DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Iniciación al Cálculo

Funciones

Pedro Vicente Esteban Duarte

Presentación

El concepto de función es tal vez el más importan en el Cálculo. A partir de él, se definen el límite, la continuidad, la derivada, la integral de funciones, etc. Además, las funciones describen modelos en muchas ramas de la ciencia, como la Física, la Economía, la Biología, entre otras.

El estudio de las funciones, sus propiedades, gráficas e interpretaciones, acordes con el contexto, permiten describir un sin número de aplicaciones y solucionar una gran variedad de problemas de diversos tipos.

El módulo tiene los siguientes objetivos:

Objetivo general

Estudiar las funciones reales de variable real y algunas aplicaciones para la solución de problemas.

Objetivos específicos

- Caracterizar funciones desde lo gráfico, lo verbal y a partir de ecuaciones.
- Encontrar el dominio y rango de funciones a partir de las ecuaciones y sus gráficas.
- Graficar funciones utilizando las reglas de traslación, reflexión y cambios de escala.
- Modelar con funciones problemas elementales.

Los conceptos expuestos y los ejercicios planteados permiten comprender conceptos fundamentales de las funciones y sus gráficas..

El tiempo estimado para la solución del taller es de cuatro (4) horas.

En su estudio y solución le deseamos muchos éxitos.

1. Funciones

El concepto de función, tal y como se estudia actualmente, es reciente en la historia de la Matemática[1]. Para dar la definición se requirió de la lógica de predicados, del estudio de conjuntos y de las relaciones que se dan entre ellos.

Definición. Si A y B son dos conjuntos, una función f de A en B es una correspondencia (relación) que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento y de B. Una forma de representar una función es como se ilustra a continuación.

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Observaciones. De acuerdo con la definición de función, hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

a. La expresión "una función f de A en B" indica que el conjunto de partida es A y el de llegada B.

b. La expresión "asigna a cada elemento x de A" hace referencia a que todos los elementos del conjunto A están como primera componente en la relación f.

c. La expresión "que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento y de B" indica que cada x de A está solamente una vez relacionado con un elemento y de B. En otras palabras, ningún elemento de A puede estar dos veces relacionado con elementos de B.

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ el siguiente conjunto de parejas ordenadas define una función f de A en B.

$$f = \{(1,a)\,(2,b)\,(3,c)\}$$

o como

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & 1 & \longmapsto & a = f(1) \\ & 2 & \longmapsto & b = f(2) \\ & 3 & \longmapsto & c = f(3) \end{array}$$

Como una tabla, se puede definir así:

[1] http://astroseti.org/traducciones/historia-de-las-matematicas/historia-del-concepto-de-funcion/

x	1	2	3
y	a	b	c

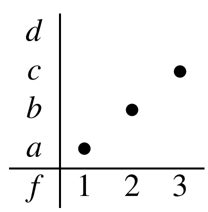
En donde x representa a cualquier elemento del conjunto A e y a cualquiera del conjunto B. Los elementos de A se escriben en la primera fila (al lado izquierdo, si la tabla es vertical), y los de B en la segunda fila (al lado derecho, si la tabla es vertical).

En un plano cartesiano:

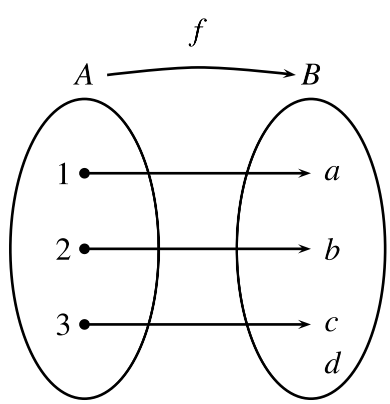
$$\begin{array}{c|ccc}
d & & & \\
c & & & (3,c) \\
b & & (2,b) & \\
a & (1,a) & & \\
\hline
f & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

Los elementos de A se escriben abajo en el eje horizontal y los de B a la izquierda en el eje vertical.

Las parejas ordenadas, en el plano cartesiano, se pueden representar como puntos, obteniendo la misma lectura que en el diagrama anterior, como se muestra a continuación:



También, se pueden representar en un diagrama sagital:



Para la función f, cada par de elementos que están relacionados se escribe de cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{array}{lll} (1,a) \in f & \text{es decir} & a = f(1) \\ (2,b) \in f & \text{es decir} & b = f(2) \\ (3,c) \in f & \text{es decir} & c = f(3) \end{array}$$

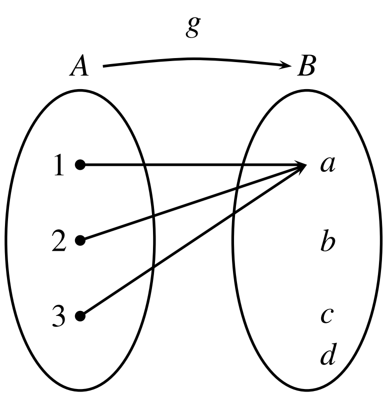
Observaciones y ejercicios. Para la función f definida anteriormente, se tiene:

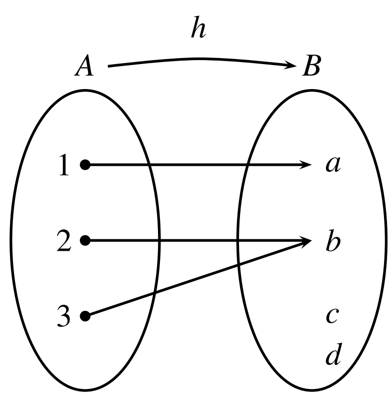
a. Todos los elementos del conjunto A están relacionados una sola vez, con un elemento del conjunto B.

b. En el conjunto B hay elementos que no están en la relación.

c. En general, si $(x,y) \in f$ es decir, $y = f(x)$, se lee como: f transforma a x en y.

d. Con un mismo par de conjuntos se puede definir muchas funciones diferentes. Como ejemplo de ello, se tienen las funciones g y h que se muestran a continuación.

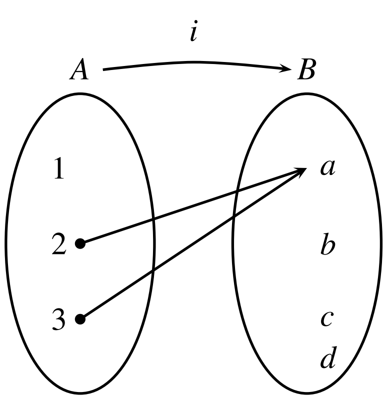


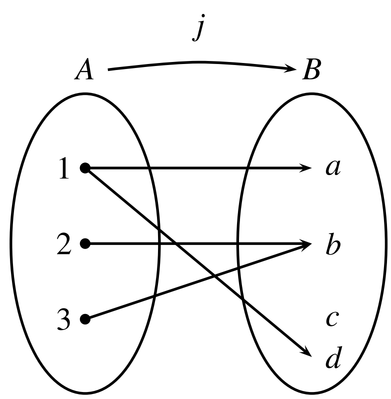


e. Escriba las funciones g y h anteriores como un conjunto de parejas ordenadas, en forma tabular y en el plano cartesiano.

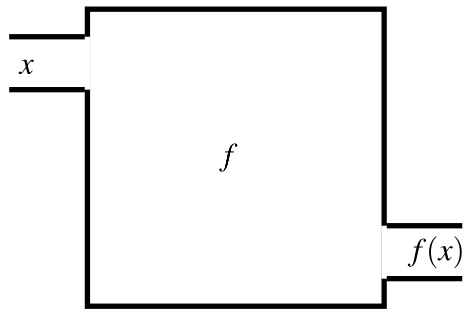
f. Compruebe que las funciones f, g y h son subconjuntos del producto cartesiano $A \times B$.

g. Explique porqué cada uno de los siguientes diagramas sagitales no representa a una función.





Una función se puede ver como una “máquina” que efectúa un proceso de transformación, en la que los insumos que se le suministran son los elementos $x \in A$ y los productos son los elementos $y \in B$, denotados por $f(x)$, como se puede observar en la siguiente figura:



Ejercicio

Si $A = \{q, w, r\}$ y $B = \{x, y, z, h\}$ y $s = \{(q,h), (w,z), (r,x)\}$, s es una función de A en B.

a. Verdadero, puesto que todos elementos de A están relacionados una sola vez con los de B.

b. Falso, s es una función de B en A.

Ejercicio

Si $A = \{q, w, r\}$ y $B = \{x, y, z, h\}$ y $u = \{(x,q), (y,w), (z,r)\}$, es una función de B en A.

a. Verdadero, puesto que todos elementos de B están relacionados una sola vez con los de A.

b. Falso, u no es una función de B en A, puesto que el elemento h de B no esta en la relación.

1.1. Dominio, rango y gráfico de una función

Una función está compuesta por tres partes, a saber: dominio, rango y gráfico. Si f es una función de A en B se tiene que:

Dominio. Es el conjunto A (conjunto de partida) y está dado por $\mathcal{D}_f = \{x/y = f(x)\}$, por lo tanto se tiene que $\mathcal{D}_f = A$.

Para la función $f = \{(1,a)\,(2,b)\,(3,c)\}$, se tiene que $\mathcal{D}_f = A = \{1,\, 3,\, 3\}$. En otras palabras, todos los elementos que son la primera componente de las parejas ordenadas que pertenecen a la función.

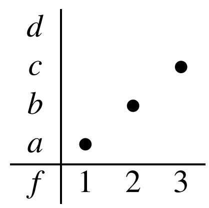
Rango. Es un subconjunto del conjunto B (conjunto de llegada) y está dado por $\mathcal{R}_f = \{y/y = f(x)\}$. Al rango de la función f, también se le llama el conjunto de imágenes de f. Está formado por todos los elementos del conjunto de llegada que son imágenes de alguno de los elementos de A.

Para la función $f = \{(1,a)\,(2,b)\,(3,c)\}$, se tiene que $\mathcal{R}_f = \{a,\, b,\, c\}$, en otras palabras, todos los elementos que son la segunda componente de las parejas ordenadas que pertenecen a la función.

Note que en la definición de la función f el conjunto de llegada es $B = \{a,\, b,\, c,\, d\}$, por lo tanto $\mathcal{R}_f \subset B$.

Gráfico. El gráfico de una función f está dado por el conjunto de parejas (x,y) que pertenecen a la función $((x,y) \in f)$. En general, el gráfico de la función f se representa por $y = f(x)$. El gráfico es la figura que se obtiene al graficar todos los puntos que están en la función en el plano cartesiano.

Para la función f el gráfico es el siguiente:



Ejercicios: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios.

a. Determine $\mathcal{D}_g$, $\mathcal{D}_h$, $\mathcal{R}_g$, $\mathcal{R}_h$, de las funciones g y h definidas en la página 4.

b. Para los conjuntos $P = \{\triangledown,\, \square,\, \measuredangle,\, \varnothing,\, \spadesuit\}$ y $H = \{\lozenge,\, \Bbbk,\, \blacktriangledown,\, \clubsuit,\, \nabla,\, \triangle,\, \bigstar\}$, defina tres funciones de P en H y determine su dominio, rango y gráfico.

Ejercicio

El dominio de la función $t(x) = \sqrt{1-x}$, es

a. $\mathcal{D}_t = (1, \infty)$

b. $\mathcal{D}_t = (-\infty, 1]$

c. $\mathcal{D}_t = (-\infty, \infty)$

d. $\mathcal{D}_t = [-\infty, 1)$

Ejercicio

Una función g se puede definir en el mismo conjunto A, es decir g puede ser una función de A en A.

a. Falso, para poder definir una función se necesitan dos conjuntos diferentes.

b. Falso, una función no puede ir de A en A.

c. Verdadero, una función puede definirse de A en A, para ello debe cumplir la definición de función.

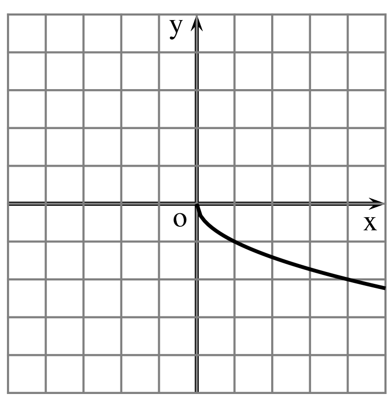
d. Verdadero, desde que sea una relación, una función se puede definir de A en A.

1.2. Funciones reales de variable real

En el estudio del Cálculo se trabajan funciones de reales de variable real. Es decir, funciones en las que el dominio y rango son el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ o subconjuntos de él. Las funciones reales de variable real, generalmente se definen por su fórmula, es decir por $y = f(x)$.

Ejemplo: Para la función $y = -\sqrt{x}$ determine su dominio, rango y realice su gráfica en el plano cartesiano. Encuentre varios puntos de la función dada.

Solución: El dominio y el rango de una función real de variable real se puede leer a partir de la gráfica de ella. Para realizar la gráfica, se pueden utilizar Asistentes Matemáticos como GeoGebra ®, *Applets* en *internet* u otros paquetes que permiten realizarla.



A partir de la gráfica de una función $y = f(x)$, el dominio se obtiene como la proyección de la gráfica sobre el eje X. Para el ejemplo, podemos verificar que el dominio de f es el intervalo $[0,\infty)$, de donde $\mathcal{D}_f = [0,\infty)$.

A partir de la gráfica de una función $y = f(x)$, el rango se obtiene como la proyección de la gráfica sobre el eje Y. Para el ejemplo, podemos verificar que el rango de f es el intervalo $(-\infty,0]$, de donde $\mathcal{R}_f = (-\infty,0]$.

Note que el gráfico de la función es un subconjunto del producto cartesiano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, que en muchos textos se escribe como $\mathbb{R}^2$.

Observación: El dominio de una función, para la que su gráfica esté representada en el plano cartesiano, se lee en el eje X de izquierda a derecha. El rango, se lee en el eje Y de abajo hacia arriba.

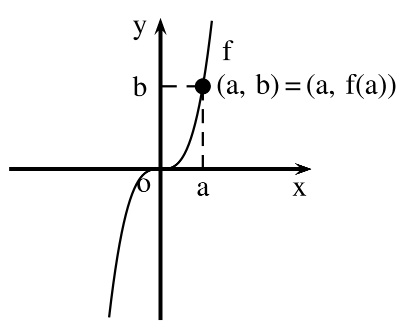
Otra forma de encontrar el dominio de una función es analíticamente, analizando la forma como está definida la función.

Para la función $y = f(x) = -\sqrt{x}$, se tiene que la raíz es par, por lo tanto, no puede tomar valores negativos, es decir $x \geq 0$, está desigualdad define el intervalo $[0,\infty)$, por lo tanto $\mathcal{D}_f = [0,\infty)$.

Una tabla, para algunos valores de la función $f(x) = -\sqrt{x}$, se presenta continuación:

x	Evaluación	$f(x)$
0	$f(0) = -\sqrt{0}$	0
1	$f(1) = -\sqrt{1}$	-1
1.5	$f(1.5) = -\sqrt{1.5}$	$-1.224...$
4	$f(4) = -\sqrt{4}$	-2
5	$f(5) = -\sqrt{5}$	$-2.236...$
9	$f(9) = -\sqrt{9}$	-3

Evaluación de funciones. Al evaluar una función f hay que tener en cuenta que los puntos que define son un subconjunto del producto cartesiano de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $(f \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R})$. La siguiente gráfica ilustra esta situación.



Ejemplo

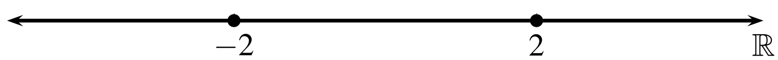
Para la función $y = g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$ encuentre analíticamente su dominio. Luego realice la gráfica de la función y encuentre el rango.

Solución

La función g es una raíz de índice par (4), por lo tanto, el argumento debe ser positivo, es decir $x^2 - 4 \geq 0$. Por lo tanto hay que resolver esta inecuación.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &\geq 0 \\ (x-2)(x+2) &\geq 0 \end{aligned}$$

De donde $x - 2 \geq 0$ ó $x + 2 \geq 0$; $x \geq 2$ ó $x \geq -2$, estos valores se pueden representar en la recta real, de la siguiente manera:



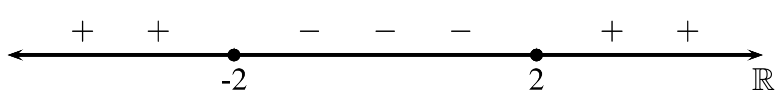
Al tomar valores de prueba en cada uno de los subintervalos definidos en la recta real, se tiene que:

Para $(-\infty, -2)$, si tomamos $x = -4$, se tiene que $(-4-1)(-4+1) > 0$, por lo tanto, en este intervalo el argumento de la función es positivo.

Para $(-2, 2)$, si tomamos $x = 0$, se tiene que $(0-1)(0+1) < 0$, por lo tanto, en este intervalo el argumento de la función es negativo.

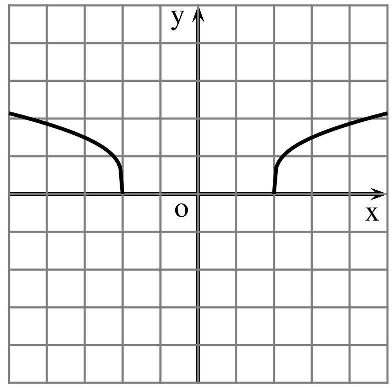
Para $(2, \infty)$, si tomamos $x = 3$, se tiene que $(3-1)(3+1) > 0$, por lo tanto, en este intervalo el argumento de la función es positivo.

Al marcar, en la recta real, cada uno de estos intervalos como positivos o negativos, se tiene:



Se puede leer fácilmente el dominio de la función. En este caso, sólo interesan los intervalos en los que los valores no son negativos, es decir $\mathcal{D}_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 2)$. Note que los valores $x = -2$ y $x = 2$ están en el dominio de la función.

La gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4}$ se presenta en la siguiente figura:



Note que al leer el dominio de la función de la gráfica, se obtienen los mismo intervalos que los encontrados analíticamente.

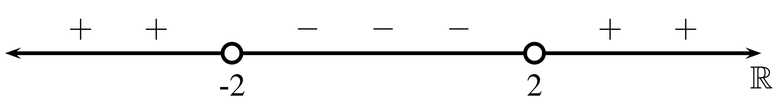
El rango de la función está dado por $\mathcal{R} = [0, \infty)$ que es la proyección de la gráfica sobre el eje Y.

Ejemplo

Encuentre el dominio de la función $y = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}$.

Solución

Note que la función g es $\dfrac{1}{f}$, la función f dada en el ejemplo anterior. En los números reales la división por ceros (0) no está definida, por lo tanto, además, del análisis realizado para f hay que sacar los valores de x que hacen cero el denominador. Es decir $x = -2$ y $x = 2$, por lo tanto la gráfica en la recta real es:



Por lo tanto el dominio de la función g está dado por $\mathcal{D}_g = (-\infty, -2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - [-2, 2]$.

Compare las similitudes y diferencias entre el $\mathcal{D}_f$ y el $\mathcal{D}_g$.

Ejercicio

El dominio de la función $t(x) = \sqrt{x-1}$, es

a. $\mathcal{D}_t = (1, \infty)$

b. $\mathcal{D}_t = [1, \infty)$

c. $\mathcal{D}_t = (-\infty, \infty)$

d. $\mathcal{D}_t = [-\infty, 1)$

Ejercicio

El dominio de la función $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, es

a. $\mathcal{D}_q = (1, \infty)$

b. $\mathcal{D}_q = [1, \infty)$

c. $\mathcal{D}_q = (-\infty, \infty)$

d. $\mathcal{D}_q = (-\infty, 1)$

Ejercicio

El dominio de la función $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 12}$, es

a. $\mathcal{D}_h = (-\infty, \infty)$

b. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - [-4,\, 3]$

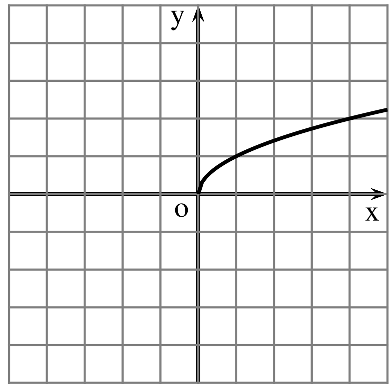
c. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \{-3,\, 4\}$

d. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \{-4,\, 3\}$

1.3. Reglas básicas de transformación de funciones

Si se conoce la gráfica de una función $y = f(x)$ y k es una constante positiva, se puede obtener la gráfica otras funciones al sumarle, restarle o multiplicando f o x en la función conocida.

Para los ejemplos que siguen, la función conocida será $f(x) = \sqrt{x}$, cuya gráfica es:



1.3.1. Desplazamiento vertical

Si se conoce $y = f(x)$ y $k > 0$ es una constante, entonces:

a. $f(x) + k$ está k unidades arriba de la gráfica de f.

b. $f(x) - k$ está k unidades abajo de la gráfica de f.

Note que se le está sumando o restando a toda la función.

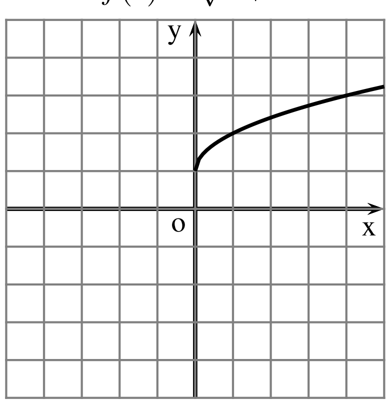
Ejemplos

Para $k = 1$, analice las gráficas de $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

Solución

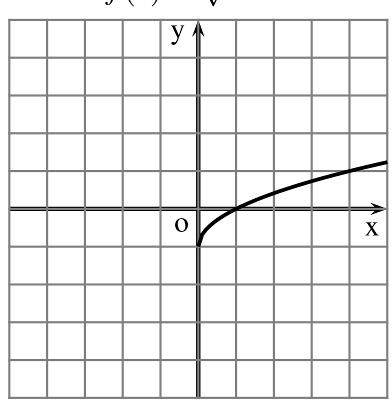
Las gráficas de las dos funciones pedidas se muestran a continuación. Note que $f(x) = \sqrt{x} + 1$ está desplazada una unidad hacia arriba de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \sqrt{x} - 1$ una unidad hacia abajo, como se muestra a continuación.

$f(x) = \sqrt{x} + 1$



$\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ $\mathcal{R}_f = [1, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x} - 1$



$\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ $\mathcal{R}_f = [-1, \infty)$

1.3.2. Desplazamiento horizontal

Si se conoce $y = f(x)$ y $k > 0$ es una constante, entonces:

a. $f(x+k)$ está k unidades izquierda de la gráfica de f.

b. $f(x-k)$ está k unidades derecha de la gráfica de f.

Note que se le está sumando o restando a la variable x.

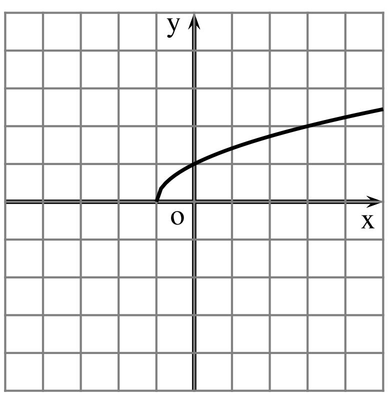
Ejemplos

Para $k = 1$, analice las gráficas de $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solución

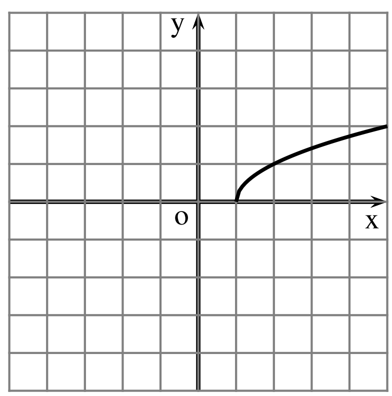
Las gráficas de las dos funciones pedidas se muestran a continuación. Note que $f(x) = \sqrt{x+1}$ esta desplazada una unidad hacia izquierda de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \sqrt{x-1}$ una unidad hacia derecha, como se muestra a continuación.

$f(x) = \sqrt{x+1}$



$\mathcal{D}_f = [-1, \infty)$ $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x-1}$



$\mathcal{D}_f = [1, \infty)$ $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$

1.3.3. Reflexión

Si se conoce $y = f(x)$ y $k > 0$ es una constante, entonces:

a. $-f(x)$ es una reflexión sobre el eje X de la gráfica de f.

b. $f(-x)$ es una reflexión sobre el eje Y de la gráfica de f.

c. $-f(-x)$ es una reflexión con respecto al origen de la gráfica de f.

Note que se le está sumando o restando a la variable x.

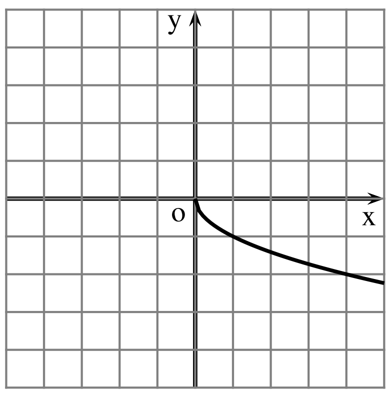
Ejemplos

Para $k=1$, analice las gráficas de $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Solución

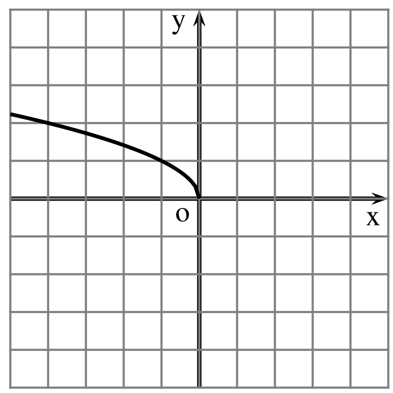
Las gráficas de las dos funciones pedidas se muestran a continuación. Note que $f(x)=-\sqrt{x}$ es la reflexión sobre el eje X de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ y $f(x)=\sqrt{-x}$ es su reflexión sobre el eje Y.

$f(x)=-\sqrt{x}$



$\mathcal{D}_f=[0,\infty)$ $\mathcal{R}_f=(-\infty,0]$

$f(x)=\sqrt{-x}$



$\mathcal{D}_f=(-\infty,0]$ $\mathcal{R}_f=[0,\infty)$

1.3.4. Cambios de escala

Si se conoce $y=f(x)$ y $k>0$ es una constante, entonces:

a. $kf(x)$ es un cambio en la escala vertical de f.

b. $f(kx)$ es un cambio en la escala horizontal de f.

Note que se está multiplicando la variable x en el argumento de la función.

Ejemplos

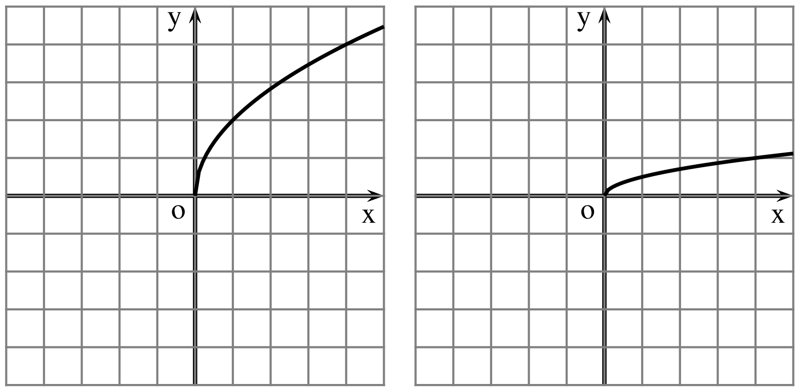
Si $k=2$, grafique $f(x)=2\sqrt{x}$ y $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución

Las gráficas de las dos funciones pedidas se muestran a continuación. Note que $f(x)=2\sqrt{x}$ y $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ cambian la escala vertical de la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$.

Ejemplos

$f(x) = 2\sqrt{x}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



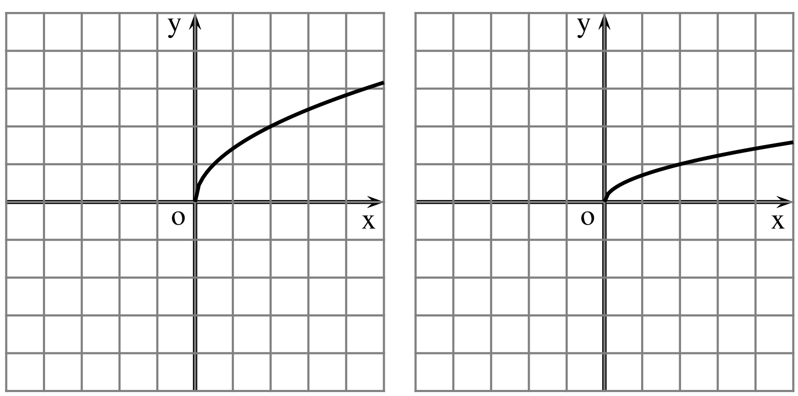
$\mathcal{D}_f = [0,\infty) \quad \mathcal{R}_f = [0,\infty)$ $\qquad$ $\mathcal{D}_f = [0,\infty) \quad \mathcal{R}_f = [0,\infty)$

Si $k = 2$, grafique $f(x) = \sqrt{2x}$ y $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$.

Solución

Las gráficas de las dos funciones pedidas se muestran a continuación. Note que $f(x) = \sqrt{2x}$ y $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ cambian la escala horizontal de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

$f(x) = \sqrt{2x}$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x}$



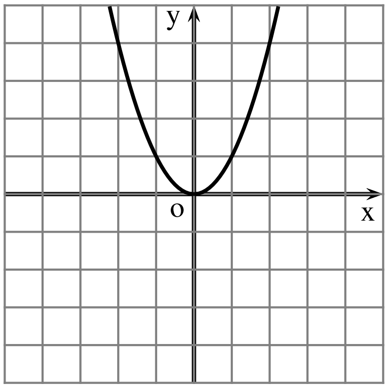
$\mathcal{D}_f = [0,\infty) \quad \mathcal{R}_f = [0,\infty)$ $\qquad$ $\mathcal{D}_f = [0,\infty) \quad \mathcal{R}_f = [0,\infty)$

1.4. Gráficas de funciones básicas

En las siguientes figuras se encuentran las gráficas de algunas de las funciones que son más usuales en el Cálculo. A partir de sus gráficas se pueden realizar rápidamente muchas otras.

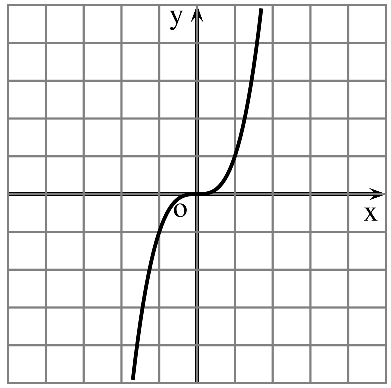
Ejemplos

$f(x) = x^2$



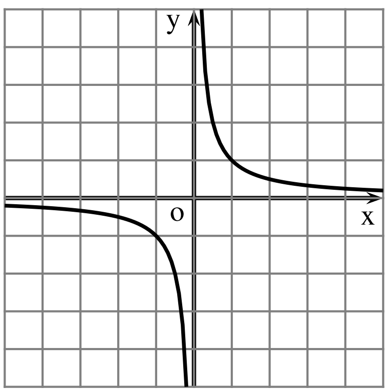
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$

$f(x) = x^3$



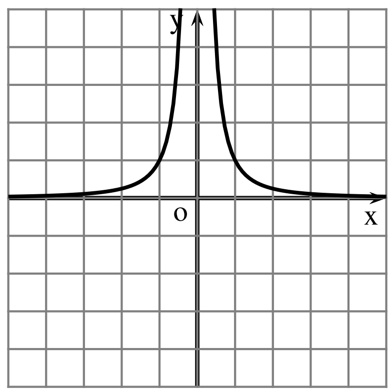
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



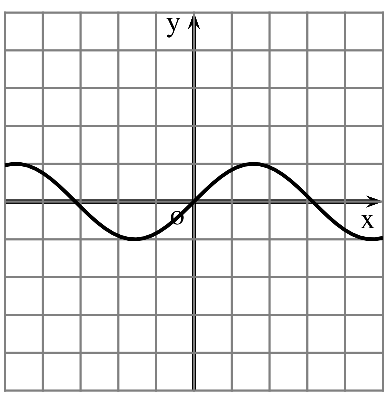
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



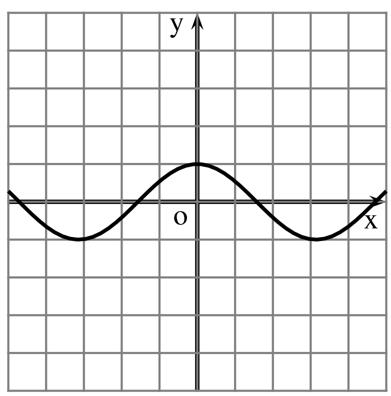
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathcal{R}_f = (0, \infty)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$



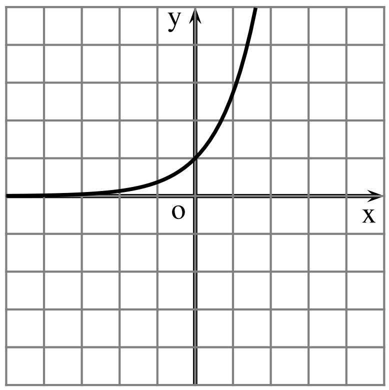
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = [-1, 1]$

$f(x) = \cos(x)$



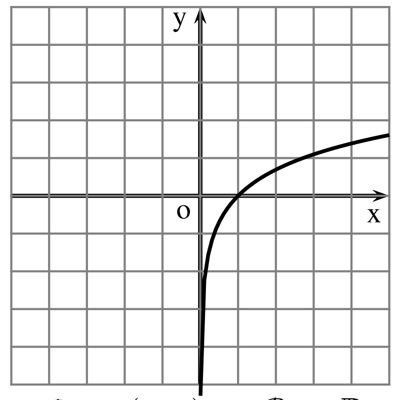
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = [-1, 1]$

$f(x) = e^x$



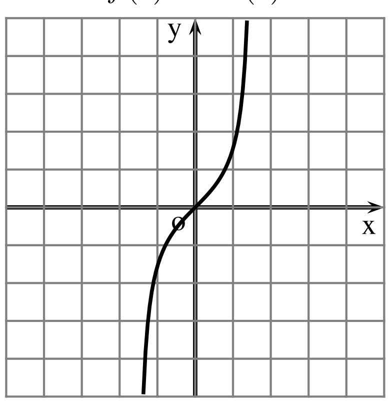
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = (0, \infty)$

$f(x) = \ln(x)$



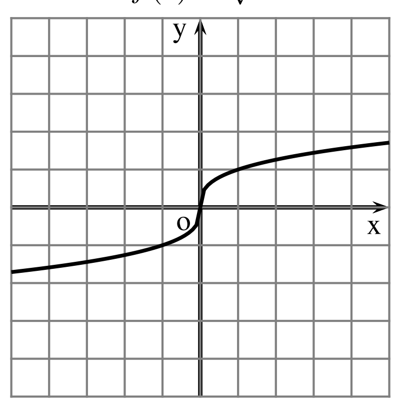
$\mathcal{D}_f = (0, \infty)$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \tan(x)$



$\mathcal{D}_f = (-1.57, 1.57)$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

Teniendo en cuenta el listado de las funciones básicas y las reglas de transformación de funciones, grafique:

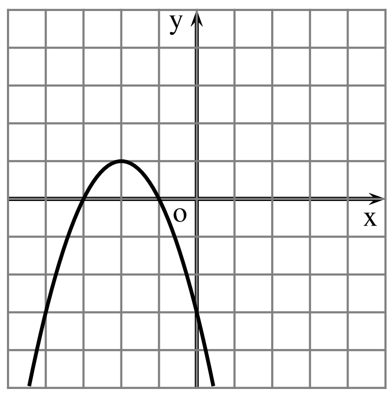
$$f(x) = -(x+2)^2 + 1$$

La función básica es $g(x) = x^2$, el signo menos de la función $f(x) = \mathbf{-}(x+2)^2 + 1$, está diciendo que la gráfica de f es una reflexión sobre el eje X de la de g.

El número 2 al interior del paréntesis de $f(x) = -(x+\mathbf{2})^2 + 1$, indica que la gráfica de f está desplazada dos unidades sobre el eje X a la izquierda de la de g.

El número 1, por fuera de $f(x) = -(x+2)^2 + \mathbf{1}$, indica que la gráfica de f está desplazada una unidad arriba del eje Y en relación de la de g. Por lo tanto la gráfica de f es:

$f(x) = -(x+2)^2 + 1$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1)$

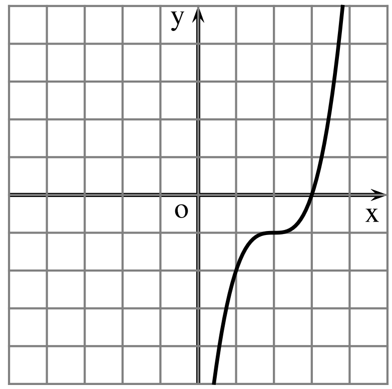
Teniendo en cuenta el listado de las funciones básicas y las reglas de transformación de funciones, grafique:

$$f(x) = (x-2)^3 - 1$$

La función básica es $g(x) = x^3$, el número -2 al interior del paréntesis de $f(x) = (x\,\mathbf{-2})^3 - 1$, indica que la gráfica de f está desplazada dos unidades a la derecha sobre el eje X de la de g.

El número -1, por fuera de $f(x) = (x-2)^3\,\mathbf{-1}$, indica que la gráfica de f está desplazada una unidad hacia abajo del eje Y en relación de la de g. Por lo tanto la gráfica de f es:

$f(x) = (x-2)^3 - 1$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$

Ejercicio

Para graficar la función $h(x) = -\sqrt{x-1}+1$, se tiene en cuenta que

a. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada una unidad a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia arriba en el eje Y.

b. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje Y, está desplazada dos unidades a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia arriba en el eje Y.

c. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada dos unidades a la izquierda sobre el eje X y una unidad hacia arriba en el eje Y.

d. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada dos unidades a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia abajo en el eje Y.

Ejercicio

Para gráficar la función $h(x) = \sqrt{-x+2} - 1$, se tiene en cuenta que

a. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada una unidades a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia arriba en el eje Y.

b. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje Y, está desplazada dos unidades a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia abajo en el eje Y.

c. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada dos unidades a la izquierda sobre el eje X y una unidad hacia arriba en el eje Y.

d. La función básica es $f(x) = \sqrt{x}$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X, está desplazada dos unidades a la derecha sobre el eje X y una unidad hacia abajo en el eje Y.

Ejercicio

Para graficar la función $h(x) = -e^{-x}$, se tiene en cuenta que

a. La función básica es $f(x) = \ln(x)$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje Y y no está desplazada en ninguno de los dos ejes.

b. La función básica es $f(x) = e^x$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X.

c. La función básica es $f(x) = e^x$, de la que $h(x)$ es una reflexión sobre el eje X y una reflexión sobre el eje Y.

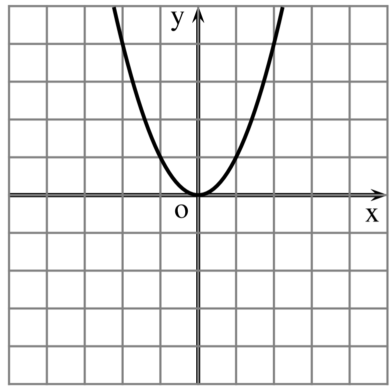
d. La función $h(x)$ es la misma de $f(x) = e^x$.

1.5. Funciones pares e impares

En el estudio y caracterización de las funciones, existen algunas que cumplen propiedades que facilitan su estudio.

Función par. Una función $y = f(x)$ es par si se cumple que $f(-x) = f(x)$.

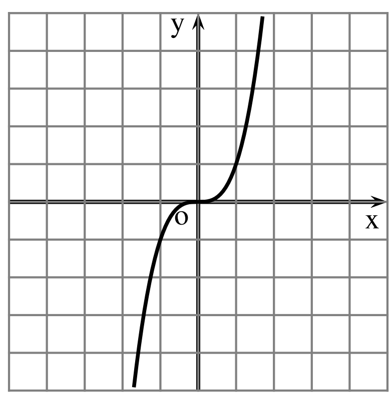
Como ejemplo tenemos la función $y = f(x) = x^2$. Al aplicarle el criterio para las funciones pares se tiene que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Comprobando que $f(x) = x^2$ es par. En general, todas las funciones de la forma $g(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ con pares. La gráfica de $f(x) = x^2$ es la siguiente:



En general, cuando una función es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

Función impar. Una función $y = f(x)$ es impar si se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Como ejemplo tenemos la función $y = f(x) = x^3$. Al aplicarle el criterio para las funciones impares se tiene que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Comprobando que $f(x) = x^3$ es impar. En general, todas las funciones de la forma $g(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ son impares. La gráfica de $f(x) = x^3$ es la siguiente:



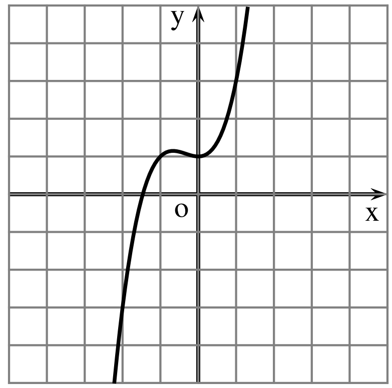
En general, cuando una función es impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Funciones que no son pares o no son impares Existen funciones $y = f(x)$ que no son pares ni impares.

Como ejemplo tenemos la función $y = f(x) = x^2 + x^3 + 1$. Al aplicarle el criterio para las funciones impares se tiene que $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 + 1 = x^2 - x^3 + 1$, de donde no se puede factorizar el signo menos $(-)$ para comprobar que $f(-x) = -f(x)$. Por lo tanto la función no es impar.

Compruebe que la función dada no es par.

La gráfica se presenta a continuación.



Ejercicio

La función $f(x) = x^4 + x^6$ es

a. Par, puesto que cumple que $f(-x) = f(x)$

b. Impar, puesto que cumple que $f(-x) = -f(x)$

c. No es par ni impar.

Ejercicio

La función $f(x) = x^4 + x^6 + x + \pi$ es

a. Par, puesto que cumple que $f(-x) = f(x)$

b. Impar, puesto que cumple que $f(-x) = -f(x)$

c. No es par ni impar.

Ejercicio

La función $f(x) = x^3 + x^5$ es

a. Par, puesto que cumple que $f(-x) = f(x)$

b. Impar, puesto que cumple que $f(-x) = -f(x)$

c. No es par ni impar.

Ejercicio

La función $f(x) = x^3 + x^5 + 2$ es

a. Par, puesto que cumple que $f(-x) = f(x)$

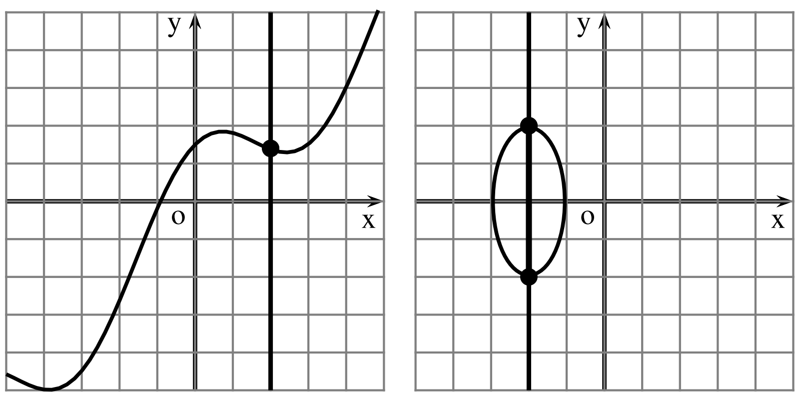
b. Impar, puesto que cumple que $f(-x) = -f(x)$

c. No es par ni impar.

1.6. Criterio de la recta vertical para funciones

Para saber si una gráfica en el plano cartesiano corresponde a una función, en muchas ocasiones resulta útil trazar una recta paralela al eje Y. Si alguna recta vertical corta a la gráfica en más de un punto, se concluye que no es función. Observe los siguientes ejemplos:

Función No es función



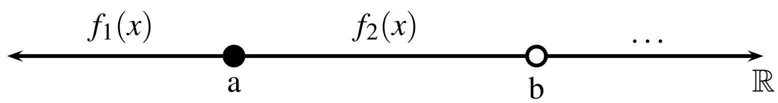
Observe que en la gráfica de la izquierda, en cualquier parte del eje X en la que se trace la recta vertical, estas solamente corta a la gráfica en un solo punto. No sucede lo mismo con la gráfica de la derecha. Al desplazar la recta vertical en el intervalo $(-3,-1)$, esta corta a la gráfica (elipse) en dos puntos.

Con este criterio hay que tener cuidado, pues en muchas ocasiones "parece" que la recta vertical cruza la gráfica en un solo punto, pero esto no resulta ser cierto. En muchos casos, si se tiene la gráfica realizada por un asistente matemático, conviene hacer "zoom" alrededor de la parte en la que se tengan dudas.

1.7. Funciones por tramos

En muchas aplicaciones el dominio de una función se parte en subintervalos y para cada uno de ellos la gráfica es diferente. En general, una función por tramos se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq a \\ f_2(x) & \text{si } a < x < b \\ \ldots \end{cases}$$



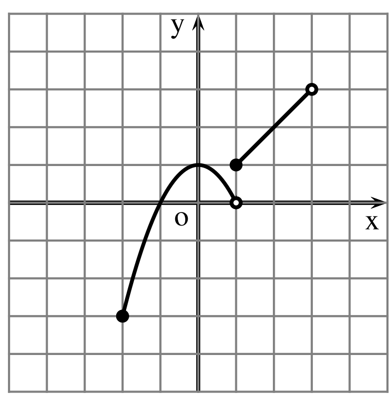
Al realizar la gráfica de una función por tramos, en cada subintervalo se representa la parte de la función correspondiente.

Ejemplo

Grafique en el plano cartesiano la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

Encuentre su dominio, su rango y $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ y (2).

La gráfica está dada por:



El dominio de la función está dado por los intervalos que definen cada una de las ramas de la misma, en este caso $\mathcal{D}_f = [-2,1) \cup [1,3) = [-2,3)$.

El rango, está dado por las alturas para las que hay gráfica, en este caso $\mathcal{R}_f = [-3,3)$.

Para evaluar la función en los valores pedidos, hay que tener en cuenta en qué intervalo se encuentra el valor dado en x.

Para $x = -2$, $-2 \in [-2,1)$ y la rama de la función definida ahí es $-x^2+1$, por lo tanto $f(-2) = -(-2)^2+1 = -4+1 = -3$, como se puede verificar en la gráfica.

Para $x = 0{,}0 \in [-2,1)$ y la rama de la función definida ahí es $-x^2+1$, por lo tanto $f(0) = -(0)^2+1 = 0+1 = 2$, como se puede verificar en la gráfica.

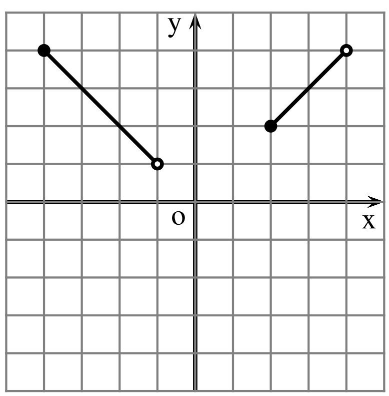
Para $x = 1$, $1 \in [1,3)$ y la rama de la función definida ahí es x, por lo tanto $f(1) = (1) = 1$, como se puede verificar en la gráfica.

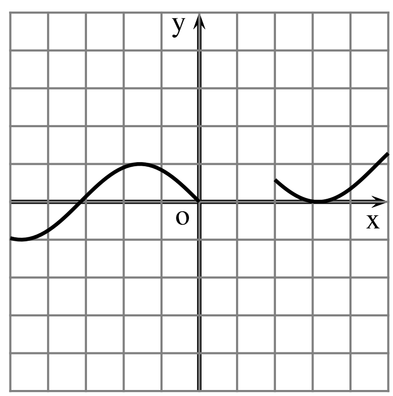
Note que $x = 4$ no tiene imagen, en otras palabras $f(4)$ no existe, pues $4 \notin \mathcal{D}$.

Ejercicio: Relacione cada una de las siguientes funciones con su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -4 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } -5 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 4 \end{cases} \qquad t(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(x) & \text{si } -5 \leq x \leq 0 \\ \cos(x)+1 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



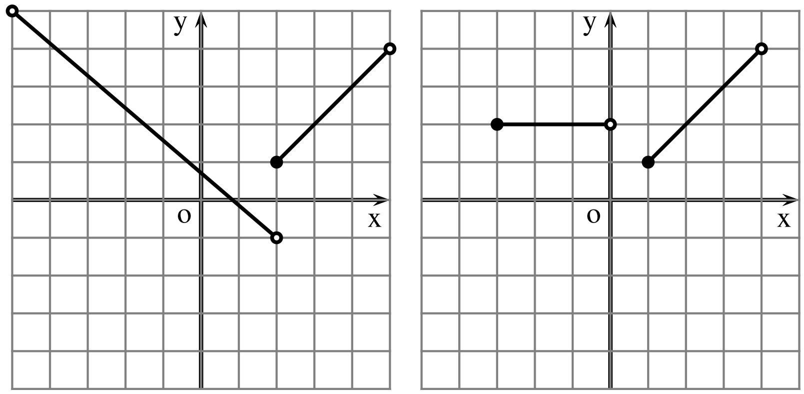


Para cada una de las funciones definidas en la página 25, determine su dominio y su rango. Además, si es posible, evalúelas en $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$. En los casos, en los que no sea posible evaluarlas, explicar el porqué.

1.8. Operaciones con funciones

Las funciones reales de variable real, se pueden sumar, restar, multiplicar, elevar a una potencia, entre otras operaciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones reales de variable real:



La suma es $f(x)+g(x)$.

La resta $f(x)-g(x)$.

La multiplicación $f(x)g(x)$.

La división $\dfrac{f(x)}{g(x}$, siempre que $g(x) \neq 0$.

El dominio de la suma, la resta, la multiplicación de funciones está dado por la intersección de los dominios de cada una de las funciones. Para la división hay que tener en cuenta que además de la intersección de los dominios hay que verificar si hay divisiones por cero (0)

Al operar con funciones lo que se está haciendo es realizar operaciones con las imágenes de las mismas.

Ejemplos

Para $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=x+1$

a. Encuentre $f(x)+g(x)$ y $\mathcal{D}_{f+g}$

   Solución

   $f(x)+g(x)=(x^2-2x+1)+x+1=x^2-x+2$

   El $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$, por lo tanto $\mathcal{D}_{f+g}=\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

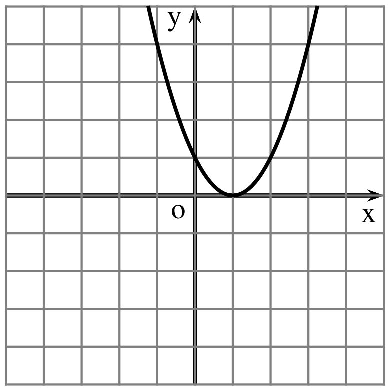
   Note que $f(-1)=4$, $g(-1)=0$ y $f(-1)+g(-1)=4+0=4$, como se puede verificar en las gráficas anteriores.

b. Encuentre $f(x)-g(x)$ y $\mathcal{D}_{f-g}$

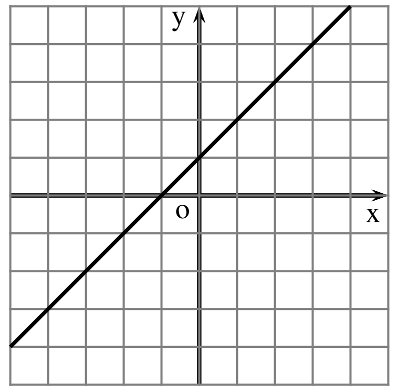
   Solución

   $f(x)-g(x)=(x^2-2x+1)-(x+1)=x^2-3x$

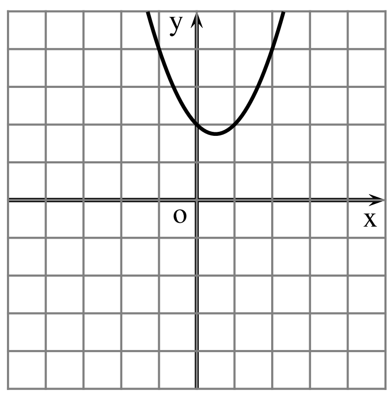
   El $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$, por lo tanto $\mathcal{D}_{f-g}=\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$



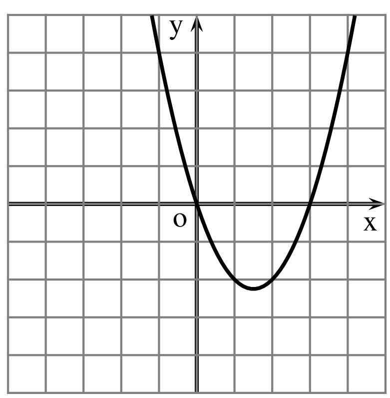
$f(x) = x^2 - 2x + 1$



$g(x) = x + 1$



$f(x) + g(x) = x^2 - x + 2$



$f(x) - g(x) = x^2 - 3x$

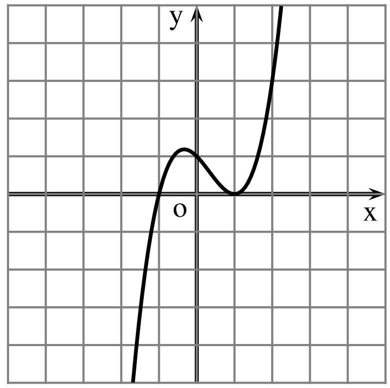
Note que $f(-1) = 4$, $g(-1) = 0$ y $f(-1) - g(-1) = 4 - 0 = 4$, como se puede verificar en las gráficas anteriores.

c. Encuentre $f(x)g(x)$ y $\mathcal{D}_{fg}$

Solución

$f(x)g(x) = (x^2 - 2x + 1)(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$

El $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, por lo tanto $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$



$f(x)g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

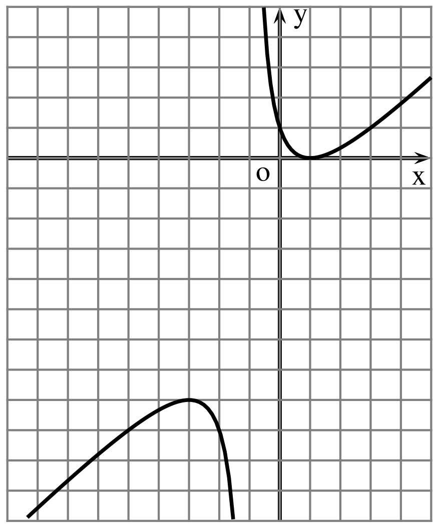
Note que $f(-1) = 4$, $g(-1) = 0$ y $f(-1)g(-1) = (4)(0) = 0$, como se puede verificar en las gráficas anteriores.

d. Encuentre $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$

Solución

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

El $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, por lo tanto $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g - \{-1\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$. Al realizar la división, el cociente entre las dos funciones no puede tomar el valor $x = -1$ y por lo tanto hay que sacarlo de su dominio.



$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x+1}{x+1}$

Note que para $x=-1$, no existe gráfico, pues la división de f con g no está definida para ese valor.

Ejercicio

Para $f(x)=x^2-x+12$ y $g(x)=x+3$, se tiene que $f(x)-g(x)$ y $f(2)-g(2)$, respectivamente, son

a. $x^2-2x-12$, 12

b. $x^2-2x-12$, -12

c. x^2-2x+9, 9

d. x^2+2x+9, 9

Ejercicio

Para $f(x)=x+3$ y $g(x)=x-3$, se tiene que $f(x)g(x)$ y $f(2)g(2)$, respectivamente, son

a. $-x^2-9$, 5

b. $-x^2-9$, -5

c. x^2+9, 5

d. x^2-9, -5

Ejercicio

Para $f(x) = x^2 - x - 12$ y $g(x) = x + 3$, se tiene que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ para $x \neq -3$ y $\dfrac{f(2)}{g(2)}$, respectivamente, son

a. $x+4$, -2

b. $x-4$, -2

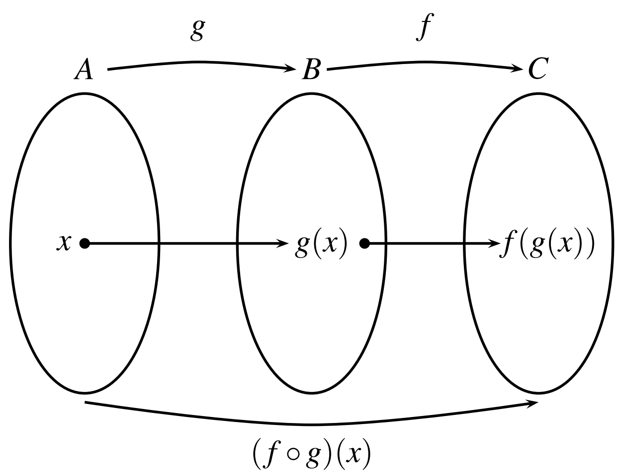
c. $x-4$, 2

d. $x+3$, 3

1.9. Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la composición (la compuesta) de f con g está dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio de $(f \circ g)(x)$ está dado por el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ este en el dominio de f.

Gráficamente $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se representa de la siguiente manera:



La composición de funciones $(f \circ g)(x)$, también se lee, primero g luego f, indicando que en primer lugar se evalúa la función g en el valor x y luego f en el valor $g(x)$ como se aprecia en el gráfico anterior.

Ejemplos

a. Para $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, encuentre $(g \circ f)(1)$, $(f \circ g)(1)$ y $\mathcal{D}_{g \circ f}$.

Solución:

Para facilitar el proceso, se calcula primero $f(1) = \frac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ y $g(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Note que, en general, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$. Compruébelo con las mismas funciones anteriores para $x = 2$.

Para encontrar $\mathcal{D}_{g \circ f}$, se encuentra primero el $\mathcal{D}_f$ y el $\mathcal{D}_g$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, puesto que si $x = -1$, $f(-1)$ no existe, hay una división por cero.

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}$, puesto que si $x = 0$, $g(0)$ no existe, hay una división por cero.

$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Observe que $0 \notin \mathcal{D}_g$, por lo tanto no está en el $\mathcal{D}_{f \circ g}$. Al realizar la composición $(f \circ g)(x)$ se puede observar que $x = -1$ no está en el dominio de $\mathcal{D}_{f \circ g}$, como se puede observar a continuación.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x(1)}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

Para encontrar una fórmula para $f(g(x))$, se escribe a $g(x)$ como argumento de f y luego se reemplazan las x de f por $g(x)$, como se realizó anteriormente.

b. Encuentre una fórmula para $g(f(x))$, $\mathcal{D}_{g \circ f}$, $g(f(2))$ y $g(f(-3))$.

Solución:

Para encontrar $g(f(x))$, se reemplaza a $f(x)$ en el argumento de g y luego se reemplaza x en g.

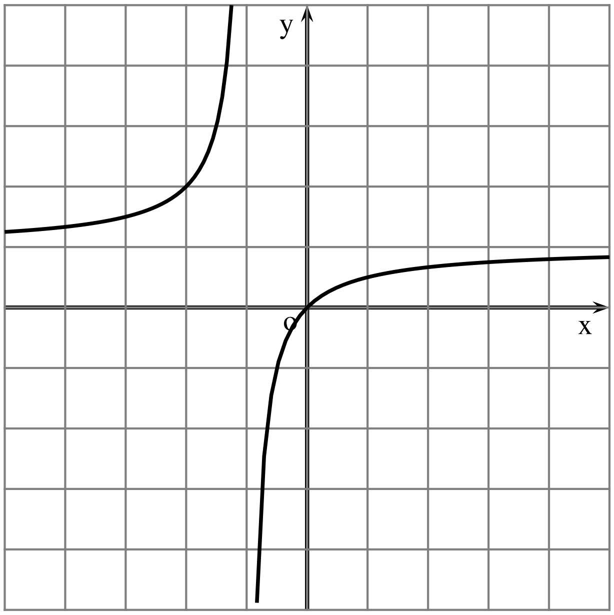
$g(f(x)) = g\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$, por lo tanto $g(f(x)) = \dfrac{x+1}{x}$.

$\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, observe que $-1 \notin \mathcal{D}_f$ y $x = 0$ no está en el $\mathcal{D}_{g \circ f}$.

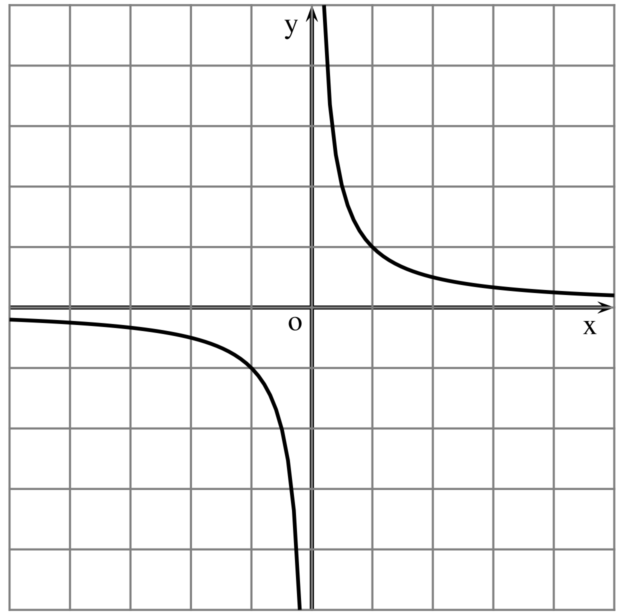
$g(f(2)) = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$g(f(-3)) = \dfrac{-3+1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

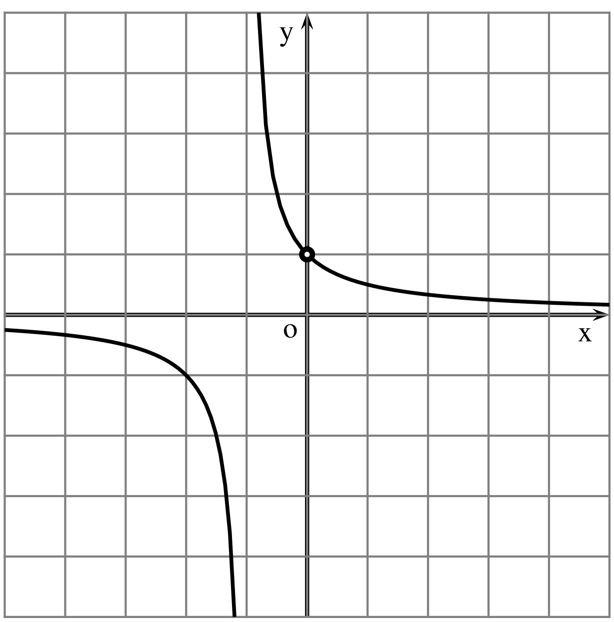
c. Realice las gráficas de $f(x)$, $g(x)$, $f(g(x))$ y $g(f(x))$.



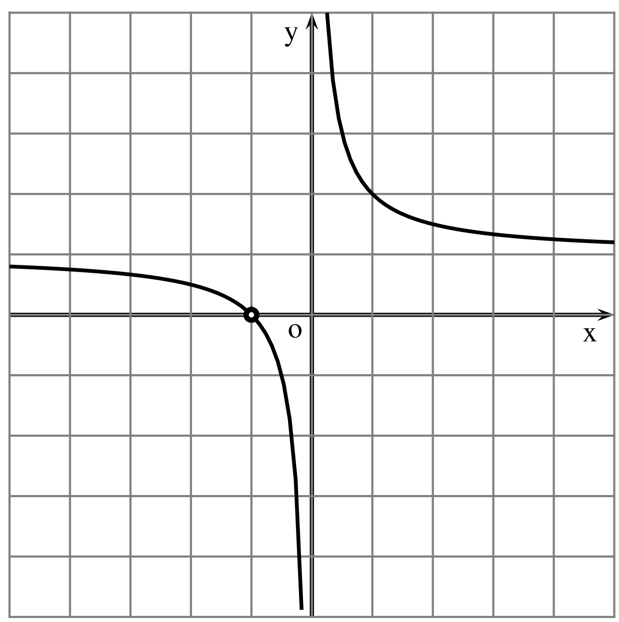
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$



$$g(x) = \frac{1}{x}$$

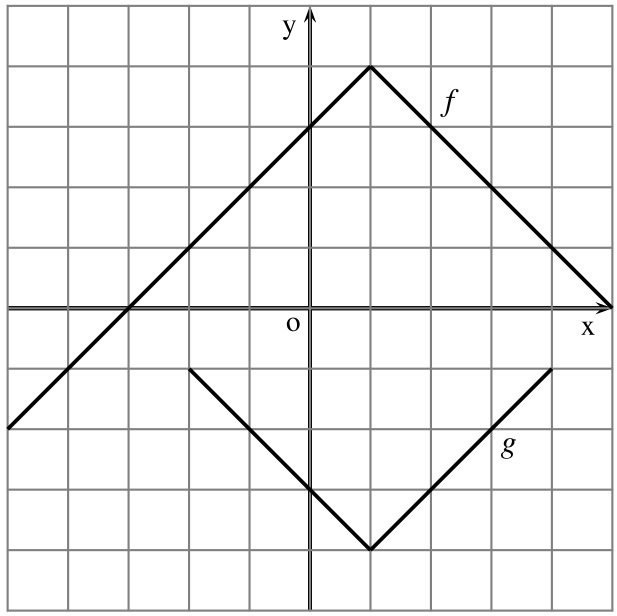


$$f(g(x)) = \frac{1}{x+1}$$



$$g(f(x)) = \frac{x+1}{x}$$

Ejercio. En la siguiente gráfica se encuentra la funciones f y g. Encuentre $f(g(2))$, $g(f(-2))$ y $\mathcal{D}_{f(g(x))}$.



Solución:

$g(2) = -3$, $f(-3) = 0$, por lo tanto $f(g(2)) = 0$

$f(-2) = 1$, $g(1) = -4$, por lo tanto $g(f(-2)) = -4$

$\mathcal{D}_{f(g(x))} = \mathcal{D}_g = [-2,4]$, note que las imágenes de g están en el dominio de f.

Ejercicio

Para $f(x) = x^2 - x + 12$ y $g(x) = x + 3$, $f(g(x))$ es

a. $x^3 + 5x^2 + 18$

b. $x^3 + 5x - 18$

c. $x^2 + 5x + 18$

d. $x^2 - 5x + 18$

Ejercicio

Para $f(x) = x^2 - x + 12$ y $g(x) = x + 3$, $g(f(x))$ es

a. $x^2 + x + 15$

b. $x^2 - x + 15$

c. $x^2 + 5x + 18$

d. $x^2 + 5x + 18$

2. Bibliografía

1. Leithold, L., & González, F. M. (1994). Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica: con ejercicios para calculadora y graficadora. Harla.
2. Swokowski, E. W. (1989). Calculus with analytic geometry. Cálculo con geometría analítica/.
3. Larson, R., Bruece, Edwards. (2011). Cálculo. McGraw Hill, Novena edición.

Índice