



## **Análisis de técnicas Wavelet para el desarrollo de compresores de audio**

Laura Victoria Medina Sánchez

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
MEDELLÍN  
2017

# **Análisis de técnicas Wavelet para el desarrollo de compresores de audio**

Laura Victoria Medina Sánchez

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el título de Magíster en  
Matemáticas Aplicadas

Director

Jairo Villegas Gutiérrez

UNIVERSIDAD EAFIT  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
MEDELLÍN  
2017

---

## Agradecimientos

---

Agradezco a mi familia por su constante motivación, a mi madre por su confianza y apoyo incondicional brindado en todo momento, a mi director Jairo Villegas por su sabiduría y conocimiento tanto en el aula de clase como en el campo investigativo, así como al director Fredy Marín y todos los profesores de la maestría en Matemáticas Aplicadas, que me proporcionaron valioso métodos y enseñanzas en mi formación profesional. A la Universidad EAFIT de Medellín por la apertura, movilidad y fechas ofrecidas especiales para los estudiantes que vivimos fuera de la ciudad de Medellín.

---

## Índice general

---

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>X</b>
<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>OBJETIVO ESPECÍFICO.....</b>	<b>XIII</b>
<b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>JUSTIFICACIÓN.....</b>	<b>XIV</b>
<b>CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DE DESCOMPOSICIÓN DE SEÑALES.....</b>	<b>16</b>
<b>1.1. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE SEÑALES.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2. ESPACIOS ALGEBRAICOS.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3. SERIES DE FOURIER.....</b>	<b>19</b>
<b>1.4. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE SEÑALES.....</b>	<b>24</b>
<i>1.4.1. Señal periódica continua.....</i>	<i>25</i>
<i>1.4.2. Señal periódica discreta.....</i>	<i>26</i>
<b>CAPÍTULO 2. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y TRANSFORMADA WAVELET ..</b>	<b>28</b>
<b>2.1. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.....</b>	<b>28</b>
<i>2.1.1. Propiedades de DFT e IDFT.....</i>	<i>29</i>
<i>2.1.2. Operador de translación, de rotación, y reflexión conjugada.....</i>	<i>30</i>
<i>2.1.3. Transformada rápida de Fourier (FFT).....</i>	<i>31</i>
<b>2.2. TRANSFORMADA WAVELET.....</b>	<b>33</b>
<i>2.2.1. La Transformada Continua Wavelet.....</i>	<i>33</i>
<i>2.2.2. Propiedades de CWT.....</i>	<i>36</i>
<i>2.2.3. CWT inversa.....</i>	<i>38</i>
<i>2.2.4. Transformada Wavelet discreta.....</i>	<i>38</i>
<i>2.2.5. Banco de filtros Wavelet.....</i>	<i>43</i>
<i>2.2.6. Función Madre.....</i>	<i>44</i>
<i>2.2.7. Selección de la onduleta.....</i>	<i>48</i>
<b>CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE NIVELES WAVELET.....</b>	<b>51</b>

<b>3.1. PRINCIPIO BÁSICO .....</b>	<b>51</b>
<b>3.2. WAVELETS DE PRIMER NIVEL .....</b>	<b>53</b>
<b>3.3. WAVELETS EN NIVEL-P.....</b>	<b>58</b>
<b>3.4. BASE WAVELET .....</b>	<b>60</b>
<b>3.5. WAVELETS ESPECIALES EN EL ESPACIO <math>l^2(Z_N)</math> .....</b>	<b>62</b>
3.5.1. Base de Haar .....	62
3.5.2. Base de Shannon.....	65
3.5.3. Wavelets Daubechies D2P.....	67
<b>CAPÍTULO 4. OBTENCIÓN Y EVALUACIÓN DEL CODIFICADOR WAVELET .....</b>	<b>71</b>
<b>4.1. DISEÑO DEL CODIFICADOR PERCEPTUAL DE AUDIO BASADO EN LA TRANSFORMADA WAVELET .....</b>	<b>71</b>
4.1.1. Principios Psicoacústicos del Codificador Perceptual.....	73
4.1.2. Codificación Perceptual de Audio.....	74
<b>4.2. COMPARACIÓN DEL RENDIMIENTO DE LOS DISTINTOS TIPOS DE WAVELET .....</b>	<b>78</b>
4.2.1. Relación señal-a-ruido (Signal to noise ratio-SNR).....	78
4.2.2. Valor pico de la relación señal-ruido (Peak signal to noise ratio –PSNR).....	78
4.2.3. Valor del error normalizado de RMS (Normalized Root Mean Square Error - NRMSE) .....	79
4.2.4. Energía de la Señal Retenida (Retained signal energy –RSE).....	79
<b>4.3. TESTS SUBJETIVOS PARA DETERMINAR LA CALIDAD DEL CÓDEC, DEPENDIENDO DE LA TÉCNICA DE LA TRANSFORMADA WAVELET EVALUADA .....</b>	<b>88</b>
4.3.1. Test subjetivo de comparación de codificadores convencionales con el codificador basado en la transformada Wavelet-Daubechies Tipo 7, con 8 niveles de descomposición.....	90
4.3.2. Instrucciones introductorias del Administrador, antes del test.....	91
4.3.3. Valores subjetivos.....	92
4.3.4. Conclusiones del experimento .....	92
<b>RECOMENDACIONES .....</b>	<b>94</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>95</b>
<b>ANEXO 1. CÓDIGO DEL CODIFICADOR DISEÑADO EN MATLAB .....</b>	<b>97</b>

---

## Lista de Figuras

---

Figura 1. Diagrama de bloques del codificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1].....	XI
Figura 2. Representación de la expresión de Euler $e^{j2\pi fct} = \cos(2\pi fct) + j\sin(2\pi fct)$ . Adaptado de [20].....	17
Figura 3. Concepto de Bases ortonormales. Adaptado de [20] .....	18
Figura 4. Proyección del vector en su base ortonormal. Adaptado de [20].....	18
Figura 5. Distribución tiempo-frecuencia de la Transformada Wavelet; el ancho en el eje respectivo, está determinado por $\sigma t, \sigma w$ . Fuente: [27].....	35
Figura 6. Explicación DWT como una implementación de filtros FIR digitales [28] .....	40
Figura 7. Celda-rejilla dual en espacio tiempo-escala [27] .....	41
Figura 8. Detalle del procedimiento de descomposición en árbol. HP denota un filtro paso–alto y LP denota un filtro paso–bajo. Adaptado de [29] .....	43
Figura 9. Ejemplo de descomposición en árbol de la estructura Wavelet [17] .....	44
Figura 10. En la izquierda, la onduleta de sombrero mexicano, y en la parte derecha, la onduleta de Morlet, (parte imaginaria, en puntos). [27] .....	45
Figura 11. Onduleta de Meyer. referencia.[27] .....	46
Figura 12. Filtros de convolución para la onduleta de Meyer [27] .....	46
Figura 13. Onduleta de Haar, Onduleta de Daubechies2 [27].....	47
Figura 14. Filtros de convolución para la onduleta Daubechies2. [27].....	47
Figura 15. Explicación de regiones temporales/frecuenciales variables en la Transformada de Wavelet. [27].....	49
Figura 16. Filtros de análisis y de síntesis en la DWT. Adaptado de [30] .....	50
Figura 17. Descomposición Wavelet.[30].....	52
Figura 18. Explicación de descomposición Wavelet, con filtros recursivos paso-bajo, paso-alto. [30] .....	52
Figura 19. Representación frecuencial de la descomposición de Wavelets. [30].....	53
Figura 20. Principio de análisis y síntesis Wavelet. Adaptado de [30] .....	58
Figura 21. Wavelets Haar, $N = 8$ . Adaptado de [27] .....	65

Figura 22. Base de Shannon. [27] .....	67
Figura 23. Wavelets de Daubechies, D6, N=16. [27].....	70
Figura 24. Diseño del codificador perceptual de audio con la Transformada Wavelet. Fuente: Autor .....	71
Figura 25. a) Enmascaramiento frecuencial y b) Enmascaramiento temporal. Adaptado de [1] .....	74
Figura 26. Diagrama de bloques del codificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1]....	75
Figura 27. Diagrama de bloques del decodificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1]	77
Figura 28. Estructura de DBTS. [32] .....	89
Figura 29. Método de testeo DBTS .[32] .....	91
Figura 30. Resultados de evaluaciones subjetivas entre los codificadores. Fuente: Autor. ....	92

---

## Lista de tablas

---

Tabla 1. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo Daubechies, con cinco niveles de descomposición .....	80
Tabla 2. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo coif y sym, con cinco niveles de descomposición .....	81
Tabla 3. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo dmey, bior y rbio, con cinco niveles de descomposición .....	82
Tabla 4. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo daubechies, con tres niveles de descomposición .....	83
Tabla 5. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo coif y sym, con tres niveles de descomposición .....	84
Tabla 6. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo dmey, bior y rbio, con tres niveles de descomposición .....	85
Tabla 7. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo daubechies, con ocho niveles de descomposición .....	86
Tabla 8. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo coif y sym, con ocho niveles de descomposición .....	87

Tabla 9. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo dmay, bior y rbio, con ocho niveles de descomposición .....	87
Tabla 10. Escala de 5-puntos ITU [36] .....	89
Tabla 11. Secuencias musicales usadas en la evaluación subjetiva del codificador. Fuente: Autor .	90

---

## Introducción

---

El presente proyecto es una investigación acerca de métodos matemáticos adecuados para la descomposición de señales sonoras, con el objetivo de obtener una representación ortogonal que sea menos pesada en términos del volumen informático de la señal. Los métodos convencionales de representación de señales de audio/imagen/video, están basados en la representación de Fourier –una representación ideada por el famoso matemático francés Jean Baptiste Fourier, a principios del siglo XIX. En ésta, cada señal/sucesión/vector está ligado, a través de unos valores de coeficientes, a un conjunto de funciones base, que conforman un espacio lineal vectorial. De esta manera, es posible generar todos los elementos de este mencionado espacio, desarrollando combinaciones lineales del espacio generador.

En este caso, la aplicación concreta es compresión de audio, a la manera MP3. El estándar MPEG/Audio, es un estándar, tanto de transmisión como de grabación, con tasas de compresión específica. El algoritmo MPEG realiza compresión, explotando las limitaciones perceptuales del oído humano. El objetivo es representar a la señal con el mínimo número de bits, para obtener una reproducción de señal transparente. La mayoría de codificadores MPEG1, aplican un modelo psicoacústico, usando bancos de filtros para aproximar las características selectivas del oído humano.

El presente proyecto está motivado por la necesidad de crear un dispositivo eficiente y de bajo costo para la compresión de señales de audio. Los sistemas de compresión de audio actuales, realizan este proceso con técnicas basadas en el análisis convencional de Fourier (transformada de Fourier) que realiza un mapeo entre los valores psicoacústicos y su respectiva descripción en frecuencia y reduce la información del archivo al desechar la que no es perceptible por el oído humano en base a los modelos psicoacústicos, sin embargo, esta transformada no se traduce en un ahorro significativo del contenido de la señal, este es el objetivo principal en el desarrollo de éste tipo de compresores con otras transformadas, determinar una manera innovadora para realizar este análisis de señales de audio, con técnicas no–convencionales, como por ejemplo la transformada Wavelet.

El trabajo comienza con la descripción de los fundamentos de descomposición de señales y su representación geométrica y espectral, en el capítulo 2, se define la transformada discreta de Fourier y se describe la principal desventaja de su uso (o la parte real de ésta, la transformada de cosenos discretos), al no tener la posibilidad de una resolución ideal tanto en tiempo como en frecuencia. También se define la transformada continua y discreta Wavelet con su respectiva terminología, se identifica que existen transformadas ortogonales más convenientes para este tipo de análisis, como es el caso de esta transformada, y allí se realiza la selección de la wavelet más adecuada. El capítulo 3 es el estudio de la descripción de niveles Wavelet donde se hace una comparación, de algunos tipos de descomposición Wavelet, al llevar información de una señal de audio determinada, se determina el tipo de Wavelet óptimo, la configuración equivalente de su implementación con filtros digitales y se determina el nivel de descomposición apropiado. Finalmente, en el capítulo 4, se realiza el diseño del codificador perceptual de audio basado en la transformada Wavelet, inicia con el modelo matemático con los nuevos tipos de transformada discreta a utilizar. Se realiza un análisis minucioso de todas las posibles configuraciones de series de Wavelets, y paquetes de Wavelets que pueden significar reducción en la representación de la señal. Este análisis consiste en:

- 1) Determinación del tipo de Wavelet adecuado para una representación comprimida de la señal.
- 2) Determinación del nivel de descomposición del sistema.

Posteriormente se procederá a simulaciones de los compresores modelados y finalmente se realizará la implementación del codificador en un procesador digital de señales. A continuación, se observa el esquema de un compresor de audio convencional.

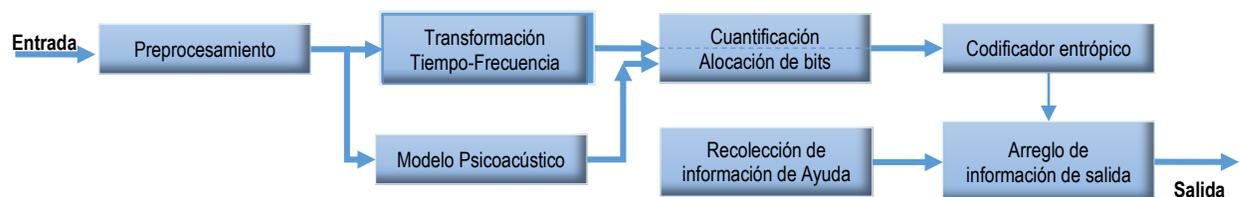


Figura 1. Diagrama de bloques del codificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1]

La idea original es reemplazar el bloque de transformación frecuencial, el cual está conformado por una banca de filtros convencional, con la transformada de Fourier, o transformadas relacionadas, como la DCT (Transformada de Cosenos Discreta).

Por esta razón se planteó el siguiente problema: ¿Qué tipo de transformada Wavelet discreta es la más eficaz en términos de una representación comprimida de la señal de audio?

La transformada Wavelet se utiliza en un gran rango de aplicaciones como: compresión perceptual [2], [3], eliminación de ruido (Denoising) [4], filtrado de señales para electrocardiogramas–ECG y electroencefalogramas–EEG [5], procesamiento de imágenes [6], compresión de imágenes [7], reconocimiento de altura musical (Pitch Tracking) [8], fusión de datos de imagen [9], eliminación de ruido en imágenes [10] y Sincronización de negocios.

---

## Objetivos

---

### Objetivo específico

Determinar el tipo de descomposición de Wavelet adecuado para una representación comprimida de señales de audio.

### Objetivos específicos

- Reconocer los tipos de transformada Wavelet adecuados para realizar sistemas de compresión de audio.
- Determinar el tipo de transformada discreta Wavelet más apropiada para la implementación del codificador de audio.
- Determinar el nivel de descomposición de la Wavelet obtenida.
- Comparar la tasa de bits de los modelos matemáticos de los compresores a evaluar.
- Comparar el tiempo de procesamiento de los modelos matemáticos de los compresores evaluados.
- Diseñar el prototipo del compresor de audio con los modelos matemáticos de la transformada Wavelet a evaluar.
- Medir el comportamiento y confiabilidad práctica de estos modelos.

---

## Justificación

---

La implementación de sistemas de compresión perceptual de audio con mayores tasas de compresión, bajo costo y que a la vez no introduzcan artefactos no deseados de distorsión en la señal, es un objetivo de los desarrolladores de codificadores en el mundo.

El proyecto consiste en diseñar y construir un dispositivo que permita comprimir una señal de audio de tal manera que su flujo de bits resultante sea significativamente disminuido.

A mediados de la década de los 80's, se creó el estándar de compresión MP3 (MPEG 1-Layer 3). Posteriormente la comunidad académica dedicada al audio, ha venido realizando varios proyectos destinados a mejorar, o a conseguir mejores tasas de compresión con costos computacionales mínimos [11].

A principios del presente siglo, algunos institutos de investigación en el mundo, empezaron a implementar dentro de sus esquemas de compresión perceptual, modelos matemáticos avanzados, como la Transformada Wavelet.

De esta manera, modelos híbridos de compresión fueron patentados (modelos con FFT y Wavelets), pero las investigaciones actuales se encaminan a la consecución de un sistema donde sólo se utilice la Transformada Wavelet [12]. Este es el propósito del presente proyecto.

En [13] el trabajo desarrolla la adaptación de un algoritmo para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de la forma  $u_t = \mathcal{L}u + \mathcal{N}f(u)$ , donde  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$  son operadores diferenciales lineales y  $f(u)$  es una función no lineal. Estas ecuaciones son resueltas de una manera adaptativa mediante la proyección de la solución  $u$  y los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$  dentro de una base Wavelet, éste artículo da las bases necesarias para entender los conceptos fundamentales de la transformada Wavelet y sus aplicaciones.

En [3] se comparan diversos esquemas de compresión de audio basados en transformada Wavelet, sobre todo, en las aplicaciones para señales de voz destinadas a su transmisión por anchos de banda limitados. En [14] se presenta un estudio comparativo de técnicas de compresión de audio usando transformadas múltiples, como por ejemplo la transformada de cosenos discretos, la transformada Wavelet, la transformada de paquetes Wavelet [15] y la transformada discreta de paquetes Wavelet de cosenos [16]. Para esta comparación ciertos parámetros son analizados, como la relación señal a ruido –SNR y la energía de la señal retenida –RSE. En [17] se revisa y se resume bibliografía acerca de técnicas de compresión de audio con Wavelet. En [18] se realiza un análisis y comparación de compresión de audio usando la transformada discreta Wavelet aplicándola al procesamiento de señales de voz. En [19] se describe la técnica de codificación estenográfica para comprimir señales de audio con la transformada discreta Wavelet.

# CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS DE DESCOMPOSICIÓN DE SEÑALES

Una señal es denominada continua, cuando los valores de tiempo pertenecen al dominio de los números reales,

$$t \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

y los valores que la señal puede tomar, pertenecen al conjunto de los números complejos,

$$f(t) \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

Por lo tanto, una señal es denominada discreta, cuando los valores de tiempo pertenecen al conjunto de los enteros positivos,

$$n \in \mathbb{Z}^+ \quad (1.3)$$

y los valores que la señal, o mejor, que la secuencia puede tomar, pertenecen al conjunto de los números racionales,

$$f(n) \in \mathbb{Q} \quad (1.4)$$

En el caso de las señales discretas, se puede realizar una descripción geométrica de esta descomposición, con vectores, lo cual indica que el valor de la magnitud del correspondiente vector está asociado con la magnitud de la señal, y su posición en el espacio 2D (en términos del ángulo, con respecto a la horizontal), nos da la información de la fase de la señal.

## 1.1. Representación geométrica de señales

Los científicos dedicados a la ingeniería y a las ciencias naturales exactas, suelen ver las señales expresadas en el dominio del tiempo, o en el dominio de la frecuencia. Existe, sin embargo, una forma más intuitiva de tener esta representación. Esta es, de forma vectorial, es decir vectores multidimensionales. Un ejemplo de esto, es la famosa representación de la expresión de Euler, quién fue un famoso matemático y físico suizo, del siglo XVIII, que realizó importantes contribuciones a la ciencia y a la ingeniería.

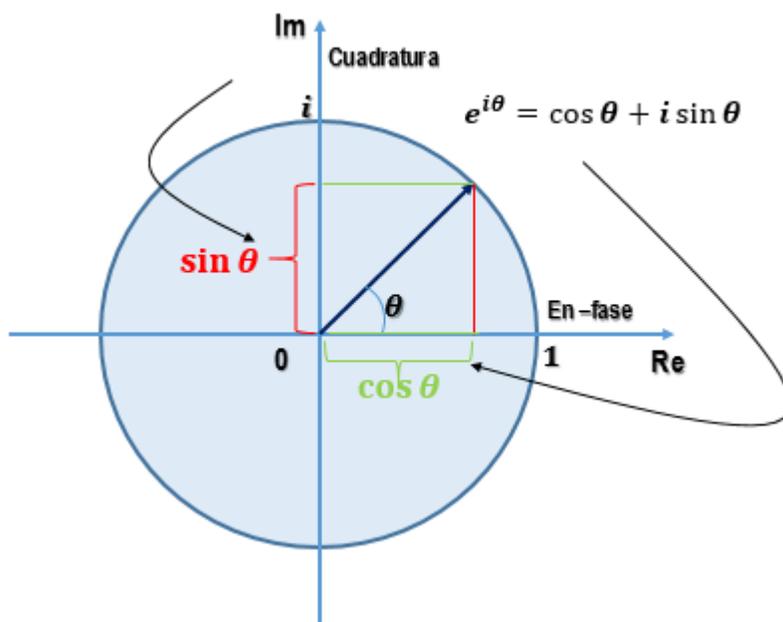


Figura 2. Representación de la expresión de Euler  $e^{j2\pi f_c t} = \cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)$ . Adaptado de [20]

Una señal puede ser expresada, como una suma ponderada. Por lo tanto, una señal consiste de  $M$  señales  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Cada señal puede ser representada por una suma lineal de funciones base.

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \varphi_j(t) \quad i = 1, \dots, M \quad (1.1.1)$$

$$0 \leq t \leq T \quad (1.1.2)$$

Donde  $\varphi_{i,j}$  .... son denominadas funciones bases, del respectivo espacio.

Condiciones de las funciones base: para que la expansión sea posible, las funciones base deben ser ortonormales entre ellas. Matemáticamente expresado:

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t) \rangle = \int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (1.1.3)$$

y de manera geométrica:

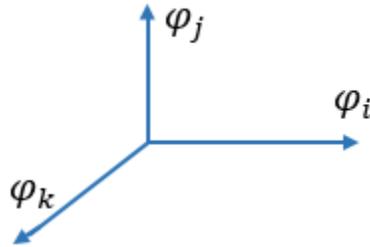


Figura 3. Concepto de Bases ortonormales. Adaptado de [20]

Los componentes del vector correspondiente a la representación gráfica del vector, son  $N$  números que nos dan la proyección de cada señal en las funciones base-individuales:

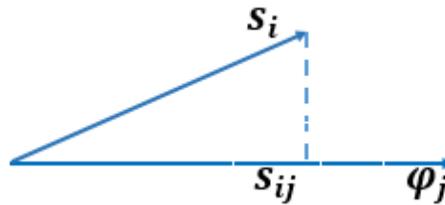


Figura 4. Proyección del vector en su base ortonormal. Adaptado de [20]

El componente  $s_{ij}$  significa la proyección de  $s_i$  en la base ortogonal  $\varphi_j(t)$ .

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\varphi_j(t)dt \quad (1.1.4)$$

La dimensión de una señal expresa, el número de funciones base que se debe emplear para expresarla. Algunas necesitan una función base, otras necesitan un número infinito. El número de dimensiones es  $N$ , y es siempre menor que el número de señales dentro del conjunto,  $N \leq M$ .

Un ejemplo de ello, son las series de Fourier, en donde una señal puede ser expandida como una suma lineal de senos y cosenos de diferentes frecuencias. Los senos y cosenos con período  $T_0$  son las funciones base y son, ortogonales entre ellas.

$$\int_{T_0} \cos(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi m f_0 t) dt = 0, \quad m \neq n \quad (1.1.5)$$

$$f_0 = 1/T_0 \quad (1.1.6)$$

Dos señales son ortogonales, si su producto interno  $\langle s_1, s_2 \rangle$ , es igual a cero, ecuación (1.1.3).

## 1.2. Espacios Algebraicos

*Definición.* Un espacio algebraico vectorial es un conjunto  $R^n$ , compuesto por todos los números reales  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  con operaciones de suma y multiplicación de números reales definidos, por:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad (1.2.1)$$

$$c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n) \quad (1.2.2)$$

A todos los  $c \in \mathbb{R}$ , y para  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , los llamamos espacio algebraico vectorial real. Los componentes de este espacio, es decir los arreglos de  $n$  –números, son los vectores algebraicos. Los números  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , los llamamos los componentes del vector  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . El número  $n$ , lo llamamos la dimensión del espacio  $R^n$ .

## 1.3. Series de Fourier

Para un amplio campo de aplicaciones, dentro de la teoría de señales, es útil aproximar en un intervalo cerrado  $I$ , la dependencia temporal de la señal con la combinación lineal de  $K$  funciones elementales  $\varphi_n(t)$ ,  $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + K - 1$ ,

$$s(t) = \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \varphi_n(t); t \in I \quad (1.3.1)$$

donde la variable  $t$  pertenece al intervalo en cuestión. Por supuesto, que se pretende la aproximación más exacta. Esta aproximación no depende de cuál nivel de similitud se elija. En la teoría de señales, se utiliza la energía de la diferencia de señales y su aproximación. Debido a que ésta depende del número de  $K$  funciones utilizadas, entonces se define como la diferencia entre la energía de la señal y la energía de la aproximación y se denota como  $\Delta E_k$ .

En la consecución de coeficientes  $S_n$ , se tendrá en cuenta el caso, en el que, las funciones  $\varphi_n$ , son en el intervalo de la aproximación, mutuamente ortogonales, es decir que tienen energía mutua igual a cero. El sistema de estas funciones se llamará, un sistema ortogonal. Si además, las funciones  $\varphi_n$ , tienen energía unitaria,  $E_n = 1$  entonces definimos a este sistema ortonormal. El sistema ortonormal nace de un sistema ortogonal que está normalizado  $\varphi_n / \sqrt{E_n}$ .

Señales en el dominio del tiempo: Para un valor  $K$ , que se incrementa al infinito, definimos a la serie

$$s(t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} S_n \varphi_n(t); \quad t \in I \quad (1.3.2)$$

Como la serie de Fourier de la señal  $s(t)$ , de acuerdo con el sistema  $\{\varphi_n(t)\}$ , para el intervalo  $I$  (en lo que sigue, solamente la serie de Fourier). Los coeficientes  $S_n$  son llamados los coeficientes de Fourier.

Convergencia de la serie de Fourier: si se observa el comportamiento de las series de Fourier de la señal energética, se puede plantear las siguientes preguntas, ¿esta serie converge hacia la señal? y ¿si converge hacia la señal, entonces de qué tipo de convergencia se trata?

Estas preguntas, se solucionan con el axioma [21]: “La serie de Fourier de una señal energética converge en el intervalo  $I$ , hacia la señal por el criterio medio, si el sistema de funciones ortogonales es completo”. Un sistema ortogonal completo de funciones  $\{\varphi_n(t)\}$  es un sistema, donde solamente la función cero es ortogonal a todas las demás funciones que componen el sistema en un intervalo determinado. La convergencia de acuerdo con el valor medio, significa:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{t_p}^{t_k} \left| s(t) - \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \varphi_n(t) \right|^2 dt = \lim_{K \rightarrow \infty} \Delta E_k = 0 \quad (1.3.3)$$

De lo anterior, se comprueba que para la señal energética y sus coeficientes en un sistema ortogonal pleno, la ecuación de Parseval se hace válida,

$$\int_{t_p}^{t_k} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=n_0}^{\infty} |S_n|^2 E_n \quad (1.3.4)$$

Es posible, también demostrar que si la serie de Fourier dada, converge con respecto al centro, es decir se aplica el “criterio de convergencia con respecto al centro, o al valor medio” a dos señales  $x(t), y(t)$ , entonces es válido que,

$$\int_{t_p}^{t_k} |x(t) - y(t)|^2 dt = 0 \quad (1.3.5)$$

Debido a que estas señales son físicamente no-diferenciables, entonces las consideramos como iguales, a pesar, de poder ser, en algunos puntos aislados de distinta magnitud.

La convergencia de la serie de Fourier, de acuerdo con el valor medio, no implica, de manera general, su convergencia punto-a-punto, en un intervalo dado. Esta convergencia está asegurada, si tanto la señal, como la función  $\varphi_n(t)$ , son funciones continuas del tiempo.

Generalización del concepto de señal: hasta el momento se ha definido a las señales, con respecto al dominio del tiempo. En el caso del impulso Dirac, son señales que no son descritas con expresiones explícitas temporales, sino con propiedades integrales.

La serie de Fourier converge para las señales energéticas, es decir para las señales con energía finita, en el intervalo  $\langle t_p, t_k \rangle$  [21]. Para cada señal energética existe una sucesión de coeficientes de Fourier, que son descritos por la serie de Fourier. Existe también una sucesión de coeficientes de Fourier, para los cuales la serie de Fourier no converge, y por ello, no se determina la forma temporal de la correspondiente señal, como sí es posible, de la función temporal. Sin embargo, esta forma temporal es descrita por sus propiedades integrales. De la generalización del concepto de la señal se deduce que, dos señales son iguales, si tienen los mismos coeficientes de Fourier [21]. Por ello,

$$s(t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} S_n \varphi_n(t), \quad t \in \langle t_p, t_k \rangle \quad (1.3.6)$$

Al reemplazar la parte derecha de la ecuación, se obtiene,

$$\frac{1}{E_n} \int_{t_p}^{t_k} \varphi_n^*(t) \sum_{k=n_0}^{\infty} S_k \varphi_k(t) dt = \frac{1}{E_n} \sum_{k=n_0}^{\infty} \varphi_n^*(t) \varphi_k(t) dt = S_n \quad (1.3.7)$$

donde  $\varphi_n^*(t)$  es la conjugada compleja de la función  $\varphi_n(t)$ , en otras palabras, la serie de Fourier converge a una señal cualquiera, en el sentido de la convergencia de coeficientes de Fourier.

Señal en el tiempo discreto: la deducción de los coeficientes de la aproximación es análoga al caso de la señal en el dominio del tiempo, y por ello, se aborda de manera corta aquí. Definamos  $k_p$ , el tiempo inicial, y  $k_k$ , el tiempo final del intervalo de la aproximación. Con la selección de los coeficientes  $S_n$ , tenemos que minimizar la expresión,

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \sum_{k=k_p}^{k_k} \left| s(k) - \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \varphi_n(k) \right|^2 = \sum_{k=k_p}^{k_k} \left( s(k) - \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \varphi_n(k) \right) \left( s(k) - \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \varphi_n(k) \right)^* = \\ &= \sum_{k=k_p}^{k_k} |s(k)|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \sum_{k=k_p}^{k_k} \varphi_n(k) s^*(k) \right] + \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} \sum_{k=n_0}^{n_0+K-1} S_k S_n^* \sum_{m=k_p}^{k_k} \varphi_m(k) \varphi_n^*(k) \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

donde  $E$ , es la energía de la aproximación de la señal. Debido a que las funciones  $\varphi_n(k)$  son ortogonales, entonces es válido que,

$$\sum_{k=k_p}^{k_k} \varphi_m(k) \varphi_n^*(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ E_n & \text{para } n = m \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Y la relación para la energía de la diferencia es,

$$\Delta E_k = E - 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} S_n \sum_{k=k_p}^{k_k} \varphi_n(k) s^*(k) \right] + \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} E_n |S_n|^2 \quad (1.3.10)$$

Derivando con respecto a la parte real y a la imaginaria de  $S_n$ , se obtiene que, el mínimo de la energía de la diferencia de la señal y su aproximación se produce, para los coeficientes:

$$S_n = \frac{1}{E_n} \sum_{k=k_p}^{k_k} s(k) \varphi_n^*(k) \quad (1.3.11)$$

y es igual a,

$$\Delta E_k = E - \sum_{n=n_0}^{n_0+K-1} |S_n|^2 E_n \quad (1.3.12)$$

y para la energía de la señal, la igualdad de Parseval,

$$\sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} |s(k)|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |S_n|^2 E_n \quad (1.3.13)$$

Sistemas ortogonales: partiendo del hecho que un sistema de funciones ortogonales es completo en un intervalo  $N$ , si el número de estas funciones es  $N$ , expresaremos una señal con una serie, utilizando diversos sistemas ortogonales, como por ejemplo, Haar, Rademarch, y Walsh [22].

El sistema  $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ , donde  $n$  pertenece a  $\mathbb{Z}$ , es ortogonal en el intervalo  $\langle t_p, t_k \rangle$ , si para este intervalo es válido,  $t_k - t_p = 2\pi/\omega_0 = T_0$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{t_p}^{t_k} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \int_{t_p}^{t_k} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{j(n-m)\omega_0} [e^{j(n-m)\omega_0(t_p+T_0)} - e^{j(n-m)\omega_0 t_p}], \text{ para } n \neq m; \\ \int_{t_p}^{t_k} 1 dt, \text{ para } n = m \end{array} \right\} \\
& = \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{j(n-m)\omega_0 t_p}}{j(n-m)\omega_0} [e^{j(n-m)\omega_0 T_0} - 1] = 0, \text{ para } n \neq m, \\ T_0 = E_n, \text{ para } n = m \end{array} \right\} \quad (1.3.14)
\end{aligned}$$

Los coeficientes de Fourier de la señal  $s(t)$ , son calculados de acuerdo con,

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_p}^{t_p+T_0} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.3.15)$$

Este sistema es completo [21], y de esto,

Para el sistema ortonormal,  $e^{jn\omega_0 t} / \sqrt{T_0}$  y  $\eta$  que es una función paso escalón (1 arriba de tiempo = 0; 0 para tiempos menores a 0)

a)

$$\frac{\eta(t_p + T_0) - \eta(t_p)}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \delta(t), \text{ para } t_p \leq t \leq t_p + T_0 \quad (1.3.16)$$

Si la función  $e^{jn\omega_0 t}$  es periódica con período  $T_0$ , se obtiene la ecuación,

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0), \text{ para } t \in \mathbb{R} \quad (1.3.17)$$

b) Con la substitución de  $E_n = T_0$  en la expresión de Parseval para señales continuas, se obtiene la forma concreta de la ecuación de Parseval,

$$\int_{t_p}^{t_p+T_0} |s(t)|^2 dt = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2 \quad (1.3.18)$$

En el caso discreto el sistema  $\varphi_n(k) = e^{jn\Omega_0 k}$ ,  $n = n_0, \dots, n_0 + N - 1$ , es ortogonal en el intervalo  $k = k_p, \dots, k_k$ , si para este intervalo es válido que  $k_k - k_p + 1 = N = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ ,

$$\sum_{k=k_p}^{k_k} \varphi_n(k) \varphi_m^*(k) = \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} e^{j(n-m)\Omega_0 k} = \begin{cases} e^{j(n-m)\Omega_0 k_p} \frac{e^{j(n-m)\Omega_0 N} - 1}{e^{j(n-m)\Omega_0} - 1}, & \text{para } n \neq m \\ \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} 1, & \text{para } n = m \\ 0, & \text{para } n \neq m \\ N = E_n, & \text{para } n = m \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Se puede calcular los coeficientes de Fourier de la señal  $s(k)$ , de acuerdo con la expresión,

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} s(k) e^{-jn\Omega_0 k} \quad (1.3.20)$$

Este sistema es completo, y de esto, se deduce que,

a) Según la relación, es válido para un sistema ortonormal,  $e^{jn\Omega_0 k/\sqrt{N}}$

$$\frac{\eta(k_p + N - 1) - \eta(k_p - 1)}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{jn\Omega_0 k} = \delta(k), \quad \text{para } k_p \leq k \leq k_p + N - 1 \quad (1.3.21)$$

Sabiendo que la función  $e^{jn\Omega_0 k/\sqrt{N}}$  es periódica con periodo  $N$ , se obtiene,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} e^{jn\Omega_0 k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(k - mN), \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \quad (1.3.22)$$

b) Al reemplazar  $E_n = N$ , obtenemos la forma concreta de la igualdad de Parseval,

$$\sum_{k=k_p}^{k_p+N-1} |s(k)|^2 = N \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |S_n|^2 \quad (1.3.23)$$

## 1.4. Representación espectral de señales

Dentro de los diversos sistemas ortogonales, que se utilizan para la descomposición de la señal, los sistemas compuestos por señales armónicas ocupan un puesto significativo. Los coeficientes de Fourier de la señal, corresponden a la representación espectral de la señal, comúnmente conocidos como el espectro de la señal.

### 1.4.1. Señal periódica continua

La señal  $s(t)$  es periódica, si existe un número positivo, tal que, para todo  $m$  que pertenece a los  $\mathbb{Z}$ , es válido que  $s(t) = s(t + mT_0), \forall t \in \mathbb{R}$ .

La señal periódica es de potencia, y su función de autocorrelación es también periódica con el periodo de la señal. La suma, diferencia, multiplicación y la división de dos señales es de nuevo, una señal periódica, con el mismo periodo.

Serie de Fourier de la señal periódica continua: el sistema de funciones,

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, n \in \mathbb{Z}, \omega_0 = 2\pi/T_0 \quad (1.4.1)$$

Es ortogonal y completo en el intervalo  $I_{per} = \langle t_p, t_p + T_0 \rangle$ . En este intervalo, es posible expresar cada señal energética con,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, t \in I_{per} \quad (1.4.2)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_p}^{t_p+T_0} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.4.3)$$

donde  $c_n$  son los coeficientes de Fourier. La serie expresada puede ser indicada también con un periodo de la señal periódica. El sistema  $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ , es en realidad periódico, con periodo  $T_0$ , y por ello, la señal periódica se expresa con la serie de Fourier en todo el intervalo de tiempo,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.4.4)$$

Debido a que la serie de Fourier converge a la señal siempre que su energía sea finita en un período definido  $T_0$ , entonces la igualdad entre la señal y la serie está garantizada por:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_p}^{t_p+T_0} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1.4.5)$$

Con la serie de Fourier, descomponemos la señal periódica en una suma de señales armónicas complejas, con frecuencias angulares  $n\omega_0$ . El conjunto de coeficientes de Fourier  $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , se conoce

con el nombre de espectro de la señal. Debido a que los módulos de los coeficientes son las amplitudes de la señal armónica, y los ángulos de los coeficientes, son las fases iniciales, entonces denominamos al conjunto de módulos  $\{|c_n|\}_{-\infty}^{\infty}$ , el espectro de amplitudes (de dos lados), y el conjunto de ángulos,  $\{\arg c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , el espectro unilateral de ángulos. El coeficiente  $c_0$ , representa el componente DC (corriente directa) de la señal. El valor de los coeficientes de Fourier,  $c_n$  no depende de la elección del instante  $t_p$ , debido a que la integración de la señal periódica a través del periodo no depende de la posición concreta del intervalo de integración.

La serie de Fourier es válida, de manera general, para una señal compleja. Frecuentemente, la encontramos de varias formas, en el caso de la señal real, se tiene:

$$c_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{t_p}^{t_p+T_0} s(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \left( \frac{1}{T_0} \int_{t_p}^{t_p+T_0} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right)^* = c_n^* \quad (1.4.6)$$

### 1.4.2. Señal periódica discreta

Recordemos que la señal  $s(k)$  es periódica, si existe aquél número natural  $N_0$  (periodo), tal que para todo  $m$  que pertenece a  $\mathbb{Z}$ , es válido,  $s(k) = s(k + mN_0)$ , para todo  $k$  que pertenece a  $\mathbb{Z}$ . La señal periódica es de potencia, y su función de autocorrelación es también periódica con el periodo de la señal.

Serie de Fourier de la señal periódica discreta: el sistema de funciones,

$\varphi_n(k) = e^{jn\Omega_0 k}$ ,  $n = n_0, \dots, n_0 + N_0 - 1$ ,  $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ , es ortogonal y completo en el intervalo  $I_{per} = k_p, \dots, k_p + N_0 - 1$ . En este intervalo, es posible expresar a cada señal energética, con la serie,

$$s(k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N_0-1} c_n e^{jn\Omega_0 k}, k \in I_{per} \quad (1.4.7)$$

donde,

$$c_n = \frac{1}{N_0} \sum_{k \in I_{per}} s(k) e^{-jn\Omega_0 k} \quad (1.4.8)$$

donde  $c_n$  son los coeficientes de Fourier. La serie comentada puede ser expresada con un periodo de la señal periódica. El sistema  $\varphi_n(k) = e^{jn\Omega_0 k}$ , es de hecho periódico con periodo  $N$ , y por ello, la señal periódica se expresa con la serie de Fourier, en todo el intervalo de tiempo,

$$s(k) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N_0-1} c_n e^{jn\Omega_0 k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.4.9)$$

Algunos autores llaman a la anterior serie, la serie discreta de Fourier (DFS-Discrete Fourier Series).

El espectro de la señal periódica discreta, es periódico, con el periodo de la señal, a diferencia del espectro de la señal continua,

$$c_n = c_{n+mN_0}, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (1.4.10)$$

Y por ello, para determinar el espectro, basta estudiar un periodo, el cual seleccionamos, desde 0, ...,  $N_0 - 1$ . La serie de Fourier tiene la forma,

$$s(k) = \sum_{n=0}^{N_0-1} c_n e^{jn\Omega_0 k}, \quad k \in I_{per} \quad (1.4.11)$$

## CAPÍTULO 2. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y TRANSFORMADA WAVELET

### 2.1. Transformada discreta de Fourier

En la primera parte de este capítulo, se definen los conceptos básicos, notación y propiedades de la transformada discreta de Fourier –DFT, la transformada inversa discreta de Fourier –IDFT, y los principios básicos de la transformada rápida de Fourier –FFT, en los espacios  $l^2(\mathbb{Z}_n)$  y  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Debido a que la DFT es en los dos espacios muy parecida, entonces se observará la DFT en el espacio  $l^2(\mathbb{Z}_n)$ .

**Definición 2.1.1:** La transformada discreta de Fourier del vector  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))$ ,  $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ , es el vector  $\hat{z} \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ , dado por:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi jmn/N} \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (2.1.1)$$

**Sentencia 2.1.1:** Para un  $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ , es válido:

1. La siguiente es la expresión de la transformada inversa discreta de Fourier (IDFT) definido por sus componentes:

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi jmn/N} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.1.2)$$

donde  $\{F_m\}$  es la base de Fourier.

2. La siguiente es la ecuación de Parseval

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle \quad (2.1.3)$$

3. La siguiente es la expresión de Plancherel

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2 \quad (2.1.4)$$

### 2.1.1. Propiedades de DFT e IDFT

En esta sección, se hace un resumen de las propiedades de la transformada discreta de Fourier y su inversa [21].

1. La transformada de Fourier es un mapeo lineal, (también llamado a veces transformación lineal) y se define como: un mapeo de un conjunto  $V$  a un conjunto  $W$ ,  $\{V \rightarrow W\}$ , donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales, que preservan o mantienen las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar [23].

2. DFT e IDFT constituyen un mapeo unívoco del espacio  $l^2(\mathbb{Z}_n)$ . Podemos, de manera simbólica, escribir:  $\text{DFT}^{-1} = \text{IDFT}$  y a la inversa.

3. La imagen de una función desplazada por un escalar  $d$ :

$$z(n-d) \cong e^{-jmd} \cdot \hat{z}(m) \quad (2.1.5)$$

4. La imagen de una función con escalamiento cambiado:

$$z(a \cdot n) \cong \frac{1}{|a|} \cdot \hat{z}\left(\frac{m}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad (2.1.6)$$

5. La imagen de una reflexión conjugada:

$$\overline{z(-n)} \cong \overline{\hat{z}(m)} \quad (2.1.7)$$

6. La función que llama a un desplazamiento de la imagen:

$$e^{jmd} z(n) \cong \hat{z}(m-d) \quad (2.1.8)$$

7. Para cada descomposición periódica de  $z$ ,

$$z \in l^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.9)$$

$$\hat{z}(n) = \frac{1}{N} \hat{z}(-n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.1.10)$$

8. Para cada

$$z, w \in l^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.11)$$

$$\langle \hat{z}, \hat{w} \rangle = \frac{1}{N} \langle z, w \rangle \quad (2.1.12)$$

### 2.1.2. Operador de translación, de rotación, y reflexión conjugada

En esta sección, se define el operador de translación, el operador de rotación y el operador de reflexión conjugada de la transformada discreta de Fourier, tomado de [21].

En la DFT, la translación (desplazamiento), y la convolución pertenecen a operaciones básicas. Si tenemos un vector  $(z(n)), n \in \mathbb{Z}$ , el cual fue originado por una expansión periódica del vector  $(z(n)), n = 0, \dots, N - 1$ .

**Definición 2.1.3:** Supongamos que  $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ . Definimos el operador de translación  $R_k: l^2(\mathbb{Z}_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_n)$  con la expresión:

$$z \in l^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.13)$$

$$R_k: l^2(\mathbb{Z}_n) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_n)$$

$$(R_k z)(n) = z(n - k) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.1.14)$$

La translación es un mapeo lineal.

**Definición 2.1.4:** Se tiene a  $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ . Se define la operación de convolución con el símbolo  $*$  y con la siguiente descripción:

$$z, w \in l^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.15)$$

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m - n) w(n) \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.1.16)$$

**Definición 2.1.5:** Supongamos  $z \in l^2(\mathbb{Z}_n)$ . Definimos el operador de reflexión conjugada, con la descripción:

$$z \in l^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.17)$$

$$\tilde{z}(m) = \overline{z(-m)} = \overline{z(N-m)} \quad \forall m \in Z \quad (2.1.18)$$

La siguiente oración condensa las propiedades básicas de la convolución:

**Sentencia 2.1.2:**

1. La convolución es un mapeo a  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ :

$$\ell^2(\mathbb{Z}_n): z * w \in \ell^2(\mathbb{Z}_n) \quad (2.1.19)$$

2. La convolución es conmutativa:

$$z * w = w * z \quad (2.1.20)$$

3. La convolución es asociativa:

$$(x * z) * w = x * (z * w) \quad (2.1.21)$$

$$4. \quad w * \delta = w, \quad k \text{ de } \delta = \delta_{0,m}, \quad (2.1.22)$$

$$5. \quad z * w(k) = \langle z, R_k \tilde{w} \rangle \quad (2.1.23)$$

$$6. \quad z * \tilde{w}(k) = \langle z, R_k w \rangle \quad (2.1.24)$$

Las propiedades 5 y 6 son utilizadas para expresar el vector en las bases fundamentales Wavelet.

### 2.1.3. Transformada rápida de Fourier (FFT)

La transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform –FFT) es una herramienta fundamental en el proceso digital de señales, que trata de un algoritmo para el cálculo de la transformada discreta de Fourier (DFT) [21]. Su importancia radica en que elimina una gran parte de los cálculos repetitivos a los que está sometida la DFT, por lo tanto se logra un cálculo más rápido, además de que permite una mayor precisión en el cálculo de la DFT disminuyendo los errores de redondeo. Si se realiza el cálculo, o de manera más exacta, si el computador calcula la DFT de una secuencia larga, como por ejemplo de una señal, debido a la multiplicación compleja es necesario una memoria operacional grande. El esfuerzo humano de disminuir la complejidad de memoria y de tiempo en el cálculo de DFT, conlleva a investigar la DFT, y el resultado es la FFT. Esta cumple con el mismo resultado, a través del cual, se disminuye, la multiplicación compleja durante el cálculo, por lo tanto tiene como resultado, un acortamiento del proceso computacional [21].

El principio básico de la FFT es la descomposición de las muestras de la sucesión, en dos secuencias, de los cuales, una contiene todos los elementos impares, y la segunda todos los elementos pares. Para que las sucesiones tengan la misma longitud, deben ser elementos de número par, es decir,  $N = 2M_1$ . Para que este proceso pueda ser iterativo, entonces también  $M_1 = 2M_2$ , lo que significa que, se desea tener  $N = 2^p, p \in \mathbb{N}$  componentes.

$$\begin{aligned}
 \hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi jmn/N} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n)e^{-2\pi j(2n)m/N} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n+1)e^{-2\pi j(2n+1)m/N} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n)e^{-2\pi jnm/\frac{N}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n+1)e^{-2\pi jnm/\frac{N}{2}}e^{-2\pi jm/N}
 \end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Ahora llamemos a  $u(n)$ , como una sucesión de los elementos pares, y  $v(n)$ , una sucesión de los elementos impares. Por ello, es válido que:

$$\begin{aligned}
 u(n) &= z(2n) \\
 v(n) &= z(2n+1), \text{ para}
 \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

$v(n) = z(2n+1)$ . Debido a que la magnitud de ambas sucesiones es igual, y esto a  $\frac{N}{2}$ , las sumas en la relación, son la DFT de las sucesiones individuales,  $u, v$ .

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi jm/N} \hat{v}(m), \quad m = 0, \dots, N-1 \tag{2.1.27}$$

Ahora observemos, que sucede cuando en vez de  $m$ , reemplazamos  $m = \frac{N}{2} + l, \quad l = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .

Al reemplazar en la relación para DFT, y correcciones similares, como lo anterior, obtenemos:

$$\hat{z}\left(l + \frac{N}{2}\right) = \hat{u}(l) - e^{-2\pi jl/N} \hat{v}(l) \tag{2.1.28}$$

De aquí se puede ver, que en las exponenciales complejas, no es necesario calcular todos los valores, pero solamente una mitad, y para la segunda mitad, es suficiente cambiar el signo del segundo término. Con esto, el cálculo se acelera.

Si utilizáramos solamente la DFT, entonces necesitaríamos para el cálculo de la imagen de la función de la longitud  $N$ , a lo sumo,  $N^2$ , operaciones complejas. Durante el uso iterativo de la FFT, es necesario  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  de multiplicaciones complejas. Para  $N = 4$ , para la DFT es necesario 16 multiplicaciones complejas, y en cambio para la FFT, 4. Para el cálculo de  $N = 16$ , la diferencia es aún más marcada. Para una DFT es de 256 y para FFT 32, multiplicaciones complejas.

## 2.2. Transformada Wavelet

La transformada Wavelet fue introducida por Jean Morlet en 1982 para el análisis de señales no-estacionarias, especialmente en señales sísmicas. Ahora, la Transformada Wavelet es utilizada en varias aplicaciones, por ejemplo en gráficos computacionales, procesamiento de imágenes, detección de patrones o compresión de datos.

Este capítulo realiza una corta introducción a la teoría de la transformada Wavelet. Una descripción completa de la transformada Wavelet puede ser encontrada en [24], una descripción más práctica enfocada de la transformada Wavelet y su aplicación se encuentran en [25] y [21].

### 2.2.1. La Transformada Continua Wavelet

El origen de la transformada Wavelet es uno de los resultados del intento de obtener una descripción tiempo-frecuencia de la señal. La transformada de Fourier nos brinda la información acerca de, cuáles frecuencias se encuentran en la señal, pero no responde a su exacta localización, en el tiempo. Es decir, que es adecuada para la descripción de señales estacionarias. Una solución posible para el problema planteado es el uso de ventanas, las cuales limitan en el tiempo, pequeños intervalos de la señal, y posibilitan determinar el espectro, a partir de ellos, en determinados intervalos temporales (este procedimiento se conoce como Short-Time Fourier Transform (La Transformada de Fourier en tiempo-corto, cuya variante, con la ventana de Gauss, se denomina, la Transformada de Gabor). Desde los tiempos del principio de incertidumbre de Heisenberg, se deduce que no es posible determinar con igual precisión, la frecuencia y la posición de la aparición de determinada frecuencia en el tiempo. Por ello, la solución planteada tiene, para una ventana de ancho constante, para todas las frecuencias, una gran resolución en frecuencia y pequeña resolución en el tiempo, y viceversa: para una ventana temporal angosta, se cuenta con una gran resolución en el tiempo, pero pequeña en

la frecuencia. La idea de la transformada Wavelet, es un cambio apropiado del ancho de la “ventana”, en el tiempo, y con su forma, obtener una razón de resolución óptima en el tiempo, y en la frecuencia. Para frecuencias bajas, la “ventana” es más ancha, para las altas frecuencias, es más angosta. Esta “ventana” se denomina onda Madre (mother Wavelet) [26]. Con ayuda del parámetro  $\tau$ , el cual llamamos, la escala, es posible cambiar su ancho (dilatación); con el parámetro  $s$ , denominado, desfase, se cambia la posición de la onda, en el eje temporal (translación).

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \psi\left(\frac{t-s}{\tau}\right) \quad \tau, s \in \mathbb{R}, \quad \tau \neq 0 \quad (2.2.1)$$

El componente  $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ , se usa para la normalización de la energía de la onda, durante el cambio de escala.  $\psi(t)$  es el prototipo de la onda. La transformada continua wavelet está definida para las señales con energía finita, es decir para  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , de la siguiente manera:

$$W f(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{s,\tau}(t)} dt \quad (2.2.2)$$

donde  $\overline{\psi_{s,\tau}(t)}$ , es el complejo conjugado de la función  $\psi_{s,\tau}(t)$ . El resultado para una señal unidimensional es una función bidimensional, la cual se denomina coeficiente de wavelet. Después de la sustitución,

$$W f(\tau, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \bar{\psi}\left(\frac{t-s}{\tau}\right) dt \quad (2.2.3)$$

La expresión gráfica de los coeficientes de Wavelet en el plano  $(\tau, s)$  frecuentemente se denomina escalograma, o mapa de Wavelet (wavelet map). La relación entre la escala y la frecuencia, de los componentes detectados con CWT se deben determinar para cada onda de manera individual. La manera recomendada [17], es la obtención de la escala, donde sucede el máximo de los coeficientes de wavelet durante la transformación de la señal seno, de la frecuencia de referencia. En algunas ondas, la relación es directa (sombrero mexicano, Morlet), en otras (Daubechies), la relación es discutible.

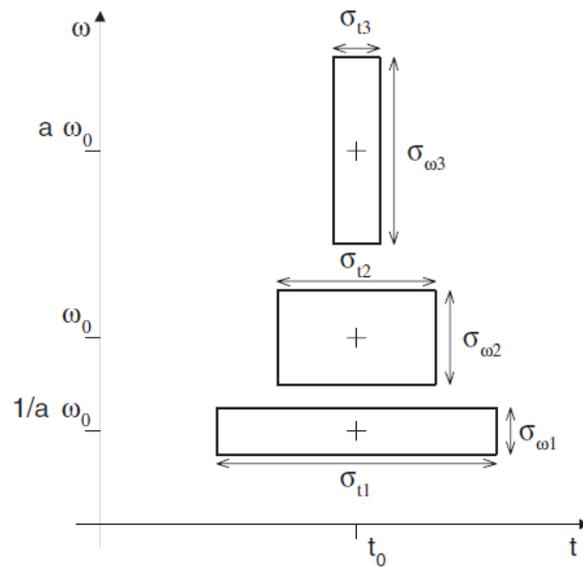


Figura 5. Distribución tiempo-frecuencia de la Transformada Wavelet; el ancho en el eje respectivo, está determinado por  $\sigma_t, \sigma_w$ . Fuente: [27]

La transformada continua Wavelet es un ejemplo de una transformación integral. La Transformada Wavelet transforma una función de entrada  $f(t)$  de variable  $t$  en su representación bi-dimensional Wavelet  $W(\tau, s)$  de variables  $\tau$  y  $s$ .

Supongamos que tenemos una función  $\psi(t)$  que cumple con las siguientes condiciones [19]:

- Es integrable a cero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.2.4)$$

- Tiene energía finita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (2.2.5)$$

La función  $\psi(t)$  es denominada la Wavelet Madre. La Wavelet Madre se utiliza como un Kernel que escala y cambia en el tiempo para computar una representación bi-dimensional de la función transformada.

La transformada Wavelet continua (CWT) está definida [19] como:

$$W(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{\tau,s}^*(t)dt \quad (2.2.6)$$

Donde  $\tau$  y  $s$  son variables reales,  $\psi_{\tau,s}^*(t)$  denota la conjugada compleja de la función  $\psi_{\tau,s}(t)$ . La Wavelet madre  $\psi_{\tau,s}(t)$  está desplazada en el tiempo y la función madre escalada se define por la siguiente expresión:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\psi\left(\frac{t-s}{\tau}\right) \quad (2.2.7)$$

La variable  $\tau$  se refiere a la escala y la variable  $s$  representa el desplazamiento en el tiempo de la Wavelet Madre  $\psi(t)$ . El factor de normalización  $\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}$  causa que la energía sea constante para todo  $\tau$  y  $s$ .

CWT puede ser fácilmente representada como un conjunto de filtros lineales, e invariantes con el tiempo con wavelet madre desplazadas en el tiempo, como una respuesta al impulso. Los filtros son descritos como una convolución de la señal filtrada  $s(t)$  con su respuesta al impulso  $h(t)$ :

$$h(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)s(t-\tau)d\tau \quad (2.2.8)$$

La definición de CWT en la ecuación (2.2.8), puede ser fácilmente reescrita como una convolución [19]:

$$W(\tau, s) = f(s) * \psi_{\tau,0}^*(-s) \quad (2.2.9)$$

De la ecuación (2.2.9) es posible observar que la transformada Wavelet es una filtración con una respuesta al impulso.

### 2.2.2. Propiedades de CWT

Se define el operador de mapeo [19]:

$$\mathcal{W}_\psi[f(t)] \equiv W(\tau, s) \quad (2.2.10)$$

La ecuación (2.2.10) significa que  $\mathcal{W}_\psi[f(t)]$  opera sobre una función definida en el tiempo, y como resultado tenemos una nueva función  $W(\tau, s)$ , en función de desplazamiento  $\tau$  y escalamiento  $s$ .

La transformada Wavelet continua tiene las siguientes propiedades [19]:

**1. Linealidad:**

$$\mathcal{W}_\psi[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{W}_\psi[f(t)] + \beta \mathcal{W}_\psi[g(t)] \quad (2.2.11)$$

Para todo  $\alpha$  y  $\beta$  real

- Translación

$$\mathcal{W}_\psi[f(t - \tau)] = \mathcal{W}(a, b - \tau) \quad (2.2.12)$$

- Escalamiento

$$\mathcal{W}_\psi \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} f \left( \frac{t}{\alpha} \right) \right] = \mathcal{W} \left( \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha} \right) \quad \text{para } \alpha > 0 \quad (2.2.13)$$

Otras propiedades pueden ser encontradas en [18] [capítulo 4], [19] y [21][capítulo 6].

**2. Invarianza en el tiempo**

$$W\hat{f}(\tau, s) = Wf(\tau - b, s) \quad \hat{f}(t + b) = f(t) \quad (2.2.14)$$

La invarianza en el tiempo, describe la realidad que, el desfase de la función analizada en el eje temporal, causa el mismo desfase de los coeficientes Wavelet, en el eje de la posición. De este hecho se puede deducir que la transformada continua Wavelet –CWT, puede ser interpretada con la ayuda de un conjunto de filtros lineales e invariantes en el tiempo. Esta propiedad se pierde durante la transición a la transformada Wavelet discreta, y esto representa unas grandes ventajas.

**3. Dilatación**

$$W\hat{f}(\tau, s) = (Wf) \left( a\tau, \frac{s}{a} \right) \quad \hat{f} = \sqrt{|a|} f(at) \quad a \neq 0 \quad (2.2.15)$$

La correspondencia describe la relación entre CWT de la función original y su versión ampliada, o estrechada; en los coeficientes de Wavelet se produce un ensanchamiento en el eje de posición, y se produce un desfase en el eje de la escala.

#### 4. Condiciones o requisitos para el prototipo de onda

Para asegurar la invertibilidad de la transformación, no puede ser la función para la onda  $\psi$ , elegida de manera libre; en cambio, debe cumplir ciertos requisitos [24]. El valor promedio de la onda debe ser igual a cero [21], y un rango frecuencial adecuado [22].

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.2.16)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (2.2.17)$$

donde  $\Psi(\omega)$ , es la imagen de Fourier de  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ .

#### 2.2.3. CWT inversa

En comparación con la transformada de Fourier, la transformada Wavelet no tiene un Kernel estrictamente definido. En el caso de la transformada de Fourier donde el Kernel es exponencial, el Kernel de la transformada Wavelet es su Wavelet Madre. La CWT inversa existe si la Wavelet Madre

$$C \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (2.2.18)$$

donde  $\Psi(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(t)$  y  $0 < C < \infty$ . La transformada Wavelet continua inversa está dada por la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau|^2} W(\tau, s) \psi_{\tau, s}(t) d\tau ds \quad (2.2.19)$$

Gracias a la existencia de su inversa, la transformada Wavelet puede ser usada para el análisis de señales y también para síntesis de señales.

#### 2.2.4. Transformada Wavelet discreta

La transformada Wavelet continua mapea una función de entrada uni-dimensional  $f(t)$  a su representación bidimensional  $W(\tau, s)$ . Este remapeo es redundante. En el procesamiento digital de señales se está trabajando con una representación discreta del tiempo, entonces la versión discreta de CWT es necesaria. En el caso de la transformada Wavelet la discretización es realizada fijando dos constantes positivas  $a_0$  y  $b_0$ , y definiendo la Wavelet Madre como:

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0) \quad (2.2.20)$$

donde  $m$  y  $n$  son valores enteros.

Los coeficientes de la Wavelet discreta son calculados por la transformada discreta Wavelet (DWT) definida por:

$$W_d[m, n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{m,n}^*(t) dt \quad (2.2.21)$$

En procesamiento de señales usualmente es usado  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$ , porque en este caso la discretización de la transformada Wavelet (DWT) es no-redundante y computacionalmente eficiente. La definición de la Wavelet Madre de la ecuación (2.2.20), se simplifica a:

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) \quad (2.2.22)$$

La representación de la Wavelet Madre, de acuerdo con la ecuación (2.2.20), es la base de varias aplicaciones y  $W_d[m, n]$  obtenida utilizando esta Wavelet Madre es usualmente denominada como la transformada discreta Wavelet en vez de la transformación definida en la ecuación (2.2.19).

La DWT inversa para Wavelet Madre puede ser expresada por la superposición:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_d[m, n] \psi_{m,n}(x) \quad (2.2.23)$$

Existen varios tipos de Wavelet Madre. La más simple es denominada Wavelet Haar, la cual es similar a una función paso. Otros tipos de funciones Wavelet fueron diseñadas para propósitos especiales como una buena localización en el tiempo o en la frecuencia o en la fase lineal. Una descripción detallada de varios tipos de wavelets puede ser encontrada en [18], [19] y [21].

Una dependencia dual apropiada de los parámetros  $s$  y  $\tau$ , es posible generar ondas adecuadas  $\psi$ , de la base ortonormal:

$$\begin{aligned} \tau &= 2^p, & s &= 2^p k & p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \\ \psi_{k,p}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2^p}} \psi\left(\frac{t - 2^p k}{2^p}\right) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Donde  $p$  corresponde a la escala y  $k$  a la posición. Gracias a la ortonormalidad, entonces esta onduleta posibilita una descomposición no-redundante de la señal, llamado, *análisis con varias resoluciones* (*Multiresolution Analysis Decomposition*). Este principio es la base de la transformada Wavelet

discreta (DWT). La función onda  $\psi$ , se comporta como un filtro paso-banda, el cual filtra a la señal de entrada alrededor de la frecuencia central, el cual depende de la escala elevado a la potencia de dos. Este filtrado se sigue realizando tantas veces como sea el número de la descomposición, como se explica en la figura 6.

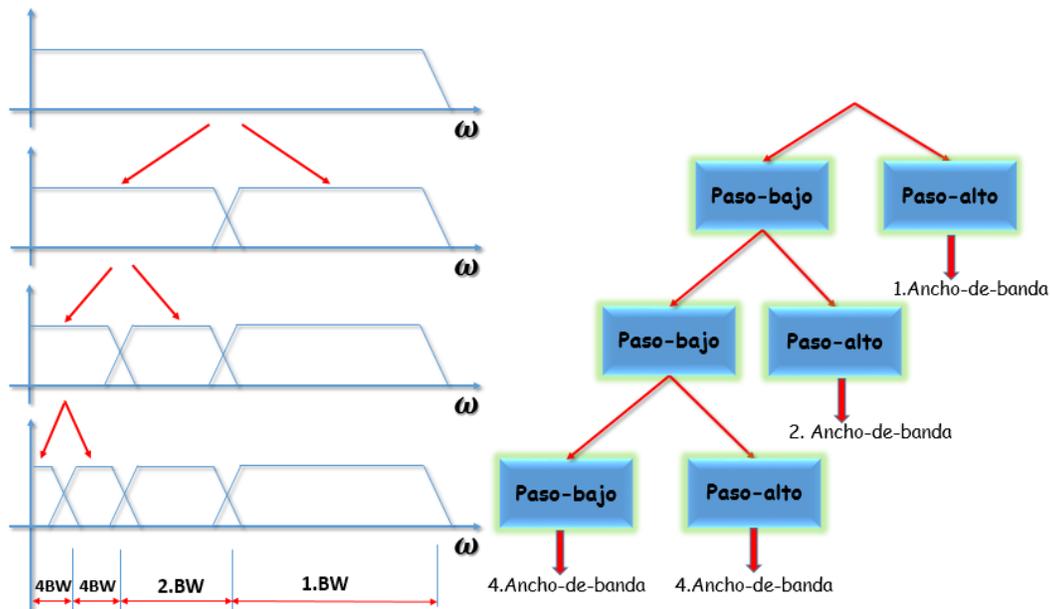


Figura 6. Explicación DWT como una implementación de filtros FIR digitales [28]

Con el aumento de la frecuencia, aumenta el ancho de banda (BW) del respectivo filtro; el coeficiente de calidad  $Q$ , es de esta manera, constante para todo el conjunto de escalas, de los filtros diseñados. Para la selección de escalas mínimas, en cambio, se mantiene intacta la región de frecuencias de bajas frecuencias hasta el cero. Por ello, se deduce de la onda  $\psi$ , la función de escala  $\phi(t)$ , que tiene el carácter de filtro-paso-bajo. Similar a las ondas [21],  $\phi(t)$  debe cumplir con, la condición de:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.2.23)$$

Se puede entender la DWT como una CWT muestreada, que debe cumplir con los siguientes requisitos:

1. En la figura 7 se analiza el muestreo de tiempo-escala del espacio que debe ser realizado en una celda bidimensional.
2. La onda utilizada debe crear una base ortonormal del espacio analizado.
3. La onda analizada debe ser una portadora compacta.

En este caso, es posible calcular la DWT, con un algoritmo rápido, creado con un filtrado FIR, y decimado. Una formulación más libre de los requisitos arriba mencionados, posibilita, lo que es llamado *Overcomplete Wavelet Transform (OCWT)* [24], el cual es una ampliación de la WT con el muestreo de la CWT, en el plano tiempo–escala en el conjunto de muestras, que no necesariamente es dual, como en la DWT. Para su implementación, se han creado algoritmos rápidos, parecidos a la DWT. El más utilizado es el muestreo equidistante en el tiempo y logarítmico en la escala. Tiene las siguientes ventajas:

- Posibilidad de configuración de inmunidad frente al ruido debido al cambio de representación redundante.
- No necesita el cumplimiento de la condición de ortonormalidad de onduletas.
- Posibilita muestrear de manera no–uniforme a la señal, con respecto a su onda temporal, o frecuencial.

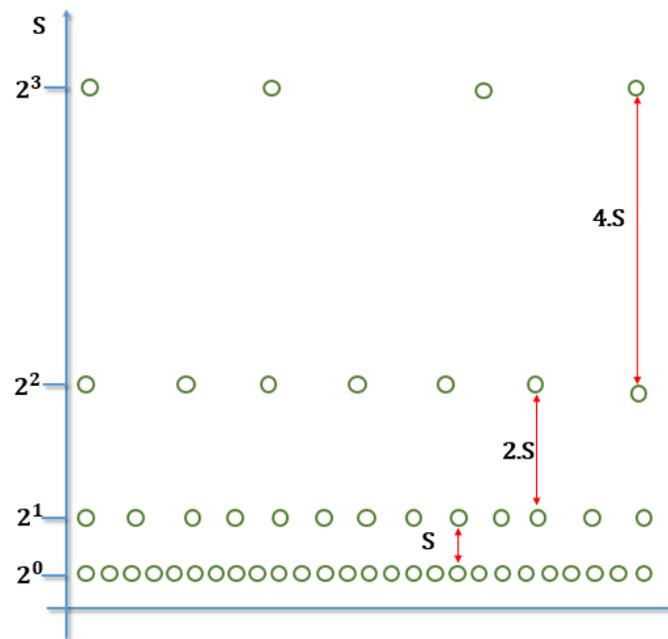


Figura 7. Celda-rejilla dual en espacio tiempo-escala [27]

Ambos filtros, el paso–bajo  $h$  (filtro de escalamiento), y el paso–alto  $g$  (filtro wavelet), generan un par de filtros en cuadratura (QMF), los cuales tienen anchos de banda complementarios. Las salidas de ambos filtros son muestreados a la mitad de las muestras de entrada. El filtro paso–alto proporciona los coeficientes, llamados, de detalle DWT ( $cD$ ), el filtro paso–bajo, los coeficientes llamados de aproximación ( $cA$ ). Gracias al decimado, el número total de coeficientes después de un paso, es el

mismo que el número de muestras de entrada. Los coeficientes de aproximación pueden ser analizados con una adecuada descomposición de filtros, y de esa manera mantener el siguiente archivo de coeficientes de aproximación, y de detalles. De esa manera, se puede seguir hasta terminar con la secuencia inicial. Las respectivas convoluciones con sub-muestreos, pueden ser escritas,

$$cA_{p+1}(k) = \sum_{m=1}^N h(m-2k)cA_p(m) \quad (2.2.24)$$

$$cD_{p+1}(k) = \sum_{m=1}^N g(m-2k)cA_p(m) \quad (2.2.25)$$

donde  $cA_p, cD_p$ , son los coeficientes de la aproximación, y de los detalles del escalamiento  $p \in \langle 0, P \rangle$  y  $N$  es la longitud de la secuencia de entrada  $cA_p, cA_0 = f(n)$ . El par de filtros de cuadratura en espejo, es posible entenderlos, como un núcleo de transformación ortonormal, similar al algoritmo de mariposa de FFT [27].

De acuerdo a la formulación anterior, las Wavelets son filtros definidos  $h, g$ . Más comúnmente, de la función de escalamiento  $\phi(t)$ , se deduce el filtro de escalamiento, el cual tiene carácter de filtro paso-bajo. Después de una normalización,  $w$ , que se realiza dividiendo por la norma, se obtienen los coeficientes del filtro paso-bajo  $h$ . Simétricamente, se calcula el filtro paso-alto  $g$ , como complemento (filtro de espejo en cuadratura). Los filtros de reconstrucción FIR  $\bar{h}, \bar{g}$ , son obtenidos como la secuencia inversa temporal de coeficientes del filtro de descomposición,  $h$  y  $g$ .

Si la señal analizada tiene longitud  $N = 2^k$ , y la escala máxima de la descomposición es  $p \leq k$ , entonces tenemos  $N2^{-1} + N2^{-2} + \dots + N2^{-p+1} + N2^{-p}$  coeficientes de los detalles:  $cD_1, cD_2, \dots, cD_{(p-1)}, cD_p$ , y  $N2^{-p}$  coeficientes de la aproximación  $cA_p$ .

En total, tenemos  $N$  coeficientes, que podemos denominarlos “*Discrete Wavelet Filter –DWf*”.

Debido a que el número de coeficientes es congruente con el número de muestras, y no se llega a pérdida de la información, la descripción de la señal no es redundante. La descripción es también completa: es posible reconstruir de manera exacta la señal analizada.

La transformada Wavelet inversa se denota con IDWT; allí la operación de diezmado se reemplaza con el sobremuestreo, donde después de cada muestra de la secuencia original, se completa con un

número de muestras igual a valor cero; este número de muestras depende del valor determinado del sobre-muestreo. En vez del filtro original, se utilizan filtros de reconstrucción  $h$ , y  $g$ . La aproximación  $cA_p$  se utiliza en conjunto con los detalles de entrada  $cD_p$ , como la entrada al siguiente paso de IDWT.

La DWT no es invariante en el tiempo, si  $f(n + b) = f(n)$ , entonces no es válido  $DW\hat{f} = DWf$ .

### 2.2.5. Banco de filtros Wavelet

Similarmente a la CWT, la DWT se puede interpretar como un conjunto de filtros que son puestos en cascada, para que la realización de la Transformada sea hecha en varios pasos. Cada paso de la cascada usualmente consiste de dos filtros complementarios seguidos de una decimación, como se muestra en la figura 8.

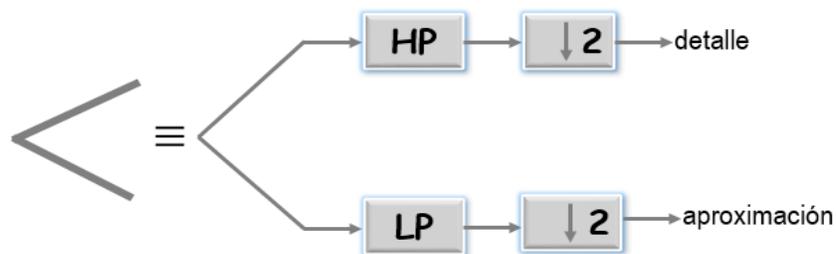


Figura 8. Detalle del procedimiento de descomposición en árbol. HP denota un filtro paso-alto y LP denota un filtro paso-bajo. Adaptado de [29]

La aproximación y el detalle son obtenidos por este procedimiento denominado descomposición. La parte de aproximación contiene principalmente contenido de baja frecuencia del original mientras que el detalle está contenido en los componentes espectrales de frecuencia alta. Tanto la aproximación como el detalle puede ser descompuestas de nuevo. Todo el procedimiento de descomposición es usualmente descrito en un árbol de descomposición y forma una banca de filtros wavelet. Por simplicidad este árbol de descomposición es usualmente graficado por líneas. Un ejemplo del árbol de descomposición es mostrado en la figura 9.

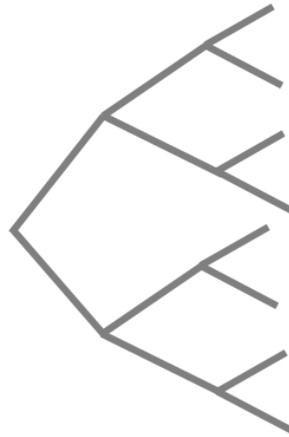


Figura 9. Ejemplo de descomposición en árbol de la estructura Wavelet [17]

El procedimiento de descomposición puede ser descrito por el algoritmo Mallat [18]:

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n - 2p]a_j[n] \quad (2.2.26)$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n - 2p]d_j[n] \quad (2.2.27)$$

Donde  $a_j$  es la aproximación a un nivel  $j$ ,  $d_j$  es el detalle a un nivel  $j$ ,  $h$ ,  $h[n]$  y  $g[n]$  es un par de filtros espejos conjugados. Su relación es descrita por la ecuación:

$$g[n] = (-1)^{1-n}h[1 - n] \quad (2.2.28)$$

La ecuación (2.2.25) describe la descomposición de la aproximación  $a_j$  solamente, la descomposición del detalle  $d_j$  puede ser realizada de manera similar. La ecuación (2.2.29) describe el proceso de reconstrucción:

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p - 2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p - 2n]d_{j+1}[n] \quad (2.2.29)$$

La descripción detallada de la transformada discreta Wavelet puede ser encontrada en [18][19][21].

### 2.2.6. Función Madre

Las siguientes descripciones muestran algunas wavelets [3, 4, 1, 5, 9, 6]. De las propiedades mencionadas, se muestra la conveniencia por la CWT, o la DWT, el tipo de la onda portadora, y el tipo de simetría.

### Onduleta –Sombrero Mexicano

El sombrero Mexicano [27] mostrado en la figura 10, tiene la forma de la segunda derivada de la densidad de probabilidad de la distribución de Gauss.

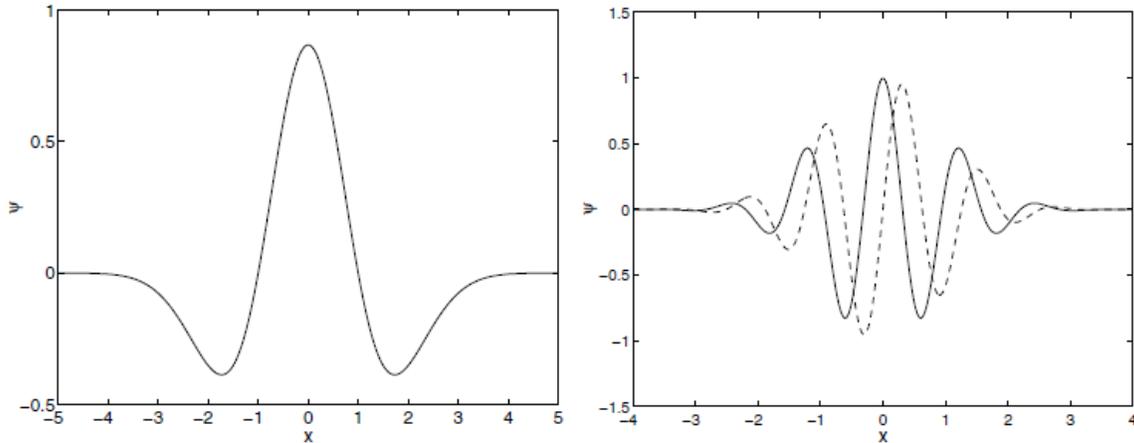


Figura 10. En la izquierda, la onduleta de sombrero mexicano, y en la parte derecha, la onduleta de Morlet, (parte imaginaria, en puntos). [27]

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{1/4}(1 - 2x^2)e^{-x^2} \quad (2.2.30)$$

Propiedades: es simétrica, no es de soporte compacto, es conveniente para la CWT, no es ortogonal (no se puede utilizar para la DWT). La wavelet es parte de la familia de wavelets de Gauss, creada de las derivadas de la forma de la densidad de probabilidad de la distribución de Gauss.

### Onduleta de Morlet

En la parte derecha de la figura 10, la onduleta de Morlet [27] tiene forma de una senoide compleja modulada con la ventana de Gauss. Es el resultado del compromiso entre la localización de fenómenos en el tiempo (mejor, en este caso, es el sombrero Mexicano), y la resolución frecuencial (transformada de Fourier).

$$\psi(x) = ae^{-1/2x^2}(\cos(5x) + jsin(5x)) \quad (2.2.31)$$

Propiedades: es simétrica, compleja, no es de soporte compacto, es conveniente para la CWT, no es ortogonal (no se puede utilizar para la DWT).

### Onduleta de Meyer

La onduleta de Meyer [27] mostrada en la figura 11 está definida en el dominio de la frecuencia, no tiene una ecuación explícita para expresarse en el tiempo. En su forma original no puede ser realizada con filtros FIR, y por lo tanto empleada en algoritmos rápidos de la DWT.

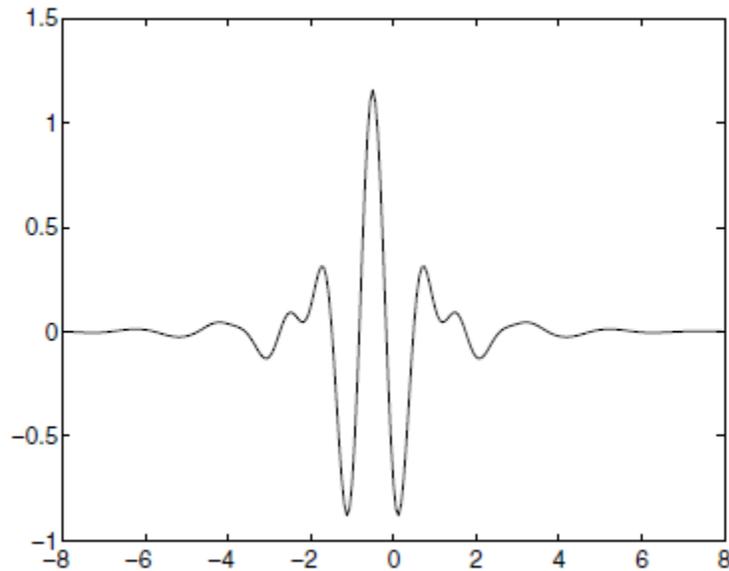


Figura 11. Onduleta de Meyer. referencia.[27]

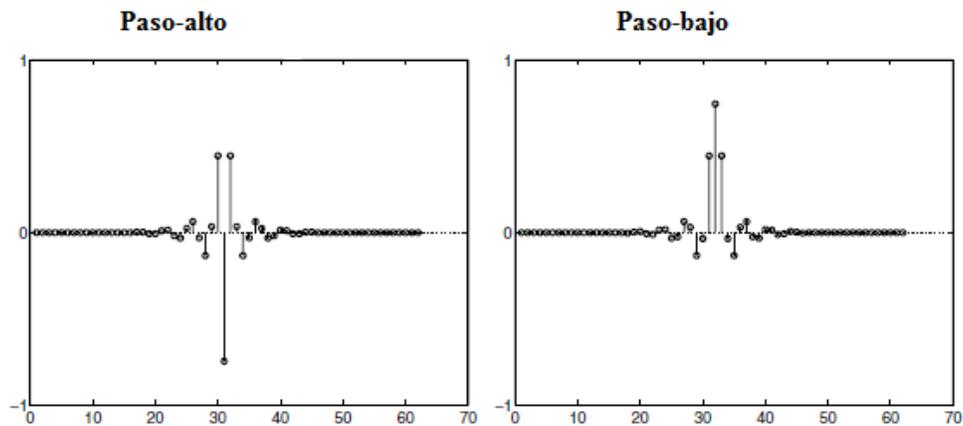


Figura 12. Filtros de convolución para la onduleta de Meyer [27]

Propiedades: es simétrica, no es de soporte compacto (tiene aproximación), es conveniente para la CWT, y para la DWT, es ortogonal.

### Onduleta de Haar

La onduleta de Haar [27] en la parte izquierda de la figura 13 describe un tipo muy sencillo de onduleta, la cual no permite la reconstrucción suave de la señal. Frecuentemente se llama, Daubechies de primer grado.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \dots 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \dots \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \dots \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.2.32)$$

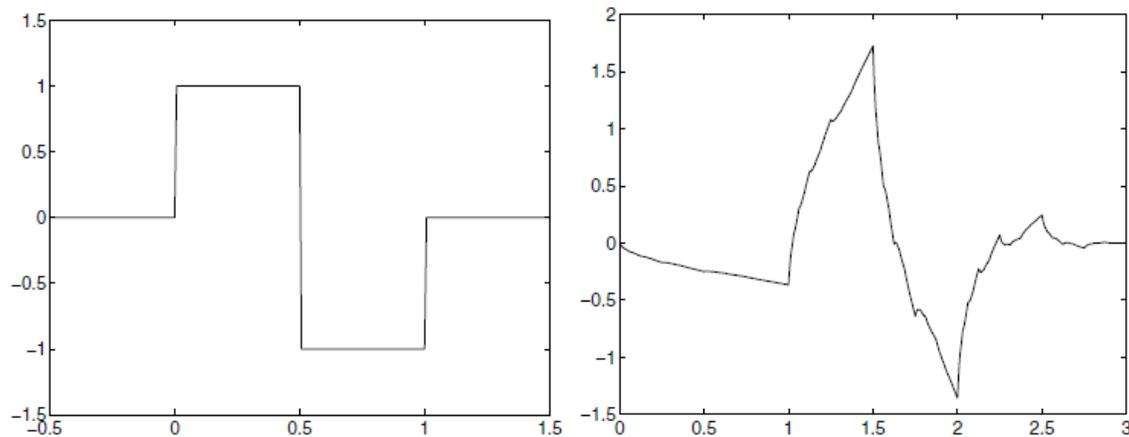


Figura 13. Onduleta de Haar, Onduleta de Daubechies2 [27]

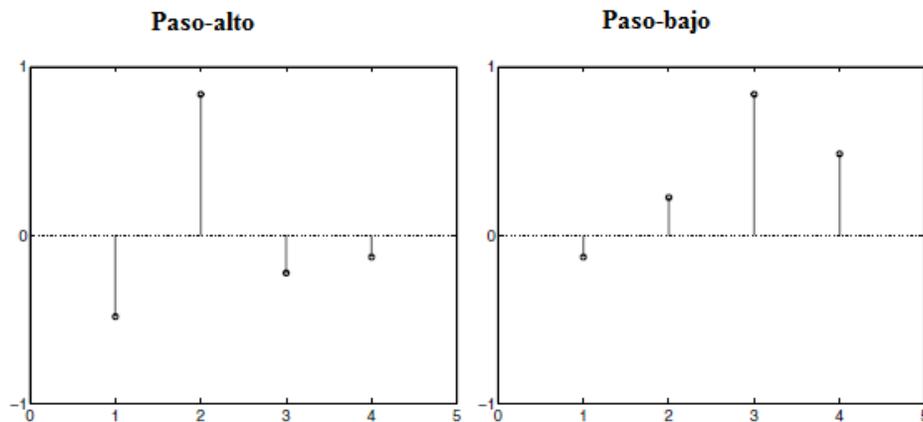


Figura 14. Filtros de convolución para la onduleta Daubechies2. [27]

Propiedades: es simétrica, es de soporte compacto, es conveniente para la CWT, DWT, es ortogonal, y su implementación sencilla. La discontinuidad de las onduletas Haar, representa una desventaja para su aplicación.

### Onduleta de Daubechies

La onduleta de Daubechies [27] en la figura 13 representa un conjunto de onduletas de varios tipos  $N > 1$ . No tienen una descripción explícita.

Propiedades: es asimétrica (con excepción de la Daubechies de primer grado), es de soporte compacto de longitud  $2N - 1$ , conveniente para la CWT, y la DWT, es ortogonal.

#### **2.2.7. Selección de la onduleta**

En varias referencias [27] se encuentra varias aplicaciones de la transformada Wavelet, y en ellas se encuentra que la selección de las onduletas a veces se realiza, de manera intuitiva. También se encuentran algunas relaciones entre el carácter de la onda analizada, y la onduleta conveniente.

Esto se puede resumir en:

Las onduletas complejas, como por ejemplo Morlet, detectan muy bien las oscilaciones, pero no son convenientes para la detección de singularidades separadas.

- Las onduletas reales puras con pocas oscilaciones identifican bien a los picos y a las singularidades en la señal.
- Las onduletas antisimétricas son convenientes para la detección del cambio de gradiente.
- Las ondas simétricas no causan un desplazamiento de fase entre los picos, la singularidad, las oscilaciones en la señal y se identifican en los coeficientes de wavelet.
- Para la detección actual de la amplitud, y de la fase, es necesario usar onduletas complejas (Morlet).

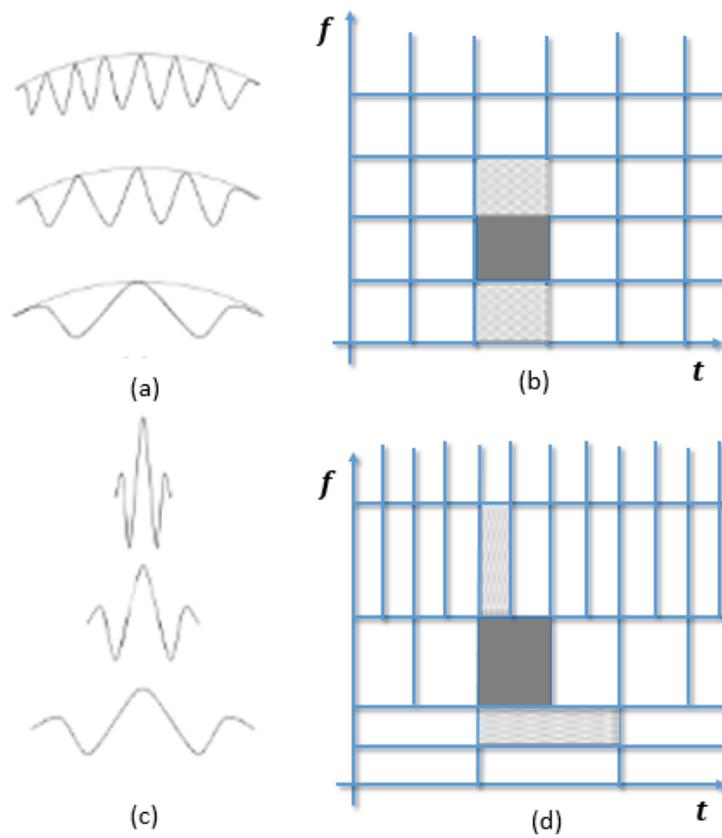


Figura 15. Explicación de regiones temporales/frecuenciales variables en la Transformada de Wavelet. [27]

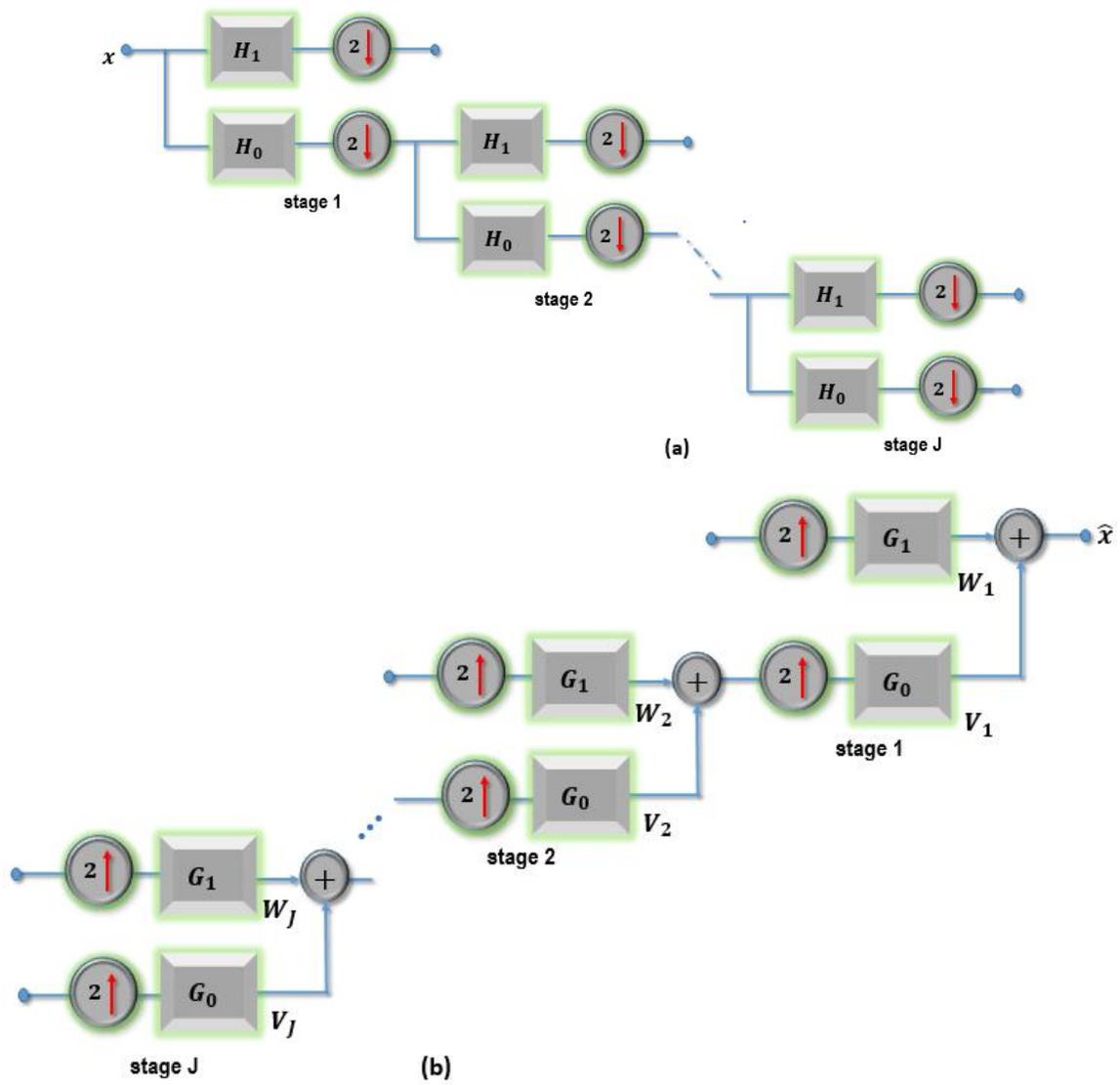


Figura 16. Filtros de análisis y de síntesis en la DWT. Adaptado de [30]

## CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DE NIVELES WAVELET

En este capítulo se explica el pensamiento básico de la transformada Wavelet, y posteriormente se muestra la construcción de una base Wavelet general en el primer nivel, y en el nivel  $p$ .

### 3.1. Principio básico

La transformada Wavelet de un vector se compone de dos fases: la primera fase, es el análisis (descomposición) y la segunda fase es la síntesis (reconstrucción). El análisis del vector se entiende como el cálculo de la aproximación y de los detalles del vector, con ayuda de los filtros de wavelet. La generación del vector original, de estos valores lo llamaremos síntesis.

El pensamiento básico de la Transformada Wavelet es la representación del vector  $z$ , con dos vectores: el vector de aproximación, y el vector de detalles (por ejemplo, el promedio aritmético y la diferencia de dos componentes vecinos del vector  $z$ , como lo utiliza Haar). El análisis del vector es su proyección en dos espacios mutuamente perpendiculares, el espacio de aproximaciones y el espacio de detalles.

Si reemplazamos el vector de la aproximación y el vector de los detalles, ambos con la mitad de longitud que el vector  $z$ , estamos hablando de Transformación Wavelet, en el primer nivel. Si el vector  $z$  tiene longitud  $N$ , obtenemos al final del análisis, algunos vectores de detalles de longitud  $\frac{N}{2}, \frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{2^p}$ , donde  $p$  es el nivel del análisis Wavelet, y un único vector de aproximación de longitud  $\frac{N}{2^p}$ .

Sea  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ :

- Se denota al espacio de la aproximación del nivel  $k, V_k$  y el espacio de los detalles del nivel  $k, W_k$ , para  $k = 1, \dots, p$ .
- Se denota  $u, v$ , los vectores, cuyo desplazamiento par, crean sistemas base de espacios  $V_1, W_1$ .

El vector  $u$ , se denomina **Wavelet padre** (filtro), y el vector  $v$  se denomina **Wavelet madre** (wavelet).

La representación explicada del vector de aproximaciones y detalles, y el uso de la representación en los vectores de la aproximación, se puede escribir como:

$$\ell^2(\mathbb{Z}_n) = V_1 \oplus W_1 - \text{representación del vector } z$$

$$V_1 = V_2 \oplus W_2 - \text{representación del vector de aproximación}$$

La composición iterativa de estas dos relaciones se puede ver en la figura 17, y se expresa  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ , como suma directa:

$$\ell^2(\mathbb{Z}_n) = V_p \oplus W_p \oplus W_{p-1} \oplus \dots \oplus W_1 \quad (3.1.1)$$

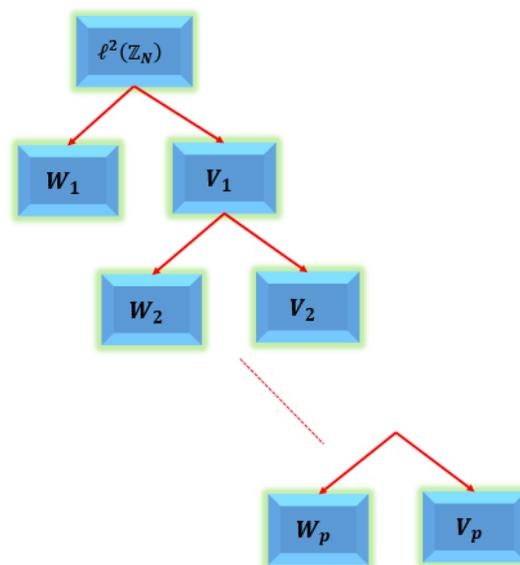


Figura 17. Descomposición Wavelet.[30]

Como se puede observar en la figura 18, otra manera de expresar la descomposición Wavelet, es con el uso de una sucesión de filtros paso-bajo/paso-alto, de la siguiente manera:

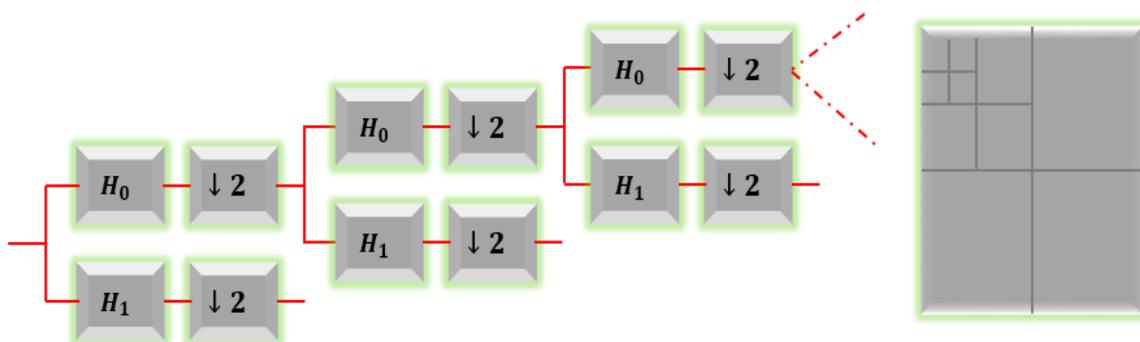


Figura 18. Explicación de descomposición Wavelet, con filtros recursivos paso-bajo, paso-alto. [30]

Los coeficientes de estos filtros son los mismos en todos los niveles. De esta manera, se obtiene una descomposición fractal [30].

El equivalente de esta descomposición observado en el plano habitual de frecuencia de Fourier, es:

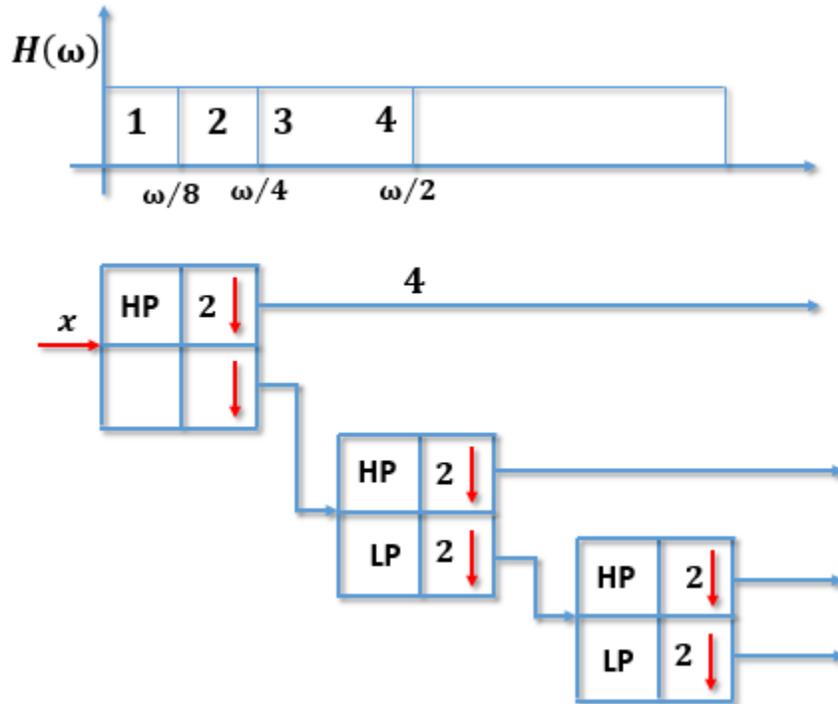


Figura 19. Representación frecuencial de la descomposición de Wavelets. [30]

### 3.2. Wavelets de primer nivel

**Definición 3.2.1:** Sea  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . Se denota al conjunto  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  base ortonormal (ONB) en  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . A este conjunto se le denomina base Wavelet en el primer nivel para  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . Los vectores  $u, v$ , son sus generadores.

La siguiente formulación nos da una condición suficiente y necesaria para que los vectores  $u, v$ , generen una base Wavelet.

**Expresión 3.2.1:** Supongamos que  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . Entonces,  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  es una base ortonormal para  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ , si y sólo si, la matriz  $A(n)$ :

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(n) & \hat{v}(n) \\ \hat{u}(n+M) & \hat{v}(n+M) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Es unitaria para cada  $n = 0, \dots, M-1$ , es decir para todos los  $n = 0, \dots, M-1$  es válido que:

$$|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 = 2 \quad (3.2.2)$$

$$|\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+M)|^2 = 2 \quad (3.2.3)$$

$$\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} = 0 \quad (3.2.4)$$

**Prueba:** Primero, presentemos la realidad  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$  es un conjunto ortonormal, si y sólo si,  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \delta_{k,0}$ .

La ecuación de Parseval dice que  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{R}_{2k}u \rangle$

Recordemos que es válido:

$$\hat{R}_{2k}u(m) = e^{-2\pi j \frac{mk}{N/2}} \hat{u}(m) \quad (3.2.5)$$

Con sucesivas correcciones, se obtiene,

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{R}_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, e^{-2\pi j \frac{mk}{N/2}} \hat{u} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{u}(m)|^2 e^{2\pi j \frac{mk}{M}} \quad (3.2.6)$$

Distribuimos la suma según el índice, en dos conjuntos, y utilizamos la periodicidad de la función exponencial:

$$\begin{aligned} \langle u, R_{2k}u \rangle &= \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} (|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2) e^{2\pi j \frac{mk}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} e^{2\pi j \frac{mk}{M}} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

La parte de la derecha es posible interpretarla como la transformada inversa de Fourier del vector de dimensión  $M$ ,

$$\left( \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} \right)_{m=0}^{M-1} \quad (3.2.8)$$

Calculado en el punto  $k$ . Esto significa que el vector,  $\left( \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} \right)_{m=0}^{M-1}$  es la DFT del vector  $(\langle u, R_{2k}u \rangle)_{k=0}^{M-1}$ .

Se observa, por lo tanto, que  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \delta_{k,0}$ ,  $k = 0, \dots, M-1$ , si y sólo si, el vector

$$\left( \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} \right)_{m=0}^{N-1} \quad (3.2.9)$$

Es la imagen de la DFT de la sucesión  $(1,0,0, \dots, 0)$ .

Debido a que es la imagen de la DFT de la sucesión  $(1,0,0, \dots, 0)$ , el vector  $(1,1,1, \dots, 1)$ , entonces es válido:

$$\frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} = 1 \quad (3.2.10)$$

Para cada  $m = 0, \dots, M-1$ . Para el vector  $v$ , el resultado es análogo y por lo tanto queda demostrado, que las ecuaciones (3.2.6) y (3.2.7) son válidas, si y sólo si, el desplazamiento par de los vectores  $u, v$ , son ortogonales y unitarios.

Se observa también que:

$$\langle R_{2l}u, R_{2k}v \rangle = 0, \quad \forall l, k \quad 0 = \langle u, R_{2k}v \rangle \quad \forall k \quad (3.2.11)$$

De la misma manera, es válido que:

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, R_{2k}v \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{u}(m) \hat{v}(m) e^{2\pi j \frac{mk}{N/2}} \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} (\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)}) e^{2\pi j \frac{mk}{M}} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Para todo  $k = 0, \dots, M-1$ , y por lo tanto el vector  $\left( \frac{\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)}}{2} \right)_{m=0}^{M-1}$  es la DFT del vector  $(\langle u, R_{2k}v \rangle)_{m=0}^{M-1}$ .

Observamos, por lo tanto que,

Calculado en el punto  $k$ . Esto significa que el vector,  $\left( \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} \right)_{m=0}^{M-1}$  es la DFT del vector  $(\langle u, R_{2k}u \rangle)_{m=0}^{M-1}$

Se observa que,

$$\langle u, R_{2k}v \rangle = 0 \quad \forall k \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)} = 0 \quad (3.2.13)$$

Los siguientes enunciados tratan acerca de la construcción de una base Wavelet, en el primer nivel, de acuerdo al vector  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Expresión 3.2.2:** Sea  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , un vector, donde el conjunto  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ ,  $N = 2M$  es ortonormal.

Construyamos un vector  $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ :  $v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .

Entonces  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  es una base Wavelet  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  en un primer nivel.

**Prueba:** Verificamos que la matriz  $A(n)$  es unitaria.

El vector  $v(n) = (-1)^n \overline{u(1-n)}$ , lo reemplazamos en la Transformada de Fourier del vector  $v$ :

$$\hat{v}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-2\pi j m n / N} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \overline{u(1-n)} e^{-2\pi j m n / N} \quad (3.2.14)$$

Empleamos la substitución  $k = 1 - n$ :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (-1)^{1-k} e^{-2\pi j m (1-k) / N} =$$

La parte independiente de  $k$ , la colocamos antes de la suma y utilizamos la ecuación  $e^{-j\pi} = -1$

$$= -e^{-2\pi j m / N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{j k \pi} e^{2\pi j m k / N} = -e^{-2\pi j m / N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k) e^{-2\pi j (m+M) k / N}} \quad (3.2.15)$$

Después de la corrección:

$$\hat{v}(m) = -e^{-2\pi j m / N} \overline{\hat{u}(m+M)} \quad (3.2.16)$$

Análogo a esto, obtenemos la expresión:

$$\hat{v}(m+M) = -e^{-2\pi j (m+M) / N} \overline{\hat{u}(m+2M)} = e^{-2\pi j m / N} \overline{\hat{u}(m)} \quad (3.2.17)$$

Debido a que la exponencial compleja se encuentra en el círculo unitario, es un valor complejo y por lo tanto no influye en la magnitud. Por lo tanto, el vector  $u$ , es unitario:

$$\begin{aligned} |\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 &= |\hat{u}(m+M)|^2 + |\hat{u}(m)|^2 = 2 \\ \hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)} &= \\ -\hat{u}(m) e^{-2\pi j m / N} \hat{u}(m+M) + \hat{u}(m+M) e^{-2\pi j m / N} \hat{u}(m) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Con esto, la prueba queda demostrada.

Tengamos  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$ , como base Wavelet en primer nivel. Los coeficientes de la descomposición del vector con respecto a la base  $B$  son dados por el producto escalar. Con el uso de la propiedad de convolución  $\langle z, R_{2k}u \rangle = z * \tilde{u}(2k)$ , obtenemos el vector  $z$  en la base  $B$ :

$$[z]_B = [z * \tilde{u}(0), z * \tilde{u}(2), \dots, z * \tilde{u}(N-2), z * \tilde{v}(0), z * \tilde{v}(2), \dots, z * \tilde{v}(N-2)] \quad (3.2.19)$$

Definimos el operador de filtrado  $D$  (downsampling) y de expansión  $U$  (upsampling), y con la ayuda de estos, expresamos el vector  $[z]_B$ .

**Definición 3.2.2.** Tengamos  $N = 2M$ .

Definimos el operador  $D: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ ,  $D(z)(n) = z(2n)$  para  $n=0, \dots, M-1$ ,  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , y el operador,  $U: \ell^2(\mathbb{Z}_M) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $U(w)(n) = w(n/2)$ , para  $n$  par, y 0 para  $n$  impar,  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ .

Para los operadores  $D, U$ , y el vector  $z(n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , es válido:

$$D(U(z)) = z \quad (3.2.20)$$

$$U(D(z)) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad (3.2.21)$$

$$\text{donde, } z^*(n) = (-1)^n z(n) \quad (3.2.22)$$

Tengamos  $x_1 = D(z * \tilde{u})$ ,  $y_1 = D(z * \tilde{v})$ . Necesariamente  $x_1, y_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ . Podemos escribir:

$$[z]_B = [D(z * \tilde{u}), D(z * \tilde{v})] = [x_1, y_1] \quad (3.2.23)$$

Aquí se ve presente la representación del vector original, con la ayuda del vector de aproximación  $u$ , y el vector de detalles  $v$ , como se ha expresado al principio de este subcapítulo.

Hasta aquí nos hemos dedicado al análisis del vector  $z$ , con la ayuda de filtros wavelet  $u, v$ , en primer nivel. Ahora vamos a reconstruir el vector  $z$  con la ayuda de los vectores  $x_1, y_1$ .

**Expresión 3.2.3:**  $M \in \mathbb{N}$ ,  $N = 2M$  a  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  son generadores de la base Wavelet del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Tengamos que,  $D(z * \tilde{u}) = x_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ ,  $D(z * \tilde{v}) = y_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$

Entonces es válido,

$$u * U(x_1) + v * U(y_1) = z, \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N) \quad (3.2.24)$$

**Prueba:** La prueba se realiza reemplazando y reescribiendo la convolución. Reescribamos la primera parte de la ecuación (3.2.24), porque la segunda parte es análoga,

$$u * U(x_1) = (u(0), u(1), \dots, u(N-1)) * ((z * \tilde{u})(0), 0, (z * \tilde{u})(2), 0, \dots, (z * \tilde{u})(N-2), 0) =$$

Calculamos la convolución en el punto,  $k = 0, \dots, N-1$ :

$$= \sum_{m=0}^{M-1} u(k-2m)(z * \tilde{u})(2m) \quad (3.2.25)$$

Es válido que  $(u(k-2m))_k = R_{2m}u$  y  $(z * \tilde{u})(2m)$  son los coeficientes del vector con respecto a la base Wavelet. Por ello, es válido que, la suma de estas sumas (proyección del vector  $z$  en  $\{u, R_2u, R_4u, \dots\}$ ), y las sumas generadas análogamente para el vector  $v$  nos da el vector original.

Todo el principio de análisis y síntesis está descrito en la figura 20.

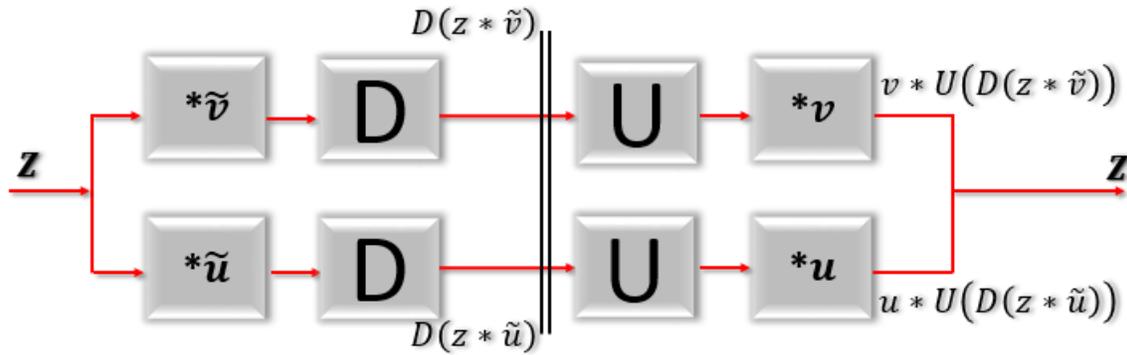


Figura 20. Principio de análisis y síntesis Wavelet. Adaptado de [30]

### 3.3. Wavelets en nivel-p

Para que podamos analizar el vector en un nivel  $p$ , es necesario, que el número de coeficientes sea divisible por  $2^p$ , donde  $p \in \mathbb{N}$ .

Si esto se cumple, entonces seleccionamos  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ ,  $l = 0, \dots, p$ , de manera tal que, se genere la base Wavelet de primer nivel del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ .

Estos vectores serán llamados filtros de wavelet.

Primero, realizamos al análisis del vector  $x_1$ , y con el uso de filtros  $u_2, v_2$ , obtenemos los vectores  $x_2, y_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/4})$ . Repetimos este proceso, hasta el nivel  $p$ ,  $x_p, y_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^p})$ . Al final, obtenemos una sucesión de pares de vectores  $x_l, y_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^l})$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

**Definición 3.3.1.** Sea  $N$ , un número divisible por  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , y sea  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ , un par de generadores del espacio de base Wavelet  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Entonces el vector,  $\{y_1, \dots, y_p, x_p\}$  obtenido de la manera descrita arriba, vamos a llamarlo análisis del vector  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  en el nivel  $p$ .

De esta manera hemos descrito el análisis y ahora nos falta la síntesis:

$$\begin{aligned} u_p * U(x_p) + v_p * U(y_p) &= x_{p-1}, \\ &\vdots \\ u_k * U(x_k) + v_k * U(y_k) &= x_{k-1}, \\ &\vdots \\ u_1 * U(x_1) + v_1 * U(y_1) &= z \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Aquí podemos observar, que para una reconstrucción perfecta es suficiente conocer la sucesión de vectores  $\{y_1, \dots, y_p, x_p\}$ .

La transformada Wavelet la podemos escribir también de manera no–recursiva.

Supongamos  $N$  divisible por  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , y supongamos  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ , para cada  $l = 1, \dots, p$ .

Construyamos una sucesión de parejas  $\{f_l, g_l\}$ ,  $f_l, g_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $l = 1, \dots, p$

De manera que,

$$f_1 = v_1 \quad (3.3.2)$$

$$f_2 = g_1 * U(v_2) \quad (3.3.3)$$

$$f_2 = g_1 * U(v_2) \quad (3.3.4)$$

$$g_2 = g_1 * U(u_2) \quad (3.3.5)$$

Y en general, para  $l = 3, \dots, p$ :

$$f_l * U^{l-1}(v_l) = g_{l-1} \quad (3.3.6)$$

$$g_l = g_{l-1} * U^{l-1}(u_l) \quad (3.3.7)$$

De esta manera se puede formular una expresión, dado que es posible obtenerla con inducción matemática.

Para  $l = 1, \dots, p$ , es válido,

$$x_l = D^l(z * \tilde{g}_l), \quad y_l = D^l(z * \tilde{f}_l), \quad (3.3.8)$$

$$x_l(k) = \langle z, R_{2^l k} g_l \rangle, \quad y_l(k) = \langle z, R_{2^l k} f_l \rangle, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^l} - 1 \quad (3.3.9)$$

### 3.4. Base Wavelet

Supongamos que  $N$  es divisible por  $2^p$ , donde  $p \in \mathbb{N}$ , y supongamos que,  $f_1, \dots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  es una sucesión de vectores, y que el conjunto,

$$B = \{R_{2^k} f_1\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{4^k} f_2\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{R_{2^p k} f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^p k} g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \quad (3.4.1)$$

Es una base ortonormal del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Entonces llamamos al conjunto  $B$ , una base Wavelet del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , en el nivel  $p$ , y sus componentes Wavelet en el nivel  $p$ .

$f_1, \dots, f_p, g_p$ , definidos arriba, generan una base Wavelet.

Se puede demostrar que,  $\{f_1, \dots, f_p, g_p\}$ , definido arriba, genera una base ortonormal –ONB.

Ahora, definamos una notación estándar para wavelets en el nivel  $j$ ,

$$\psi_{j,k} = R_{2^j k} f_j, \quad \varphi_{j,k} = R_{2^j k} g_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1 \quad (3.4.2)$$

Y definamos los espacios  $V_j$ , de la aproximación, y  $W_j$  de los detalles:

$$V_j = \left[ \{\varphi_{j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \right], \quad W_j = \left[ \{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \right] \quad (3.4.3)$$

Es claro, que para la proyección ortogonal del vector  $z$ , en estos espacios es válido que:

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}, \quad Q_j(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (3.4.4)$$

Los filtros de wavelet en el nivel  $p$ , no son necesarios de escoger. Las bases Wavelets importantes pueden ser obtenidas por filtros wavelet–base, en primer nivel. A partir de allí, iterativamente, se pueden construir todos los otros filtros. Describamos esta construcción con la siguiente oración:

Dejemos que  $N$  sea divisible por  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , y dejemos a  $u_1, v_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , que sea un par de filtros wavelet, en el primer nivel. Construyamos un par de vectores  $u_l, v_l$ ,  $l = 2, \dots, p$ , de esta manera:

$$u_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), v_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), n = 0, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1 \quad (3.4.5)$$

Entonces,  $\{u_l, v_l\}_{l=1}^p$ , es una sucesión de filtros wavelet en el nivel  $p$ .

**Comprobación:** Al menos, de manera básica, mostramos la prueba. Para todos los niveles de filtros wavelet  $l = 0, \dots, p$ , es posible demostrar que es válido que,  $\hat{u}_l(m) = \hat{u}_l(2^{l-1}m)$ . Entonces para una matriz asociada, obtenemos la expresión  $A_l(n) = A_1(2^{l-1}n)$ , y debido a que  $A_1(n)$ , es unitaria, entonces también debe ser unitaria  $A_l(n)$ , es decir,  $u_l, v_l, l = 1, \dots, p$ , son filtros wavelet convenientes.

Hasta ahora hemos considerado wavelets en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Cómo son las wavelets en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ? La respuesta a esta pregunta es más complicada que la construcción de la teoría de wavelets en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Sin embargo, se considera la expansión de la teoría discreta wavelet en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . La diferencia básica con respecto a la transformación en  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , es, que la transformada de Fourier, es un mapeo del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , al espacio  $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ , de lo cual, sigue lo siguiente:

1. La ortonormalidad del conjunto del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , debe ser demostrada. En el caso del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , se hace válido la independencia lineal.
2. La transformada de Fourier del vector  $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , es una función del espacio  $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ .
3. La convolución  $z * v$ , en general para  $z, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , no necesariamente es elemento del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .
4. Para uso práctico, es indispensable que, la convolución del vector y del filtro se pueda calcular como una suma finita. Esto es posible, si el filtro tiene un número finito de componentes distintos de cero (soporte compacto).
5. La expansión del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$  contiene un número infinito de componentes.

### 3.5. Wavelets especiales en el espacio $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$

En este subcapítulo nos encontramos con dos tipos básicos de base Wavelet, los cuales son usados y tienen validez amplia. Son la base wavelet Haar, y la base de wavelet Shannon. Posteriormente, analizaremos la wavelet Daubechies D2P, y sus propiedades.

#### 3.5.1. Base de Haar

Durante la descripción del principio básico de las funciones wavelet, se ha descrito el sistema Haar. Este utiliza el promedio aritmético de dos componentes vecinos, como principio de aproximación, y su diferencia del promedio aritmético como los detalles.

Se tiene por ejemplo, a  $N = 2^p, p \in \mathbb{N}$ ,  $(z(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ . Entonces, los promedios aritméticos y las diferencias son:

$$s_1(j) = \frac{z(2j) + z(2j + 1)}{2}, \quad d_1(j) = \frac{z(2j) - z(2j + 1)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.5.1)$$

Esto es análisis en un primer nivel. Apliquemos de manera iterativa el procedimiento anterior en el vector  $s_1$ . Para los vectores de la aproximación, y de los detalles, en el nivel  $p$ , son válidas las expresiones:

$$s_k(j) = \frac{s_{k-1}(2j) + s_{k-1}(2j + 1)}{2}, \quad d_k(j) = \frac{s_{k-1}(2j) - s_{k-1}(2j + 1)}{2} \quad (3.5.2)$$

Donde  $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^k} - 1$  a  $k = 2, \dots, p$

De aquí se puede observar, que el vector  $z$ , es determinado de manera inequívoca, con el promedio aritmético de sus componentes, y la diferencia en todos los niveles.

De la descripción de la transformada wavelet, en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , observamos que los vectores de la aproximación y de los detalles:

$$s_1(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \varphi_{1,j} \rangle, \quad d_1(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \psi_{1,j} \rangle, \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.5.3)$$

Debido a que el vector es descrito con base a la base estándar,  $\varepsilon = \{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ , debe ser válido para los filtros wavelet Haar:

Para los niveles superiores, ( $k = 2, \dots, p$ ), análogamente es válido:

$$\varphi_{1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2j} + e_{2j+1}), \quad \psi_{1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{2j} - e_{2j+1}), \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.5.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{k,j} &= 2^{-\frac{k}{2}}(e_{2^k j} + \dots + e_{2^k(j+1)-1}) \\ \psi_{k,j} &= 2^{-\frac{k}{2}}(e_{2^k j} + \dots + e_{2^k(j+\frac{1}{2})-1} - e_{2^k(j+\frac{1}{2})} - \dots - e_{2^k(j+1)-1}) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

**Anotación:** Observemos que la relación para  $\varphi_{k,j}$  tiene  $2^k$  sumandos, y la expresión para  $\psi_{k,j}$  contiene  $2^k$  diferencias, de componentes vecinos del vector  $z$ .

**Definición 3.5.1:** Sea  $N = 2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$

La base,

$$\{\psi_{1,j}\}_{j=0}^{N/2-1} \cup \{\psi_{2,j}\}_{j=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{\psi_{p,0}\} \cup \{\varphi_{p,0}\} \quad (3.5.6)$$

Es llamada Base de Haar en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Demostremos, como es la forma de la base de Haar, de manera numérica. Por ejemplo,  $N = 8$ . Para el primer nivel, es válido  $k = 1$ , y por lo tanto,  $j = 0, \dots, 3$ . Para el segundo nivel  $k = 2$ , y  $j = 0, 1$ , y para el tercer nivel, reemplazamos  $k = 3, j = 0$ . El tercer nivel es el más alto, debido a que  $2^3 = 8 = N$ .

Reemplazamos en la expresión, para wavelets en el primer nivel,

$$\varphi_{1,0} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.7)$$

$$\psi_{1,0} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.8)$$

$$\varphi_{1,1} = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.9)$$

$$\psi_{1,1} = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.10)$$

$$\varphi_{1,2} = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \quad (3.5.11)$$

De manera análoga, obtenemos las Wavelets para segundo y tercer nivel:

$$\psi_{1,2} = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \quad (3.5.12)$$

$$\varphi_{1,3} = \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.5.13)$$

$$\psi_{1,3} = \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.5.14)$$

$$\varphi_{2,0} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.15)$$

$$\psi_{2,0} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (3.5.16)$$

$$\varphi_{2,1} = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (3.5.17)$$

$$\psi_{2,1} = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad (3.5.18)$$

$$\varphi_{3,0} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (3.5.19)$$

$$\psi_{3,0} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (3.5.20)$$

Estas Wavelets, son mapeos en la figura 21. Las Wavelets padre, son descritos con color, las wavelets madre con puntos negros. Posteriormente, las Wavelets se diferencian de acuerdo con el color, para distinguirlos del nivel: nivel uno, rojo, nivel dos, azul, y el tercer nivel, morado.

La base de Haar se utiliza para el análisis de señales, que son en el tiempo, constantes.

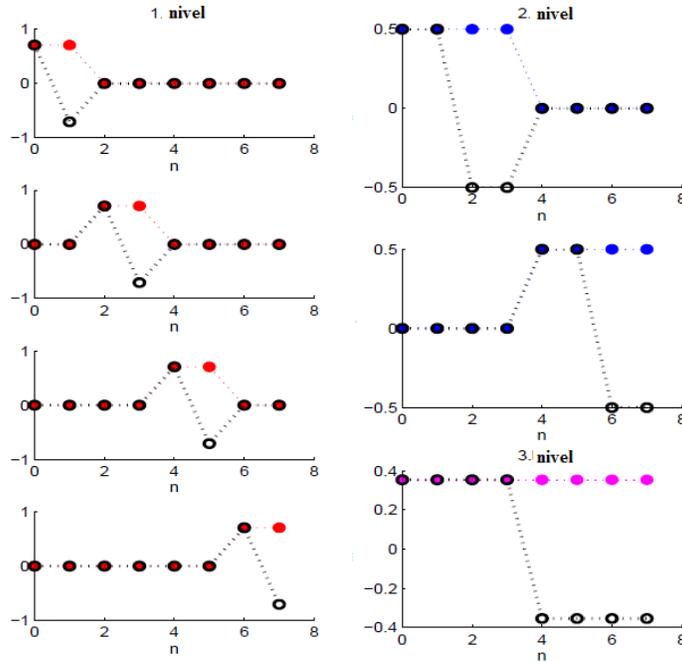


Figura 21. Wavelets Haar,  $N = 8$ . Adaptado de [27]

### 3.5.2. Base de Shannon

La base de Shannon es definida, para que sus filtros eliminen frecuencias bajas y altas. Recordemos que las frecuencias altas están a cargo de  $F_m$  (vectores de la base de Fourier) para un número  $m$  de vectores (la mitad cercana). Las frecuencias bajas, en cambio, son vectores  $F_m$ , en donde  $m$  es cercano de cero (0), o una longitud de vectores  $N$ . Quedémonos en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , donde  $N = 2^p$  son las frecuencias más altas que existen en el vector  $F_{\frac{N}{2}-1}$ , y en  $F_{\frac{N}{2}}$ , y las frecuencias más bajas son  $F_0$ ,  $F_{N-1}$ .

**Definición 3.5.2:** Tomemos el caso cuando  $N$  es divisible por 4, como ilustración. Entonces los filtros wavelet de primer nivel de la base de Shannon son definidos por medio de DFT:

$$\hat{u}_1(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \dots n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\right\} \cup \left\{\frac{3N}{4}, \dots, N - 1\right\}, \\ 0 & \dots n \in \left\{\frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4} - 1\right\}, \end{cases} \quad (3.5.21)$$

$$\hat{v}_1(n) = \begin{cases} 0 & \dots n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\right\} \cup \left\{\frac{3N}{4}, \dots, N - 1\right\}, \\ \sqrt{2} & \dots n \in \left\{\frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4} - 1\right\}, \end{cases} \quad (3.5.22)$$

Para el nivel general de filtros de wavelet,  $u_l, v_l$ , es válido que:  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ , donde  $l = 1, \dots, p$ . Su forma es:

$$\hat{u}_l(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \dots n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{2^{l+1}} - 1\right\} \cup \left\{\frac{3N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1\right\}, \\ 0 & \dots n \in \left\{\frac{N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{3N}{2^{l+1}} - 1\right\}, \end{cases} \quad (3.5.23)$$

$$\hat{v}_l(n) = \begin{cases} 0 & \dots n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{2^{l+1}} - 1\right\} \cup \left\{\frac{3N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1\right\}, \\ \sqrt{2} & \dots n \in \left\{\frac{N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{3N}{2^{l+1}} - 1\right\}, \end{cases} \quad (3.5.24)$$

Para obtener los valores de los filtros  $u, v$ , tenemos que calcular la IDFT de estas imágenes, de esta manera, es válido:

$$u_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{u}_1(m) e^{2\pi jmn/N} \quad (3.5.25)$$

Para el vector  $v_l(n)$  es válida la relación de manera análoga. Reemplazando en la expresión, se obtiene:

$$u(0) = v(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.5.26)$$

$$u(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} \cdot e^{-j\pi n/N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)} \quad (3.5.27)$$

$$v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} \cdot (-1)^n \cdot e^{-j\pi n/N} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)} \quad (3.5.28)$$

Donde  $n = 1, \dots, N - 1$ . En la figura 22 se muestra la base de Shannon para  $N = 32$ . Con azul se muestra la Wavelet padre, y con rojo, la wavelet madre.

Las Wavelets de Shannon son construidas de manera tal, que dividan el espectro de frecuencias de manera aguda. Para  $N$  pequeños, las wavelets son amplias, pero con  $N$  incrementándose, la wavelet se hace más angosta y su amplitud se hace más grande.

La base de Shannon se usa para el análisis de señales, las cuales son, en frecuencia, constantes, por partes.

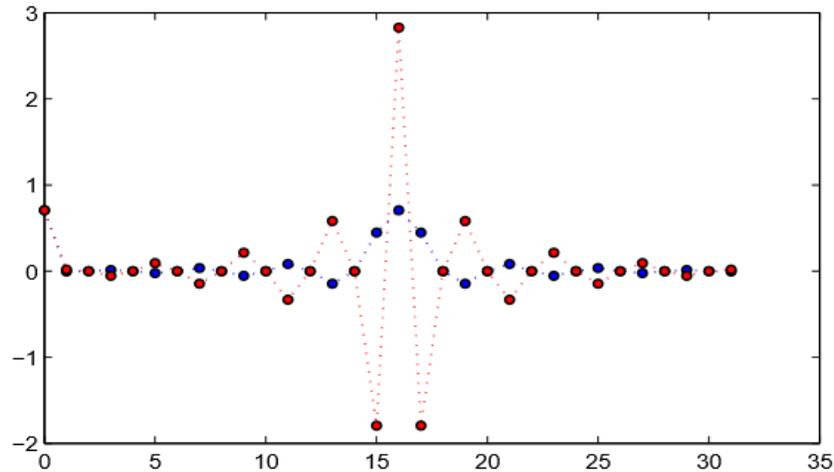


Figura 22. Base de Shannon. [27]

### 3.5.3. Wavelets Daubechies D2P

Las Wavelets de Daubechies D2P son, a diferencia del sistema de Shannon, definidas en el tiempo. Estas Wavelets son específicas, porque tienen  $2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , estos son coeficientes diferentes de cero (por ello, la notación de D2P). Por ahora, no es necesario conocer el significado de estas wavelets. Sin embargo, para la transformada Wavelet en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$ , estos coeficientes tienen una importancia significativa. El número finito de coeficientes diferentes de cero (de soporte compacto), de los filtros wavelet, tiene en este caso, como consecuencia que, la convolución de estos filtros y el vector analizado se puede escribir como una suma finita.

Para poder analizar un vector  $z$ , de longitud  $N$ , entonces  $N$ , debe ser divisible por  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , y más aún,  $N/2^p > 2p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , donde  $p$  es el nivel máximo del filtro Wavelet. Nuestro objetivo, es construir un vector  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , que tiene apenas  $2p$  coeficientes distintos de cero.

Después de encontrar ese determinado vector  $u$ , entonces ya podemos calcular  $v$ , y de este par, se calcula la base Wavelet. El principio básico de la construcción del vector  $u$ , es mostrada en un caso concreto, por ejemplo, la construcción del filtro D6, mostrada a continuación.

La construcción del vector  $u$ , comienza con la identidad:

$$\left(\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right)^5 = 1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.5.29)$$

Donde el exponente es, en el caso general, igual a  $2p - 1$ . Esta expresión se reescribe con la expresión binomial:

$$\begin{aligned} \cos^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^8\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\cos^4\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) \\ + 5\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^8\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \sin^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) = 1 \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

En cualquier caso, debido a que  $N$  es par,  $N = 2M$ , se observan las propiedades de la función seno, y coseno, durante el desplazamiento de  $M$ :

$$\cos\left(\frac{\pi(n+M)}{N}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (3.5.31)$$

$$\sin\left(\frac{\pi(n+M)}{N}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (3.5.32)$$

Volviendo a la identidad del binomio:

$$b(n) = \cos^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^8\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (3.5.33)$$

$$b(n+M) = 10\cos^4\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^8\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \sin^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (3.5.34)$$

$$b(n) + b(n+M) = 1, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.5.35)$$

Observamos que,

$$2b(n) + 2b(n+M) = 2 \quad (3.5.36)$$

Por lo tanto, es evidente que se cumple,

$$|\hat{u}(n)|^2 = 2b(n) \quad (3.5.37)$$

$$2b(n) + 2b(n+M) = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 = 2 \quad (3.5.38)$$

$$|\hat{u}| = \sqrt{2b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b} \quad (3.5.39)$$

$$b(n) = \cos^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^8\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) \quad (3.5.40)$$

$$b(n) = \cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \cos^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right] \quad (3.5.41)$$

$$b(n) = \cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \left( \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \sqrt{10} \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right)^2 + (5 + 2\sqrt{10}) \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right] \quad (3.5.42)$$

Definimos al vector,  $\hat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ :

$$\hat{u}(n) = \sqrt{2} e^{-5\pi j n/N} \cdot \cos^3\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \sqrt{10} \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + j \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right] \quad (3.5.43)$$

De esta manera definido el vector  $u$ , la ecuación es válida. Hemos utilizado,  $a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb)$ .

$$\begin{aligned} \hat{u}(n) &= \sqrt{2} e^{-2\pi j 4n/N} e^{3\pi j n/N} \left( \frac{e^{j\pi n/N} + e^{-j\pi n/N}}{2} \right)^3 \cdot \\ &\left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) - \frac{\sqrt{10}}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) + j \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{2} \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.5.44)$$

Dentro de los corchetes, multiplicamos y simplificamos las funciones trigonométricas, las cuales, posteriormente reescribimos como exponenciales complejas. Las constantes:

$$a = 1 - \sqrt{10}, \quad b = 1 + \sqrt{10}, \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \quad (3.5.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(n) &= \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-2\pi j 4n/N} (e^{2\pi j n/N} + 1)^3 \left[ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} (e^{2\pi j n/N} + e^{-2\pi j n/N}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{4} (e^{2\pi j n/N} - e^{-2\pi j n/N}) \right] \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

De los paréntesis, simplificamos  $1/4$ , y corregimos sólo la parte derecha:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{32} e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} (e^{2\pi j \frac{n}{N}} + 1)^3 \left[ 2a + b (e^{2\pi j \frac{n}{N}} + e^{-2\pi j \frac{n}{N}}) + c (e^{2\pi j n/N} - e^{-2\pi j \frac{n}{N}}) \right] = \\ &\frac{\sqrt{2}}{32} e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} (e^{2\pi j \frac{3n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{n}{N}} + 1) \left[ 2a + e^{2\pi j \frac{n}{N}} (b + c) + e^{-2\pi j \frac{n}{N}} (b - c) \right] = \\ &\frac{\sqrt{2}}{32} (e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}}) \left[ 2a + e^{2\pi j \frac{n}{N}} (b + c) + e^{-2\pi j \frac{n}{N}} (b - c) \right] = \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

Posteriormente,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{32} 2a (e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}}) + \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c) (1 + 3e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-3n}{N}}) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{32} (b - c) (e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-5n}{N}}) = \end{aligned} \quad (3.5.48)$$

Finalmente, simplificamos la misma exponencial:

$$= \frac{\sqrt{2}}{32} \left[ \begin{array}{l} e^0(b+c) + e^{2\pi j \frac{-n}{N}}(2a+3b+3c) + e^{2\pi j \frac{-2n}{N}}(6a+4b+2c) \\ + e^{2\pi j \frac{-3n}{N}}(6a+4b-2c) + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}}(2a+3b-3c) + e^{2\pi j \frac{-5n}{N}}(b-c) \end{array} \right] \quad (3.5.49)$$

Ahora, se puede observar, que se puede escribir,  $u(n)$ , como la DFT del vector  $u(k)$ :

$$\hat{u}(n) = \sum_{k=0}^5 u(k) e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} \quad (3.5.50)$$

En donde el vector  $u(k)$  es:

$$u(k) = \frac{\sqrt{2}}{32} (b+c, 2a+3b+3c, 6a+4b+2c, 6a+4b-2c, 2a+3b-3c, b-c, 0, \dots) \quad (3.5.51)$$

Los otros coeficientes del vector  $u$ , son cero (coeficientes 6, ...,  $N-1$ ). Es decir, que no depende de la longitud del vector analizado.

Para  $p = 1$ , obtenemos wavelets D2, las cuales son Wavelets de Haar.

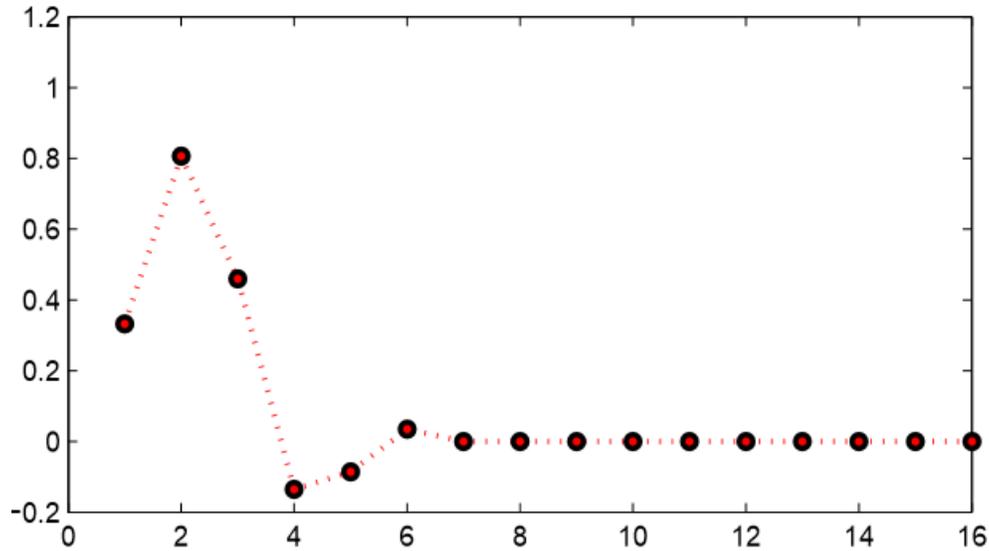


Figura 23. Wavelets de Daubechies, D6, N=16. [27]

## CAPÍTULO 4. OBTENCIÓN Y EVALUACIÓN DEL CODIFICADOR WAVELET

### 4.1. Diseño del codificador perceptual de audio basado en la transformada Wavelet

El sistema de codificación con la transformada Wavelet, de manera genérica, se ilustra en la figura 24.



*Figura 24. Diseño del codificador perceptual de audio con la Transformada Wavelet. Fuente: Autor*

Los últimos dos bloques, no son concernientes a la presente investigación, debido a que este proyecto no está enfocado, en evaluar el rendimiento de distintos métodos de codificación entrópica (por ej. al estilo Huffman), ni tampoco evaluar, los distintos métodos de cuantificación (como p.ej. lineal/vectorial, fijo/movible).

Debido a que la investigación está enfocada en evaluar el rendimiento del codificador, empleando distintos codificadores perceptuales de audio, entonces, solamente se va a modificar la primera de las cajas-negra, observadas, en la figura 24.

La compresión de señales sonoras es un desarrollo que usa técnicas de tratamiento de señales digitales para reducir el contenido de una señal, lo cual se necesita para transmitir señales de audio en los anchos de banda pre–establecidos.

La reducción de datos es efectuada con la eliminación de partes redundantes e irrelevantes en la información de audio [1]. Los codificadores de audio sin pérdida reducen solamente la información redundante, mientras que los codificadores de audio con pérdidas (ó perceptuales) reducen tanto la información redundante como la irrelevante. La información redundante es reducida, gracias a la

descripción de la señal, y tiene que ser reconstruida en el decodificador, mientras que la información irrelevante es eliminada del sonido original y no es reconstruida. La tarea de los codificadores perceptuales es eliminar la mayor cantidad de información irrelevante sin influenciar en la calidad de audio.

En este proyecto de investigación se describen los principios de compresión perceptual de señales de sonido, hace una introducción a la psicoacústica que proporciona las bases para la compresión de audio y discute las técnicas de procesamiento digital de señales usadas en este tópico. Los principios de la transformada Wavelet son también descritos, y su aplicación para la codificación de señales de sonido.

Los primeros codificadores perceptuales fueron basados en “La Banca de Filtros de Espejo de Pseudo-Cuadratura” (*Pseudo Quadrature Mirror Filter–PQMF*) [1]. Posteriormente fueron presentados codificadores basados en la “Transformada Discreta de Cosenos Modificada (MDCT)”, con una mejor tasa de compresión [1]. Desarrollos posteriores fueron enfocados principalmente en la mejoría de modelos psicoacústicos y el desarrollo de codificación de audio predictiva. Los mejores codificadores de audio de la actualidad transmiten parámetros para la predicción de la señal y los datos de compresión residuales [1]. Ejemplos de tales modelos son un codificador perceptual libre, como el Ogg Vorbis, o el estándar AAC (*Advanced Audio Coding*)[1]. Diferentes ramificaciones de compresión de audio presentan codificación sin pérdidas, que son usados para almacenamiento profesional de audio y transmisión. Debido a que no hay pérdida de calidad, el audio decodificado es totalmente igual que el original.

Los codificadores perceptuales de audio basados en la transformada Wavelet representan el siguiente paso lógico en la evolución de codificadores. De esta manera se esperan resolver algunas dificultades particulares (artefactos de compresión) asociados con la codificación de audio basada en MDCT. Varios autores han diseñado codificadores de audio [31] que usan filtros Wavelet en vez de una banca de filtros MDCT, pero ninguno de ellos es actualmente usado.

Basado en los principios de codificación perceptual de audio se diseñó un codificador de audio basado en la Transformada Wavelet. El objetivo del presente proyecto es diseñar un codificador perceptual que garantice una calidad subjetiva de la señal sonora codificada comparable a la señal original.

Además de esto, el desarrollo del proyecto busca contribuir al desarrollo de la industria en el país, tanto a nivel tecnológico como a nivel social, mediante la creación de dispositivos propios especializados de audio, que sean capaces de competir con el mercado actual tanto en calidad como en innovación en aspectos funcionales y tecnológicos.

#### **4.1.1. Principios Psicoacústicos del Codificador Perceptual**

La psicoacústica es una rama de la ciencia que estudia el sistema auditivo humano desde el punto de vista de la percepción subjetiva de los sonidos. La psicoacústica es una ciencia formada a partir de contribuciones de la acústica y la psicología, ver [32].

Los fenómenos descritos por la psicoacústica son la base para la codificación perceptual de señales de audio. Todos los codificadores contienen modelos psicoacústicos que analizan la señal de acuerdo con principios dados por la psicoacústica. El modelo psicoacústico describe los límites entre los sonidos perceptibles e imperceptibles.

Esta parte del Capítulo realiza una corta introducción a los principios psicoacústicos que son fundamentales para la compresión de señales sonoras. Una detallada descripción de los temas y otras temáticas sobre psicoacústica pueden ser encontradas en [33].

**Umbral de audibilidad:** Los humanos pueden percibir señales sonoras con frecuencias desde 16 Hz hasta 20 kHz. La sensibilidad del sistema auditivo humano también varía con la frecuencia. Sonidos con frecuencias muy bajas o muy altas se hacen audibles tan sólo a niveles altos, mientras que sonidos con frecuencias de 1 a 5 kHz son audibles a niveles más bajos. El límite entre sonidos audibles e inaudibles (en silencio) es descrito por el “Umbral de Audición”.

La forma del umbral de audición es individual y también varía con la edad y el estado de salud.

**Enmascaramiento:** Los codificadores perceptuales de audio, realizan su labor, descartando componentes, que incluso si fuesen codificados, no serían audibles, debido a:

- 1) Que estarían por fuera del rango audible perceptual determinado por las curvas de igual sonoridad.

- 2) Debido a enmascaramiento simultáneo de frecuencia: cuando dos señales, cercanas en frecuencia, tienen niveles de sonoridad muy distintos (la una, tiene una sonoridad bastante considerable, y la otra, no), entonces la de mayor sonoridad enmascara a la segunda, basada en la modificación de la curva de igual sonoridad correspondiente.
- 3) Enmascaramiento temporal (pre-enmascaramiento, post-enmascaramiento): Si un sonido de un nivel de sonoridad considerable, suena algunos milisegundos después de un sonido tenue, este último se verá enmascarado. Lo mismo, para el caso contrario (el sonido de gran intensidad suena, y posteriormente el sonido leve) [1].

Debido a la presencia de una señal enmascaradora (con mayor intensidad), una señal de intensidad débil es enmascarada. El enmascaramiento en frecuencia también puede ser descrito por la curva de enmascaramiento.

Los efectos de enmascaramiento han sido profundamente investigados por varios autores y varios modelos de enmascaramiento frecuencial han sido realizados. Los modelos más simples aproximan la curva de enmascaramiento de un tono puro con dos rectas, mientras que los avanzados utilizan curvas de enmascaramiento más sofisticadas, dependientes del nivel y de la frecuencia.

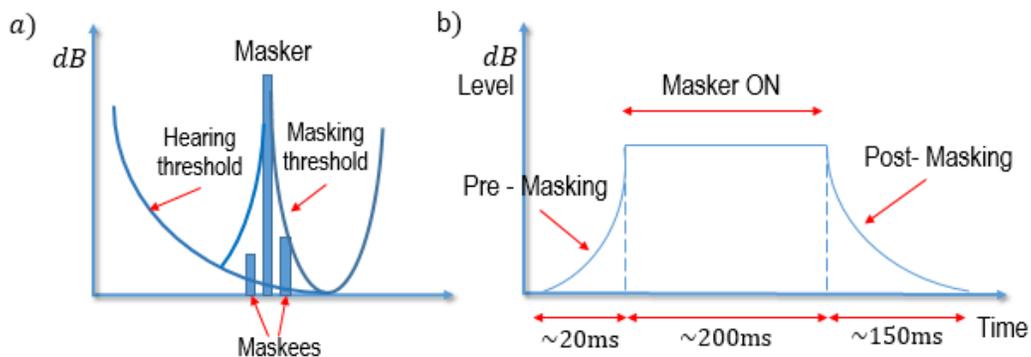


Figura 25. a) Enmascaramiento frecuencial y b) Enmascaramiento temporal. Adaptado de [1]

#### 4.1.2. Codificación Perceptual de Audio

Todos los sistemas de codificación de audio usan algoritmos similares, porque ellos están basados en los mismos principios psicoacústicos. En general la reducción de datos es realizada, eliminando la información que no es perceptible. Esta tarea puede ser implementada con la re-cuantificación de la señal codificada, eliminando (redondeando) algunos componentes espectrales.

Esta sección describe las técnicas más importantes que son generalmente usadas en compresión de audio. Para una mayor descripción, ver [1] y [34].

*Codificador de audio genérico:* Todos los codificadores de audio actuales están basados en los mismos principios psicoacústicos, de manera que su estructura interna es muy similar. Un ejemplo de tal codificador es mostrado en la figura 26.

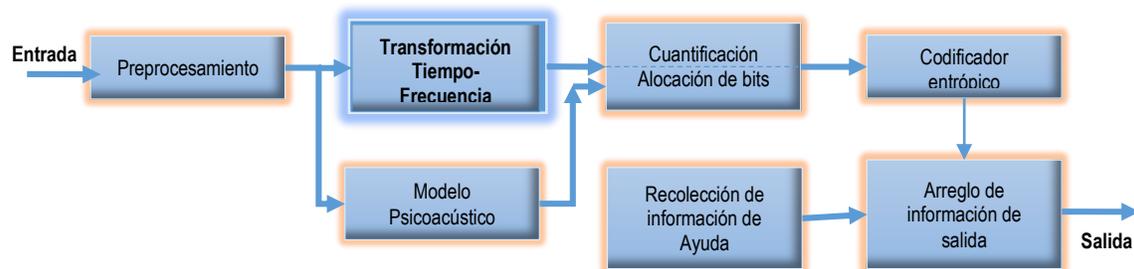


Figura 26. Diagrama de bloques del codificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1]

A continuación se describe cada uno de los bloques de la figura 26 del codificador perceptual de audio.

### **Pre-procesamiento.**

Una señal de entrada es pre-procesada para suplir los requisitos del codificador. Una señal de entrada debe ser normalizada, por ejemplo. El bloque de pre-procesamiento no necesita ser usado por los codificadores, algunas veces se toma como parte del codificador [1].

### **Transformación tiempo-frecuencia**

Antes que cualquier reducción de datos sea realizada, la señal es transformada. La mayoría de los codificadores perceptuales actuales usan “Filtros Espejo de Pseudo-Cuadratura (PQMF)”, o la “Transformada Modificada de Cosenos Discreta (MDCT)”.

La banca de filtros PQMF divide una señal de entrada en varias sub-bandas. La compresión de datos de audio es realizada en estas sub-bandas [1]. MDCT transforma una señal de entrada a su representación frecuencial, de manera que la compresión de datos es realizada en el dominio de la

frecuencia [1]. Los codificadores basados en filtros PQMF usualmente tienen peor tasa de compresión que los codificadores basados en MDCT, mientras que los basados en MDCT tienen problemas con la generación de artefactos de compresión tales como pre-eco, etc [1].

### **Modelo Psicoacústico**

El modelo psicoacústico analiza la señal codificada desde el punto de vista perceptual. Basado en principios psicoacústicos tales como enmascaramiento temporal y frecuencial y el umbral de audición, el modelo psicoacústico analiza la señal codificada para que supla los parámetros de la compresión de datos, lo cual es realizado por otros bloques del sistema [1]. Una salida del modelo psicoacústico es la curva de enmascaramiento o la relación señal-enmascaramiento (SMR) [1]. La curva de enmascaramiento es el límite frecuencial entre sonidos perceptibles e imperceptibles. Todos los sonidos que se ubican bajo esta curva son imperceptibles y pueden ser removidos u otros sonidos pueden ser insertados bajo ella sin ninguna influencia en la percepción. SMR es un valor que caracteriza la distancia de un componente espectral a partir de la curva de enmascaramiento. Los valores negativos denotan que los componentes espectrales se ubican bajo la curva de enmascaramiento y no es perceptible.

### **Formateo de bits y cuantificación**

El formateo de bits, de acuerdo con la información del bloque psicoacústico determina los parámetros para la compresión de datos. En el caso de los codificadores basados en PQMF, esto significa el número de bits para la re-cuantificación para cada banda de frecuencia.

El bloque de cuantificación realiza compresión de datos de acuerdo con los parámetros del bloque de localización de bits. La compresión de datos es realizada exclusivamente por este bloque, los otros bloques sólo reorganizan los datos.

### **Codificación entrópica**

La mayoría de los codificadores usan codificación entrópica para incrementar la tasa de compresión. Los algoritmos de codificación entrópica son sin pérdidas, sin reducción de la información. El remapeo del código, basado en la ocurrencia de frecuencia de los caracteres es usado. El codificador

entrópico analiza la señal de entrada y luego asigna un código menor a caracteres más probables, mientras que caracteres menos probables son codificados con códigos mayores. Los datos son codificados, de acuerdo con esta asignación. La tasa de compresión del codificador entrópico depende del carácter de los datos codificados y de su distribución estadística y por lo tanto varían bastante.

### Recolección de información lateral.

Toda la información que es requerida para una reconstrucción satisfactoria de los datos originales es coleccionada por este bloque. La cantidad y el tipo de información dependen del codificador particular.

### Formación de datos de salida

Cada codificador tiene su propio formato del flujo de datos de salida y describe el multiplexado del audio codificado y toda la información de servicio, es decir, la manera en como se divide la señal en segmentos, y como cada segmento se procesa.

Se diseñó e implementó un decodificador genérico de audio en este proyecto de investigación, el código fuente del compresor de audio fue programado en MatLab, basado en la transformada wavelet, ver anexo 1. Todos los sistemas de compresión de audio son diseñados para tener un decodificador tan simple como sea posible, un ejemplo de un decodificador así es mostrado en la figura 27, note que en general no existe un modelo psicoacústico y un bloque de alocaación de bits. Otros bloques tienen su opuesto con una función reversa [1].

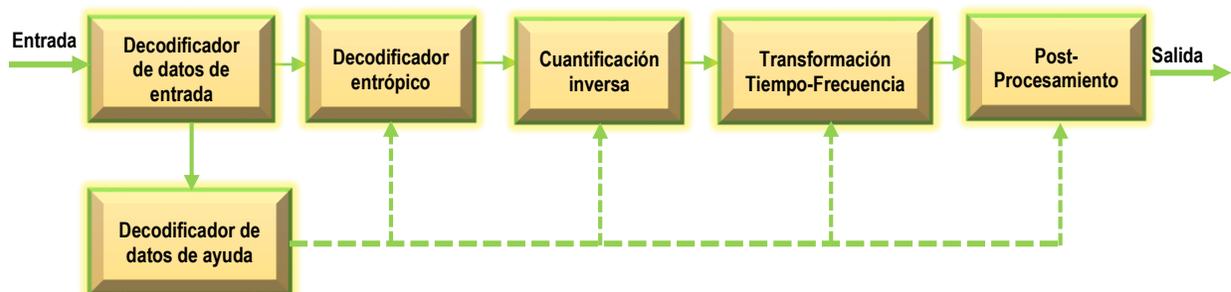


Figura 27. Diagrama de bloques del decodificador perceptual de audio genérico. Adaptado de [1]

## 4.2. Comparación del rendimiento de los distintos tipos de Wavelet

Un número determinado de parámetros cuantitativos puede ser usado para evaluar el rendimiento del códec (codificador–decodificador), en términos de la calidad de la señal reconstruida, después de tener identificados los indicadores de compresión. Los siguientes parámetros PSNR, RMS, NRMSE, RSE y CR son definidos a continuación, ver [35] y luego comparados de la tabla 1 hasta la tabla 9:

Como parámetros objetivos tenemos las siguientes expresiones que se utilizan para calcular el desempeño del codificador:

El error medio cuadrático (Root-Mean-Square -RMS): es el valor RMS de un conjunto de valores (o de una forma de onda continua) es la raíz cuadrada del promedio aritmético de los cuadrados de los valores, o el cuadrado de la función que define la forma de onda continua. En física, la corriente RMS es el valor de la corriente directa que disipa potencia en un resistor.

Las tasas de compresión (Compression Ratio -CR): manera simple de medir el desempeño del algoritmo de compresión.

### 4.2.1. Relación señal-a-ruido (Signal to noise ratio-SNR)

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) \quad (4.2.1)$$

$\sigma_x^2$  es el cuadrado medio de la señal de audio, y  $\sigma_e^2$  es la diferencia de cuadrados medios, entre la señal original y la señal comprimida.

### 4.2.2. Valor pico de la relación señal-ruido (Peak signal to noise ratio –PSNR)

La tasa del valor pico de la relación señal/ruido es la razón entre la máxima posible potencia de la señal y la potencia del ruido que afecta la fidelidad de su representación.

$$PNSR = 10 \log_{10} \frac{NX^2}{\|x - r\|^2} \quad (4.2.2)$$

$N$  es la longitud de la señal comprimida,  $X$  es el valor máximo del valor absoluto del cuadrado de la señal  $x$ , y  $\|x - r\|^2$ , es la energía de la diferencia entre la señal original y la señal comprimida.

#### 4.2.3. Valor del error normalizado de RMS (Normalized Root Mean Square Error - NRMSE)

El error normalizado de RMS es la desviación RMS, o el error RMS, es una medida de la diferencia entre los valores predichos por un modelo y los valores observados. Estas diferencias individuales se llaman residuales cuando los cálculos se hacen a través de datos de muestras que fueron usados para la estimación.

$$NRMSE = \sqrt{\frac{(x(n) - r(n))^2}{(x(n) - \mu_x(n))^2}} \quad (4.2.3)$$

$x(n)$  es la señal original,  $r(n)$ , es la señal comprimida, y  $\mu_x(n)$ , es el valor medio de la señal de audio.

#### 4.2.4. Energía de la Señal Retenida (Retained signal energy –RSE)

$$RSE(\%) = \frac{\|x(n)\|^2}{\|r(n)\|^2} * 100 \quad (4.2.4)$$

$\|x(n)\|$  es la norma de la señal original, y  $\|r(n)\|$  es la norma de la señal comprimida.

Al compilar el codificador en MatLab, ver anexo 1, se muestra en la salida, el análisis correspondiente a las variables que el compresor arroja como resultado, por ejemplo la señal de salida o el tiempo de cálculo entre otras, estos resultados se organizan en una tabla, con seis columnas compuestas de la siguiente manera: nombre de la transformada, número de coeficientes del filtro paso–alto, número de coeficientes del filtro paso–bajo, tiempo de computo de la operación en segundos, sumatoria de la diferencia entre la señal comprimida y la señal original al cuadrado y la raíz cuadrada de la misma.

#### Resultados de la evaluación de diferentes transformadas, basados en parámetros objetivos

Se evaluaron inicialmente tres posibilidades de descomposición: Con cinco (5) niveles de descomposición, con tres (3) niveles y con ocho (8). Para cada posibilidad se calculó la carga computacional (en tiempo de procesamiento), el número de coeficientes de la aproximación de paso–bajo, el número de coeficientes de la aproximación de paso–alto, y la diferencia entre la señal original y la señal codificada perceptualmente.

La notación para estos parámetros objetivos es la siguiente:

*C*: es el número de coeficientes del filtrado paso–alto.

*L*: es el número de coeficientes del filtrado paso–bajo.

*Time*: Tiempo, es el tiempo de cómputo de la operación, en segundos,

*Sum*: corresponde, a:

$$sum = \sum (x - x_{orig})^2 \quad (4.2.5)$$

*Sqrt(sum)*: corresponde a la raíz cuadrada de la ecuación (4.2.5)

$$Sqrt(sum) = \sqrt{\sum (x - x_{orig})^2} \quad (4.2.5)$$

De estas posibilidades se seleccionó la que mejor cumplió con estos parámetros objetivos, y luego se realizó una evaluación subjetiva, hecha a personas (15–20 personas) donde evaluaron preferencias y gustos y después se hace un análisis estadístico, que será explicado en la sección 4.3.

En la tabla 1 se observa los resultados objetivos para el nivel 5 de descomposición.

*Tabla 1. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo Daubechies, con cinco niveles de descomposición*

wavelets	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>Time</i>	<i>sum</i>	<i>sqrt(sum)</i>
db1	1756	7	12,6379	298,9295	17,2896
db2	1765	7	12,8034	308,7146	17,5703
db3	1776	7	12,789	300,9443	17,3477
db4	1786	7	11,7725	311,1796	17,6403
db5	1797	7	12,9093	315,3497	17,7581
db6	1805	7	12,901	308,1824	17,5551
db7	1816	7	12,8125	313,2447	17,6987
db8	1826	7	12,872	315,2037	17,7540
db9	1837	7	12,6972	313,0693	17,6938
db10	1846	7	12,3535	314,5728	17,7362
db11	1857	7	13,3944	311,9508	17,6621
db12	1867	7	13,2712	322,1515	17,9486
db13	1878	7	13,3383	314,1946	17,7255
db14	1884	7	13,3886	317,0755	17,8066
db15	1895	7	13,4659	312,9303	17,6898
db16	1905	7	13,6813	317,2817	17,8124
db17	1916	7	13,6077	323,5933	17,9887
db18	1925	7	13,6049	319,2684	17,8681
db19	1936	7	13,7878	308,7416	17,5710
db20	1946	7	14,935	314,8872	17,7451
db21	1957	7	14,8811	327,4225	18,0948
db22	1965	7	15,0276	313,595	17,7086
db23	1976	7	14,9099	317,3801	17,8152
db24	1986	7	15,8024	319,6419	17,8785
db25	1997	7	15,4574	318,9116	17,8581
db26	2006	7	15,5441	321,6767	17,9353
db27	2017	7	15,6883	312,757	17,6849
db28	2027	7	15,9186	318,5111	17,8469
db29	2038	7	16,4256	316,1163	17,7797

db30	2044	7	16,4922	325,3294	18,0369
db31	2055	7	16,881	309,8642	17,6030
db32	2065	7	16,9299	318,2045	17,8383
db33	2076	7	17,6583	319,998	17,8885
db34	2085	7	18,5135	314,2805	17,7280
db35	2096	7	17,9432	319,6628	17,8791
db36	2106	7	18,3559	316,4384	17,7887
db37	2117	7	18,5185	321,5916	17,9330
db38	2125	7	19,9066	321,5518	17,9319
db39	2136	7	20,6602	322,0681	17,9463
db40	2146	7	20,6111	319,895	17,8856
db41	2157	7	21,4162	321,3241	17,9255
db42	2166	7	22,3325	317,5216	17,8191
db43	2177	7	22,607	310,0288	17,6076
db44	2187	7	22,9435	322,6725	17,9631
db45	2198	7	23,098	317,2825	17,8124

De este primer test, en la tabla 1 se puede observar que para los valores de  $C$ , correspondientes al número de coeficientes del filtrado paso–alto, aumenta a medida que se incrementa el nivel en la Wavelet Daubechies. El tiempo de cómputo, para las Wavelet Daubechies de orden mayor también aumenta significativamente. Lo mismo sucede para la métrica del error. Una segunda observación a la tabla 1, nos permite identificar, sin embargo, que para la Wavelets tipo Daubechies 4, los resultados de estos valores son óptimos, y representa un buen compromiso de descomposición.

En la tabla 2 se observa ahora, otros tipos de wavelets, como lo son: coif y sym, con 5 niveles de descomposición.

*Tabla 2. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo coif y sym, con cinco niveles de descomposición*

wavelets	$C$	$L$	Time	sum	$\sqrt{\text{sum}}$
coif1	1776	7	12,7539	306,3758	17,5036
coif2	1805	7	12,5950	321,8380	17,9398
coif3	1837	7	12,8147	311,8822	17,6602
coif4	1867	7	15,9902	314,7240	17,7405
coif5	1895	7	13,8368	318,9162	17,8582
sym2	1765	7	13,3420	308,7146	17,5703
sym3	1776	7	13,2853	300,9443	17,3477
sym4	1786	7	13,1079	314,0810	17,7223
sym5	1797	7	13,2715	311,1245	17,6387
sym6	1805	7	13,4312	313,3338	17,7012
sym7	1816	7	12,9619	301,9224	17,3759
sym8	1826	7	13,7019	315,1153	17,7515
sym9	1837	7	14,9936	309,8769	17,6033
sym10	1846	7	16,4494	305,7097	17,4846
sym11	1857	7	16,2733	308,8923	17,5753
sym12	1867	7	20,0302	316,7929	17,7987
sym13	1878	7	19,9477	310,4589	17,6198
sym14	1884	7	27,1258	321,9300	17,9424
sym15	1895	7	26,5235	307,3094	17,5302
sym16	1905	7	42,9946	318,7433	17,8534
sym17	1916	7	42,4067	321,9150	17,9420
sym18	1925	7	77,5711	312,2873	17,6717
sym19	1936	7	77,7934	307,6589	17,5402
sym20	1946	7	162,2272	314,2957	17,7284
sym21	1957	7	159,5785	311,2802	17,6431

sym22	1965	7	343,6130	320,8727	17,9129
sym23	1965	7	345,8507	307,8195	17,5448
sym24	1986	7	731,1472	305,9551	17,4916
sym25	1997	7	723,0000	314,2234	17,7263
sym26	2006	7	1594,3000	312,2046	17,6693
sym27	2017	7	1686,6000	302,3937	17,3895

En este caso, se puede observar en la tabla 2, mayores diferencias en los diferentes tipos de descomposición. Los valores para los Wavelets coif (coif2 siendo el mejor de ellos), representan una solución interesante.

En cuanto al valor del error, el valor para la Wavelet sym3 es bastante bajo, lo cual puede indicar un buen rendimiento. Sin embargo, un buen compromiso entre tiempo de procesamiento y error, es la sym7.

En la tabla 3 se observa otros tipos de wavelets, como lo son: dmey, bior y rbio, con 5 niveles de descomposición.

*Tabla 3. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo dmey, bior y rbio, con cinco niveles de descomposición*

wavelets	C	L	Time	sum	sqrt(sum)
dmey	2256	7	14,8029	322,7558	17,9654
bior1.1	1756	7	13,8755	298,9225	17,2894
bior1.3	1776	7	13,2334	338,6728	18,4031
bior1.5	1797	7	13,3382	344,3395	18,5564
bior2.2	1776	7	13,1449	301,7639	17,3714
bior2.4	1797	7	13,0802	306,8247	17,5164
bior2.6	1816	7	13,3438	320,6699	17,9073
bior2.8	1837	7	13,2464	321,1309	17,9201
bior3.1	1765	7	13,1204	641,0644	25,3192
bior3.3	1786	7	13,3230	357,1021	18,8971
bior3.5	1805	7	13,1086	343,3338	18,5293
bior3.7	1826	7	13,2549	341,7054	18,4853
bior3.9	1846	7	13,2044	337,9029	18,3821
bior4.4	1797	7	12,9681	299,2584	17,2991
bior5.5	1805	7	13,1702	306,7472	17,5142
bior6.8	1837	7	12,8724	305,9484	17,4914
rbio1.1	1756	7	12,7585	298,9295	17,2896
rbio1.3	1776	7	13,0655	300,6401	17,3390
rbio1.5	1797	7	13,1765	302,2310	17,3848
rbio2.2	1776	7	12,9847	392,3876	19,8088
rbio2.4	1797	7	13,1428	353,2927	18,7961
rbio2.6	1816	7	13,0040	350,7218	18,7276
rbio2.8	1837	7	13,3102	348,8001	18,6762
rbio3.1	1765	7	13,3896	4440,4000	66,6363
rbio3.3	1786	7	13,4295	693,5949	26,3362
rbio3.5	1805	7	13,0599	518,7129	22,7753
rbio3.7	1826	7	13,4544	477,0828	21,8422

rbio3.9	1846	7	13,3501	464,3951	21,5498
rbio4.4	1797	7	13,1228	342,3081	18,5016
rbio5.5	1805	7	13,2086	334,7493	18,2962
rbio6.8	1837	7	13,1195	328,8513	18,1343

En la tabla 3, se puede observar que la Wavelet bior4.4 representa un compromiso adecuado entre el tiempo de procesamiento y el error.

Observamos ahora los mismos tipos de Wavelet que fueron analizadas en las tablas 1, 2 y 3, pero con un diferente nivel de descomposición en las tablas 4, 5 y 6 (3 niveles):

En la tabla 4 se observa el tipo de wavelets daubechies, con 3 niveles de descomposición.

*Tabla 4. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo daubechies, con tres niveles de descomposición*

<b>wavelets</b>	<b>C</b>	<b>L</b>	<b>Time</b>	<b>sum</b>	<b>sqrt(sum)</b>
db1	1756	5	16,4524	87595	295,9645
db2	1760	5	14,2230	97417	312,1170
db3	1767	5	14,3711	92813	304,6523
db4	1773	5	13,7467	99765	315,8560
db5	1780	5	13,8724	96321	310,3562
db6	1784	5	14,1357	95866	309,6224
db7	1791	5	10,6370	103370	321,5121
db8	1797	5	13,2864	104960	323,9753
db9	1804	5	14,1470	98423	313,7244
db10	1808	5	13,6778	103830	322,2266
db11	1815	5	13,6029	105310	324,5150
db12	1821	5	13,7600	103710	322,0404
db13	1828	5	14,0340	104480	323,2337
db14	1832	5	13,9354	100900	317,6476
db15	1839	5	13,7752	100260	316,6386
db16	1845	5	14,0000	103570	321,8229
db17	1852	5	14,1345	110950	333,0916
db18	1856	5	14,2052	102550	320,2343
db19	1863	5	15,4364	103120	321,1230
db20	1869	5	15,9134	109460	330,8474
db21	1876	5	16,0000	109820	331,3910
db22	1880	5	16,2451	105720	325,1461
db23	1887	5	16,7435	105770	325,2230
db24	1893	5	16,6343	101580	318,7162
db25	1900	5	17,0628	103280	321,3721
db26	1904	5	15,9490	113260	336,5412
db27	1911	5	16,6131	103180	321,2164
db28	1917	5	16,7390	104290	322,9396
db29	1924	5	20,2437	106660	326,5884
db30	1928	5	19,1852	107120	327,2919
db31	1935	5	18,8761	101150	318,0409
db32	1941	5	19,0011	106660	326,5884
db33	1948	5	21,3820	101890	319,2021
db34	1952	5	18,9668	99859	316,0047
db35	1959	5	19,6561	111710	334,2305
db36	1965	5	22,2121	102540	320,2187
db37	1972	5	21,7967	105000	324,0370
db38	1976	5	22,8898	105340	324,5612

db39	1983	5	21,9216	109240	330,5148
db40	1989	5	23,9635	105080	324,1605
db41	1996	5	25,2479	100150	316,4648
db42	2000	5	24,2503	105390	324,6383
db43	2007	5	23,9676	98924	314,5219
db44	2013	5	26,0865	109170	330,4088
db45	2020	5	27,9419	100080	316,3542

Para este nivel de descomposición, la Wavelet db7 tiene un valor bastante adecuado de tiempo de procesamiento. Desafortunadamente, los valores de los errores son mucho más significativos que los del nivel 5.

En la tabla 5 se observa el tipo de wavelets coif y sym, con 3 niveles de descomposición.

*Tabla 5. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo coif y sym, con tres niveles de descomposición*

wavelets	C	L	Time	sum	sqrt(sum)
coif1	1767	5	12,9963	97349	312,0080
coif2	1784	5	12,8918	101390	318,4180
coif3	1804	5	12,8277	101200	318,1195
coif4	1821	5	12,9187	103500	321,7142
coif5	1839	5	12,9894	101990	319,3587
sym2	1760	5	12,5714	97417	312,1170
sym3	1767	5	13,0236	92813	304,6523
sym4	1773	5	12,6560	99249	315,0381
sym5	1780	5	39,6617	94350	307,1645
sym6	1784	5	12,6561	99050	314,7221
sym7	1791	5	12,6586	94138	306,8192
sym8	1797	5	12,0458	103200	321,2476
sym9	1804	5	13,8182	101960	319,3118
sym10	1808	5	15,3074	98876	314,4455
sym11	1815	5	15,2135	98670	314,1178
sym12	1821	5	18,9404	101380	318,4023
sym13	1828	5	18,9525	98481	313,8168
sym14	1832	5	26,1949	105680	325,0846
sym15	1839	5	26,2072	97051	311,5301
sym16	1845	5	40,8335	102110	319,5466
sym17	1852	5	40,5207	101660	318,8417
sym18	1856	5	73,9637	99172	314,9159
sym19	1863	5	72,4001	98382	313,6591
sym20	1869	5	147,9361	100810	317,5059
sym21	1876	5	146,6192	100250	316,6228
sym22	1880	5	312,2259	105950	325,4996
sym23	1887	5	313,2738	96557	310,7362
sym24	1893	5	650,5755	103160	321,1853
sym25	1900	5	654,9300	100800	317,4902
sym26	1904	5	1382,0000	101010	317,8207

En este análisis, las Wavelet coif, y los primeros tipos de sym tienen valores de tiempo de procesamiento bastante adecuados. Los valores del error definitivamente son muy exagerados, y en este nivel no se recomienda utilizar a las Wavelet para estos propósitos.

En la tabla 6 se observa el tipo de wavelets dmey, bior y rbio, con 3 niveles de descomposición.

Tabla 6. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo dmey, bior y rbio, con tres niveles de descomposición

wavelets	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>Time</i>	<i>sum</i>	<i>sqrt(sum)</i>
dmey	2055	5	13,2515	102020	319,3992
bior1.1	1756	5	12,8222	87595	295,9642
bior1.3	1767	5	13,3297	100170	316,5030
bior1.5	1780	5	12,9700	100530	317,0665
bior2.2	1767	5	13,0751	104740	323,6375
bior2.4	1780	5	13,2621	100790	317,4772
bior2.6	1791	5	13,3043	105590	324,9487
bior2.8	1804	5	13,2327	101290	318,2568
bior3.1	1760	5	13,1602	137670	371,0420
bior3.3	1773	5	13,2403	122110	349,4373
bior3.5	1784	5	13,0071	121760	348,9369
bior3.7	1797	5	13,3006	122990	350,7060
bior3.9	1808	5	13,2569	117610	342,9463
bior4.4	1780	5	12,9194	100260	316,6357
bior5.5	1784	5	12,9431	109370	330,7153
bior6.8	1804	5	12,8072	97014	311,4714
rbio1.1	1756	5	13,1185	87595	295,9642
rbio1.3	1767	5	12,9326	92148	303,5595
rbio1.5	1780	5	13,2775	94473	307,3648
rbio2.2	1767	5	12,7480	108730	329,7356
rbio2.4	1780	5	12,7599	108190	328,9293
rbio2.6	1791	5	13,0431	105790	325,2601
rbio2.8	1804	5	13,3334	105620	324,9960
rbio3.1	1760	5	12,9883	379260	615,8393
rbio3.3	1773	5	12,9704	1,7432	417,5112
rbio3.5	1784	5	12,8590	146820	383,1697
rbio3.7	1797	5	12,9382	132050	363,3814
rbio3.9	1808	5	12,9418	132000	363,3174
rbio4.4	1780	5	13,1622	101310	318,2919
rbio5.5	1784	5	13,3070	105070	324,1466
rbio6.8	1804	5	13,1290	99744	315,8233

En este último grupo, los valores de tiempo de procesamiento son bastante homogéneos. Sin embargo, los valores del error son significativamente grandes.

Observemos ahora, los valores para un nivel de descomposición de 8 niveles.

*Tabla 7. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo daubechies, con ocho niveles de descomposición*

<b>wavelets</b>	<b>C</b>	<b>L</b>	<b>Time</b>	<b>sum</b>	<b>sqrt(sum)</b>
db1	1757	10	18,5495	5,3211	2,3068
db2	1772	10	14,6519	5,6725	2,3817
db3	1789	10	14,4163	5,6168	2,3700
db4	1805	10	14,3005	5,6548	2,3780
db5	1822	10	14,5553	5,6307	2,3729
db6	1836	10	14,6089	5,3355	2,3099
db7	1853	10	14,6522	5,3871	2,3210
db8	1869	10	14,8292	5,2863	2,2992
db9	1886	10	14,7584	5,1812	2,2762
db10	1901	10	14,8867	5,2100	2,2825
db11	1918	10	14,8934	5,1940	2,2790
db12	1934	10	14,4072	5,1275	2,2644
db13	1951	10	14,8589	5,1596	2,2715
db14	1963	10	14,9079	5,1751	2,2749
db15	1980	10	15,1022	5,0004	2,2362
db16	1996	10	15,0176	5,0694	2,2515
db17	2013	10	14,9943	5,1342	2,2659
db18	2028	10	15,1608	5,0566	2,2487
db19	2045	10	15,5114	5,0456	2,2462
db20	2061	10	16,2064	5,0698	2,2516
db21	2078	10	16,6090	5,0255	2,2411
db22	2092	10	16,5135	4,9647	2,2282
db23	2109	10	16,3834	5,0149	2,2394
db24	2125	10	16,6529	4,9038	2,2145
db25	2142	10	16,9848	4,9650	2,2282
db26	2157	10	17,0780	4,9771	2,2309
db27	2174	10	17,1070	4,8946	2,2124
db28	2190	10	17,6175	4,9616	2,2275
db29	2207	10	18,0954	4,9536	2,2257
db30	2220	10	18,1999	4,9874	2,2332
db31	2237	10	17,8707	4,8892	2,2112
db32	2253	10	18,2667	4,9506	2,2250
db33	2270	10	19,2679	4,8483	2,2019
db34	2285	10	18,9000	4,9225	2,2187
db35	2302	10	19,1341	4,9534	2,2256
db36	2318	10	19,1608	4,9898	2,2338
db37	2335	10	18,9969	4,8584	2,2042
db38	2349	10	21,0901	4,8772	2,2084
db39	2366	10	21,5014	4,9148	2,2169
db40	2382	10	21,7201	4,8116	2,1935
db41	2399	10	22,5742	4,8803	2,2091
db42	2414	10	24,1530	4,8522	2,2028
db43	2431	10	23,5427	4,8121	2,1936
db44	2447	10	23,4266	5,0059	2,2374
db45	2464	10	24,0814	4,9938	2,2347

Para este nivel de descomposición, observamos que los valores del error son significativamente bajos.

Para la db12, el valor de procesamiento de tiempo es particularmente bajo.

Tabla 8. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo *coif* y *sym*, con ocho niveles de descomposición

wavelets	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>Time</i>	<i>sum</i>	<i>sqrt(sum)</i>
coif1	1789	10	13,4335	5,6361	2,3741
coif2	1836	10	13,3515	5,3868	2,3424
coif3	1886	10	13,7282	5,3638	2,3160
coif4	1934	10	13,8939	5,3303	2,3088
coif5	1980	10	14,2003	5,2808	2,2980
sym2	1772	10	13,7112	5,6725	2,3817
sym3	1789	10	13,5933	5,6168	2,3700
sym4	1805	10	13,7624	5,5341	2,3525
sym5	1822	10	13,8186	5,3127	2,3049
sym6	1836	10	13,7930	5,3706	2,3175
sym7	1853	10	13,7335	5,3685	2,3170
sym8	1869	10	14,2842	5,3368	2,3102
sym9	1886	10	15,1938	5,1503	2,2694
sym10	1901	10	17,0674	5,3115	2,3047
sym11	1918	10	17,0863	5,2540	2,2922
sym12	1934	10	20,2276	5,2551	2,2924
sym13	1951	10	19,9933	5,1493	2,2692
sym14	1963	10	27,3010	5,1772	2,2754
sym15	1980	10	28,2898	5,2440	2,2900
sym16	1996	10	43,6345	5,2101	2,2826
sym17	2013	10	43,6177	5,1284	2,2646
sym18	2028	10	78,3717	5,1902	2,2782
sym19	2045	10	75,7732	5,1769	2,2753
sym20	2061	10	149,9658	5,1051	2,2595
sym21	2078	10	148,0358	5,1060	2,2596
sym22	2092	10	305,5197	5,1542	2,2703
sym23	2109	10	305,5258	5,1865	2,2774
sym24	2125	10	662,3110	5,0783	2,2535
sym25	2142	10	641,2150	5,1000	2,2583

En este caso, los valores del error se mantienen homogéneos y significativamente bajos. En cuanto al valor de tiempo de procesamiento, el valor de *coif2* es el mejor.

Ahora observemos la tabla 9 de Wavelets *dmey*, *bior* y *rbio* con nivel de descomposición 8:

Tabla 9. Valores de coeficientes de filtros paso-bajo y paso-alto, con tiempo de procesamiento, y cálculo de parámetros objetivos para Wavelets tipo *dmey*, *bior* y *rbio*, con ocho niveles de descomposición

wavelets	<i>C</i>	<i>L</i>	<i>Time</i>	<i>sum</i>	<i>sqrt(sum)</i>
dmey	2557	10	14,3605	5,1446	2,2682
bior1.1	1757	10	13,3683	5,3211	2,3068
bior1.3	1789	10	13,7628	5,5333	2,3523
bior1.5	1822	10	13,7054	5,6694	2,3811
bior2.2	1789	10	13,5366	6,3519	2,5203
bior2.4	1822	10	13,7184	6,2435	2,4987
bior2.6	1853	10	13,6885	6,3245	2,5149
bior2.8	1886	10	13,6540	6,3912	2,5281
bior3.1	1772	10	13,6231	32,0682	5,6629
bior3.3	1805	10	13,7743	8,2602	2,8740
bior3.5	1836	10	13,6104	7,6028	2,7573
bior3.7	1869	10	13,7584	7,3912	2,7187
bior3.9	1901	10	13,6143	7,4185	2,7237
bior4.4	1822	10	13,6882	5,4481	2,3341
bior5.5	1836	10	13,9007	5,5214	2,3498
bior6.8	1886	10	13,8445	5,4260	2,3294

rbio1.1	1757	10	13,6664	5,3211	2,3068
rbio1.3	1789	10	14,0964	5,4265	2,3295
rbio1.5	1822	10	13,6161	5,4700	2,3388
rbio2.2	1789	10	13,6192	6,8895	2,6248
rbio2.4	1822	10	13,8313	6,3328	2,5165
rbio2.6	1853	10	13,7449	6,1882	2,4876
rbio2.8	1886	10	13,9322	6,1109	2,4720
rbio3.1	1772	10	13,8295	170,0400	13,0399
rbio3.3	1805	10	13,8975	14,8278	3,8507
rbio3.5	1836	10	13,8847	10,0352	3,1678
rbio3.7	1869	10	13,7450	9,6142	3,1007
rbio3.9	1901	10	13,9030	9,2246	3,0372
rbio4.4	1822	10	14,2917	5,7952	2,4073
rbio5.5	1836	10	13,9620	5,8901	2,4269
rbio6.8	1886	10	14,0330	5,5394	2,3536

En este caso, tanto los valores de tiempo de procesamiento, como los valores de error son bastante homogéneos y significativamente bajos.

Vale la pena aquí recalcar el rendimiento de la Wavelet dmey.

De los resultados observados, se concluyó que la familia de Wavelets tipo Daubechies tiene un rendimiento adecuado para la tarea, concretamente, la Wavelets Daubechies Tipo 7.

Para una posterior comparación con codificadores convencionales, se seleccionó la Daubechies tipo 7, con 8 niveles de descomposición.

### **4.3. Tests subjetivos para determinar la calidad del códec, dependiendo de la técnica de la transformada Wavelet evaluada**

En esta sección, se utilizan métricas de desempeño subjetivas. En las mediciones subjetivas, se realizaron varias pruebas de comparación psicoacústica, estas se basaron en el método DBTS (*Double Blind Triple Stimulus with hidden reference*). En estas, se reprodujo, de manera aleatoria, la señal original y la señal comprimida a varias personas, generalmente llamadas “escuchas”. Cada escucha debe identificar la calidad del audio.

### **Metodología DBTS (Double-Blind Triple-Stimulus with Hidden Reference)**

La recomendación ITU-R BS.1116-1, estandariza este método, como un método conveniente para la evaluación de pequeños artefactos de compresión. La figura 28 muestra, la configuración básica de la metodología. Tres estímulos son presentados al escucha, A, B, y C. Uno de ellos, es conocido como la señal de referencia, y los otros dos, son de nuevo, la señal de referencia y el otro, la señal comprimida, pero el escucha, no tiene conocimiento de cuál es cuál.

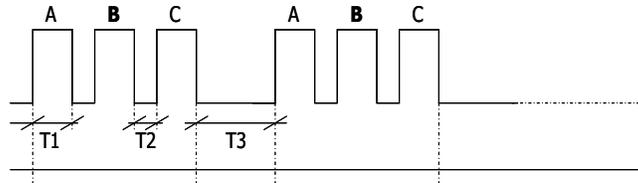


Figura 28. Estructura de DBTS. [32]

Tabla 10. Escala de 5-puntos ITU [36]

Impedimento	Nivel
Imperceptible	5.0
Perceptible pero no molesto	4.0
Ligeramente molesto	3.0
Molesto	2.0
Muy molesto	1.0

La aleatorización de las señales debe ser efectuada. La tarea del escucha, es identificar, cuál de las dos secuencias, es la versión comprimida, y evaluarla en una escala de 1 a 5. El grado debe ser alrededor de 5, si el codificador actúa de manera transparente en la señal. Este método provee una manera sensible, exacta y estable de asesoramiento de pequeños artefactos de compresión e impedimentos en sistemas de audio [36].

La escala de juicio, usada en este método está basada en la escala de cinco grados, definida por la recomendación ITU-R BS.562-3 [37]. De acuerdo con BS.562-3, cualquier diferencia percibida entre la referencia y el sistema bajo prueba, debe ser interpretado como un impedimento (artefacto de compresión), y por lo tanto la escala de 5 grados mide el grado de percepción de este impedimento [36]. Para el análisis de datos, el grado de diferencia entre el juicio subjetivo del escucha, entre la referencia y la versión codificada, es considerado [36]. Este valor, se denomina *SDG* (Subjective Difference Grade).

$$SDG = Grade_{codedsignal} - Grade_{referencesignal} \quad (4.3.1)$$

Un análisis estadístico se realiza para describir los resultados, visualizarlos e inferir conclusiones. [32]

#### 4.3.1. Test subjetivo de comparación de codificadores convencionales con el codificador basado en la transformada Wavelet-Daubechies Tipo 7, con 8 niveles de descomposición

La hipótesis de este test puede ser planteada con el problema a resolver y la pregunta a ser resuelta. El problema de este primer test puede ser planteado de la siguiente manera: ¿Cómo reconocer diferencias en el rendimiento códec/tasa de bits entre las secuencias musicales evaluadas?. La pregunta para este primer test introductorio: ¿Cuál de las combinaciones códec/tasa de bits es la mejor y por qué? La tabla 11 brinda una lista completa de las secuencias musicales usadas, las tecnologías de codificación y las tasas de bits evaluadas. Para este propósito se escogieron estas señales debido a su contenido energético en frecuencia –en varias de ellas es posible observar cambios abruptos en la señal temporal, lo cual se traduce en un amplio espectro frecuencial–.

Tabla 11. Secuencias musicales usadas en la evaluación subjetiva del codificador. Fuente: Autor

Secuencia musical	Descripción	Codificadores	BR	Artefactos observados
Love dream-Liszt – CD # B0000041NL, Track # 1	Piano	Vqf,Ogg, Wavelet	80	Pre-echo
Torre de marfil- G. Ceratti – CD # 985512, Sony BMG, Track # 13	Pop	Vqf,Ogg, Wavelet	96	Pérdida de imagen estéreo
Pathetic, 1.mov Beethoven – CD # B00138J5R2, Sony, Track # 4	Piano	MP3 Lame, Ogg, Wavelet	80	Pre-echo
Sulky- G. Ceratti – CD # 985512, Sony BMG, Track # 9	Pop	MP3 Lame, Ogg, Wavelet	96	Pérdida de componentes de frecuencias altas
Furious angel- Matrix Reloaded – CD # B00008W200, Maverick, Track # 4		MP3 Lame, Ogg, Wavelet	128	Pérdida de imagen estéreo

#### Plan experimental

El test está dividido en dos (2) fases: La fase de entrenamiento y la fase de testeo. El propósito de la fase de entrenamiento es permitir a los escuchas identificar y relacionar distorsiones potenciales y artefactos. También, familiarizarse con el procedimiento de testeo.

La fase de testeo dura alrededor de 35 a 40 minutos. En cada intento, el escucha tendrá a disposición tres versiones, marcadas con “Ref”, “A” y “B” en la pantalla del computador. El escucha debe juzgar

la Calidad Básica de Audio de las versiones “A” y “B” en cada intento. Debido a que una de ellas, “A” o “B” es de nuevo la señal de referencia, ésta debería recibir una marca de cinco (5).

El test es realizado de manera individual. El DBTS (*Double-Blind Triple-Stimulus with Hidden Reference*) es la metodología usada. Ésta es descrita en la figura 29. El DBTS sigue la “Recomendación ITU-R, *Methods for the subjective assessment of small impairments in audio systems including multichannel sound systems*[36]”.

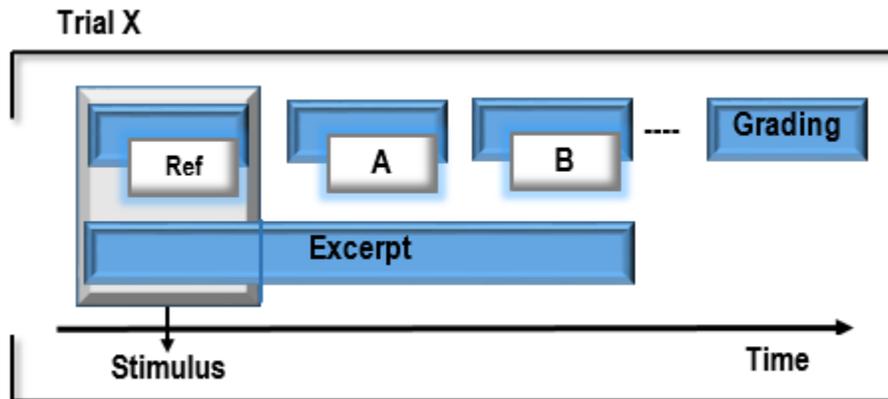


Figura 29. Método de testeo DBTS .[32]

#### 4.3.2. Instrucciones introductorias del Administrador, antes del test

Durante la fase de entrenamiento, los escuchas identifican y se hacen familiares con los artefactos producidos por los sistemas que se testean. Esta fase de entrenamiento es llevada a cabo en grupos de 4 o 5 escuchas y durante este tiempo, la persona o el escucha puede comentar las secuencias y discutir los artefactos con los demás [38].

La fase de testeo será llevada a cabo, individualmente. En cada uno de los intentos, la persona testeada escuchará tres versiones, “Ref”, “A” y “B”. La “Ref” es siempre la versión de referencia (original) contra la cual, las versiones “A” y “B” deben ser comparadas y evaluadas. “A” ó “B” es la versión comprimida y la otra es la referencia escondida (idéntica a la versión de “Ref”). La persona testeada no conoce de antemano, cual es la versión comprimida y cuál es la referencia escondida, y esto cambia aleatoriamente de un intento al otro. La persona testeada puede conmutar libremente entre “Ref”, “A” o “B” en cualquier momento. Las secuencias de audio pueden ser reproducidas repetidamente hasta que la persona testeada esté confidente con su decisión. La persona testeada debe juzgar la “Calidad

Básica de Audio” de las versiones “A” y “B” en cada intento. Éste atributo está relacionado con cualquier diferencia entre la referencia y la secuencia comprimida [38]. En cada intento, la persona testeada debe juzgar la diferencia percibida entre la “Ref” y “A”, y también la diferencia entre “Ref” y “B” usando la escala de cinco–diferencias.

### 4.3.3. Valores subjetivos.

Se hace la prueba con 18 escuchas. Los resultados están presentados de la siguiente manera. Los puntos representan los valores promedio de la evaluación, mientras que las líneas representan los intervalos de confianza.

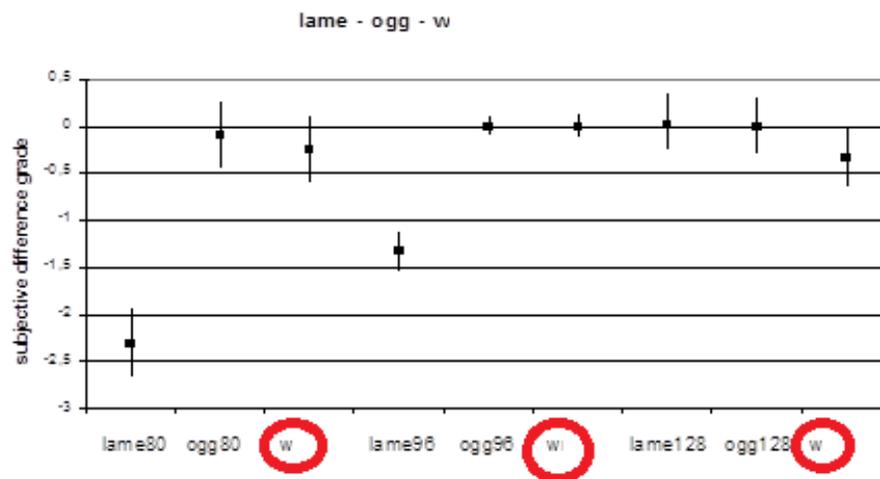


Figura 30. Resultados de evaluaciones subjetivas entre los codificadores. Fuente: Autor.

Los resultados, que se muestran en la figura 30, muestran una comparación entre los formatos MP3 Lame a 80 kbit/s, MP3 Lame a 96 kbit/s, MP3 Lame 128 Kbit/s, Ogg Vorbis a 80, 96, 128 kbit/s y el códec basado en la Transformada Wavelet diseñado. Los codificadores MP3 Lame a 80 kbit/s, MP3 Lame a 96 kbit/s, MP3 Lame 128 Kbit/s, Ogg Vorbis a 80, 96, 128 kbit/s usan la transformada discreta de cosenos –DCT (parte real de la transformada de Fourier).

### 4.3.4. Conclusiones del experimento

Después de haber realizado las pruebas con los parámetros objetivos y subjetivos, se concluye que el codificador basado en la transformada Wavelet desarrollado en este proyecto de investigación se

comporta mejor que el codificador de MP3-Lame a 80 kbit/s. Su rendimiento es comparable al codificador Ogg Vorbis a 80 kbit/s. Comparándolo con codificadores a 96 kbit/s, el codificador basado en la transformada Wavelet, se comporta mejor que el MP3 a 96 kbit/s, comparable con Ogg a 96 kbit/s. Al comparar su rendimiento con los codificadores a 128 kbit/s, no es tan satisfactorio.

## RECOMENDACIONES

Es posible profundizar la investigación en paquetes de wavelets, y evaluar si son una herramienta conveniente para la tarea.

Nuevas investigaciones pueden ser realizadas, evaluando la compatibilidad de la Transformada Wavelet con los modelos intrínsecos psicoacústicos de los codificadores convencionales.

Otra posibilidad de campo de acción de la Transformada Wavelet es en la compresión de imágenes, en donde en el campo de seguridad, y en el campo de análisis de señales astronómicas, su uso sería beneficioso, por la cantidad de información manejada allí. [39]

Existen por supuesto, otras métricas de comparación objetiva, así como comparación subjetiva, como por ejemplo Guilford, PEAQ, Zwicker, etc, pero la planteada, es suficiente para demostrar que la transformada Wavelet, tiene un potencial significativo en compresión perceptual de audio.

## Bibliografía

- [1] M. Bosi and R. E. Goldberg, *Introduction to digital audio coding and standards*, Kluwer Aca. Boston / Dordrecht / London, 2003.
- [2] T. Painter and A. Spanias, “A Review of Algorithms for Perceptual Coding of Digital Audio Signals.”
- [3] P. Srinivasan and L. H. Jamieson, “High Quality Audio Compression Using an Adaptive Wavelet Packet Decomposition and Psychoacoustic Modelling,” vol. XX, pp. 100–108, 1999.
- [4] R. Cohen, “Signal Denoising Using Wavelets,” 2011.
- [5] R. J. de Armas Costa and B. de J. López Gómez, “Algoritmo para detectar eventos epilépticos a partir de Wavelets analizando la función de energía,” Universidad EAFIT, 2009.
- [6] J. D. Alvarado Moreno, “Detección de defectos en textiles mediante técnicas espaciales para análisis de textura,” *Rev. Tecnura*, vol. 20, no. 47, p. 97, Feb. 2016.
- [7] G. Puetamán Guerrero and H. Salazar Escobar, “Compresión de imágenes usando wavelets,” Eafit, 2007.
- [8] E. Larson and R. Maddox, “Real-Time Time-Domain Pitch Tracking using Wavelets.”
- [9] A. Fanelli, A. Leo, and M. Ferri, “Remote sensing images data fusion: a wavelet transform approach for urban analysis,” in *IEEE/ISPRS Joint Workshop on Remote Sensing and Data Fusion over Urban Areas (Cat. No.01EX482)*, pp. 112–116.
- [10] R. Patil, “Noise Reduction using Wavelet Transform and Singular Vector Decomposition,” *Procedia Comput. Sci.*, vol. 54, pp. 849–853, 2015.
- [11] “mp3.” [Online]. Available: <https://www.iis.fraunhofer.de/en/ff/amm/prod/audiocodec/audiocodecs/mp3.html>. [Accessed: 10-Apr-2017].
- [12] L. Daudet and B. Torrèsani, “Hybrid representations for audiophonic signal encoding,” *Signal Processing*, vol. 82, no. 11, pp. 1595–1617, 2002.
- [13] G. Beylkin and J. M. Keiser, “On the Adaptive Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations in Wavelet Bases,” *J. Comput. Phys.*, vol. 132, no. 2, pp. 233–259, Apr. 1997.
- [14] R. Mohammad, M. Vijaya, and K. A. Professor, “Audio Compression using Multiple Transformation Techniques,” *Int. J. Comput. Appl.*, vol. 86, no. 13, pp. 975–8887, 2014.
- [15] M. A. Cody, “The Wavelet Packet Transform: Extending the wavelet transform,” pp. 1–9, 1994.
- [16] C. Zhang, Y. Chen, and W. Tan, “Discrete Cosine Wavelet Packet Transform and Its Application in Compressed Sensing for Speech Signal,” *2012 Fourth Int. Symp. Inf. Sci. Eng.*, pp. 144–148, Dec. 2012.
- [17] M. Zanartu, “Audio Compression using Wavelet Techniques. Project report,” 2005.
- [18] P. P. Win, S. Su, and Y. Mon, “Speech De-noising and Compression using Wavelet Transform,” *Int. J. Electron. Comput. Sci. Eng.*
- [19] S. Rekik, D. Guerchi, D. A. Ae, H. Hamam, and S.-A. Selouani, “Audio Steganography Coding Using the Discrete Wavelet Transforms,” *Int. J. Comput. Sci. Secur.*, no. 61, pp. 2012–79.
- [20] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. McGraw-Hill, 2001.
- [21] J. G. Manolakis and D. G. Proakis, *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson Prentice Hall, 1996.

- [22] L. Debnath, *Wavelet Transforms and Their Applications*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2002.
- [23] J. Mas, *Física Matemática*. Universidad de Santiago de Compostela, 2011.
- [24] S. G. (Stéphane G. . Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [25] R. M. Rao and A. S. Bopardikar, *Wavelet transforms : introduction to theory and applications*. Massachusetts: Pearson Education Asia, 1999.
- [26] A. Graps, “An Introduction to Wavelets.”
- [27] M. Vetterli and J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall, 2007.
- [28] A. Chanerley, N. A. Alexander, and B. Halldorsson, “On Fling and Baseline Correction using Quadrature Mirror Filters,” Prof BHV Topping, Ed. Madeira, Portugal: 12th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, 2009.
- [29] F. H. Elfouly, M. I. Mahmoud, M. I. M. Dessouky, and S. Deyab, “Comparison between Haar and Daubechies Wavelet Transformations on FPGA Technology,” vol. 2, 2008.
- [30] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [31] K. N. Hamdy, M. Ali, and A. H. Tewfi, “Low bit rate high quality audio coding with combined harmonic and wavelet representations,” *1996 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process. Conf. Proc.*, vol. 2, pp. 1045–1048.
- [32] J. P. Guilford, *Psychometric methods*. the University of Wisconsin - Madison: McGraw-Hill, 1954.
- [33] H. Fastl and E. Zwicker, *Psychoacoustics : facts and models*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [34] T. Painter and A. Spanias, “Perceptual coding of digital audio,” *Proc. IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 451–515, Apr. 2000.
- [35] S. G. Narkhedkar and P. K. Patel, “Recipe of speech compression using coiflet wavelet,” *Proc. 2014 Int. Conf. Contemp. Comput. Informatics, IC3I 2014*, pp. 1135–1139, 2014.
- [36] Recommendation Itu-R BS.1116-1, “Methods for the subjective assessment of small impairments in audio systems including multichannel sound systems,” pp. 1116–1, 1994.
- [37] Recommendation ITU-R 562-3, “Method for the subjective assessment of intermediate quality levels of coding systems,” no. 1, pp. 562–3, 2003.
- [38] “ISO/IEC 11172-1:1993 - Information technology - Coding of moving pictures and associated audio for digital storage media at up to about 1,5 Mbit/s - Part 3: Audio.” 1993.
- [39] J. Švihlík, “Estimation of non-Gaussian noise parameters in the wavelet domain using the moment-generating function,” *J. Electron. Imaging*, vol. 21, no. 2, p. 23025, Jun. 2012.

## Anexo 1. Código del Codificador diseñado en MATLAB

(Basado en el Sistema <http://web.ics.purdue.edu/>)

```

file='castanets.wav';
wavelet='dB5';
level=5;
n=level;
frame_size=2048;
psychoacoustic='on'; %si esta off, usa 8 bits/frame
wavelet_compression='on';
heavy_compression='off';
compander='on';
quantization='on';

% codificador

[x,Fs,bits]=wavread(file);
x=x(:,1);
xlen=length(x);
t=0:1/Fs:(length(x)-1)/Fs;

%descomposicion usando N frames

step=frame_size;
N=ceil(xlen/step);
% variables de computacion
Cchunks=0;
Lchunks=0;
Csize=0;
PERF0mean=0;
PERFL2mean=0;
n_avg=0;
n_max=0;
n_vector=[];
for i=1:1:N
    if (i==N)
        frame=x([(step*(i-1)+1):length(x)]);
    else
        frame=x([(step*(i-1)+1):step*i]);
    end
    % descomposicion del frame del wavelet
    [C,L]=wavedec(frame,level,wavelet);
    %esquema de compresion wavelet
    if wavelet_compression == 'on';
        [thr,sorh,keepapp]= ddencomp('cmp','wv',frame);
        %if heavy_compression == 'on'
        % thr=thr*10^6;
        %end

[XC,CXC,LXC,PERF0,PERFL2]=wdencomp('gbl',C,L,wavelet,level,thr,sorh,keepapp);

C=CXC;
L=LXC;

```

```

PERF0mean=PERF0mean + PERF0;
PERFL2mean=PERFL2mean+PERFL2;
end

%modelo psicoacustico
if psychoacoustic=='on'
    P=10.*log10((abs(fft(frame,length(frame))))).^2);
    Ptm=zeros(1,length(P));
    %revisa estpectro y encuentra tonos enmascarados
    for k=1:1:length(P)

        if ((k<=1) | (k>=250))%revisar simbolo
            bool = 0;
        elseif ((P(k)<P(k-1)) | (P(k)<P(k+1))),
            bool=0;
        elseif ((k>2) & (k<63)),
            bool=((P(k)>(P(k-2)+7)) & (P(k)>(P(k+2)+7)));
        elseif((k>=63) & (k<127)),
            bool = ((P(k)>(P(k-2)+7)) & (P(k)>(P(k+2)+7)) & (P(k)>(P(k-
3)+7)) & (P(k)>(P(k+3)+7)));
        elseif((k>=127) & (k<=256)),
            bool=((P(k)>(P(k-2)+7)) & (P(k)>(P(k+2)+7)) & (P(k)>(P(k-3)+7))
& (P(k)>(P(k+3)+7)) & (P(k)>(P(k-4)+7)) & (P(k)>(P(k+4)+7)) & (P(k)>(P(k-
5)+7)) & (P(k)>(P(k+5)+7)) & (P(k)>(P(k-6)+7)) & (P(k)>(P(k+6)+7)));
        else
            bool=0;
        end
        if bool==1

            Ptm(k)=10*log10(10.^(0.1.*(P(k)))+10.^(0.1.*P(k+1)));% aqui en
el segundo k estaba k1..
        end

    end

    sum_energy=0;%suma de energia de tonos enmascarados
    for k=1:1:length(Ptm)
        sum_energy=10.^(0.1.*(Ptm(k)))+sum_energy;
    end

    E=10*log10(sum_energy/(length(Ptm)));
    SNR=max(P)-E;
    pn=ceil(SNR/6.02) %numero de bit requeridos para la cuantizaci

    stem(pn)
    if pn<3 %promedio distrocion por error de mi model psicoacustico
        pn=4;
        pn=pn+1;%aqui estaba n_0
    end
    if pn>n_max
        n_max=pn;
    end
    n_avg=pn+n_avg;
    n_vector=[n_vector pn];
end

```

```

%Compander (compresor)
if compander== 'on'
    Mu=255;
    C= compand(C, Mu, max(C), 'mu/compressor');
end

%Quantization

if quantization =='on'
%     if psychoacoustic =='off'
%         n=8;% default number of bits for each frame-sounds
%         %better but uses more bits
%     end
paso= ((max(C)-min(C))/2^n)
partition=[min(C):paso:max(C)];
%codebook=[min(C)-:(max(C)-min(C))/2^n):max(C)]; %zona critica
codebook=[min(C)-paso:paso:max(C)]
%codebook = partition +2;
[index, quant, distor]=quantiz(C,partition,codebook);
%find and correct offset
%     offset=0;
%     for j=1:1:N
%         if C(j)==0
%             offset = -quant(j);
%             break;
%         end
%     end
%     quant=quant+offset;
    C=quant;
end
%Put together all the chunks
Cchunks=[Cchunks C]; %Note: if an error appears in this linejust modify
%traspose of C
Lchunks=[Lchunks L'];% estaba escrito con la traspuesta de L
Csize=[Csize length(C)];
Encoder = round ((i/N)*100)%indicator of progress
end
Cchunks=Cchunks (2:length(Cchunks));
Csize=[Csize(2) Csize(N+1)];
Lsize=length(L);
Lchunks=[Lchunks (2:Lsize+1) Lchunks((N-1)*Lsize+1:length(Lchunks))];
PERF0mean=PERF0mean/N %indicator
PERFL2mean=PERFL2mean/N %indicator
n_avg=n_avg/N%indicator
n_max%indicator
end_of_encoder='done'%indicator of progress

%DECODER

%reconstruction using N equal frames of length step (except the
%last one

```

```

xdchunks=0;
for i=1:1:N;
    if i==N
        Cframe=Cchunks([(Csize(1)*(i-1))+1]:Csize(2)+(Csize(1)*(i-1))]);
        %compander
        if compander == 'on'
            if max(Cframe)==0
            else
                Cframe=compand(Cframe, Mu, max(Cframe), 'mu/expander');
            end
        end
        xd=waverec(Cframe, Lchunks(Lsize+2:length(Lchunks)), wavelet);
    else
        Cframe=Cchunks([(Csize(1)*(i-1))+1]:Csize(1)*i]);
        %compander (expander)
        if compander == 'on'
            if max(Cframe)==0
            else
                Cframe=compand(Cframe, Mu, max(Cframe), 'mu/expander');
            end
        end
        xd=waverec(Cframe, Lchunks(1:Lsize), wavelet);
    end
    xdchunks=[xdchunks xd];
    Decoder = round((i/N)*100) %indicador of progress
end
xdchunks=xdchunks(2:length(xdchunks));
distorcion=sum((xdchunks-x').^2)/length(x)
end_of_decoder='done'

%creating audio files with compressed schemes

wavwrite(xdchunks, Fs, bits, 'output.wav')%this does not represent
%the real compression achieved. Its is only to hear the results
end_of_writing_file='done' %indicator of progress

figure(1);
clf;
subplot(2,1,1);
plot(t,x);title('Señal Original');sound(x,44100);
ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2);
plot(t,xdchunks,'r');title('Señal Comprimida')
ylim([-1 1]);sound(xdchunks, 44100);

```