mu_{el}(\Delta))| &\leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| \end{aligned}$$

entonces

$$|U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|. \quad (3.43)$$

De esto, determinando el valor esperado en ambos lados de ésta desigualdad y teniendo en cuenta que $\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|$ es constante para todos los enlaces en el frame k , se obtiene

$$E[|U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|] \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\min \{B_2, B_3\}} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] \\ &\leq \frac{1}{\min \{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por otro lado, de (3.5) y (2.2) se puede deducir que para todo $l \in \mathcal{L}$ en el frame k

$$\begin{aligned} E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] &= E \left[\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ &\leq E[a_{il}(k)], \end{aligned}$$

por la séptima asunción en la sección 2.1 se sabe que $E[a_{il}(k)] = x_{il}$, de donde

$$\begin{aligned} E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] &\leq x_{il} \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L} \\ w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] &\leq w_l x_{il} \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \quad (3.45)$$

Entonces, sumando las desigualdades (3.44) y (3.45) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \right\} \\ &\leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min\{B_2, B_3\}}. \end{aligned}$$

Se puede notar que la fracción del lado derecho de ésta desigualdad se mantiene constante para todos los valores de $k \in \mathbb{N}$, por propiedad de límite superior de sucesiones, se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \right\} \\ &\leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min\{B_2, B_3\}}. \end{aligned}$$

De esto se hace

$$\begin{aligned} B_5 &= \frac{1}{\min\{B_2, B_3\}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} |U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \right\}, \end{aligned}$$

de donde

$$B_5 \leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min\{B_2, B_3\}}$$

En consecuencia, (3.42) es equivalente a

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \\ & \leq B_4 + \frac{1}{\epsilon} B_5 + \frac{1}{\min \{B_2, B_3\}} \limsup_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En lo que sigue de la prueba se pretende desarrollar el cálculo de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\},$$

para desarrollarlo, se probará primero que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es recurrente positiva.

Probemos que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es recurrente positiva.

En la sección 3.3 se designó \mathcal{E} como el conjunto de todos los estados de la cadena de Markov $(d(k), q(k))$, donde se indicará (d, q) un estado cualquiera de la cadena de Markov. Ahora, considérese el siguiente criterio de estabilidad de Foster-Lyapunov en [17]: Supóngase que V , f , g son funciones no negativas sobre el conjunto de estados \mathcal{S} de una cadena de Markov X , tal que:

$$PV(i) - V(i) \leq -f(i) + g(i) \quad \text{para todo } i \in \mathcal{S}, \quad (3.47)$$

donde P es la matriz de probabilidad de transición de un solo paso de la cadena de Markov X ; además

$$PV(i) = E[V(X(t+1)) \mid X(t) = i].$$

En adición, supóngase que para algún $\epsilon > 0$ tal que el conjunto C definido por

$$C = \{i : f(i) < g(i) + \epsilon\}$$

es finito. Entonces X es recurrente positiva.

Para la cadena de Markov $(d(k), q(k))$, dado que \mathcal{E} es el conjunto de todos sus estados y teniendo en cuenta lo anterior, puede afirmarse que la desigualdad del lema 3.4.3 es equivalente a

$$\begin{aligned} & PV(d, q) - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta)\mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

para algunas constantes positivas B_1 , B_2 , B_3 , todo $\epsilon > 0$, donde $\tilde{x}_e(k)$ es la solución a (3.1), $I_i^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución a (3.3).

Sea $(d, q) \in \mathcal{E}$. Primero, téngase en cuenta la siguiente definición de función indicador:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{si } A \text{ es cierta} \\ 0, & \text{si } A \text{ es falsa} \end{cases}$$

De esto, para cualquier función $h(x)$ en \mathbb{R} , se tiene que

$$h(x) = h(x)I_{\{h(x) \geq 0\}} + h(x)I_{\{h(x) < 0\}}.$$

Teniendo en cuenta la definición de función indicador, puede afirmarse que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \geq 0 \right\}} \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] < 0 \right\}}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Ahora, defínase la siguiente función g sobre el conjunto \mathcal{E} como

$$\begin{aligned} g(d, q) = & B_1 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \geq 0 \right\}} \\ & + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)], \end{aligned}$$

donde

$$B_1 > 0, \quad \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \geq 0.$$

Entonces se puede afirmar que $g(d, q)$ es positiva para todos los valores (d, q) . Ahora, defínase f sobre \mathcal{E} como

$$\begin{aligned} f(d, q) = & B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) \\ & - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] < 0 \right\}}, \end{aligned}$$

donde

$$B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \geq 0, \quad B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \geq 0, \quad \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) \geq 0.$$

Por tanto, se puede afirmar que $f(d, q)$ es no negativa para todo (d, q) . También se puede observar que la función f al depender de los estados (d, q) a medida que éstos toman valores de estados superiores, los valores de f aumentan ya que B_2 y B_3 son constantes fijas y los dos últimos términos de la función son no negativos.

En consecuencia, por (3.49) y las definiciones de las funciones f y g se puede afirmar que (3.48) es equivalente a

$$PV(d, q) - V(d, q) \leq -f(d, q) + g(d, q) \quad \text{para todo } (d, q) \in \mathcal{E},$$

entonces la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ cumple (3.47).

Ahora, se considerará que $g(d, q)$ es una función acotada. En efecto, de (3.45) se puede deducir que

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il}, \quad (3.50)$$

además por transitividad de (3.33) y (3.43) puede afirmarse que

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|. \quad (3.51)$$

Entonces, por (3.50), (3.51) y la definición de la función $g(d, q)$ se puede establecer la siguiente desigualdad

$$g(d, q) \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})|,$$

donde el lado derecho de ésta desigualdad son constantes a medida que (d, q) varía; entonces puede considerarse que $g(d, q)$ es una función acotada.

En lo que sigue, se designa

$$\delta = \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) + \Delta,$$

dado que $\Delta > 0$, se tiene que $\delta > 0$. Ahora, defínase un conjunto C como

$$C = \{(d, q) : f(d, q) < g(d, q) + \delta\}.$$

Primero se probará que $C \neq \phi$. En la definición de la función f , si se denota $(0, 0)$ como el estado cero de la cadena de Markov, se tiene que

$$f(0, 0) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I \left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] < 0 \right\},$$

luego de (3.51) se puede ver que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] < 0 \right\}} \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| \end{aligned}$$

de esto y sabiendo que $g(0, 0) > 0$ y $\Delta > 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] I_{\left\{ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - U_l(\mu_{el}(\Delta))] < 0 \right\}} \\ & < g(0, 0) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) + \Delta \end{aligned}$$

es lo mismo que

$$f(0, 0) < g(0, 0) + \delta,$$

donde $(0, 0) \in C$, por tanto $C \neq \phi$.

Ahora, se probará que C es un conjunto finito.

En lo que sigue téngase en cuenta lo siguiente: se puede ver que las funciones f y g son funciones continuas, f crece a medida que los estados (d, q) crecen y la función g tiene un máximo debido a que es una función acotada. Además, (d, q) toma valores enteros no negativos cualesquiera. Sea $(d, q) \in C$, entonces

$$f(d, q) < g(d, q) + \delta.$$

Supóngase que la magnitud de (d, q) , $|(d, q)|$, crece indefinidamente, es decir $|(d, q)| \rightarrow \infty$; de donde

$$\lim_{|(d, q)| \rightarrow \infty} f(d, q) < \lim_{|(d, q)| \rightarrow \infty} g(d, q) + \delta.$$

Pero, por lo que se mencionó anteriormente se puede afirmar que

$$\lim_{|(d, q)| \rightarrow \infty} g(d, q) + \delta \leq \max g + \delta,$$

luego, por transitividad

$$\lim_{|(d, q)| \rightarrow \infty} f(d, q) < \max g + \delta.$$

Por lo tanto, se tiene un absurdo, ya que por lo mencionado anteriormente a medida que (d, q) crece indefinidamente $f(d, q)$ también crece indefinidamente. En consecuencia, (d, q) toma valores finitos; entonces C es un conjunto finito. En conclusión, por el criterio de estabilidad de Foster-Lyapunov, la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es recurrente positiva.

Ahora, se calculará

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\}.$$

En la sección 3.3 se asumió que $(d(k), q(k))$ es una cadena de Markov irreducible y aperiódica, además de ser recurrente positiva. Por otro lado, considérese la siguiente proposición de cadenas de Markov de tiempo discreto en [17]: Supóngase una cadena de Markov X irreducible y aperiódica, entonces

- (a) O todos los estados son transitorios, o todos son recurrentes positivos, o todos son recurrentes nulos.
- (b) Para toda distribución inicial $\pi(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) = 1/M_i$, entendiéndose que el límite es cero si $M_i = +\infty$.
- (c) Una distribución de probabilidad de equilibrio π existe, si y sólo si todos los estados son recurrentes positivos.
- (d) Si existe la distribución de probabilidad de equilibrio π , está dada por $\pi_i = 1/M_i$. (En particular, si existe la distribución de probabilidad de equilibrio, es única).

En ésta proposición, [17] tiene en cuenta que para un estado fijo i

$$\tau_i = \min \{k \geq 1 : X(k) = i\},$$

donde adopta que el mínimo de un conjunto vacío es $+\infty$. También, define

$$M_i = E[\tau_i | X(0) = i],$$

además que para un estado i sea recurrente positivo, $M_i < +\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior, dado que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es recurrente positiva, por tanto todos sus estados son recurrentes positivos. Ahora, por la proposición en las partes (c) y (d), existe una distribución de probabilidad de equilibrio π , la cual es única, donde

$$\pi_i = \frac{1}{M_i}, \quad M_i = E[\tau_i | (d(0), q(0)) = i], \quad \tau_i = \min \{k \geq 1 : (d(k), q(k)) = i\}$$

para cualquier estado fijo i . Además como cualquier estado i de $(d(k), q(k))$ es recurrente positivo, $M_i < +\infty$.

Por otro lado, téngase en cuenta que π_i es un elemento del vector fila π , donde el tamaño de

π está determinado por todos los estados de la cadena de Markov. Ahora, para cualquier distribución inicial $\pi(0)$ que se tenga en $(d(k), q(k))$, por la parte (b) de la proposición anterior, se puede afirmar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) = \frac{1}{M_i}.$$

Luego, por definición de valor esperado, por desarrollo de límites y por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_i \pi_i(k) V(i) - \sum_i \pi_i(k+1) V(i) \right\} \\ &= \sum_i V(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_i(k) - \sum_i V(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_i(k+1) \\ &= \sum_i V(i) \cdot \frac{1}{M_i} - \sum_i V(i) \cdot \frac{1}{M_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, considérese la siguiente propiedad de sucesiones: Si la sucesión x_n converge se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Teniendo en cuenta la anterior propiedad de sucesiones, se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k), q(k))] - E[V(d(k+1), q(k+1))]\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.46) es equivalente a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in L} d_l(k) + q_l(k) \right] \leq B_4 + \frac{1}{\epsilon} B_5$$

■

El siguiente corolario es una consecuencia del programa óptimo, en el cual se probará que el valor esperado del promedio en el servicio de paquetes inelástico en cada enlace es mayor o igual a la tasa de llegadas exitosas de paquetes inelásticos en cada enlace.

Corolario 3.4.2. *Si existe un punto $\mu(\Delta) \in C/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tales que (3.13) y (3.14) son ciertas, entonces el algoritmo en línea cumple todas las restricciones inelásticas. Es decir:*

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \geq x_{il}(1 - p_i)$$

para todo $l \in \mathcal{L}$.

◇

Prueba: Sea $l \in \mathcal{L}$. Por (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} d_l(k+1) &= [d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+ \\ &= \max\{0, d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) &\leq d_l(k+1) \\ d_l(k) - d_l(k+1) + \tilde{a}_{il}(k) &\leq I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)), \end{aligned}$$

de esta última desigualdad, se obtiene

$$\sum_{k=1}^K [d_l(k) - d_l(k+1)] + \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$$

Ahora, por sumas telescópicas se deduce que

$$\sum_{k=1}^K [d_l(k) - d_l(k+1)] = d_l(1) - d_l(K+1).$$

Entonces reemplazando esto en la desigualdad anterior, se tiene que

$$d_l(1) - d_l(K+1) + \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$$

Debe entenderse que K es el k -ésimo frame, donde K es un entero positivo, por tanto al dividir la desigualdad anterior por K se obtiene

$$\frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)),$$

luego se determina el valor esperado en ambos lados de la desigualdad

$$\frac{d_l(1)}{K} - \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[\tilde{a}_{il}(k)] \leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right].$$

De la sección 3.1, $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial y por (3.19) se vió que $E[\tilde{a}_{il}(k)] = x_{il}(1 - p_l)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d_l(1)}{K} - \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{il}(1 - p_l) &\leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ \frac{d_l(1)}{K} - \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + \frac{1}{K} \cdot K x_{il}(1 - p_l) &\leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ \frac{d_l(1)}{K} - \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + x_{il}(1 - p_l) &\leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right], \end{aligned}$$

de esta última desigualdad y propiedades de límite inferior de sucesiones, se tiene que

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{d_l(1)}{K} - \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + x_{il}(1-p_l) \right] \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right]$$

es lo mismo que

$$\begin{aligned} & \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(1)}{K} - \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + x_{il}(1-p_l) \\ & \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right]. \end{aligned}$$

Se puede observar que

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(1)}{K} = 0,$$

entonces

$$-\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{E[d_l(K+1)]}{K} + x_{il}(1-p_l) \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right],$$

además por definición de límite inferior de sucesiones, se tiene que

$$\begin{aligned} & -\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\inf \left\{ \frac{E[d_l(K+1)]}{K} : K \geq N \right\} \right) + x_{il}(1-p_l) \\ & \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right]. \end{aligned}$$

Se puede ver que $\inf \left\{ \frac{E[d_l(K+1)]}{K} : K \geq N \right\}$ es cero. Esto se debe a que la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es estable como se probó en el anterior corolario 3.4.1, lo que indica que los valores de los déficits no pueden crecer indefinidamente; por tanto, a medida que K crece el valor de $\inf \left\{ \frac{E[d_l(K+1)]}{K} : K \geq N \right\}$ es cero. En conclusión,

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \geq x_{il}(1-p_l) \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}.$$

■

El siguiente lema comparado con el lema 3.4.3, tiene como variante en que no se asume como hipótesis la existencia de un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1+\Delta)$. Además, su prueba es fundamental para la prueba del teorema 3.4.1.

Lema 3.4.4. *Considere la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Entonces*

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

para algunas constante no negativas $B_1 > 0$, B_6 , B_7 , y todo $\epsilon > 0$, donde (μ^*, x_e^*) es la solución a (2.7), $\tilde{x}_e^*(k)$ es la solución a (3.1), $I_i^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución a (3.3). \diamond

Prueba: De (3.26) se tiene que

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & = E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+]^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \quad + E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [[q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+]^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, de (3.21) y (3.24) se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il}(1 - p_l) d_l \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)], \end{aligned}$$

donde $B_8 > 0$, $B_9 > 0$, $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ e $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtienen de (3.5) y la solución a (3.3) y $\tilde{x}_{el}^*(k)$ se obtiene de la solución de (3.1). Luego, si (μ^*, x_e^*) es solución de (2.7) y dado que $\mu^* = (\mu_{il}^*, \mu_{el}^*)_{l \in \mathcal{L}}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_{il}(1 - p_l) & \leq \mu_{il}^* \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L} \\ 0 & \leq x_{el}^* \leq \mu_{el}^* \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

De esto y que $d_l \geq 0$, se puede afirmar que

$$d_l x_{il}(1 - p_l) \leq d_l \mu_{il}^* \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}.$$

Por otro lado, se puede hacer $B_1 = B_8 + B_9$, de donde $B_1 > 0$. De lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}^* - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

Ahora, $X_{max} > 0$ es un parámetro suficientemente grande, con lo cual

$$0 \leq x_{el}^* \leq X_{max},$$

pero, como $\tilde{x}_{el}^*(k)$ es solución óptima de (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}^*) - q_l x_{el}^* \leq \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \\ & \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}^*) - q_l x_{el}^* \right]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}^* - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}^*) - q_l x_{el}^* \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \\ & = B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Teniendo en cuenta que (μ^*, x_e^*) es la solución a (2.7), $\mu^* \in \mathcal{C}$; luego por la definición 2.2.2 existen $(\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$ para todo a_i, c , tales que

$$\mu_{il}^* = E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)], \quad \mu_{el}^* = E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)] \tag{3.54}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$. Entonces por la definición 2.2.1, existen $\bar{s} \in S(a_i, c)_{CH}$, tales que

$$\bar{\mu}_{il}(a_i, c) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t}, \quad \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t},$$

además de forma similar como se probó (3.31), de lo anterior se puede obtener la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \leq - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i, c) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \bar{\mu}_{el}(a_i, c) \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del valor esperado y (3.54), se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \leq - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \mu_{il}^* - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}^* \end{aligned}$$

Ahora, de esta última desigualdad y (3.53) se obtiene

$$\begin{aligned} & E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \mu_{il}^* - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}^* \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

Agrupando términos en el lado derecho de la desigualdad

$$\begin{aligned} & E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - 0 \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - \sum_{l \in \mathcal{L}} (\mu_{el}^* - x_{el}^*) q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

de esto se puede hacer $B_6 = 0$, donde B_6 es no negativa. Ahora, por (3.52), se tiene que

$$\mu_{el}^* - x_{el}^* \geq 0 \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}.$$

Ahora, se designa

$$B_7 = \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}^* - x_{el}^*\},$$

donde $B_7 \geq 0$ es constante para todos los enlaces, de esto se deduce que

$$\begin{aligned} B_7 & \leq \mu_{el}^* - x_{el}^* \\ -(\mu_{el}^* - x_{el}^*) & \leq -B_7 \end{aligned}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$. Sabiendo que $q_l \geq 0$, de esta última desigualdad se puede afirmar que

$$-\sum_{l \in \mathcal{L}} (\mu_{el}^* - x_{el}^*) q_l \leq -B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l,$$

por tanto

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

con B_1 positiva, B_6 y B_7 no negativas y todo $\epsilon > 0$. ■

Teorema 3.4.1. *Para todo $\epsilon > 0$, asumiendo que $U_l(\cdot)$ es una función cóncava tenemos que*

$$\begin{aligned} \limsup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right. \\ \left. - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \leq B\epsilon \end{aligned}$$

para algún $B > 0$, donde (μ^*, x_e^*) es la solución a (2.7), $\tilde{x}_{el}^*(k)$ es la solución a (3.1), $I_i^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ se obtiene de la solución a (3.3). ◇

Prueba: Sean $\epsilon > 0$, $U_l(\cdot)$ una función cóncava, (μ^*, x_e^*) solución de (2.7), $\tilde{x}_{el}^*(k)$ solución de (3.1) e $I_i^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ se obtiene de la solución de (3.3). Además se define la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Entonces por el lema 3.4.4 se tiene que

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))) \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]), \end{aligned}$$

para algunas constantes no negativas $B_1 > 0$, B_6 y B_7 . Luego, transponiendo algunos términos en la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + V(d, q) \\ & \quad - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Ahora, como B_6 y B_7 son constantes no negativas y $d_l \geq 0$, $q_l \geq 0$, se puede afirmar que

$$-B_6 d_l - B_7 q_l \leq 0 \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L},$$

de donde

$$-B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \leq 0.$$

Luego, sumando algunos términos en ambos lados de esta última desigualdad se tiene que

$$\begin{aligned} & B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] \\ & \leq B_1 + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] \end{aligned}$$

Entonces, por transitividad de esta última desigualdad con (3.55) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]) \\ & \leq B_1 + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]. \end{aligned}$$

Al determinar el valor esperado en ambos lados de esta última desigualdad, al tener en cuenta (3.39), (3.40), (3.41) y que B_1 es constante; se deduce que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} (U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))) + \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l \mu_{il}^* - w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))) \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(k+1), q(k+1))] + E[V(d(k), q(k))]. \end{aligned}$$

Reorganizando términos en el lado izquierdo de la desigualdad y por propiedades del valor esperado se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(k+1), q(k+1))] + E[V(d(k), q(k))]. \end{aligned}$$

De esto, a la variable k se le asignan valores enteros desde 1 hasta K , con $K \in \mathbb{N}$. Con lo cual se tienen las siguientes K desigualdades. Para $k = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(1)) + w_l I_{il}^*(a_i(1), c(1), d(1), q(1)) \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(2), q(2))] + E[V(d(1), q(1))]. \end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(2)) + w_l I_{il}^*(a_i(2), c(2), d(2), q(2)) \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(3), q(3))] + E[V(d(2), q(2))]. \end{aligned}$$

⋮

Para $k = K$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(K)) + w_l I_{il}^*(a_i(K), c(K), d(K), q(K)) \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(K+1), q(K+1))] + E[V(d(K), q(K))]. \end{aligned}$$

Luego, se suman estas K desigualdades y se aplican sumas telescópicas en los lados derechos de las desigualdades en los valores esperados de la función V

$$\begin{aligned} & \frac{K}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{k=1}^K \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq K B_1 - E[V(d(K+1), q(K+1))] + E[V(d(1), q(1))]. \end{aligned}$$

Ahora, dividiendo por K en ambos lados de esta última desigualdad se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq B_1 - \frac{E[V(d(K+1), q(K+1))]}{K} + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K}. \end{aligned}$$

Por otro lado, V es no negativa, entonces

$$\begin{aligned} & E[V(d(K+1), q(K+1))] \geq 0 \\ & - \frac{E[V(d(K+1), q(K+1))]}{K} \leq 0 \\ & B_1 - \frac{E[V(d(k+1), q(k+1))]}{K} + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K}. \end{aligned}$$

Luego, por propiedades de sumatoria y transitividad se deduce que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right] \\ & \leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Téngase en cuenta la desigualdad de Jensen para combinaciones convexas, si f es convexa entonces

$$f \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k),$$

donde $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ y $0 \leq \lambda_k$ para $k = 1, 2, \dots, m$. Ahora, como U_l es cóncava, $-U_l$ es convexa; además

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{K} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{K} \geq 0.$$

Por tanto, al utilizar la desigualdad de Jensen y propiedades del valor esperado se tiene que

$$\begin{aligned} -U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) &\leq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K -U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\ -\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) &\leq -\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\ -\frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right] &\leq -\frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right], \end{aligned}$$

por propiedades del valor esperado, esto es equivalente a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] \right] - \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta última desigualdad y (3.56), por transitividad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ &\leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K}, \end{aligned}$$

además al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por $\epsilon > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ &\leq B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon \end{aligned}$$

Se puede observar que en esta última desigualdad al depender de los enteros $K \geq 1$, se obtiene una desigualdad entre dos sucesiones. Además se puede notar también que la sucesión del lado derecho de la desigualdad es convergente para $K \geq 1$. Por otra parte, téngase en cuenta la definición de límite superior de sucesiones

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{i \rightarrow \infty} (\sup \{x_n : n \geq i\}),$$

además de la siguiente propiedad

$$\text{Si } x_n \leq y_n \text{ para todo } n \in N, \text{ entonces } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Utilizando la propiedad anterior de se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\
 & \leq \limsup_{K \rightarrow \infty} \left\{ B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Por otro lado la cadena de Markov $(d(k), q(k))$ es estable, por lo cual para cualquier estado de la cadena en cualquier frame no puede tener valores indefinidos, además teniendo en cuenta la definición de V , se puede afirmar que

$$E[V(d(1), q(1))] < \infty.$$

Luego, utilizando la definición de límite superior de sucesiones se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{K \rightarrow \infty} \left\{ B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon \right\} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup \left\{ B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon : K \geq n \right\} \right),
 \end{aligned}$$

de donde

$$\sup \left\{ B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon : K \geq n \right\} = B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{n} \epsilon.$$

De esto y lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
 \limsup_{K \rightarrow \infty} \left\{ B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \epsilon \right\} & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B_1 \epsilon + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{n} \epsilon \right) \\
 & = B_1 \epsilon
 \end{aligned}$$

En conclusión, haciendo $B = B_1 > 0$, (3.57) es equivalente a

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\
 & \leq B \epsilon
 \end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Simulaciones

El propósito de este capítulo es estudiar el comportamiento de los déficits de paquetes inelásticos y las colas de paquetes elásticos en una red Wi-Fi con infraestructura, a través de las simulaciones del programa óptimo de [1]. Al principio, se describe lo que es un grafo de interferencia, el cual nos ayuda a determinar el conjunto de todos los programas factibles para las simulaciones. Luego, en las tres secciones siguientes describen el comportamiento de los déficits y las colas en nuestro tipo de red Wi-Fi, cuando varían respectivamente los parámetros ϵ , T y w_l del programa óptimo. Por último, teniendo en cuenta el funcionamiento del algoritmo programador en el estudio de los déficits y colas de nuestra red Wi-Fi, se puede realizar algunas comparaciones de éste algoritmo con los protocolos CSMA/CA y PCF de Wi-Fi.

4.1. Grafo de interferencia

Una herramienta importante para el estudio de cualquier red inalámbrica con transmisiones en un mismo canal o en diferentes canales no solapados con respecto a las restricciones por interferencia entre los enlaces, como se vió en la sección 2.2, es el grafo de interferencia. Los nodos del grafo representan los enlaces de la red y cada arista la relación de interferencia entre los enlaces. Si hay transmisiones en canales no solapados, se puede dar el caso que entre algunos nodos del grafo no tengan aristas entre sí, lo cual significa que son enlaces que pueden activarse simultáneamente. Por ejemplo, la figura 4.1 ilustra los grafos de interferencia entre enlaces de una red Wi-Fi con infraestructura con dos canales no solapados, en los cuales se simulará el programa óptimo.

En particular, se puede observar que en la figura 4.1 con cinco enlaces, los nodos o enlaces 1, 2 y 5 interfieren entre sí ya que están en un mismo canal, lo mismo para los nodos 3 y 4 que están en el otro canal. Pero, uno de los nodos 1, 2, o 5 puede activarse simultáneamente con uno de los nodos 3 o 4 debido a que están en canales no solapados. De forma similar se explica la relación de interferencia entre enlaces para los demás grafos de la figura.

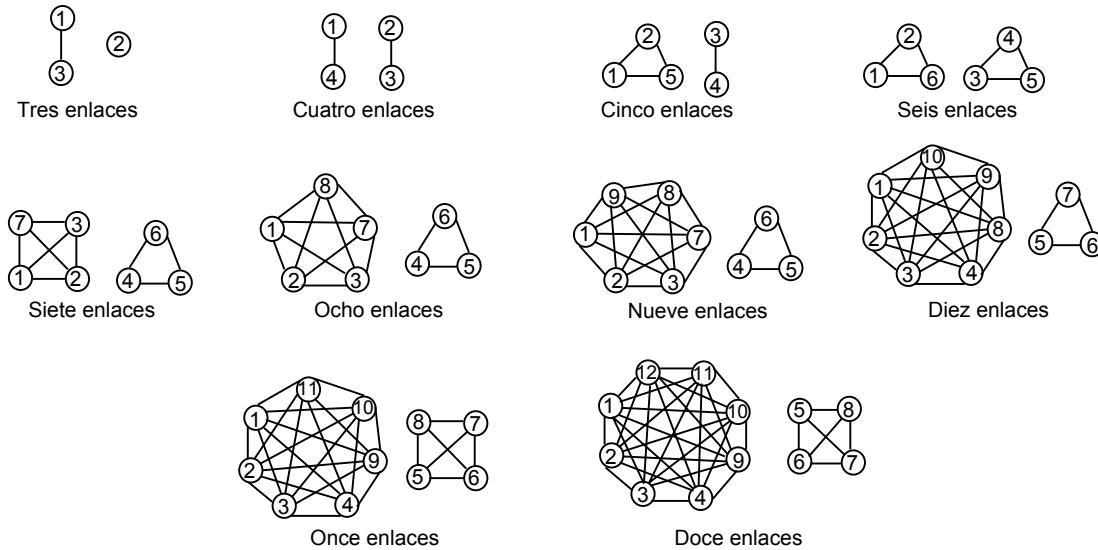


Figura 4.1: Grafos de interferencia para las simulaciones.

Un aspecto a tener en cuenta en los grafos de interferencia en el estudio de una red inalámbrica, es que a medida que varían los usuarios en la red a partir de un número fijo de usuarios con su grafo de interferencia respectivo, los grafos de interferencia cambian. Los cambios en los grafos de interferencia a partir de un grafo fijo se pueden establecer de la siguiente manera. Para el siguiente número de usuarios, su grafo de interferencia se obtiene de agregar un nodo al grafo dado, además de establecer las aristas correspondientes con los nodos o enlaces que interfieren entre sí. Para el anterior número de usuarios, el grafo de interferencia se obtiene de quitar un nodo con sus respectivas aristas en el grafo dado. Por ejemplo, la figura 4.1 ilustra este aspecto desde tres a hasta doce usuarios en el estudio de las simulaciones en las secciones 4.2, 4.3 y 4.4.

Las siguientes tres secciones tienen como objeto describir el comportamiento de los déficits y la colas para una red particular Wi-Fi con infraestructura con dos canales no solapados, a través de simulaciones del programa óptimo de [1] en Matlab. Para ello, se utiliza como herramienta fundamental el grafo de interferencia para hallar el conjunto de todos los programas factibles, el cual captura las relaciones de interferencia entre enlaces, como se explicó en la sección 2.2. Además, se puede tener en cuenta que en una red Wi-Fi con diferentes canales no solapados en cada frame y en cada time slot, algunos usuarios pueden transmitir paquetes simultáneamente, por lo visto en la sección 1.7. Por otro lado, se utilizan los mismos valores de [1] tales como la probabilidad de pérdida de paquetes inelásticos de 0.1, la tasa de llegada Bernoulli de paquetes inelásticos de 0.6, un estado del canal conocido al inicio del frame con distribución Bernoulli de media 0.96 en cada enlace, una función de utilidad $U_l(x_{el}) = \log(x_{el})$ y 10^4 frames. En lo que sigue se eligen los parámetros ϵ , T y w_l de los algoritmos (3.1) y (3.3) para describir el impacto que tienen en los déficits y las colas de

la red Wi-Fi. Se debe aclarar que para las simulaciones los valores de las componentes del vector $w = (w_l)_{l \in \mathcal{L}}$ son todos iguales para cada $l \in \mathcal{L}$.

4.2. Variación del parámetro ϵ

En esta simulación para cada número de enlaces ilustrados en la figura 4.1 se dejan fijos $T = 6$ y $w_l = 10$ y se varía ϵ . La variación de ϵ se puede hacer mediante la escala $\epsilon = [0.01, 0.02, 0.04, 0.07, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1]$. En particular, se presentan el comportamiento del déficit de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos para 6 y 11 enlaces en las figuras 4.2 y 4.3 respectivamente.

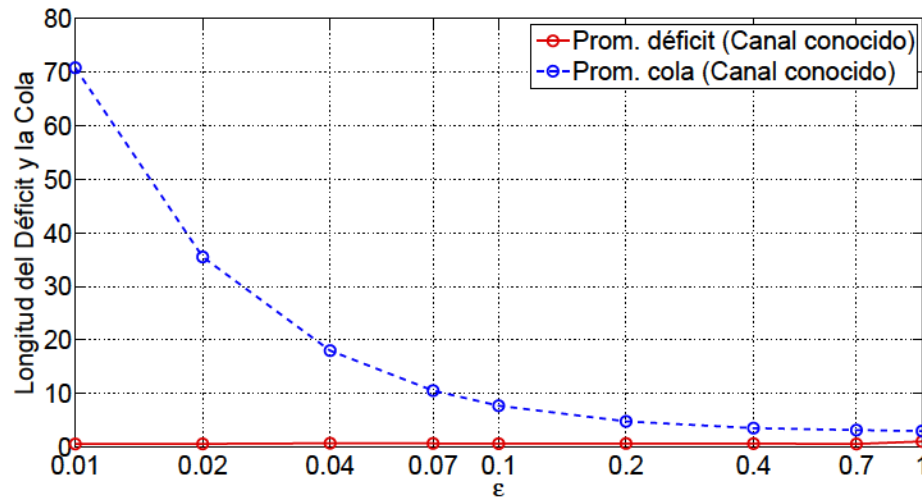


Figura 4.2: Comportamiento del déficit y la cola en 6 enlaces cuando ϵ varía.

A continuación se describe el comportamiento de los déficits y las colas de la red Wi-Fi debido a la variación de ϵ . A partir del algoritmo programador (3.3) se puede ver que a medida que ϵ tiende a cero, el programador le da más prioridad a los paquetes inelásticos que los elásticos en el servicio, debido a que en cada frame k el peso $\frac{1}{\epsilon}w_l + d_l(k)$ correspondiente al servicio de paquetes inelásticos se incrementa más que el peso $q_l(k)$ correspondiente al servicio de paquetes elásticos, por lo que el valor óptimo de (3.3) corresponde más al servicio de paquetes inelásticos. El programador al priorizar el servicio de paquetes inelásticos cuando ϵ tiende a cero en todo frame, se tiene que $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ toma valores grandes, luego los valores del déficit actualizados de frame a frame $d_l(k+1)$ se hacen pequeños. Además, al tener poca prioridad en el servicio de paquetes elásticos en cada frame cuando ϵ tiende a cero, se tiene que $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ toma valores pequeños por lo que $q_l(k+1)$ se hace grande de frame a frame.

Ahora cuando ϵ crece, en el controlador (3.1) se puede ver que $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el})$ disminuye; como el

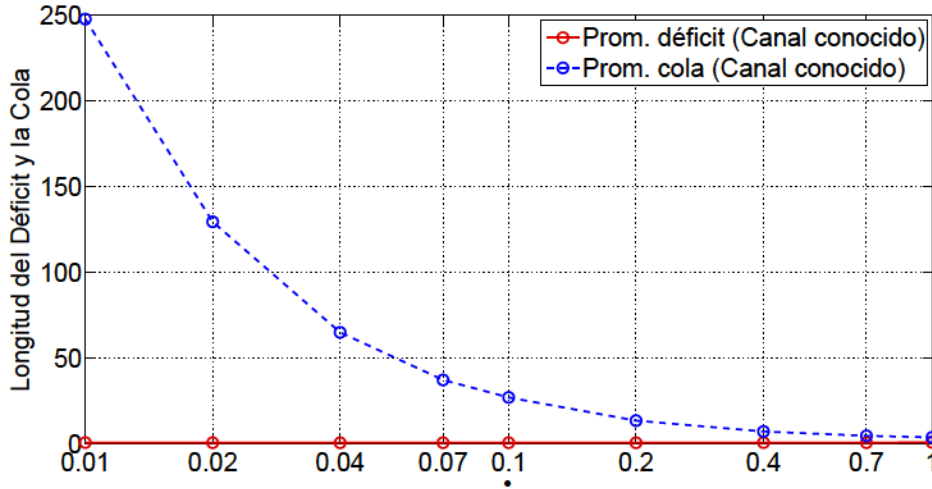


Figura 4.3: Comportamiento del déficit y la cola en 11 enlaces cuando ϵ varía.

objetivo es maximizar $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el}) - q_l(k)x_{el}$ en cada frame k , sabiendo que x_{el} es la variable de decisión, se tiene que x_{el} toma valores pequeños, de donde el valor óptimo $\tilde{x}_{el}^*(k)$ tiende a cero. En la sección 3.1 se vió que la tasa de llegadas elásticas $\tilde{x}_{el}^*(k)$ es la media de la variable aleatoria discreta no negativa $\tilde{a}_{el}(k)$, esto es $E[\tilde{a}_{el}(k)] = \tilde{x}_{el}^*(k)$. Por teoría de la probabilidad si X es una variable aleatoria discreta no negativa, tal que si $E[X]$ tiende a cero, entonces $P(X = 0)$ tiende a 1. De esto $P(\tilde{a}_{el}(k) = 0)$ tiende a 1, por lo que se puede afirmar que la mayor parte del tiempo $\tilde{a}_{el}(k) = 0$, entonces de frame a frame a medida que se sirven paquetes elásticos, $q_l(k + 1)$ se hace más pequeño.

Siguiendo con el crecimiento de ϵ , en el programador (3.3) llegará un momento en que empieza una disputa por el servicio entre los paquetes elásticos e inelásticos. Esto se debe a que los valores de los pesos $\frac{1}{\epsilon}w_l + d_l(k)$ y $q_l(k)$ van estar más equilibrados, por lo que el servicio de paquetes inelásticos y elásticos en los sucesivo de cada frame depende del valor mayor entre esos pesos. Pero en esa disputa por el servicio cuando ϵ crece, los valores del déficit más los valores de las colas no pueden ser muy grandes, debido a que van a estar en una cota superior asintótica igual a B_4 , tal como se puede ver en el corolario 3.4.1.

4.3. Variación del parámetro T

Para esta simulación en cada número de enlaces de la red en la figura 4.1 se pueden dejar como fijos $\epsilon = 0.7$ y $w_l = 10$, donde se variará T . La variación de T se puede hacer en los siguientes enteros, $T = [2, 3, 4, 5, 6, 7]$. En particular, las figuras 4.4 y 4.5 ilustran los comportamientos de los déficits y las colas para 6 y 11 enlaces respectivamente.

En primer lugar, para la descripción del comportamiento de los déficits y las colas en la

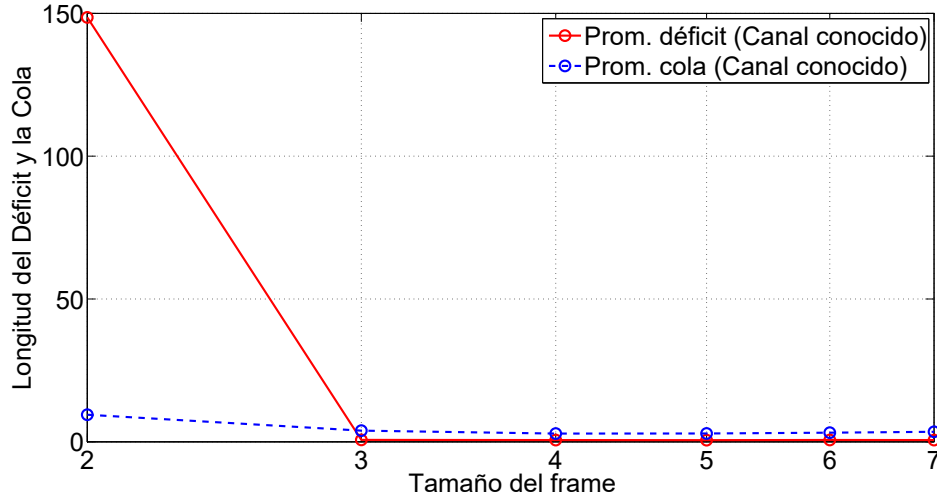


Figura 4.4: Comportamiento del déficit y la cola para 6 enlaces en la variación de T .

red Wi-Fi considerada cuando T varía, téngase en cuenta el conjunto de programas factibles $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ cuando el estado de llegadas es a_i y el estado del canal es c en el frame k dado por:

$$\mathcal{S}(a_i(k), c(k)) = \left\{ (s_{il,t}, s_{el,t}) : (s_{il,t}, s_{el,t}) \in (s_{il,t})_{|L| \times T} \times (s_{el,t})_{|L| \times T} \right\}$$

para todo $l \in \mathcal{L}$ y $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, donde un programa factible $s = (s_{il,t}, s_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ se describe por las siguientes matrices de programaciones de paquetes inelásticos y elásticos:

$$(s_{il,t})_{|L| \times T} = \begin{bmatrix} s_{i1,1} & s_{i1,2} & \dots & s_{i1,T} \\ s_{i2,1} & s_{i2,2} & \dots & s_{i2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i|L|,1} & s_{i|L|,2} & \dots & s_{i|L|,T} \end{bmatrix}$$

$$(s_{el,t})_{|L| \times T} = \begin{bmatrix} s_{e1,1} & s_{e1,2} & \dots & s_{e1,T} \\ s_{e2,1} & s_{e2,2} & \dots & s_{e2,T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{e|L|,1} & s_{e|L|,2} & \dots & s_{e|L|,T} \end{bmatrix}.$$

También, téngase en cuenta que en todo t se pueden programar enlaces simultáneamente que no tengan interferencia entre sí, como se mencionó en la sección 2.2. En las matrices descritas se puede ver que las columnas representan los paquetes programados a servir en cada enlace en un time slot, donde se puede hallar el mínimo número de columnas en las posibles programaciones factibles que puedan atender a todos los enlaces; teniendo este valor, es el tiempo mínimo que se requiere para poder atender a todos los enlaces al menos una vez.

A partir del grafo de interferencia de la red, como se explicó en la sección 4.1, se determinan los programas factibles que tengan el menor número de columnas en los cuales pueden

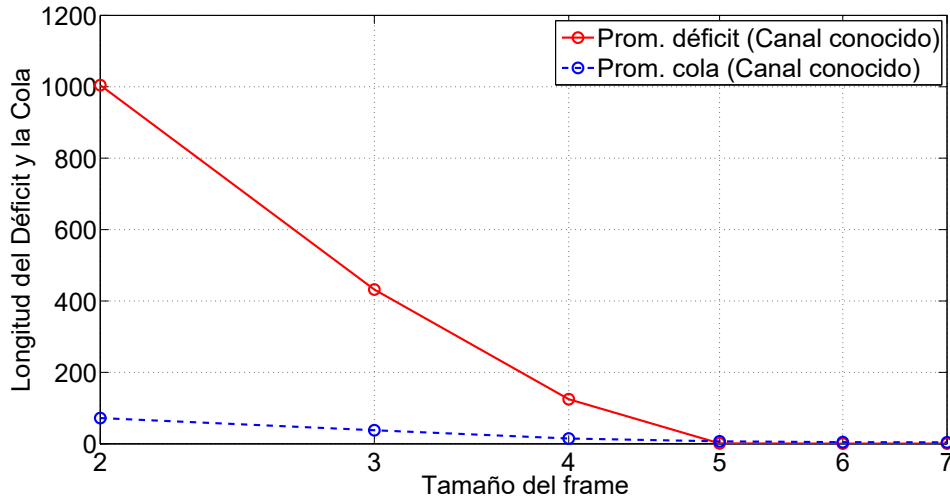


Figura 4.5: Comportamiento del déficit y la cola para 11 enlaces en la variación de T .

atender a toda la red. De lo que se vió en la sección 1.7 de la red Wi-Fi y los grafos de interferencia para cada número de usuarios, se puede ver que el mínimo número de columnas en las programaciones factibles que pueden atender a toda la red, está determinado por el máximo número de nodos o usuarios que están en el mismo canal de la red Wi-Fi. Para el caso particular de 6 enlaces en cualquier red Wi-Fi, el mínimo número de columnas de las programaciones factibles que pueden atender a toda la red varían de 1 a 6 columnas. Para el grafo correspondiente de seis usuarios en la figura 4.1, se requiere mínimo de tres columnas en las programaciones que pueden atender a toda la red, de donde el tiempo mínimo para poder atender a todos los enlaces al menos una vez está dado por un time slot de $T = 3$.

En el comportamiento del déficit cuando T es menor que el mínimo número columnas de las programaciones que pueden atender a la red, se indica que no se atiende a todos los enlaces en todo frame k . Esto permite que en algunos enlaces de la red sus déficits crezcan, ya que para un frame k , esos enlaces no han tenido servicio y han tenido llegadas al inicio del frame $\tilde{a}_{il}(k)$; de esto más un déficit $d_l(k)$, de frame a frame $d_l(k+1)$ crece.

En cuanto al comportamiento de la cola cuando T es menor que el mínimo número de columnas de las programaciones que pueden atender a la red, indica que no se atiende a todos los enlaces en todo frame k . Se tiene que en algunos enlaces las colas crecen con valores muy grandes, debido a los enlaces no atendidos. Pero en el algoritmo de control de congestión (3.1) se puede ver que en la función objetivo $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el}) - q_l(k)x_{el}$, cuando $q_l(k) \gg \frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el})$, donde $U_l(x_{el})$ es una función cóncava y definida sobre $0 \leq x_{el} \leq X_{max}$; se tiene que $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el})$ se hace despreciable, por lo que la función objetivo tiende a $-q_l(k)x_{el}$. Esto permite que el valor óptimo $\tilde{x}_{el}^*(k)$ de (3.1) tienda a cero, por lo que se vió en la sección 4.2, $q_l(k+1)$ tiende a reducirse.

De lo anterior, al comparar los comportamientos del déficit y la cola cuando T es menor que el mínimo número de columnas de las programaciones que pueden atender a la red; puede afirmarse que los valores del déficit van a ser más grandes que los valores de la cola, debido a que en el tráfico de paquetes inelásticos no actúa un controlador de congestión, en cambio, en el tráfico de paquetes elásticos actúa el controlador de congestión (3.1).

Ahora cuando los valores discretos de T crecen hasta aproximarse al tiempo mínimo que puede atender a la red al menos una vez, las columnas en las matrices de los programas factibles aumentan, debido a que se adquieren más programaciones de paquetes. Luego en cada frame k el óptimo $\tilde{s}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ de (3.3) adquiere más programaciones de paquetes, donde $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ e $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ aumentan y de frame a frame $d_l(k+1)$ y $q_l(k+1)$ disminuyen.

Cuando T toma valores mayores o iguales al tiempo mínimo que puede atender a la red al menos una vez sin sobresaltar el sistema (frames muy grandes para un poco servicio de enlaces), el déficit y las colas se mantienen con unos valores constantes. Esto se debe a que en el inicio del frame llegan los paquetes en la red y que el estado del canal de cada enlace se conoce (activo ó inactivo) como se vió en la décima asunción de la sección 2.1, por lo que pueden haber déficits y colas en los enlaces que estén inactivos al inicio del frame, donde el tiempo mínimo del frame que atiende a todos los enlaces al menos una vez, atiende a los enlaces que estaban activos al inicio del frame. Como se considera que en todo time slot de un frame no están llegando paquetes como lo explica [1], entonces en tiempos iguales o superiores al tiempo mínimo, el déficit y la cola se mantienen con los mismos valores correspondientes de los enlaces que estaban inactivos al inicio del frame.

4.4. Variación del parámetro w_l

Para todos los números de enlaces de la red en la figura 4.1, se dejan fijo $\epsilon = 0.7$ y $T = 6$ y se varía w_l , donde se resalta que los valores de w_l son iguales en todos los enlaces. Se variará w_l en la escala $w_l = [1, 2, 4, 7, 10, 20, 40, 70, 100]$. La figuras 4.6 y 4.7 ilustran dos casos particulares del comportamiento del déficit y la cola para 6 y 11 enlaces respectivamente cuando w_l varía.

En primer lugar el comportamiento de la cola no depende de la variación de w_l . Se puede observar que en el algoritmo del controlador de congestión (3.1) en cada frame k controla el valor óptimo $\tilde{x}_{el}^*(k)$ de la tasa de llegadas elásticas a la red, el cual tiene un impacto en el comportamiento de la cola en un frame $k+1$. Se describirá lo que pasa en $q_l(k+1)$, cuando $q_l(k)$ toma respectivamente valores muy grandes y valores pequeños en un frame k . Cuando $q_l(k)$ crece en un frame k , por lo que se vió en la sección 4.3, $\tilde{x}_{el}^*(k)$ tiende a cero y hace

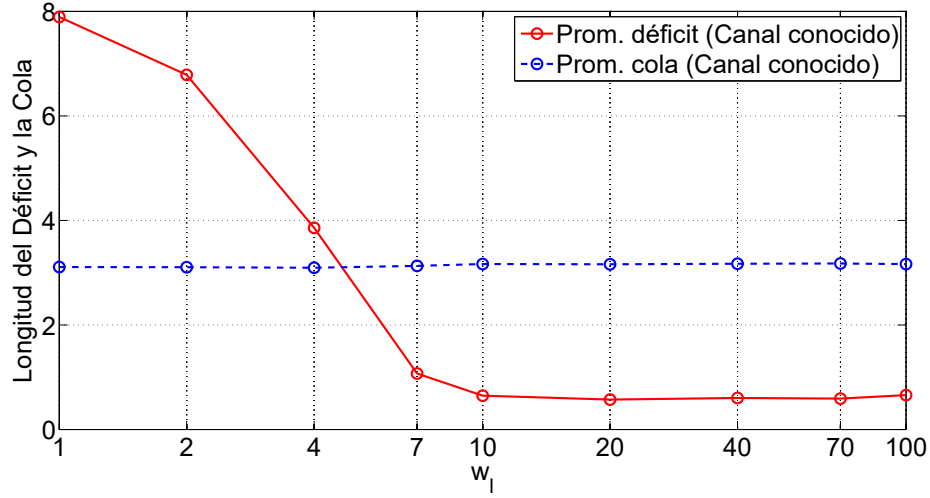


Figura 4.6: Comportamiento del déficit y la cola para 6 enlaces en la variación de w_l .

que $q_l(k+1)$ tienda a reducirse. Ahora, cuando $q_l(k)$ disminuye en un frame k , se puede ver en (3.1) que la función objetivo $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el}) - q_l(k)x_{el}$, el término $q_l(k)x_{el}$ se hace despreciable y la función objetivo tiende a $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el})$; donde $U_l(x_{el})$ es una función cóncava definida sobre $0 \leq x_{el} \leq X_{max}$. Luego al maximizar $\frac{1}{\epsilon}U_l(x_{el})$, el óptimo $\tilde{x}_{el}^*(k)$ de la tasa de llegadas elásticas tomará un valor entre 0 y X_{max} dependiendo de la función cóncava $U_l(x_{el})$ que se tenga. Si $\tilde{x}_{el}^*(k)$ tiende a cero, por lo mencionado anteriormente $q_l(k+1)$ tiende a reducirse, si $\tilde{x}_{el}^*(k)$ tiende a X_{max} aumentarán las llegadas elásticas. El aumento de llegadas elásticas dada por la variable aleatoria discreta no negativa $\tilde{a}_{el}(k)$ se debe a que $E[\tilde{a}_{el}(k)] = \tilde{x}_{el}^*(k)$; por teoría de la probabilidad se puede afirmar que si $\tilde{x}_{el}^*(k)$ tiende al valor grande X_{max} , la mayor parte del tiempo $\tilde{a}_{el}(k)$ no puede tomar valores de cero, por lo que $q_l(k+1)$ tiende a crecer. En consecuencia $q_l(k+1)$ tiende a crecer o a disminuir dependiendo del comportamiento de $q_l(k)$, por lo tanto de frame a frame las colas se mantendrán estables sin importar que w_l esté variando.

El comportamiento del déficit, depende de la variación de w_l . Cuando w_l es pequeño, en el programador (3.3) el servicio de paquetes va a estar más equilibrado en cada frame, los paquetes elásticos e inelásticos serán servidos de acuerdo a los que tengan el mayor peso correspondiente entre $\frac{1}{\epsilon}w_l + d_l(k)$ y $q_l(k)$. En los frames k que no se sirvan paquetes inelásticos, $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ se hace pequeño y $d_l(k+1)$ se hace grande. A medida que w_l crece, el programador (3.3) da más prioridad en el servicio a los paquetes inelásticos que a los elásticos. Esto se debe a que las colas se mantienen estables cuando w_l varía, por lo expuesto anteriormente, esto hace que el peso $q_l(k)$ que corresponde al servicio de paquetes elásticos en (3.3) tenga menos incremento que el peso $\frac{1}{\epsilon}w_l + d_l(k)$ correspondiente al servicio de paquetes inelásticos. Luego al tener prioridad los paquetes inelásticos en el servicio, $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ crece, por consiguiente $d_l(k+1)$ tiende a reducirse.

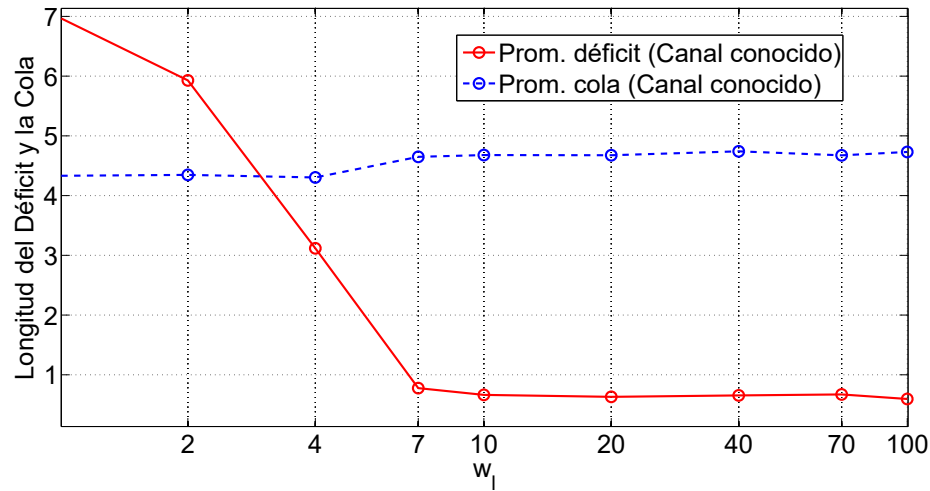


Figura 4.7: Comportamiento del déficit y la cola para 11 enlaces en la variación de w_l .

Prosiguiendo con el crecimiento de w_l , llegará un momento en que se sirven todos los paquetes inelásticos. Cuando w_l toma valores superiores al valor que ha servido a los paquetes inelásticos de la red en cada frame k , el déficit se mantiene con poca variabilidad. A causa de que en el inicio de cada frame llegan paquetes y el estado del canal en cada enlace se conoce como activo ó inactivo, como se mencionó en la sección 4.3, los cuales permiten que en cada frame se sirvan los paquetes de los enlaces activos y se mantenga el déficit de los enlaces que pueden estar inactivos. En cambio, las colas se mantienen estables a medida que w_l crece, por lo explicado anteriormente.

4.5. Comparaciones entre el algoritmo programador y CSMA/CA y PCF

Con lo visto en las tres secciones anteriores en cuanto al funcionamiento de los algoritmos (3.1) y (3.3) en el servicio de paquetes, se pueden realizar algunas comparaciones entre el algoritmo programador y los protocolos CSMA/CA y PCF de Wi-Fi.

Al inicio del capítulo 1, se mencionó que se compararía CSMA/CA y la función de coordinación puntual PCF, descritas respectivamente en las subsecciones 1.6.1 y 1.6.2, con el algoritmo programador (3.3); dicha comparación se establece en cuanto a la transmisión de paquetes en la red.

- En CSMA/CA existe la posibilidad de colisiones de paquetes en las transmisiones, en cambio, en el algoritmo programador (3.3) esta posibilidad no se presenta, ya que en el servicio de paquetes se cumplen las restricciones por interferencias entre enlaces, como

se explicó en la sección 2.2.

- En CSMA/CA no hay mecanismos en la priorización del tráfico en tiempo real, tipo de flujos inelásticos, en cambio, el algoritmo programador la priorización en el servicio de paquetes inelásticos está sujeta a la variación de los parámetros ϵ , T y w_l como se explicó en las tres secciones anteriores 4.2, 4.3 y 4.4.
- El modo PCF de Wi-Fi coordina las transmisiones entre usuarios y un AP, en cambio, el algoritmo programador se puede presentar como una propuesta de coordinación central entre usuarios y varios APs.
- Los tiempos limitados de transmisión en modo PCF no dan garantías para atender a todos los usuarios, en cambio, en el algoritmo programador si el tamaño del frame es el adecuado atiende a todos los usuarios durante el frame, como se vió en la sección 4.3.

Conclusiones

El presente trabajo ha expuesto los aspectos del programa óptimo de asignación de recursos en redes de modo Ad-hoc de [1], los cuales han permitido realizar un estudio del comportamiento de los déficits de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos en el tráfico de datos en una red particular Wi-Fi con infraestructura, con el impacto de los algoritmos controlador y programador del programa óptimo en dicha red.

En primer lugar, para poder comprender los aspectos del programa óptimo y de las redes Wi-Fi, se describen en forma sucinta temas de la teoría de redes que sirven de fundamento para comprender tales aspectos. Luego, en el estudio del programa óptimo se detallan algunos aspectos relacionados con la formulación del problema de optimización y la deducción del algoritmo iterativo, fundamentales para el planteamiento de los algoritmos controlador y programador del programa óptimo. En ese estudio del programa óptimo, antes de probar los resultados de convergencia del programa, se probó una igualdad entre dos programaciones lineales del programa óptimo utilizando aspectos básicos de la topología, el análisis funcional y la teoría de la programación lineal; dicho resultado es importante para la prueba de uno de los lemas en los resultados de convergencia.

Continuando con el estudio del programa óptimo, en una de sus asunciones de que la cadena de Markov de los déficits de paquetes inelásticos y colas de paquetes elásticos debido al programa óptimo se hace irreducible y aperiódica, se describen de manera informal tales propiedades en esa cadena. Luego, se realizaron las pruebas en forma detallada de todos los resultados de convergencia implicados en el programa óptimo que habían sido reducidas u omitidas.

Por otro lado, utilizando aspectos de Wi-Fi, el programa óptimo en Matlab y el grafo de interferencia entre enlaces, se pudo simular el comportamiento de los déficits y las colas de una red particular Wi-Fi con infraestructura. Lo cual, permitió realizar un análisis de tales comportamientos en la variación de los parámetros ϵ , T y w_l del programa óptimo. A medida que los valores del parámetro ϵ crecían, los déficits y las colas en la red se mantenían con valores pequeños; además, cuando ϵ decrecía los paquetes inelásticos tenían más prioridad en el servicio. En cuanto a la variación del parámetro T se pudo establecer que el tiempo mínimo para atender a todos los usuarios al menos una vez en una red Wi-Fi, estaba dado

por el número máximo de usuarios que están en el mismo canal de la red. Además, en los tiempos menores al tiempo mínimo los valores de la cola se hacen más pequeños que los valores del déficit, y para tiempos mayores o iguales al tiempo mínimo los déficits y las colas se mantienen con los valores de los enlaces que estaban inactivos al inicio de cada frame. En la variación de w_l , el comportamiento de las colas no dependen de esa variación y se mantienen estables debido al algoritmo controlador (3.1). En cambio, el déficit se hace más pequeño a medida que w_l crece debido a que el programador (3.3) da más prioridad en el servicio a los paquetes inelásticos que a los paquetes elásticos.

En el análisis del comportamiento de los déficits y las colas en la red Wi-Fi simulada, permitió presentar algunas ventajas en la transmisión de datos del algoritmo programador frente al protocolo CSMA/CA y a la función de coordinación puntual PCF. Las ventajas presentadas con el algoritmo programador en Wi-Fi son: no se dan colisiones de paquetes, puede dar mayor prioridad al tráfico inelástico, puede presentarse como una propuesta de coordinación entre diferentes APs y puede garantizar la atención a todos los usuarios en el servicio de paquetes en determinados tiempos.

Bibliografía

- [1] J. J. Jaramillo and R. Srikant, “Optimal scheduling for fair resource allocation in ad hoc networks with elastic and inelastic traffic,” *IEEE INFOCOM*, pp. 1–9, 2010.
- [2] E. Pietrosemoli, M. Zennaro, C. Fonda, S. Okay, C. Aichele, S. Buettrich, J. Forster, K. Wierenga, E. Vyncke, B. Baikie, L. Hosman, M. Ginguld, and E. Togo. (2013, Feb.) Wireless networking in the developing world. [Accessed dec. 2013]. [Online]. Available: <http://wndw.net>
- [3] J. F. Kurose and K. W. Ross, *Computer Networking: A top-down approach*. Pearson Education, 2010.
- [4] A. Eryilmaz and R. Srikant, “Fair resource allocation in wireless networks using queue-length-based scheduling and congestion control,” *IEEE INFOCOM*, vol. 3, pp. 1794–1803, Mar. 2005.
- [5] L. Chen, S. H. Low, M. Chiang, and J. C. Doyle, “Cross-layer congestion control, routing and scheduling design in ad hoc wireless networks,” *IEEE INFOCOM*, Apr. 2006.
- [6] X. Lin, N. B. Shroff, and Srikant, “A tutorial on cross-layer optimization in wireless networks,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 24, no. 8, pp. 1452–1463, Jun. 2006.
- [7] S. Shakkottai and R. Srikant, “Scheduling real-time traffic with deadlines over a wireless channel,” *Wireless Networks*, vol. 8, no. 1, pp. 13–26, Jan. 2002.
- [8] Q. Liu, X. Wang, and G. B. Giannakis, “A cross-layer scheduling algorithm with QoS support in wireless networks,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 55, no. 3, pp. 839–847, May 2006.
- [9] J. Singh and M. Gatnau, “Performance improvement strategies for current and next generation wi-fi systems,” Master’s thesis, Aalborg Universitet, Aalborg, Dinamarca, Jun. 2012.
- [10] S. Pérez, H. A. Facchini, G. Mercado, J. C. Taffernaberry, and L. Bisaro, “Mejorando el Rendimiento y QoS en Wi-Fi con Sintonización de Parámetros EDCA 802.11 e,” in *XVIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, 2012.

- [11] *Logical Link Control*, IEEE Std. 802.2, 1998.
- [12] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, IEEE Std. 802.11, 2012.
- [13] D. Gao, J. Cai, and K. N. Ngan, “Admission Control in IEEE 802.11 e Wireless LANs,” *Network, IEEE*, vol. 19, no. 4, pp. 6–13, 2005.
- [14] D. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed. New York, USA: Springer, 2008.
- [15] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2004.
- [16] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons Inc., 1978.
- [17] B. Hajek, “Notes for ECE 467 communication network analysis,” dec 2006, course offered by the Department of Electrical and Computer Engineering at the University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [18] L. Blanco, *Probabilidad*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.