

VALORACION DE OPCIONES PARA EL MERCADO AGROPECUARIO COLOMBIANO, EL MODELO DE HESTON-NANDI COMO ALTERNATIVA.

Ulises Càrcamo Carcamo[^]
Catalina Causil García[^]

Resumen

En el proceso de formación de los precios de los productos básicos y materias primas (*commodities*), existen factores aleatorios que modifican su evolución, estos se reflejan en el comportamiento de la volatilidad. Dicha volatilidad constituye una fuente de incertidumbre para todo mercado. Las opciones sobre *commodities* resultan un instrumento valioso para mitigar el riesgo causado por dicha volatilidad.

El modelo de Heston-Nandi es prometedor para la valoración de opciones sobre derivados sobre *commodities* agropecuarios. El proyecto explora las propiedades del modelo e implementa un algoritmo para estimar los parámetros asociados.

Un desarrollo más útil necesita de la efectiva negociación de las opciones en el mercado.

Abstract

There are random factors in the process leading to commodities' price formation. Such factors are manifest in the behavior of volatility. Volatility is a source of uncertainty for any market. Options on commodities are a valuable instrument to diminish risk associated with volatility.

The Heston-Nandi model seems to be helpful in the valuation of derivatives on agricultural commodities. In this project the model's properties are explored and an algorithm to estimate the associated parameters is developed.

For a completely useful development of this model the actual trading of the derivatives is needed.

[^] Ulises Carcamo Carcamo. Universidad EAFIT, ucarcamo@eafit.edu.co. Medellín, Colombia.

[^] Catalina Causil García. ccausil@eafit.edu.co. Medellín, Colombia.

Valoración de Opciones para el Mercado Agropecuario Colombiano, el Modelo de Heston-Nandi como Alternativa.

Introducción

Desde la aparición del modelo para valoración de opciones de Black, Scholes y Merton (BSM) en 1973, este produjo un auge de nuevos instrumentos financieros y facilitó un manejo eficaz del riesgo. A pesar del enorme éxito alcanzado por este modelo, es conocido que su debilidad se centra en los supuestos restrictivos que pueden estar lejos de la realidad de los mercados.

Black, Scholes y Merton enfocaron el problema de valoración de opciones con base en sus conocimientos de física y economía. Comenzaron por utilizar un modelo razonable para el precio de un activo con riesgo. De acuerdo con la hipótesis de caminata aleatoria (*Random Walk*), los cambios futuros de los precios son difíciles de pronosticar con un modelo matemático. Una caminata aleatoria se define en instantes de tiempo equidistantes discretos. Sin embargo, en general, es mucho más fácil la modelación de precios en tiempo continuo. El "Movimiento Browniano" es análogo a una caminata aleatoria en tiempo continuo. Es un modelo físico asociado al movimiento de una pequeña partícula suspendida en un líquido y ha sido estudiado en física desde el comienzo del siglo XX. Grandes aportes a esta teoría fueron realizados por Albert Einstein (1905). Anterior a Einstein, Louis Bachelier (1900) propuso en su tesis doctoral "*Theorie de la spéculation*" un movimiento Browniano como modelo asociado a los precios especulativos de las acciones.

Una de las imperfecciones de este modelo es que el movimiento Browniano puede tomar valores negativos y esta pudo haber sido una de las razones para que este modelo fuera olvidado a lo largo del tiempo. Ahora bien, en 1960 Samuelson propagó la exponencial del movimiento Browniano (Movimiento Browniano Geométrico) para modelar los precios que están sujetos a incertidumbre.

La contribución de Black, Scholes y Merton fue una idea totalmente nueva en el campo económico. Observaron que el vendedor de una opción call europea no esperaba pasivamente hasta el momento del vencimiento. Por el contrario, si fuera una persona racional invertiría una cierta cantidad de dinero en el mismo título y en un título "libre de riesgo", de acuerdo con una estrategia de negociación dinámica tal que el valor de la cartera al vencimiento fuera exactamente el valor de la opción al vencimiento: cero si el precio de la acción era inferior al precio de ejercicio o, en otro caso, la diferencia positiva entre los precios de la acción y de ejercicio.

Una estrategia de negociación que reproduce el valor de la opción al vencimiento es llamada cobertura. La existencia de tal cobertura es una justificación para el precio de una opción. La cantidad de dinero que el vendedor de la opción habría invertido para su cobertura sería un precio equitativo para la opción. Además Black, Scholes y Merton argumentaron que, si la opción fuera vendida a un precio distinto al calculado por su modelo, una persona racional utilizaría esta situación para obtener beneficios ilimitados sin correr ningún riesgo (denominado "arbitraje").

El modelo de Black, Scholes y Merton supone que el porcentaje de cambio de los precios del subyacente (acciones) en un periodo corto de tiempo sigue una distribución normal o, en otras palabras, supone que los precios del subyacente siguen una distribución lognormal. Una variable tiene una distribución lognormal si el logaritmo natural de dicha variable esta normalmente distribuida.

Esta restricción puede generar una tendencia de valorar erróneamente opciones que se encuentren *in the Money* o *out of the Money*, este problema se conoce como "sonrisa de volatilidad", esta situación puede explicarse por que el supuesto según el cual el precio del subyacente sigue un movimiento browniano geométrico con volatilidad constante no se aplica en la realidad.

A partir del trabajo de Black, Scholes y Merton, han surgido modelos alternativos para relajar los supuestos, en el caso de la distribución de precios del subyacente, Merton (1976) y Bates (1996) consideraron procesos con saltos de difusión, además se propusieron modelos no paramétricos como el de Rubinstein (1994) y Jondeau y Rockinger (2002), modelos semi-paramétricos como los de Corrado y Su (1997) y Jondeau y Rockinger (2001) y modelos paramétricos que tratan de caracterizar directamente una distribución alternativa a la lognormal para los precios del subyacente pero mas flexible, que le permita incorporar las características observadas en los mercados. Dentro de estos modelos se encuentran Bahra (1997), Lim, Martin y Martin (2000) y Corrado (2001).

Se han propuesto otros modelos como el de Hull y White (1987), Stein y Stein (1991), Heston (1993) y Bates (1996) alternativos al supuesto de volatilidad constante. Para la modelación de volatilidades estocásticas, existen modelos en tiempo continuo, llamados modelos de volatilidad estocástica y modelos en tiempo discreto como los de heterocedasticidad condicional ARCH, GARCH y sus generalizaciones. Los modelos en tiempo continuo son difíciles de implementar ya que estos asumen que la volatilidad es observable y esto solo es posible con datos *intra-day* por lo que deben utilizarse las volatilidades implícitas. El cálculo de volatilidades implícitas requieren el uso de precios de mercado de las opciones y estos no siempre se encuentran disponibles, en algunos casos es posible que no existan.

De otro lado los modelos GARCH tienen la ventaja de que la volatilidad se puede estimar de la historia de los precios del subyacente sin necesidad de utilizar volatilidades implícitas de opciones contemporáneas. Estos modelos permiten valorar las opciones estimando los parámetros por medio de observaciones discretas a los precios de los activos subyacentes. La experiencia muestra que las volatilidades implícitas del retorno de un activo tienden a ser mayores que las obtenidas usando un modelo GARCH para caracterizar dicha volatilidad (Tsay, 2002).

1. Revisión preliminar

1.1. Commodities y Commodities en Colombia

Commodity¹ es una palabra inglesa para la que se encuentran los siguientes significados:

- a. Un artículo útil que se puede convertir en una ventaja comercial o una ventaja de otro tipo.
- b. Un artículo de transacción o comercio, especialmente un producto agropecuario² o de minería que puede ser reprocesado y vendido.
- c. Ventaja; beneficio.

Dentro del ámbito financiero se encuentran los siguientes significados:

- a. Un bien básico, usado en el comercio, íter-canjeable con otros commodities de mismo tipo. Los commodities se usan la mayoría de las veces como materias primas para la producción de otros bienes y servicios. La calidad de un commodity dado puede diferir ligeramente, pero es esencialmente uniforme cuando se consideran diversos

¹ Del latín *commoditas*, de *commodus*, conveniente.

² Hacemos énfasis en que el término inglés "*agricultural*" se refiere a agropecuario y no solamente a agrícola.

- productores. Cuando se transan en una bolsa los commodities necesitan cumplir además con unos estándares mínimos, el grado básico.
- b. Cualquier bien que se transa en una bolsa de commodities.
 - c. La idea fundamental es que existe muy poca diferenciación entre un commodity producido por un productor dado A y otro producido B. Un barril de petróleo es básicamente el mismo, si importar quien lo produjo. Con el fin de comprender mejor el concepto, comparamos la idea anterior con un producto de electrónica, digamos un circuito integrado, cuya calidad y características pueden ser completamente diferentes, dependiendo del productor. En esta área se presentan las famosas incompatibilidades.

Algunos ejemplos tradicionales de commodities incluyen granos, oro, carne de res, petróleo y gas natural. Ejemplos menos tradicionales son el tiempo (en horas) de acceso a Internet y el tiempo (en minutos) para usar un teléfono celular.

La compra y venta de los commodities se realiza comúnmente a través de contratos de futuros en bolsas que establecen estándares de cantidad y calidad mínima del producto.

No existe un consenso acerca de que palabra del idioma español usar, por eso es muy común utilizar la palabra original inglesa en singular y el término *commodities* para el plural.

En términos generales se denomina commodities a los productos físicos que no han sido transformados o que han sufrido procesos de transformación muy pequeños o insignificantes en los mercados financieros internacionales se clasifican en cinco grandes grupos básicos: metales (oro, plata, cobre), energía (petróleo, gas natural), alimentos e insumos (azúcar, algodón, café), granos (maíz, garbanzo) y ganado.

Los derivados financieros sobre commodities tales como futuros, opciones y forwards tienen como objetivo principal permitir a los productores y a los consumidores de estos bienes cubrirse de los riesgos que implican las variaciones en los precios. Sin embargo, estos derivados también son utilizados por los especuladores quienes tratan de obtener utilidades apostándole a las tendencias en los precios y por inversores que pretenden obtener beneficios mediante la colocación de un capital a un fondo que hará la inversión en los derivados.

Un mercado financiero en materias primas no está obligatoriamente involucrado con el mercado físico. La finalidad de la operación no responde en general a la adquisición del producto, la finalidad original es el comercio sobre el papel. Las operaciones realizadas con cualquiera de los fines fundamentales (cobertura,

especulación o inversión) se liquidan con el fin de obtener beneficios o pérdidas de dinero. Es decir, no siempre hay entrega del producto subyacente. La adquisición del físico se realiza normalmente en el mercado de contado.

Las principales bolsas de valores del mundo como The Chicago Board of Trade (CBOT), New York Board of Trade (NYBOT), National Commodities and Derivative Exchange (NCDEX), London International Financial Futures Exchange (LIFFE), Tokio Financial Futures Exchange (TFX), entre otras, comercializan los derivados sobre commodities, llegando en la actualidad a desarrollar un mercado de trillones de dólares que inclusive supera al mismo mercado de los productos físicos.

En el mundo a partir de los años 80 las materias primas agrícolas han venido cediendo su posición en las bolsas debido a sistemas de garantías y proteccionismo adoptado por los países, pero debido a la globalización y a nuevos acuerdos comerciales regionales los expertos aconsejan incrementar sustancialmente estos servicios financieros (derivados en commodities).

En nuestro caso particular no nos interesan, por ahora, los derivados sobre todos los commodities sino los derivados sobre productos agropecuarios y de ahora en adelante, salvo ciertas excepciones nos dedicaremos solamente a estos.

1.2 Commodities Agrícolas en Colombia. (Fuente FAO)

Los 20 principales commodities Colombianos son los siguientes:

1. Café
2. Banano
3. Dulces de azúcar
4. Azúcar centrifugada en bruto
5. Azúcar refinada.
6. Extractos de café
7. Cigarrillos
8. Plátano.
9. Leche entera y seca. (Vaca)
10. Aceite de palma
11. Pastelería
12. Chocolate
13. Bebidas no alcohólicas
14. Preparados de frutas
15. Frutas frescas.
16. Tabaco en bruto
17. Pieles de salad secas
18. Melazas

- 19. Malta de cebada.
- 20. Ganado

Hasta el presente, la Bolsa Nacional Agropecuaria (BNA) es la única entidad con posibilidad de negociar derivados financieros en el ámbito nacional.

1.3. Modelos de Valoración en Tiempo Continuo para Commodities

Antes de introducir los modelos para commodities, y con el fin de comparar, presentaremos rápidamente los modelos básicos para valoración de opciones.

1.3.1. La Ecuación de Black-Scholes y el Modelo Básico

Supongamos que:

- a. El mercado está regido por las ecuaciones

$$dB(t) = r \cdot B(t) \quad (1)$$

$$dS(t) = S(t) \cdot \alpha(t, S(t)) \cdot dt + S(t) \cdot \sigma(t, S(t)) \cdot d\bar{W}(t) \quad (2)$$

- b. Existe un reclamo contingente (derivado) simple de la forma $A = \Phi(S(T))$
- c. $F(t, S)$ es una función con primera derivadas parciales con respecto a t , continuas y segundas derivadas parciales con respecto a S continuas.
- d. El derivado se transa en el mercado y su proceso de precio tiene la forma $\Pi(t) = F(t, S(t))$
- e. El Mercado es libre de arbitraje

Entonces, se puede probar que la función de precio F , es la única solución al problema parabólico:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + r \cdot S(t) \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} S^2(t) \cdot \sigma^2(t, s) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) - r \cdot F(t, s) = 0 \quad (3)$$

Con la condición $F(T, s) = \Phi(s)$ en el dominio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$.

De acuerdo con el lema de Feynman-Kač³, F tiene una representación de la forma:

$$F(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}[\Phi(S(T))]$$

Donde $S(T)$ satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(u) = r \cdot S(u) du + S(u) \cdot \sigma(u, S(u)) \cdot dW(u); S(t) = s \quad (4)$$

³ Ver Texto de Bjork

Considerando los supuestos iniciales, puede se observarse algo que parece no encajar: Se supone que la parte del *drift* (tendencia) en la ecuación de la acción era $S(t) \cdot \alpha(t, S(t)) \cdot dt$ y no $r \cdot S(t) \cdot dt$, así que, aparentemente hay un problema.

Se necesita considerar otra medida de probabilidad, usualmente representada por Q (en contraste con P , la medida original llamada probabilidad objetiva) bajo la cual el proceso de precio S se comporta de acuerdo con la ecuación (4) y W (diferente de \bar{W}), es un proceso de Wiener con la medida Q (Un proceso Q -Wiener). Esta nueva medida de probabilidad se conoce como la medida martingala⁴.

Haciendo uso de este nuevo concepto, podemos establecer el resultado más importante de la teoría: El teorema “Precio libre de arbitraje de un reclamo simple”

El precio libre de arbitraje de un reclamo simple $\Phi(S(T))$ está dado por:

$$\Pi(t; \Phi) = F(t, S(t))$$

Donde F está dada por:

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E_{t,s}^Q [\Phi(S(T))] \quad (5)$$

Donde el activo subyacente con precio S bajo la medida (martingala) Q se comporta según la ecuación $dS(t) = r \cdot S(t) \cdot dt + S(t) \cdot \sigma(t, S(t)) \cdot dW$ ⁵.

De la ecuación (5) se dice que es una fórmula de valoración neutral con respecto al riesgo, dado que no involucra los elementos que tendría en cuenta un inversionista con aversión al riesgo.

1.3.2. Modelos para Opciones Sobre Acciones

El modelo fundamental para la valoración de opciones en tiempo continuo es el Modelo de Black-Scholes que se menciona de nuevo con fines de comparación con los otros que son sus extensiones.

El Modelo de Black-Scholes (1973), para Opciones Europeas:

A partir de la fórmula (5) se pueden deducir las siguientes formulas de valoración:

$$c = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rt} \Phi(d_2) \quad (6) \text{ (Precio de una Call)}$$

$$p = Ke^{-rt} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \quad (7) \text{ (Precio de una Put), donde}$$

⁴ El llamado Teorema de Cameron-Martin-Girsanov garantiza la existencia de esta nueva medida y del nuevo proceso de Wiener, W .

⁵ La “ Q ” en el símbolo del valor esperado hace énfasis en el hecho de que estamos usando la medida martingala Q .

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (8)$$

Con S_0 : El precio spot actual del subyacente, K : El precio de ejercicio, r : La tasa de interés, compuesta continuamente, libre de riesgo, t : El tiempo, en años, hasta la expiración del contrato, σ : La volatilidad implícita del precio spot del subyacente, Φ : La función de distribución de una normal estándar y con el precio de la acción (subyacente) siguiendo un movimiento browniano geométrico (mbg).

Una generalización del Modelo de Black-Scholes (B-S) para una acción que paga dividendos, es el modelo de Merton, que permite tener en cuenta dividendos pagados durante la vida de la opción europea.

El Modelo de Merton (1973):

$$c = e^{-qt} s_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rt} \Phi(d_2) \quad (9)$$

$$p = e^{-rt} s_0 \Phi(-d_2) - Ke^{-qt} \Phi(-d_1) \quad (10)$$

Donde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right).t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (11)$$

Con q : Rendimiento de los dividendos (dividend yield) compuesto continuamente y los demás parámetros como en el modelo B-S.

1.4. Opciones sobre Commodities y El Modelo de Black

Una de las principales dificultades que se encuentran cuando se quieren valorar opciones sobre commodities es encontrar ciertos factores no aleatorios en la conducta de los precios spot de algunas de ellas.

Por ejemplo es común que los precios suban durante el período anterior a la cosecha y que bajen durante el período posterior a ella, también en los países con estaciones es natural que el gas y otros derivados del petróleo sean más caros durante el invierno que durante los meses de verano.

Este comportamiento contrasta con el comportamiento del movimiento browniano geométrico sobre el que está basado el modelo de Black-Scholes y por lo tanto este no debe aplicarse.

Fischer Black buscó una solución a este problema y publicó sus resultados en el paper "*The Pricing of Commodity Contracts*". La solución que encontró Black fue modelar los precios forward en vez de los precios spot.

Los precios forward no presentan las mismas características no aleatorias de los precios spot. Por ejemplo, los precios spot de productos agrícolas subirán durante el periodo anterior a la cosecha, reflejando la escasez del producto. Los precios forward, sin embargo, no subirán porque son precios para entrega después de la cosecha y deben ser más bajos anticipando la caída en los precios spot después de la cosecha. Aunque no es razonable utilizar el “mbg” para modelar el precio spot, si puede ser razonable hacerlo con el precio forward.

El modelo de Black se usa para modelar los precios de opciones europeas sobre commodities físicas, forwards y futuros. También se usa para modelar precios de caps y floors sobre tasas de interés.

Si c es el precio de una opción call y p es el precio de una opción put entonces

$$c = e^{-rt} [s_0 \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)] \quad (12)$$

$$p = e^{-rt} [K \Phi(-d_2) - s_0 \Phi(-d_1)] \quad (13)$$

$$\text{Donde: } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (14)$$

Con S_0 : El precio forward actual del subyacente, K : El precio de ejercicio, R : La tasa de interés, compuesta continuamente, libre de riesgo, t : El tiempo, en años, hasta la expiración del contrato, σ : La volatilidad implícita del precio forward del subyacente, Φ : Es la función de distribución de una normal estándar.

1.4.1. Opciones Americanas

Las opciones americanas le dan al poseedor el derecho de ejercerla en cualquier instante anterior o igual a la madurez. Esta característica hace que, en general, encontrar soluciones sea más difícil que para las contrapartes europeas,

El único caso para el que existe una solución en forma cerrada para la valoración de una opción americana es aquel en el que la opción es una call sobre una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato. Cuando hay un único dividendo conocido durante la vida del contrato es posible dar un precio exacto.

Fórmulas Cerradas:

- a. No hay dividendos durante la vida de la opción. En estos casos nunca es beneficioso ejercer la opción en una fecha anterior a la madurez. Las razones para esto son principalmente dos: Primero, mantener la opción call en vez de ejercerla y obtener la acción es un factor de aseguramiento. Una caída en los precios puede implicar pérdidas para el poseedor de la acción pero no necesariamente para quien posee la call.

Segundo, debido al valor del dinero en el tiempo, el pagar el precio de ejercicio más temprano que tarde implica la pérdida del valor que esa cantidad puede alcanzar en el tiempo hasta la madurez.

En este caso se puede valorar la opción utilizando la fórmula estándar de B-S.

- b. Opciones Call Americanas con un Solo Dividendo. Modelo de Roll, Geske & Whaley (1979).

Una opción americana se puede considerar como una serie de opciones call europeas que expiran en períodos sin dividendos. En este caso se comporta como una opción compuesta, es decir una opción sobre una opción y tiene una fórmula cerrada:

$$c_t = (S_0 - D_1 e^{-r(t_1-t)}) \Phi(b_1) - (K - D_1) e^{-r(t_1-t)} \Phi(b_2) + (S_0 - D_1 e^{-r(t_1-t)}) \Phi_2 \left(a_1; -b_1; \sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}} \right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi_2 \left(a_2; -b_2; \sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}} \right) \quad (15)$$

Donde,

$$a_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_0 - D_1 e^{-r(t_1-t)}}{K} \right) + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}; \quad a_2 = a_1 - \sigma \sqrt{T-t} \quad (16)$$

$$b_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_0 - D_1 e^{-r(t_1-t)}}{S^*} \right) + (r + \frac{1}{2} \sigma^2)(t_1-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}; \quad b_2 = b_1 - \sigma \sqrt{t_1-t} \quad (17)$$

$\Phi_2(a; b; \rho)$ es la función de distribución una normal divariada acumulada, D_1 : Valor del dividendo a pagar en t_1 y S^* es el valor crítico de la acción que satisface la ecuación:

$$S^* + D_1 - K = \text{Precio de la Call.}$$

Normalmente este valor se haya mediante algún método numérico.

Aproximaciones:

a. Aproximación Cuadrática de Barone-Adesi, Whaley.

Esta es una aproximación para opciones americanas que consiste esencialmente en el precio de una opción europea ajustada con una prima de ejercicio temprano.

$$C_t = c_t + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^{q_2}, \text{ si } S_t < S^* \quad (18) \text{ y}$$

$$S_t - K, \text{ si } S_t \geq S^*. \quad (19)$$

c_t se valora mediante la fórmula fundamental de B-S.

$$A_2 = \frac{S^* [1 - e^{\delta(T-t)} \Phi(d_1)]}{q_2}; \quad q_2 = \frac{1 - n + \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2} \quad (20)$$

$$n = \frac{2(r - \delta)}{\sigma^2}; \quad k = \frac{2r}{\sigma^2(1 - e^{-r(T-t)})}. \quad (21)$$

El valor crítico, S^* se define mediante la ecuación

$$S^* - K = c_t(S^*, K, T - t) + (1 - e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_1))(S^* / q_2) \quad (22)$$

Y se haya mediante algún método numérico.

Para las put correspondientes se tiene el conjunto de fórmulas

$$P_t = p_t + A_1 \left(\frac{S_t}{S^{**}} \right)^{q_1}, \text{ si } S_t > S^{**} \quad (23) \text{ y}$$

$$K - S_t, \text{ si } S_t \leq S^{**}. \quad (24)$$

$$A_1 = \frac{S^{**} [1 - e^{\delta(T-t)} \Phi(-d_1)]}{q_1}; \quad q_2 = \frac{1 - n - \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2} \quad (25)$$

Donde n y k son las mismas que para la call.

Se considera que esta aproximación es bastante adecuada y rápida de calcular.

b. Aproximación de Bjerksund, Stensland (1993)

Hay evidencia que funciona mejor que la aproximación anterior en muchos casos.

Para una Call:

$$C = \alpha S^\beta - \alpha \varphi(S, T, \beta, I, I) + \varphi(S, T, 1, I, I) - \varphi(S, T, 1, K, I) - K \varphi(S, T, 0, I, I) + k \varphi(S, T, 0, k, I) \quad (26)$$

Donde:

$$\alpha = (I - K)I^{-\beta}; \quad \beta = \left(\frac{1}{2} - \frac{r - D}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{r - D}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{r}{\sigma^2} \right)}$$

$$\varphi(S, T, \gamma, H, I) = e^\lambda S^\gamma \left[\Phi(d) - \left(\frac{1}{S} \right)^\kappa \Phi \left(d - \frac{2 \ln \left(\frac{I}{S} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \quad (27)$$

$$\lambda = \left[\gamma(r - D) - r + \frac{1}{2} \gamma(\gamma - 1) \sigma^2 \right] T; \quad d = - \frac{\ln \left(\frac{S}{H} \right) + (r - D + (\gamma - 0.5) \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$\kappa = \frac{2(r - D)}{\sigma^2} + (2\gamma - 1); \quad I = B_0 + (B_\infty - B_0)(1 - e^{-f})$$

$$f = -((r - D)T + 2\sigma\sqrt{T}) \left(\frac{B_0}{B_\infty - B_0} \right); \quad B_\infty = \frac{\beta}{\beta - 1} K; \quad B_0 = \text{Max} \left[K, \left(\frac{r}{D} \right) K \right] \quad (28)$$

Para una Put se usa la siguiente forma de paridad:

$$P(S, K, T, r, r - D, \sigma) = C(K, S, T, D, D - r, \sigma) \quad (29)$$

1.5. Series de Precios de Commodities en Colombia

Algunas series de precios de commodities de Colombia presentan efectos GARCH (Càrcamo y Arbelaez 2007). Para este tipo de commodities, ninguna de las fórmulas mencionadas anteriormente es adecuada, dado que todas ellas suponen volatilidad constante.

Ahora, la obtención de una fórmula práctica como las ecuaciones (6) o (7) necesita del establecimiento de la medida martingala para ese modelo y, en general esta no es fácil de determinar.

En la literatura, relativamente reciente, aparece un modelo desarrollado por Heston - Nandi que permite una fórmula cerrada para la valoración de opciones (Heston y Nandi, 2000) que involucra la medida martingala.

1.6. Por qué el modelo de Heston-Nandi?

El modelo de Heston-Nandi se ha utilizado para valorar opciones sobre el índice S&P 500, el cual que presenta efectos GARCH. Cuando se modelan los índices, es conveniente utilizar la noción de *dividend yield* continuo que es análoga a la noción de *convenience yield* para commodities.

En un estudio previo (Cárcamo y Arbelaez 2007), se encontró que varios commodities presentan efectos GARCH, dentro de esta investigación se analizaron dos series de precios y también se encontraron efectos GARCH. Estos hechos junto con la necesidad de una fórmula cerrada de valoración neutral con respecto al riesgo llevaron a la escogencia del modelo.

Este trabajo se enfocará en la implementación del modelo de Heston-Nandi para la valoración de opciones europeas sobre commodities, el cual desarrolla una fórmula cerrada para activos cuyo precio spot tiene efectos GARCH y cuya varianza está correlacionada con los retornos del activo.

El núcleo del proyecto consiste en explicar los aspectos principales del modelo, deducir las principales características, de tal manera que sea fácilmente accesible a especialistas en finanzas, desarrollar un programa que permita estimar los parámetros del modelo, dada una serie de precios, y probarlo en dos series del mercado colombiano. Esto servirá de base a la valoración de opciones de esos productos.

1.7. Modelos GARCH “Clásicos”

Una vez se comprueba la naturaleza GARCH de las series de precios diarios de dos productos agrícolas colombianos, se desvirtúa así uno de los supuestos del modelo de Black, Scholes y Merton. Esto significa que el modelo de Black-Scholes y Merton no es adecuado para la valoración de estos derivados financieros.

Por otro lado, en este caso, los modelos tipo GARCH “clásicos” solo son adecuados a nivel descriptivo de la varianza.

El modelo GARCH (p,q) representa la varianza como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad \text{con } a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (30)$$

o, alternativamente,

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad \text{con } a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Donde ε_t es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza igual a 1, en muchos casos se supone normal estándar.

1.8. El modelo de Heston y Nandi

Supuestos del modelo:

- Los precios del subyacente, S , se observan discretamente en los instantes $0, \Delta, 2\Delta, \dots, t-\Delta, t, t+\Delta, \dots$
- Los rendimientos, continuos, del subyacente tienen la forma:

$$r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta)}\right) = r + \lambda h(t) + \sqrt{h(t)} z(t) \quad (31),$$

Donde r es la tasa libre de riesgo, compuesta continuamente, en el intervalo de longitud Δ , λ es una constante positiva, $z(t)$ es un término de perturbación normal estándar y, $h(t)$ es la varianza condicional del retorno logarítmico en el intervalo $[t-\Delta, t)$ y que se conoce a partir del conjunto de información $I_{t-\Delta}$.

Esta varianza condicional satisface:

$$h(t) = \omega + \beta h(t-\Delta) + \alpha \left(z(t-\Delta) - \gamma \sqrt{h(t-\Delta)} \right)^2 \quad (32) \text{ (Forma GARCH)}$$

con ω, α, β , y γ son constantes.

- $\sqrt{h(t)}$ es la volatilidad.
- $\lambda h(t)$ es una prima de riesgo (risk premium).

Si $E_{t-\Delta}(\cdot)$ denota el valor esperado, condicional a $I_{t-\Delta}$, $E_{t-\Delta}(h(t)) = h(t)$ y $E_{t-\Delta}(r_t) = r + \lambda h(t)$.

En condiciones de certidumbre la volatilidad es cero y $E_{t-\Delta}(r_t) = r$, lo que impide el arbitraje.

La prima de riesgo del rendimiento, por unidad de riesgo es:

$$\frac{E_{t-\Delta}(r_t) - r}{\sqrt{h(t)}} = \lambda \sqrt{h(t)} \quad (33),$$

Que es proporcional al riesgo, como el modelo de Cox, Ingersol y Ross (CIR) (1985).

Si $\alpha = \beta = 0$, $h(t)$ es constante y el modelo es equivalente al de Black-Scholes en tiempo discreto.

Distribución Condicional de $S(t)$ en Cada Subintervalo:

Dado que r_t tiene distribución normal con media $r + \lambda h(t)$ y desviación estándar $\sqrt{h(t)}$, $S(t)$ tiene una distribución condicional log-normal sobre cada período simple.

Momentos de la Normal Estándar

Si $z(t)$ es normal estándar, $E(z(t)) = 0$. Dado que $z^2(t) \sim \chi_1^2$ y el valor esperado de una ji-cuadrado es el número de sus grados de libertad, $E(z^2(t)) = 1$, además $E(z^3(t)) = 0$ y $E(z^4(t)) = 3$.

Varianza condicional del modelo:

$$E_{t-\Delta}((r_t - E_{t-\Delta}(r_t))^2) = E_{t-\Delta}(h(t) z^2(t)) = h(t).$$

Valor Esperado Incondicional

Asumiendo que el proceso es estacionario, en el sentido débil, los valores esperados de $h(t)$, y $h(t-\Delta)$ son iguales.

De la ecuación (31):

$$h(t) = \omega + \beta h(t-\Delta) + \alpha(z^2(t-\Delta) - 2z(t-\Delta)\gamma\sqrt{h(t-\Delta)} + \gamma^2 h(t-\Delta))$$

Y como $h(t-\Delta)$ es independiente de $z(t-\Delta)$, entonces:

$$(1 - \beta - \alpha\gamma^2)E(h(t)) = \omega + \alpha,$$

De acá,

$$E(h(t)) = \frac{\omega + \alpha}{(1 - \beta - \alpha\gamma^2)} \quad \mathbf{(34)},$$

Considerando que $h(t)$ es positivo, se concluye la siguiente condición:

Condición de Estacionaridad:

$$\beta + \alpha\gamma^2 < 1 \quad \mathbf{(35)},$$

Con media y varianza finitas.

Valor Esperado y Varianza Condicional de $h(t+\Delta)$:

$$h(t + \Delta) = \omega + \beta h(t) + \alpha(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2 = \omega + \beta h(t) + \alpha(z^2(t) - 2\gamma z(t)\sqrt{h(t)} + \gamma^2 h(t))$$

$$E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)) = \omega + \beta h(t) + \alpha(1 + \gamma^2 h(t)) = \omega + \alpha + (\beta + \alpha\gamma^2)h(t) \quad (36)$$

$$h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)) = \alpha(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2 - \alpha(1 + \gamma^2 h(t))$$

$$(h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)))^2 = \alpha^2 \left[\frac{(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^4 - 2(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2}{(1 + \gamma^2 h(t)) + (1 + \gamma^2 h(t))^2} \right]$$

$$(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^4 = z^4(t) - 4\gamma\sqrt{h(t)}z^3(t) + 6\gamma^2 h(t)z^2(t) - 4\gamma^3 h^{3/2}(t)z(t) + \gamma^4 h^2(t),$$

Así que,

$$E(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^4 = 3 + 6\gamma^2 h(t) + \gamma^4 h^2(t) \quad (37),$$

Además,

$$E(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2 = 1 + \gamma^2 h(t)$$

$$E((h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)))^2) = \alpha^2 [3 + 6\gamma^2 h(t) + \gamma^4 h^2(t) - 2(1 + \gamma^2 h(t))(1 + \gamma^2 h(t)) + (1 + \gamma^2 h(t))^2]$$

$$E((h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)))^2) = \alpha^2 [3 + 6\gamma^2 h(t) + \gamma^4 h^2(t) - (1 + 2\gamma^2 h(t) + \gamma^4 h^2(t))]$$

$$\text{Var}_{t-\Delta}(h(t + \Delta)) = E((h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)))^2) = \alpha^2 [2 + 4\gamma^2 h(t)] \quad (38)$$

$h(t+\Delta)$ se puede observar desde el tiempo t como una función del precio spot, en la forma:

$$h(t + \Delta) = \omega + \beta h(t) + \alpha(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2$$

Efecto asimétrico de los shocks

De esta expresión se puede observar la asimetría de las innovaciones según el signo, si $z(t)$ es negativo, (dado que γ es positivo) el valor absoluto de $z(t) - \gamma\sqrt{h(t)}$, es mayor al valor absoluto que tendría la misma expresión, si $z(t)$ es positivo. Por lo tanto, un shock negativo tendrá un mayor impacto en la varianza condicional. Por esto podemos decir que γ controla el sesgo.

Covarianza de $h(t)$ con el Logaritmo del Precio Spot

$$\text{Cov}_{t-\Delta}[h(t + \Delta), \ln(S(t))] = E_{t-\Delta}[(h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)))(\ln(S(t)) - E_{t-\Delta}(\ln(S(t))))]$$

Donde,

$$h(t + \Delta) - E_{t-\Delta}(h(t + \Delta)) = \alpha(z(t) - \gamma\sqrt{h(t)})^2 - \alpha(1 + \gamma^2 h(t)),$$

$$\ln(S(t)) = \ln(s(t - \Delta)) + r + \lambda\sqrt{h(t)} + \sqrt{h(t)}z(t),$$

$$\begin{aligned}
E_{t-\Delta}[\ln(S(t))] &= r + \lambda\sqrt{h(t)}, \text{ y} \\
\ln(S(t)) - E_{t-\Delta}[\ln(S(t))] &= \sqrt{h(t)}z(t) \\
Cov_{t-\Delta}[h(t+\Delta), \ln(S(t))] &= E_{t-\Delta} \alpha \left[\begin{array}{c} z^3(t)h^{1/2}(t) - 2\gamma h(t)z^2(t) + z(t)\gamma^2 h(t) - \\ (1 + \gamma^2 h(t))h^{1/2}(t)z(t) \end{array} \right] \\
Cov_{t-\Delta}[h(t+\Delta), \ln(S(t))] &= -2\alpha\gamma h(t) \quad \mathbf{(37)}
\end{aligned}$$

El Proceso de Volatilidad de Tiempo Continuo

Se puede demostrar (Heston-Nandi, 2000) que a medida de Δ se contrae, $h(t)$ converge débilmente al proceso de varianza $dv = k(\theta - v)dt + \sigma\sqrt{v} dz$ (37), donde, $z(t)$ es un proceso de Wiener.

El Proceso Neutral con Respecto al Riesgo (Con la Medida Martingala)

En el modelo de Black-Scholes, el precio del subyacente, en el mundo neutral con respecto al riesgo tiene una dinámica regida por la EDE $dS = r.S dt + \sigma.S dw$, $S(0) = S_0$. (11), donde dw es el diferencial de un proceso de Wiener en este mundo neutral.

La solución está dada por:

$$S(t) = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma.w(t)} \quad \mathbf{(38)},$$

Esta solución, indica que la distribución, neutral con respecto al riesgo, del precio spot es log normal. De esta expresión se obtiene:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma.w(t) \quad \mathbf{(39)}.$$

Comparando la ecuación (39) con (31), si $\lambda = -1/2$, podemos transformarla en:

$$r_t = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-\Delta)}\right) = r - \frac{1}{2}h(t) + \sqrt{h(t)}z^*(t) \quad \mathbf{(40)}$$

Haciendo:

$$z^*(t) = z(t) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{h(t)} \text{ y } \gamma^* = \gamma + \lambda + \frac{1}{2} \quad \mathbf{(41)},$$

Obtenemos que:

$$z^*(t) - \gamma^*\sqrt{h(t)} = z(t) - \gamma\sqrt{h(t)}$$

y por lo tanto, $h(t)$ se puede escribir como:

$$h(t) = \omega + \beta h(t - \Delta) + \alpha \left(z^* (t - \Delta) - \gamma^* \sqrt{h(t - \Delta)} \right)^2 \quad (42)$$

Transformadas de Fourier

La transformada F, y la transformada inversa de de una función integrable, f, se definen como:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Phi x} f(x) dx = F(\Phi)$$

Y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Phi x} F(\Phi) d\Phi \quad (43),$$

Respectivamente. Las transformadas de Fourier han sido utilizadas tradicionalmente en las ciencias físicas e ingeniería. A partir del desarrollo de los derivados financieros han tenido un papel importante en las finanzas, especialmente en la valoración de derivados financieros.

Funciones Características:

Si α es una distribución de probabilidades en la recta real, su función característica, $\varphi(t)$, se define como:

$$\varphi(t) = \int e^{itx} d\alpha. \quad (44)$$

Acá, i es la unidad imaginaria.

Si α tiene una densidad, f , entonces:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = E[e^{itX}] \quad (45),$$

Es decir, si la variable aleatoria α es absolutamente continua entonces, la función característica se puede expresar como un valor esperado.

Existe una propiedad donde $|\varphi(t)| \leq 1$, para todo real t . Además una propiedad de inversión donde:

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \quad (46)$$

Se puede observar claramente que la función característica es la transformada de Fourier de f y que esta función de densidad se puede calcular mediante la transformada inversa. En la aplicación que se esta trabajando, f , es la función de densidad (neutral con respecto al riesgo) de los retornos logarítmicos.

La Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform- FFT) :

Un algoritmo eficiente para calcular sumas de la forma:

$$\omega(k) = \sum_{j=1}^N e^{-j \frac{2\pi}{N} (j-1)(k-1)} x(j) \quad (47),$$

Es la transformada rápida de Fourier, que proporciona una aproximación discreta a la transformada de Fourier.

Cálculo del Precio de los Derivados:

Un primer paso en el cálculo de los precios de las opciones es el cómputo de la función generatriz condicional del precio spot:

$$f(\Phi) = E_t \left[S_T^\Phi \right] \quad (48).$$

Para el proceso de Heston-Nandi GARCH (1,1), esta función asume la siguiente forma:

$$f(\Phi) = S_T^\Phi \text{Exp}[A(t;T,\Phi) + B(t;T,\Phi)h(t + \Delta)] \quad (49),$$

Donde,

$$A(t;T,\Phi) = A(t + \Delta, T, \Phi) + \Phi r + B(t + \Delta, T, \Phi) \omega - \frac{1}{2} \ln(1 - 2\alpha B(t + \Delta, T, \Phi)). \quad (50)$$

$$B(t;T,\Phi) = \Phi(\gamma + \lambda) - \frac{1}{2} \gamma^2 + \beta B(t + \Delta, T, \Phi) + \frac{\frac{1}{2}(\Phi - \gamma)^2}{1 - 2\alpha B(t + \Delta, T, \Phi)}. \quad (51)$$

Estas se pueden calcular en forma recursiva mediante las condiciones de frontera:

$$A(t - \Delta; T, \Phi) = \Phi r, \text{ y}$$

$$B(t - \Delta; T, \Phi) = \lambda \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2. \quad (52)$$

2. Resultados Empíricos

El análisis empírico se inicia con una descripción de las series de precios, luego se procede a estimar el modelo que mejor describe cada una de las series y su volatilidad y de acuerdo a los resultados se procederá a estimar el precio de la opción de acuerdo al modelo de Heston y Nandi(2000).

2.1. Descripción de los datos

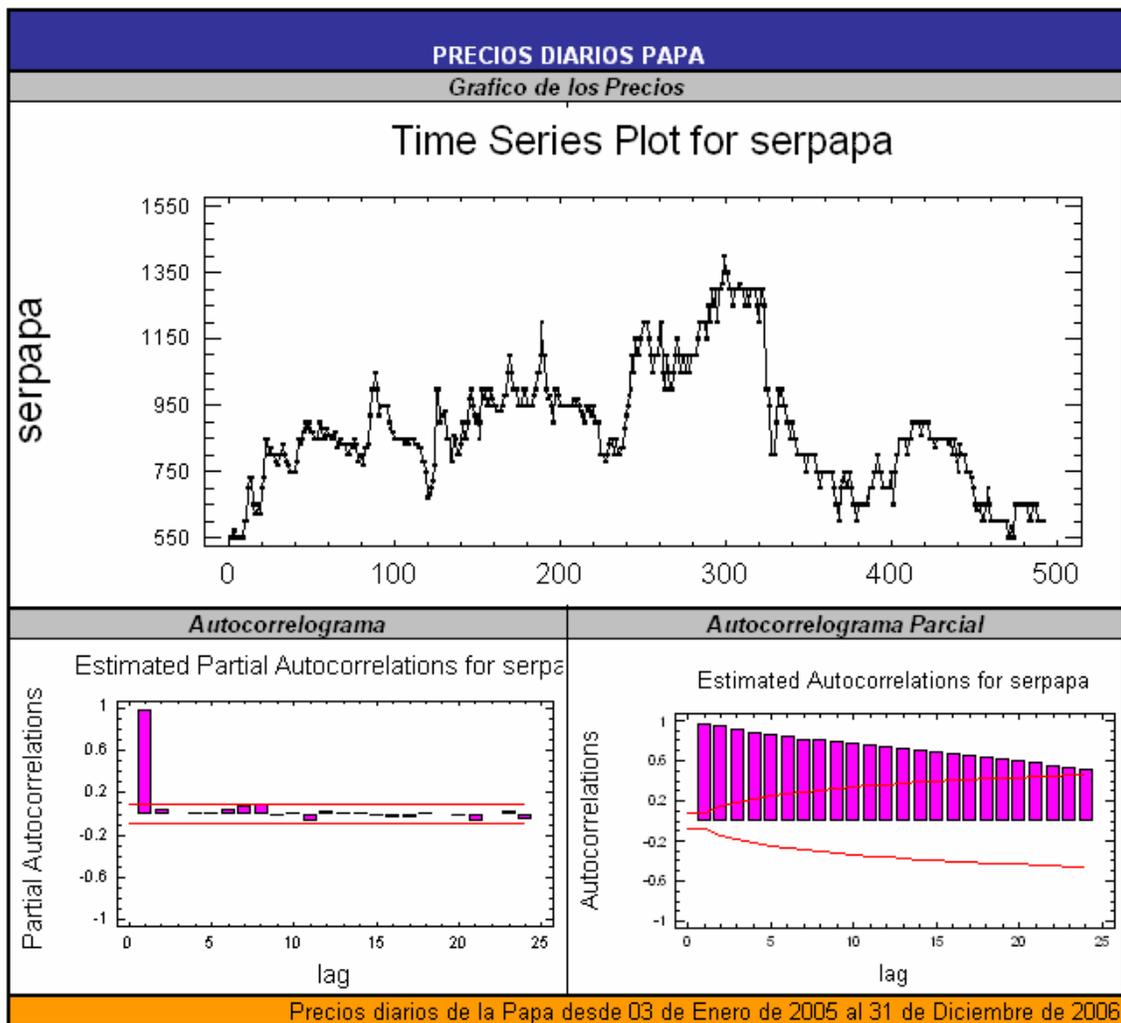
La selección de las series de realizó tomando en cuenta aquellos productos transados en la Bolsa Nacional Agropecuaria (BNA) que tenían un mayor volumen de transacción y de estos se seleccionaron aquellos que contenían los datos para todos los días. De acuerdo a estos criterios las series seleccionadas

fueron las del fríjol (fríjol verde) y la papa (papa capira). En la página de la BNA es posible encontrar series pero de promedios mensuales, no de precios diarios.

Las series de datos corresponden a los retornos diarios de los precios entre el 3 de Enero de 2005 y el 31 de Diciembre de 2006 suministrados por el Sistema de información de precios del sector agropecuario –SIPSA–. El SIPSA es la fuente de información de la BNA. El reconocimiento inicial de las series comprende un análisis gráfico preliminar y una serie de tests para determinar su estacionalidad, luego un análisis de la serie de los retornos.

La Serie de la Papa

A primera vista, la serie no presenta una reversión a un nivel medio. Al cabo de dos años su precio vuelve a un nivel comparable con el inicial.



El auto-correlograma y el auto-correlograma parcial muestran que la serie se comporta aproximadamente como un paseo aleatorio. Con el fin de corroborar esto sometimos la serie a pruebas para raíces unitarias.

El tests de Dickey-Fuller Aumentado, (ADF) indica que no se puede rechazar la hipótesis de un paseo aleatorio con intercepto pero sin tendencia.

Esto se confirma mediante los test de Philips-Perron y KPSS, que se muestran a continuación.

PRECIOS DIARIOS PAPA				
Prueba Raíces Unitarias				
Null Hypothesis: Ppapa has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=17)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-2.759602	0.2132
Test critical values: 1% level			-3.976896	
5% level			-3.419019	
10% level			-3.132063	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(Ppapa)				
Method: Least Squares				
Date: 09/02/07 Time: 17:31				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.028448	0.010309	-2.759602	0.006
C	29.72803	10.11387	2.939332	0.0034
@TREND(1)	-0.018837	0.013377	-1.408167	0.1597
Null Hypothesis: Ppapa has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=17)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-2.6307	0.0874
Test critical values: 1% level			-3.443469	
5% level			-2.867219	
10% level			-2.569857	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 09/02/07 Time: 17:32				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.027013	0.010269	-2.6307	0.0088
C	23.84303	9.219308	2.586206	0.01
Precios diarios de la papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

PRECIOS DIARIOS PAPA				
<i>Prueba Raices Unitarias</i>				
Null Hypothesis: Ppapa has a unit root				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 6 (Newey-West using Bartlett kernel)				
			Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic			-2.478243	0.1214
Test critical values: 1% level			-3.443469	
5% level			-2.867219	
10% level			-2.569857	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Residual variance (no correction)				1733.568
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				1518.795
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 09/02/07 Time: 17:02				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.027013	0.010269	-2.6307	0.0088
C	23.84303	9.219308	2.586206	0.01
Null Hypothesis: Ppapa is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 17 (Newey-West using Bartlett kernel)				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.466055
Asymptotic critical values*:			1% level	0.739
			5% level	0.463
			10% level	0.347
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				33779.56
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				519697.7
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: SER01				
Method: Least Squares				
Date: 09/02/07 Time: 17:09				
Sample: 1 491				
Included observations: 491				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	878.2892	8.302883	105.7812	0
Precios diarios de la papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

PRECIOS DIARIOS PAPA				
Prueba Raíces Unitarias				
Null Hypothesis: SER01 Is stationary				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Bandwidth: 17 (Newey-West using Bartlett kernel)				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.441956
Asymptotic critical values*:				
	1% level			0.216
	5% level			0.146
	10% level			0.119
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				33416.87
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				512534.8
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: SER01				
Method: Least Squares				
Date: 09/02/07 Time: 17:12				
Sample: 1 491				
Included observations: 491				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	911.2078	16.50804	55.19783	0
@TREND(1)	-0.134362	0.058323	-2.30376	0.0217
Precios diarios de la papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

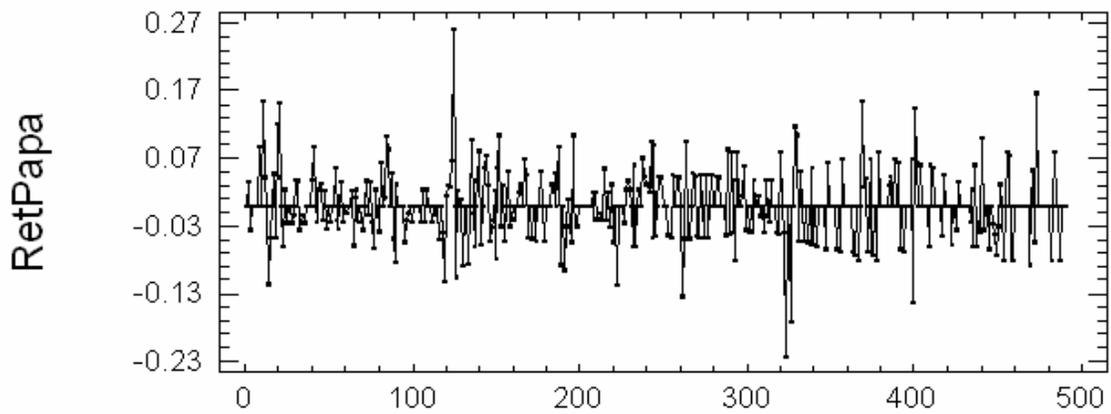
La Serie de los Retornos del Precio de la Papa

La serie de los retornos, calculados como $\ln(P_t/P_{t-1})$, es una serie estacionaria que presenta auto-correlación y auto-correlación parcial significativa, de signo negativo, en los rezagos 6 y 7.

RETORNOS DEL PRECIO PAPA

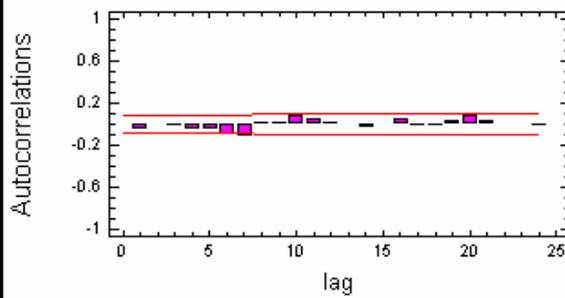
Grafico de los Retornos

Time Series Plot for RetPapa



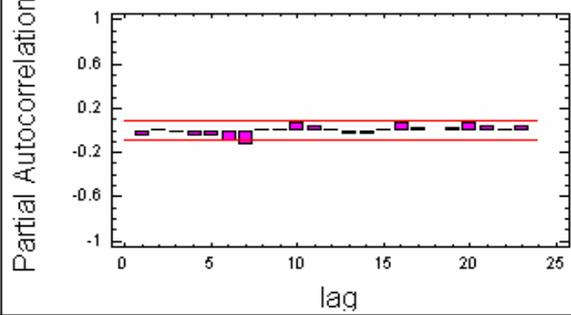
Autocorrelograma

Estimated Autocorrelations for RetPapa



Autocorrelograma Parcial

Estimated Partial Autocorrelations for RetPapa

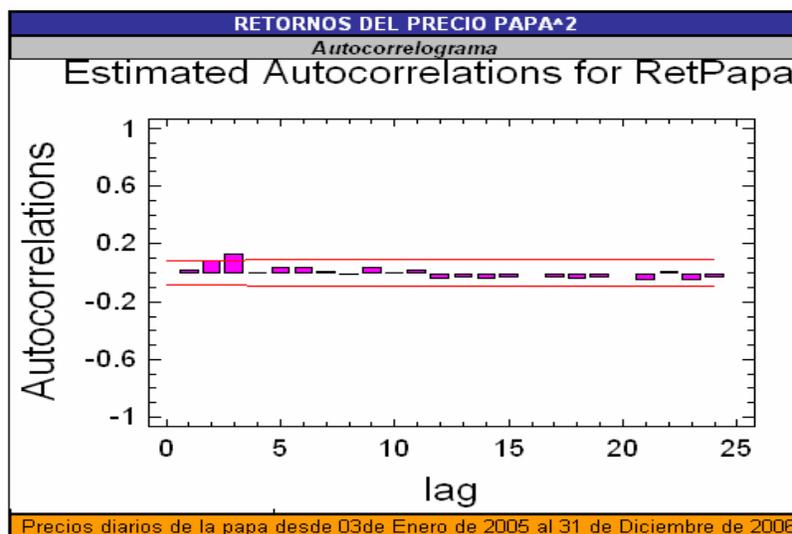


Precios diarios de la Papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

RETORNOS DEL PRECIO PAPA									
Autocorrelograma					Autocorrelograma Parcial				
Estimated Autocorrelations for RetPapa					Estimated Partial Autocorrelations for RetPapa				
Lag	Autocorrelation	Std. Error	Lower 95.0%	Upper 95.0%	Lag	Partial	Std. Error	Lower 95%	Upper 95%
			Prob. Limit	Prob. Limit				Prob. Limit	Prob. Limit
1	-0.0503318	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	1	-0.0503318	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
2	0.0085787	0.0452897	-0.0887663	0.0887663	2	0.00606078	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
3	-0.0203226	0.0452930	-0.0887728	0.0887728	3	-0.0196389	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
4	-0.0431194	0.0453116	-0.0888093	0.0888093	4	-0.0452995	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
5	-0.0525740	0.0453953	-0.0889733	0.0889733	5	-0.0570338	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
6	-0.1001590	0.0455194	-0.0892165	0.0892165	6	-0.106565	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
7	-0.1183950	0.0459669	-0.0900937	0.0900937	7	-0.133843	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
8	0.0238265	0.0465851	-0.0913053	0.0913053	8	0.00345592	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
9	0.0189961	0.0466100	-0.0913541	0.0913541	9	0.0106673	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
10	0.0816634	0.0466258	-0.0913850	0.0913850	10	0.066883	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
11	0.0485925	0.0469168	-0.0919554	0.0919554	11	0.0378166	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
12	0.0214223	0.0470194	-0.0921564	0.0921564	12	0.00510799	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
13	-0.0107831	0.0470393	-0.0921955	0.0921955	13	-0.029806	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
14	-0.0328003	0.0470443	-0.0922054	0.0922054	14	-0.0399419	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
15	-0.0101846	0.0470910	-0.0922968	0.0922968	15	0.00379103	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
16	0.0423285	0.0470955	-0.0923056	0.0923056	16	0.069607	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
17	-0.0127335	0.0471730	-0.0924576	0.0924576	17	0.0230735	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
18	-0.0172147	0.0471801	-0.0924714	0.0924714	18	-0.0100456	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
19	0.0319391	0.0471929	-0.0924965	0.0924965	19	0.0240004	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
20	0.0770336	0.0472370	-0.0925829	0.0925829	20	0.0680837	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
21	0.0317821	0.0474927	-0.0930841	0.0930841	21	0.0346706	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
22	-0.0103624	0.0475360	-0.0931691	0.0931691	22	0.0050273	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
23	0.0099864	0.0475407	-0.0931781	0.0931781	23	0.0327089	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
24	-0.0252772	0.0475449	-0.0931865	0.0931865	24	-0.00960258	0.0451754	-0.0885423	0.0885423

Precios diarios de la Papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

El auto-correlograma de los cuadrados de los retornos indica efectos ARCH significativos en el tercer rezago (Lag).



Precios diarios de la papa desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

RETORNOS DEL PRECIO PAPA^2				
Autocorrelograma				
Estimated Autocorrelations for retpapa^2				
Lag	Autocorrelacion	Std. Error	Lower 95.0% Prob. Limit	Upper 95.0% Prob. Limit
1	0.0187382	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
2	0.0809747	0.0451913	-0.0885734	0.0885734
3	0.131923	0.0454864	-0.0891519	0.0891519
4	0.00148012	0.0462607	-0.0906694	0.0906694
5	0.0343885	0.0462608	-0.0906696	0.0906696
6	0.0395428	0.0463129	-0.0907718	0.0907718
7	0.0100656	0.0463817	-0.0909067	0.0909067
8	-0.0192843	0.0463862	-0.0909155	0.0909155
9	0.0347032	0.0464026	-0.0909475	0.0909475
10	0.00149669	0.0464555	-0.0910513	0.0910513
11	0.0190039	0.0464556	-0.0910515	0.0910515
12	-0.0446131	0.0464715	-0.0910826	0.0910826
13	-0.033536	0.0465588	-0.0912537	0.0912537
14	-0.0481752	0.0466081	-0.0913503	0.0913503
15	-0.0383644	0.0467096	-0.0915492	0.0915492
16	-0.00903914	0.0467738	-0.0916752	0.0916752
17	-0.0389416	0.0467774	-0.0916822	0.0916822
18	-0.041717	0.0468435	-0.0918118	0.0918118
19	-0.0378069	0.0469193	-0.0919602	0.0919602
20	-0.00987305	0.0469814	-0.092082	0.092082
21	-0.0577687	0.0469856	-0.0920903	0.0920903
22	0.0106473	0.0471304	-0.092374	0.092374
23	-0.0569813	0.0471353	-0.0923836	0.0923836
24	-0.0327742	0.0472756	-0.0926587	0.0926587

Un análisis del rendimiento promedio, indica que los rezagos de orden 6 y 7 son significativos.

Sin tomar en cuenta los efectos GARCH, el rendimiento r_t , se puede expresar como:

$$r_t = -0.107055 r_{t-6} - 0.125224 r_{t-7} + \varepsilon_t .$$

Este modelo da cuenta de toda la auto-correlación. Sin embargo, dada la existencia de efectos GARCH, este sirve sólo como una primera aproximación.

Cuando se tienen en cuenta los efectos GARCH, el rezago de orden 6 deja de ser significativo, y el rezago de orden 7 es significativo sólo al 90%. El modelo GARCH clásico más apropiado para los retornos se vuelve entonces:

$$r_t = -0.085621 + \varepsilon_t.$$

Donde:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t. \text{ y } \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

Con $\omega = 0.000389$, $\alpha = 0.199881$ y $\beta = 0.64572$.

La aparente semejanza de los modelos ARCH-M con el de Heston-Nandi en cuanto a que los primeros involucran σ_t^2 en el retorno promedio, sugiere hacer una prueba para ver si, en realidad este factor es importante.

Cuando se trataron de ajustar modelos del tipo ARCH-M, siempre resultó que la parte de la varianza en el promedio no es significativa, esté esta expresada como varianza, desviación estándar o como logaritmo de la varianza.

Estos resultados no indican, sin embargo que en realidad σ_t^2 no haga parte del promedio en el modelo de Heston-Nandi. Las pruebas se hicieron con E-views que las realiza dentro de los supuestos de un modelo GARCH “tradicional”.

La Serie del Fríjol

Aparentemente, la serie parece presentar reversión a la media, sin embargo, en el último periodo los precios aumentan por encima de los máximos que había alcanzado anteriormente.

El auto-correlograma y el auto-correlograma parcial muestran que el proceso, aparentemente es un proceso ARMA.

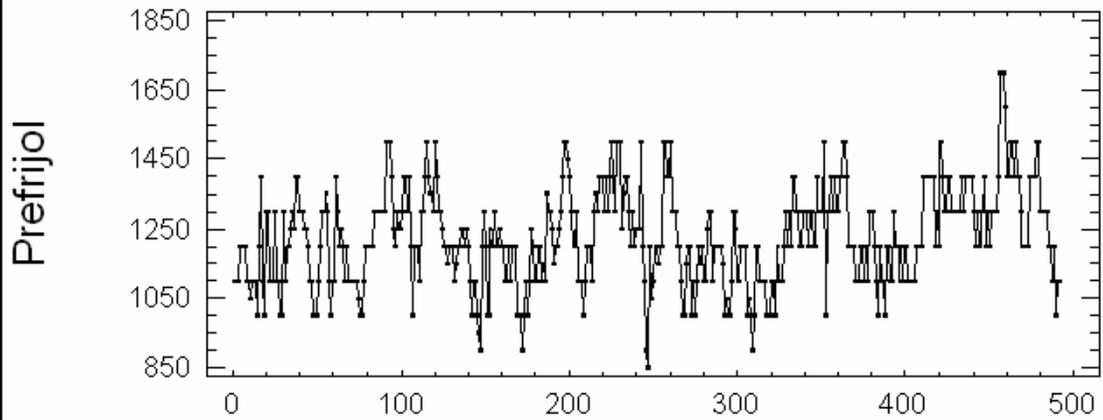
Con el fin de determinar si el proceso es estacionario o no, realizamos pruebas de raíces unitarias. La prueba ADF (Augmented Dickey-Fuller) indica que el proceso se comporta como un paseo aleatorio sin intercepto. La prueba de Phillips-Perron (PP) lleva a la misma conclusión.

La prueba KPSS indica rechazar la hipótesis de estacionaridad a favor de la hipótesis de una raíz unitaria (con intercepto) para un nivel del 10%.

PRECIOS DIARIOS FRIJOL

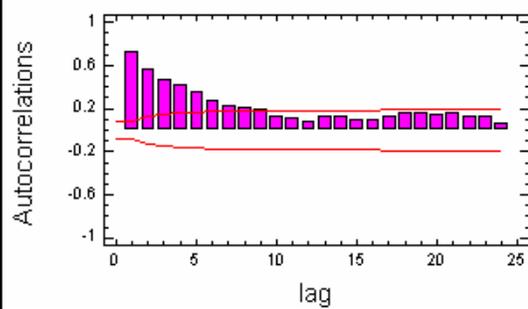
Grafico de los Precios

Time Series Plot for Prefrijol



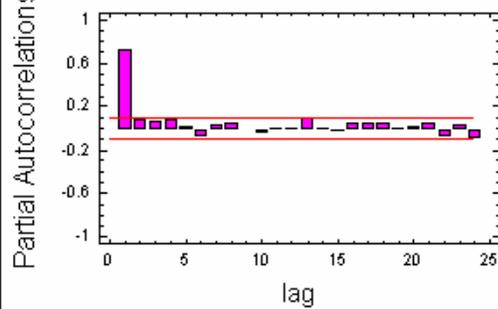
Autocorrelograma

Estimated Autocorrelations for Prefrijol



Autocorrelograma Parcial

Estimated Partial Autocorrelations for Prefrijol



Precios diarios del Frijol desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

PRECIOS DIARIOS DEL FRIJOL				
<i>Prueba Raices Unitarias</i>				
Null Hypothesis: Frij has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=17)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-8.735666	0
Test critical values:	1% level		-3.443469	
	5% level		-2.867219	
	10% level		-2.569857	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 08/17/07 Time: 09:27				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.27046	0.03096	-8.735666	0
C	331.9481	38.24417	8.679705	0
Null Hypothesis: Frij has a unit root				
Exogenous: None				
Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=17)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-0.583419	0.4644
Test critical values:	1% level		-2.569719	
	5% level		-1.941475	
	10% level		-1.616263	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 08/17/07 Time: 09:32				
Sample (adjusted): 5 491				
Included observations: 487 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.00211	0.003617	-0.583419	0.5599
D(SER01(-1))	-0.264211	0.044986	-5.873237	0
D(SER01(-2))	-0.204689	0.045616	-4.487236	0
D(SER01(-3))	-0.149602	0.045137	-3.314428	0.001
Precios diarios del Frijol desde 01 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

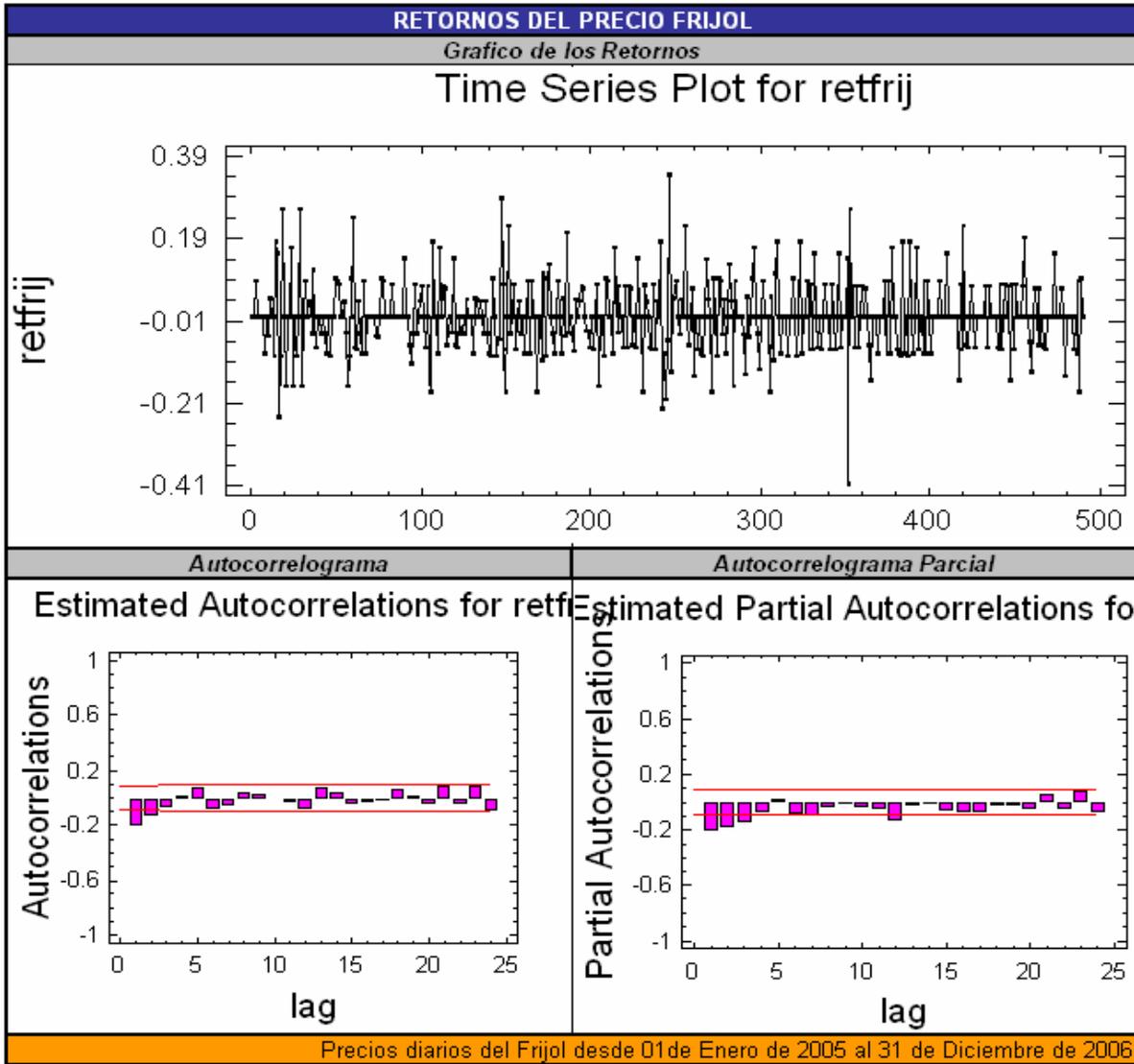
PRECIOS DIARIOS DEL FRIJOL				
Prueba Raices Unitarias				
Null Hypothesis: Frij has a unit root				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 10 (Newey-West using Bartlett kernel)				
			Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic			-9.087369	0
Test critical values: 1% level			-3.443469	
5% level			-2.867219	
10% level			-2.569857	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Residual variance (no correction)				9115.382
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				10134.28
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 08/17/07 Time: 09:41				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.27046	0.03096	-8.735666	0
C	331.9481	38.24417	8.679705	0
Null Hypothesis: Frij has a unit root				
Exogenous: None				
Bandwidth: 12 (Newey-West using Bartlett kernel)				
			Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic			-0.481849	0.5069
Test critical values: 1% level			-2.56969	
5% level			-1.941471	
10% level			-1.616265	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Residual variance (no correction)				10522.61
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				2877.121
Phillips-Perron Test Equation				
Dependent Variable: D(SER01)				
Method: Least Squares				
Date: 08/17/07 Time: 09:39				
Sample (adjusted): 2 491				
Included observations: 490 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
SER01(-1)	-0.003454	0.003755	-0.919768	0.3581
SER01(-1)	-0.003454	0.003755	-0.919768	0.3581
Precios diarios del Frijol desde 01 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

PRECIOS DIARIOS DEL FRIJOL				
Prueba Raíces Unitarias				
Null Hypothesis: Frij is stationary				
Exogenous: Constant				
Bandwidth: 15 (Newey-West using Bartlett kernel)				
				LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic				0.418495
Asymptotic critical values:				
	1% level			0.739
	5% level			0.463
	10% level			0.347
*Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, Table 1)				
Residual variance (no correction)				19480.11
HAC corrected variance (Bartlett kernel)				127130.5
KPSS Test Equation				
Dependent Variable: SER01				
Method: Least Squares				
Date: 08/17/07 Time: 09:45				
Sample: 1 491				
Included observations: 491				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1227.088	6.305183	194.6157	0
Precios diarios del Frijol desde 01 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006				

La Serie de los Retornos del precio del Frijol

El auto-correlograma muestra auto-correlación significativa y de signo negativo, en los rezagos (lags) de orden 1 y 2.

El auto-correlograma parcial muestra auto-correlación parcial representativa y de signo negativo, en los rezagos de orden 1, 2, 3, 6, 7 y 12.

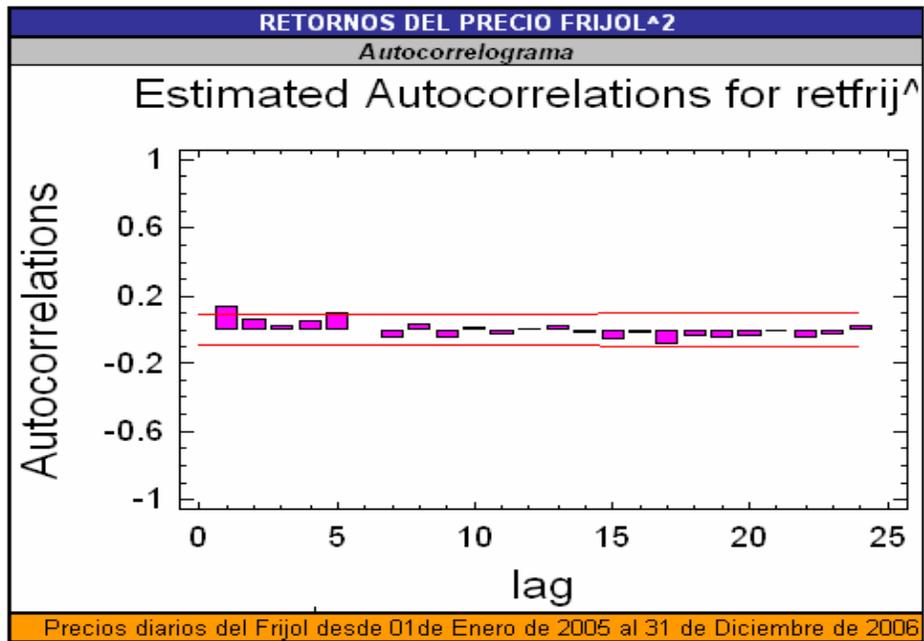


RETORNOS DEL PRECIO FRIJOL										
Autocorrelograma					Autocorrelograma Parcial					
Estimated	Autocorrelations for			retfrij		Estimated	Partial	Autocorrelations for		
Lag	Autocorrelation	Std.Error	Lower 95% Prob. Limit	Upper 95% Prob. Limit	Lag	Partial Autocorrelation	Std.Error	Lower 95% Prob. Limit	Upper 95% Prob. Limit	
1	-0.2067110	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	1	-0.2067110	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
2	-0.1328610	0.0470661	-0.0922481	0.0922481	2	-0.1934280	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
3	-0.0687217	0.0478254	-0.0937363	0.0937363	3	-0.1504110	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
4	0.0057120	0.0480265	-0.0941304	0.0941304	4	-0.0811229	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
5	0.0683461	0.0480279	-0.0941332	0.0941332	5	0.0155002	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
6	-0.0820265	0.0482260	-0.0945214	0.0945214	6	-0.0889983	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
7	-0.0619293	0.0485099	-0.0950778	0.0950778	7	-0.1053300	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
8	0.0314406	0.0486710	-0.0953935	0.0953935	8	-0.0369704	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
9	0.0284972	0.0487124	-0.0954747	0.0954747	9	-0.0192058	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
10	-0.0158496	0.0487464	-0.0955414	0.0955414	10	-0.0409036	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
11	-0.0385478	0.0487569	-0.0955620	0.0955620	11	-0.0542209	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
12	-0.0880778	0.0488191	-0.0956838	0.0956838	12	-0.1376230	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
13	0.0681901	0.0491423	-0.0963174	0.0963174	13	-0.0334873	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
14	0.0372243	0.0493350	-0.0966951	0.0966951	14	-0.0141869	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
15	-0.0472465	0.0493923	-0.0968074	0.0968074	15	-0.0662027	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
16	-0.0318495	0.0494845	-0.0969880	0.0969880	16	-0.0709414	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
17	-0.0173378	0.0495263	-0.0970699	0.0970699	17	-0.0784616	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
18	0.0619640	0.0495387	-0.0970942	0.0970942	18	-0.0254122	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
19	0.0103695	0.0496966	-0.0974037	0.0974037	19	-0.0276895	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
20	-0.0477149	0.0497010	-0.0974124	0.0974124	20	-0.0584961	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
21	0.0835017	0.0497944	-0.0975954	0.0975954	21	0.0555870	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
22	-0.0450637	0.0500794	-0.0981539	0.0981539	22	-0.0514578	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
23	0.0914309	0.0501621	-0.0983160	0.0983160	23	0.0704057	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	
24	-0.1052100	0.0505010	-0.0989804	0.0989804	24	-0.0826121	0.0451754	-0.0885423	0.0885423	

Precios diarios del Frijol desde 01 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

La serie de los cuadrados de los retornos del frijol presenta auto-correlación significativa en los retardos de orden 1 y 5, lo que indica efectos GARCH.

A diferencia de la serie de la papa, que es fácilmente modelable en media, la serie del frijol no lo es. Aún, incluyendo, efectos GARCH, el mejor modelo no da cuenta de toda la auto-correlación y los efectos de heterocedasticidad condicional.



Cuando se incluyen la varianza, la desviación estándar o el logaritmo de la varianza, la situación no mejora. Esta situación tampoco cambia si asumimos que la distribución de los residuales es una *t de student* o una distribución de error generalizada.

RETORNOS DEL PRECIO FRIJOL^2				
Autocorrelograma				
Estimated Autocorrelations for retfrij^2				
Lag	Autocorrelation	Std. Error	Lower 95.0% Prob. Limit	Upper 95.0% Prob. Limit
1	0.1361160	0.0451754	-0.0885423	0.0885423
2	0.0637189	0.0460048	-0.0901679	0.0901679
3	0.0191020	0.0461845	-0.0905202	0.0905202
4	0.0557618	0.0462007	-0.0905518	0.0905518
5	0.0975916	0.0463378	-0.0908206	0.0908206
6	-0.0059895	0.0467554	-0.0916390	0.0916390
7	-0.0549992	0.0467569	-0.0916421	0.0916421
8	0.0358010	0.0468888	-0.0919005	0.0919005
9	-0.0501045	0.0469445	-0.0920098	0.0920098
10	0.0148668	0.0470536	-0.0922234	0.0922234
11	-0.0345061	0.0470631	-0.0922422	0.0922422
12	0.0040100	0.0471147	-0.0923434	0.0923434
13	0.0230259	0.0471154	-0.0923447	0.0923447
14	-0.0201926	0.0471384	-0.0923897	0.0923897
15	-0.0631848	0.0471560	-0.0924243	0.0924243
16	-0.0188708	0.0473285	-0.0927624	0.0927624
17	-0.0858518	0.0473439	-0.0927924	0.0927924
18	-0.0429944	0.0476605	-0.0934131	0.0934131
19	-0.0556741	0.0477396	-0.0935681	0.0935681
20	-0.0425111	0.0478719	-0.0938274	0.0938274
21	0.0022041	0.0479489	-0.0939783	0.0939783
22	-0.0499917	0.0479491	-0.0939787	0.0939787
23	-0.0368963	0.0480554	-0.0941870	0.0941870
24	0.0232531	0.0481131	-0.0943002	0.0943002

Precios diarios del Frijol desde 03 de Enero de 2005 al 31 de Diciembre de 2006

2.2. Metodología para la Estimación de los Parámetros de las Series

Para la estimación de los parámetros del modelo a partir de los datos de las series, se calculó la función de máxima verosimilitud, bajo el supuesto de normalidad de los residuales y se programó en Matlab.

La función de máxima verosimilitud, en su versión logarítmica está dada por:

$$L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k - \mu)^2 \quad (53)$$

Donde,

$$h_k = \omega + \beta h_{k-1} + \alpha (z_{k-1} - \gamma \sqrt{h_{k-1}})^2 \quad (54).$$

Cuando la serie de los retornos presenta auto-correlación en la media, esta debe tenerse en cuenta para el cálculo de cada $z(k)$.

Luego de que L se creó como una función de Matlab, se diseñó un programa que prepara la serie y utiliza a L para estimar los parámetros del modelo de Heston-Nandi.

El programa usa la función FMINSEARCH, que implementa una minimización no lineal, global con el algoritmo de Nelder-Mead.

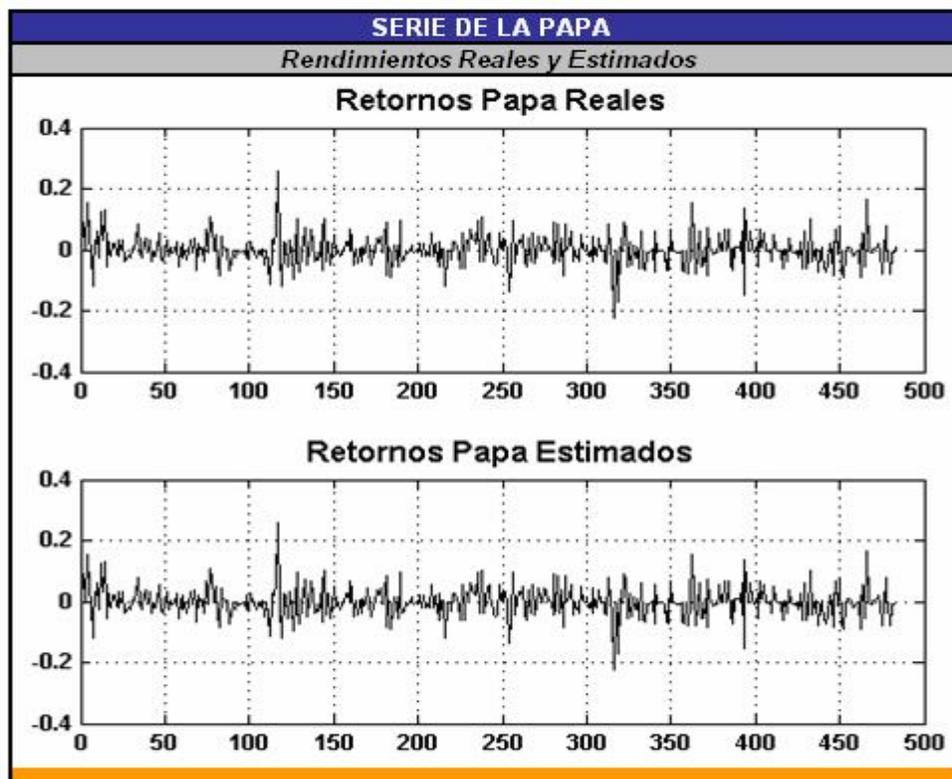
3. Resultados

3.1. Resultados para la Serie de la Papa

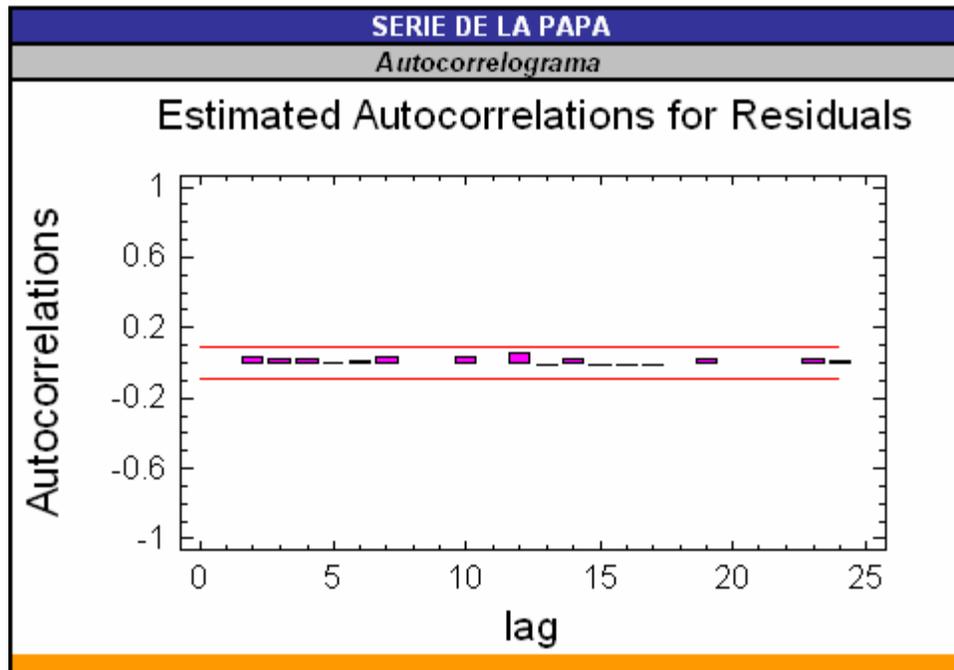
Al aplicar el algoritmo de estimación de los parámetros a los retornos de la papa, obtuvimos los siguientes estimadores:

$r = 0.0001$, $\lambda = 0.3337$, $\omega = 0.0015$, $\beta = -0.0121$, $\alpha = -0.0004$ y $\gamma = 0.1005$.

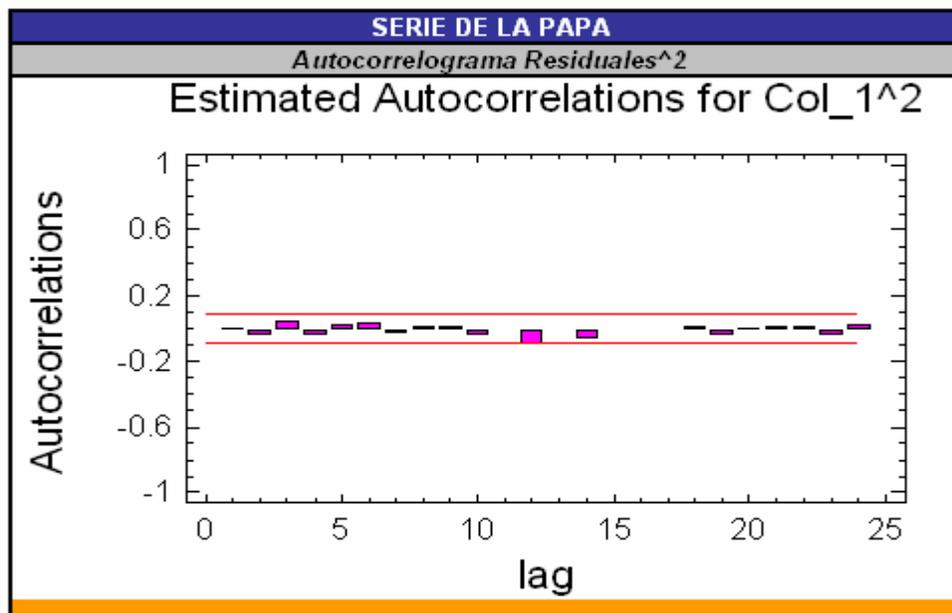
La siguiente gráfica muestra los rendimientos reales, despojados de su media, con los rendimientos estimados a partir de estos parámetros:



El auto-correlograma de los residuales muestra que son ruido blanco, en términos prácticos.



El auto-correlograma de los cuadrados de los residuales muestra que, salvo por el lag de orden 12, no hay efectos GARCH en los residuales. Esto se podría deber a algún efecto estacional que el modelo no puede incluir. Esto se deja para un estudio posterior.

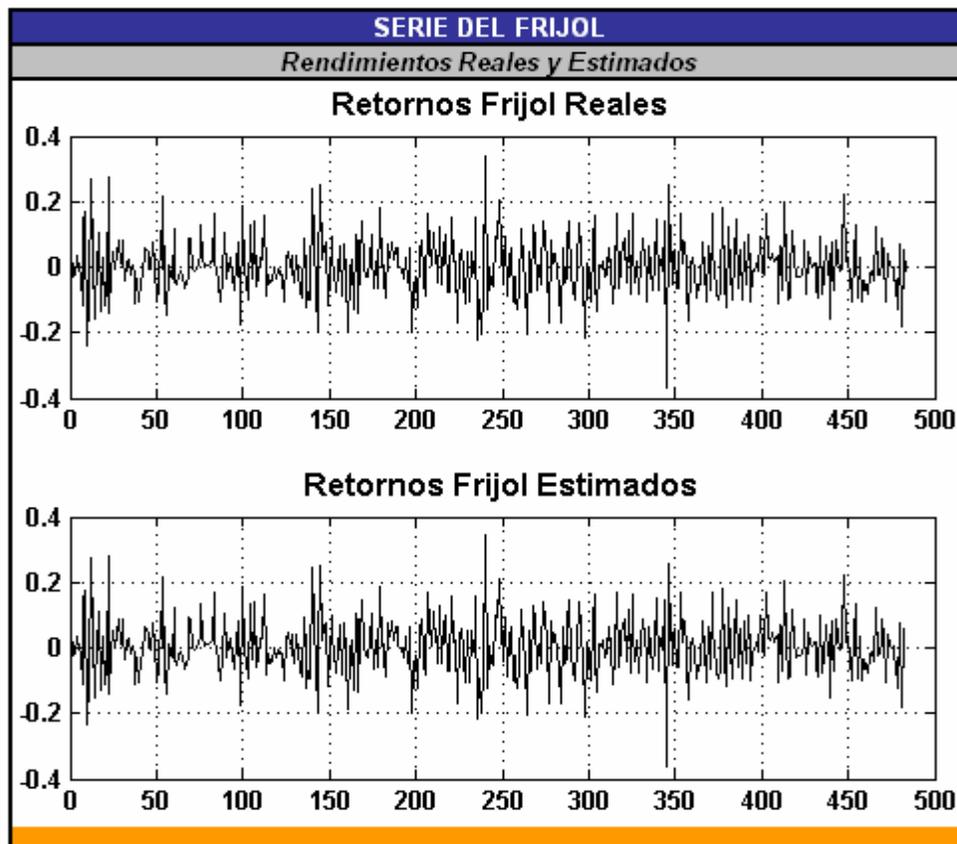


3.2 Resultados para la Serie del Fríjol

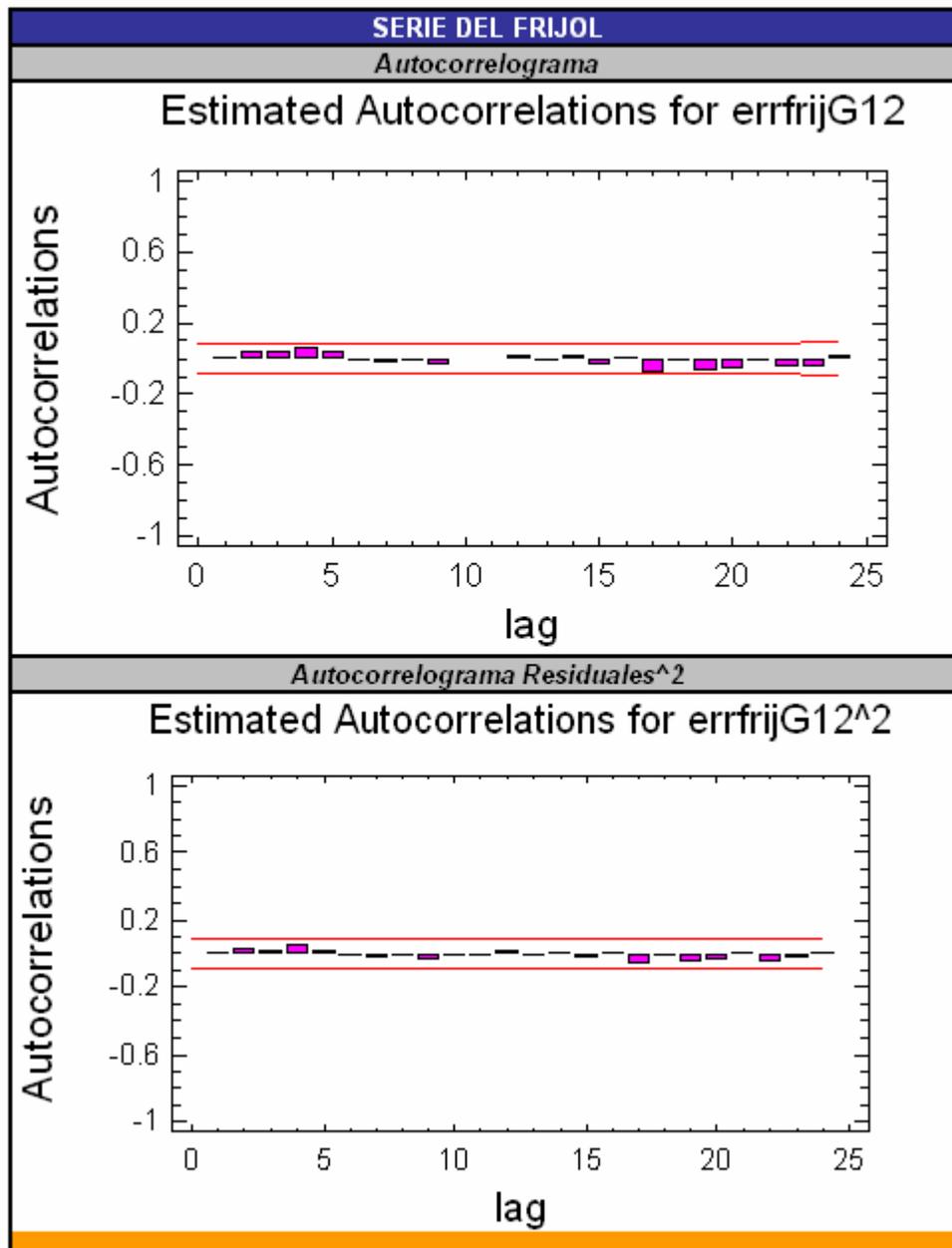
Al aplicar el algoritmo de estimación de los parámetros a los retornos del fríjol, obtuvimos los siguientes estimadores:

$r = 0.0000$, $\lambda = 1.6294$, $\omega = 0.0064$, $\beta = 0.0057$, $\alpha = 0.0008$ y $\gamma = 0.0472$.

La siguiente gráfica muestra los rendimientos reales con los rendimientos estimados a partir de estos parámetros:



Los correlogramas de los residuales y los cuadrados de los residuales muestran que el modelo da cuenta de los efectos de auto-correlación y efectos GARCH.



3.3. Cálculo de los Valores de las Opciones

Dado que $f(i\Phi)$ es la función característica del logaritmo del precio spot, es posible calcular el valor esperado necesario para el precio de la opción, por medio de la propiedad de inversión. Ahora, el valor esperado se calcula con el proceso neutral con respecto al riesgo. Como hemos visto anteriormente, esto se realiza, simplemente haciendo

$$\lambda^* = -\frac{1}{2} \text{ y } \gamma^* = \gamma + \lambda + \frac{1}{2}.$$

De acá obtenemos

$$c = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_t^* [\max(S_t - X, 0)] = \frac{1}{2} S_t + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{X^{-i\Phi} f^*(i\Phi + 1)}{i\Phi} \right] d\Phi - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{X^{-i\Phi} f^*(i\Phi + 1)}{i\Phi} \right] d\Phi \right) \quad (55)$$

Donde $f^*(\Phi)$ es la función generatriz de momentos, condicional bajo el proceso neutral.

La ecuación (55) es fácilmente implementable en Matlab, usando la función FFT, que usa la transformada rápida de Fourier, para el cálculo.

4. Implementación en el Mercado Colombiano.

Aunque el propósito de la investigación era divulgar e implementar una herramienta útil para la valoración de derivados sobre productos agropecuarios, casi al final esta nos enteramos de un paper por Dotsis y Markellos (2006) donde aseveran que la estimación máximo-verosímil del modelo de Heston-Nandi arroja estimadores que tienen sesgos substanciales y que estimadores mejorados se pueden obtener cuando se tienen valores de los derivados en el mercado.

Esto implica que para obtener mejores estimadores necesitamos esperar a que en el mercado colombiano se hayan comenzado a transar los derivados. Para ese entonces esperamos tener nuestros algoritmos y programas más desarrollados y maduros.

5. Extensiones para Futuros Estudios

El trabajo incluyó estimación de parámetros de un modelo del tipo Heston-Nandi-GARCH(1,1). El modelo se puede extender a modelos Heston-Nandi-GARCH(p,q).

Bibliografía

ANIF-DECEVAL. (2006a). *Mercado de capitales*. Boletín ENFOQUE, Edición 3 Mayo 11.

ANIF-DECEVAL. (2006b). *Mercado de capitales*. Boletín ENFOQUE, Edición 4 Junio 12.

BACHELIER, Louis. (1900), *Théorie de la Spéculation*. Annales de l'Ecole Normale Supérieure 17, pp. 21-86.

BAHRA, B. (1997). *Implied Risk-Neutral probability density functions from option prices: Theory and application*. Working paper, Bank of England.

BATES, D. (1996). *Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutschemark options*. Journal of Financial Studies 9, pp. 69-108.

BLACK, F. y SCHOLES, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy 81, pp. 637-659.

BOLLERSLEV, T, ENGLE, R Y NELSON, D. (1994) *ARCH models*. The Handbook of Econometrics 4, Capítulo 11.

BYSTROM, Hans. (2000). *Stochastic Volatility and Pricing bias in the Swedish OMX-Index Call Option Market*. Lund University: Suecia.

CÀRCAMO C, Ulises y ARBELÀEZ, L, Javier (2007). *Derivados Financieros en el Sector Agropecuario en Colombia: Informe de Investigación*. Universidad EAFIT.

CASTELLANOS, E. y BELTRAN, R. (2002). *Modelaje de precios del aceite de palma como mecanismo de cobertura de riesgo*. Universidad de los Andes.

CHEN, An Sing, y LEUNG, Mark. (2005). *Modeling time series information into option prices: An empirical evaluation of statistical projection and GARCH option pricing model*. Journal of Banking and Finance 29, pp. 2947-2969.

CHRISTOFFERSEN, Peter y JACOBS, Kris. (2002). *Which Volatility Model for Option Valuation?*. CIRANO 33.

CLASSENS, Stijn, KNEAFSEY, Devin y KRONER, Kenneth. (1993). *Forecasting commodity markets*. World Bank 1226.

CORRADO, C y SU, T. (1997). *Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P 500 index option prices*. Journal of Derivatives 4, pp.8-19.

CORRADO, C. (2001). *Option pricing based on the generalized lambda distribution*. Journal of Futures Markets 21, pp. 213-236.

DOTSIS, G y MARKELLOS, R (2006). The finite sample properties of the GARCH option pricing model. Journal of Futures Markets. Vol 27, Issue 6. pages 599-615.

GEMAN, Helyette. (2005). *Commodities and commodity derivatives, modeling and pricing for agriculturals, metals and energy*. West Sussex: John Wiley & Sons, Inc.

GUIDA, Tony y MATRINGE, Olivier. (2004). *Application of GARCH models in forecasting the volatility of agricultural commodities*. Université de Savoie y UNCTAD.

HESTON, Steven, y NANDI, Saikat. (2000). *A closed form GARCH Option Valuation Model*. The Review of Financial Studies 13, 3. pp 585-625

HESTON, Steven. (1993). *A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies 6, pp. 327-343.

HULL, John. (1996). *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Madrid: Prentice Hall.

HULL, John. (2006). *Options, futures and other derivatives*. New Jersey: Pearson-Prentice Hall.

HULL, John y WHITE, Alan. (1996). *Hull-White on derivatives, a compilation of articles*. Londres: Riskbooks.

HULL, John y WHITE, Alan. (1987). *The pricing of options with stochastic volatilities*. Journal of Finance 42, pp. 281-300.

ICC (Consejo Internacional del Café). (2005). *La volatilidad de los precios del café*. ICC 94, 5.

JONDEAU, E y ROCKINGER, M. (2001). *Gram-Charlier densities*. Journal of Economic Dynamics & Control 25, pp. 1457-1483.

JONDEAU, E y ROCKINGER, M. (2002). *Entropy densities with an application to autoregressive conditional skewness and kurtosis*. Journal of Econometrics 106, pp. 116-142.

LENCE, Sergio y HAYES, Dermont. (2002) .*Option pricing on renewable commodity markets*. Center for Agricultural and Rural Development Iowa.

LIM, G, MARTIN, G. y MARTIN, V. (2000). *Option pricing with generalized distributional forms*. Working paper, University of Melbourne.

LUTKEPOHL, Helmut y KRATZING, Markus. (2004). *Applied Time Series Econometrics*. West Sussex: Cambridge.

MERTON, R. (1976). *Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics 4, pp.125-144.

PRIETO, Ana. (2004). *Modelización del spot y valoración de futuros del gas natural*. Universidad Complutense de Madrid: Doctorado en Finanzas Cuantitativas.

RUBINSTEIN, M, (1994). *Implied binomial trees*. Journal of Finance 49, pp. 771-818.

TSAY, Ruey S. (2002). *Analysis of financial time series*. New York: John Wiley & Sons, Inc.