

**PROBABILIDAD GEOMÉTRICA: UN ENFOQUE  
MODERNO CON APLICACIONES.**

**Martin Humberto Tello Huergo  
Ricardo Andrés Giraldo Monsalve**

MAESTRIA EN MATEMATICAS APLICADAS  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
UNIVERSIDAD EAFIT  
MEDELLÍN  
2011

**PROBABILIDAD GEOMETRICA: UN ENFOQUE  
MODERNO CON APLICACIONES.**

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de  
Magíster en Matemáticas Aplicadas

**Martin Humberto Tello Huergo  
Ricardo Andrés Giraldo Monsalve**

**Director: Francisco Iván Zuluaga Díaz**  
MSc. en Matemáticas Aplicadas

MAESTRIA EN MATEMATICAS APLICADAS  
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
UNIVERSIDAD EAFIT  
MEDELLÍN

2011

**Nota de aceptación**

-----  
-----  
-----  
-----  
-----  
-----

Coordinador de la Maestría

-----

Director del proyecto

-----

Ciudad y fecha:

-----

*A Dios padre por hacer posible llegar hasta la meta sin desfallecer.  
A mi Madre por sus bendiciones infinitas y su amor incondicional.  
A Nana por su apoyo incondicional que no tiene precio.  
A mi esposa Guiomar, quien esta conmigo frente al cañón soportando las olas más fuertes  
y compartiendo conmigo las brisas suaves.  
A mis hijos Martin Andrés, Daniel Felipe y Manuela,  
quienes le dan fuerza a mi motor y por quienes vivo.  
A mi Padre a quien le llena de orgullo mi trabajo.  
A Ricardo, quien durante este tiempo se ha convertido en un sincero amigo.*

*Martin Tello*

A Beatriz, Adelaida y Paulina, los tres nombres que resumen mi vida.

*Ricardo Andrés Giraldo Monsalve*

Un agradecimiento especial al Msc. Francisco Zuluaga por la colaboración, paciencia, apoyo brindados desde siempre y sobre todo por esa gran amistad que nos brindó y nos brinda, por escucharnos y aconsejarnos siempre.

*Martin Tello Huergo*  
*Ricardo Andrés Giraldo Monsalve*

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2. Marco Teórico</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1. Estado del arte . . . . .   | 2         |
| 2.2. Probabilidad Geométrica . . . . .   | 3         |
| 2.3. Dos puntos aleatorios sobre una circunferencia . . . . .  | 5         |
| 2.4. Dos puntos sobre la circunferencia y cuerdas aleatorias . . . . .   | 6         |
| 2.4.1. Solución 1: Cuerda aleatoria (Modelo 1) . . . . .   | 7         |
| 2.4.2. Solución 2: Cuerda aleatoria (Modelo 2) . . . . .   | 11        |
| 2.4.3. Solución 3: Cuerda aleatoria (Modelo 3) . . . . .   | 15        |
| 2.5. Paradoja de Bertrand . . . . .  | 21        |
| 2.5.0.1. Enunciado de la paradoja de Bertrand . . . . .  | 21        |
| 2.5.0.2. Caso 1 . . . . .  | 22        |
| 2.5.0.3. Caso 2 . . . . .  | 22        |
| 2.5.0.4. Caso 3 . . . . .  | 22        |
| 2.5.0.5. Resolución del problema . . . . .   | 24        |
| 2.5.1. Caso 1 . . . . .  | 24        |
| 2.5.2. Caso 2 . . . . .  | 25        |
| 2.5.3. Caso 3 . . . . .  | 26        |
| 2.5.3.1. Observaciones . . . . .   | 26        |
| 2.6. Algunas distribuciones de probabilidad asociadas con viajes cercanos a una ciudad circular homogénea. . . . . | 27        |
| 2.6.1. Rectangulares: . . . . .  | 28        |
| 2.6.2. Polares . . . . .   | 29        |
| <b>3. Viajes desde un municipio al centro de una ciudad</b>  | <b>31</b> |
| 3.1. Viajes en el municipio . . . . .  | 31        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4. Viajes desde los municipios cercanos a la ciudad.</b>   | <b>43</b> |
| 4.1. Diferentes planes de viajes . . . . .  | 43        |
| 4.1.1. <i>Plan 1:</i> Ir de $P_i$ a $O_i$ y luego a $B_i$ y de allí a $A_i$ . . . . .   | 44        |
| 4.1.2. <i>Plan 2:</i> Ir de $P_i$ a $Q_i$ y luego a $B_i$ y de allí a $A_i$ . . . . .   | 45        |
| 4.1.3. <i>Plan 3:</i> Ir de $P_i$ a $B_i$ y luego hasta $A_i$ . . . . .   | 45        |
| 4.1.4. <i>Plan 4:</i> Ir de $P_i$ directamente a $A_i$ . . . . .  | 45        |
| 4.1.5. <i>Plan 5:</i> Ir desde $P_i$ a la circunvalar, luego, a lo largo de ésta dirigirse<br>hasta el eje $O_iO^*$ y después a $B_i$ . . . . . | 45        |
| 4.1.6. <i>Plan 6:</i> Ir, directamente, de $P_i$ a $P^*$ . . . . .  | 46        |
| 4.2. Distancias de viajes esperadas en $C_i$ bajo diversos planes. . . . .  | 46        |
| 4.3. Combinando varios planes de viaje. . . . .   | 53        |
| <b>5. Casos de aplicación</b>   | <b>55</b> |
| 5.1. Viaje desde cualquier punto de Medellín hasta Bello. . . . .   | 56        |
| 5.2. Viaje desde cualquier punto de Medellín hasta Rionegro. . . . .  | 63        |
| <b>6. ANEXO</b>   | <b>71</b> |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b>   | <b>75</b> |

# Capítulo 1

## Introducción

Los contaminantes emitidos por los vehículos, la contaminación acústica, el desgaste del pavimento y del medio ambiente se pueden medir en términos de las distancias de un viaje previsto. En este sentido, el presente trabajo parte del interés por buscar posibles opciones que permitan dar solución al problema de contaminación, enfocado a la producida por los vehículos de combustión.

Durante los últimos 50 años la humanidad ha empezado a girar su mirada a la conservación del medio ambiente, debido a los altos índices de contaminación que se presenta en las ciudades grandes. Una de las causas de estos altos índices está ligado con la producción de gases por la movilización de vehículos de combustión. El nivel de contaminación producido por estos vehículos está directamente relacionado con las distancias de sus recorridos. A finales de la década de los 90's el profesor Mathai con un grupo de trabajo presentaron un desarrollo en probabilidad geométrica, basado en modelos de ciudades circulares las cuales son consideradas uniformes y de distribuciones generalizadas. El fundamento teórico de este trabajo tiene como piedra angular los artículos "*Pollution by vehicular travels from the suburbs to the city core*"<sup>1</sup> y "*Pollution by vehicular travels from satellite townships to the city*"<sup>2</sup>, los cuales permiten analizar la distancia esperada en un recorrido, desde un municipio cercano hasta el centro de la ciudad. Allí se presenta un modelo de transporte entre dos municipios en la consideración de varias rutas de vehículos que salen de la ciudad a municipios cercanos.

Por lo anterior, el presente trabajo pretende aplicar este desarrollo a varios casos reales, calculando los valores esperados para las diferentes rutas planteadas para dicho recorrido. En este sentido, con el presente trabajo se pretende usar este desarrollo y llevarlo a una

---

<sup>1</sup>A.M.MATHAI. Quebec,1998

<sup>2</sup>A.M. MATHAI, P.G MOSCHOPOULUS. Quebec. 1999

aplicación real calculando los valores esperados para las posibles rutas, en el desplazamiento de vehículos entre una ciudad y otra, las cuales tienen las características ya mencionadas. Así los objetivos planteados son: Realizar construcciones sobre ciudades reales, verificando el modelo para cada una de las funciones encontradas. Realizar los desarrollos matemáticos necesarios para determinar los valores esperados para cada una de las trayectorias entre dos ciudades circulares, con distribuciones generalizadas e implementar herramientas tecnológicas que permitan modelaciones para los planes propuestos.

A partir de aquí se desarrolla un modelo aproximado aplicado a situaciones con condiciones definidas y fundamentadas en la probabilidad geométrica, calculando la distancia entre un punto de llegada y otro de partida, para poder conocer el nivel de contaminación y -en consecuencia- tomar decisiones conscientes sobre el medio ambiente. Así se presenta el desarrollo de casos específicos de movimientos de vehículos en ciudades, con forma circular y de distribuciones uniformes y generalizadas, con su correspondiente desarrollo, las pruebas y resultados.

A pesar de la necesidad de estudios y propuestas acerca de modelos que regulan el transporte público y con él los niveles de contaminación soportables y - si se admite- más racionales, no existe en el medio, ni en la literatura, los esfuerzos conducentes a conseguir dicho propósito. Este vacío plantea, así mismo, a las entidades estatales, la dejación de normativas y regulaciones empíricas y que la planeación, la programación del servicio y el control de operaciones partan de necesidades reales y entre por la vía de la planeación científica y tecnológica.

Aquí radica la originalidad de esta tesis. Es una apuesta fundada en literatura científica, apoyada en su etapa probativa, en herramientas digitales y tecnológicas y que -al mismo tiempo- toma como modelo de transporte experiencias reales dirigidas a optimizar el tiempo y mejorar servicios en la ciudad.

Los resultados y casos de aplicación se basan en ciudades que cumplen las condiciones descritas anteriormente. Las pruebas se realizaron para Bogotá (pero no satisfizo las condiciones), se elige Medellín y el Valle de Aburrá. Así se logra la modelación de las siguientes rutas: Desde cualquier punto de Medellín hasta Bello y desde cualquier punto de Medellín hasta Rionegro. Aquí se estiman 5 planes de viajes para cada recorrido con sus correspondientes valores esperados.

Este trabajo consta de 5 capítulos. En el capítulo 2 se hace una somera reseña histórica de la probabilidad geométrica, estado del arte y continúa con problemas típicos como, por ejemplo, dos puntos aleatorios sobre una circunferencia, cuerdas aleatorias para un círculo, la paradoja de Bertrand y algunas distribuciones de probabilidad asociadas con viajes cercanos a una ciudad circular homogénea.

---

En el capítulo 3, se analizan diversos viajes desde un municipio al centro de una ciudad, resaltando la función de densidad  $g(\rho)$  para una ciudad circular en la cual un punto aleatorio dentro de la misma presenta una distribución uniforme. Luego en el capítulo 4, se plantea el problema base de la tesis, Viajes desde una ciudad a un municipio cercano. Encontrando las distancias esperadas para diversos planes de viajes en una ruta establecida. Por último, en el capítulo 5, se dan dos casos de aplicación reales, Valores esperados para distancia entre dos puntos para las rutas Medellín-Bello y Medellín Rionegro, con sus correspondientes análisis.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Estado del arte

A pesar del alto interés que suscita la disminución de los niveles de contaminación producidos por gases contaminantes, generados por los vehículos de combustión interna, es necesario mencionar que no existe mucha información teórica respecto a modelos matemáticos que esten dirigidos a plantear propuestas sobre esta temática.

Tradicionalmente se ha manejado el transporte público desde un punto de vista empírico, regulado por normas emitidas por Ministerios del Transporte, orientadas principalmente hacia los aspectos legales y las normas de tránsito.

Todo lo relacionado con planeación, programación del servicio y control sobre la operación está basado en la experiencia y no hay escritos de procedimientos ni métodos.

Los desarrollos hechos en el modelo de transporte van dirigidos a optimizar el tiempo y mejorar el servicio, es así como en Europa, los sistemas de transporte público cuentan con tecnología de punta (sistemas de posicionamiento global, computador en el vehículo, comunicación entre el centro de control), y en Estados Unidos el problema de la programación de rodamientos se conoce como "*Transit Scheduling*" (Programación de Tránsito) y se divide en cuatro etapas (Pine et al., 1998):

1. "*Trip generation*" (generación de viajes): Consiste en generar los viajes o recorridos para todo un día, teniendo en cuenta la frecuencia de despachos.
2. "*Blocking*" (generación de bloques): Es el proceso de asignación de vehículos que establece los recorridos que debe efectuar cada vehículo en un día.
3. "*Runcutting*" (Partición de rutinas): Se trata de hacer la asignación de conductores.
4. "*Rostering*" (Generación de listados): En esta etapa se agrupan las rutinas diarias en paquetes de semanas o meses, teniendo en cuenta los días de descanso. De igual manera se han hecho estudios de investigación dirigidos al análisis de los efectos contaminantes del

desplazamiento de los vehículos en zonas urbanas (*Modelling Urban Vehicle Emissions* by M. Khare, P. Sharma, Prateek Sharma, P. Sharma (Editor)). En documentos como éste podemos ver la aplicación de diferentes tipos de modelos deterministas, estocásticos y los modelos híbridos para estimar y predecir los contaminantes de vehículos en un entorno urbano.

Como puede verse, cada uno de los anteriores análisis van dirigidos al mejor funcionamiento de líneas de transporte ó, de forma alterna, al mejoramiento del aire, pero ninguno va dirigido a unir la optimización del transporte con la disminución de la contaminación producida por estos vehículos.

En el año 1998 el profesor A.M.Mathai. presentó su artículo "*Pollution by vehicular travels from the suburbs to the city core*" que permite analizar la distancia esperada en un recorrido, desde un municipio cercano hasta el centro de una ciudad. En el se presenta un modelo de transporte entre dos localidades o municipios, para ello se consideran varias rutas de vehículos que salen desde municipios cercanos hacia el centro de la ciudad. Teniendo en cuenta que todos los posibles vehículos salen de todos los posibles puntos del municipio y llegan al centro de la ciudad, se asume que el punto de partida está uniformemente distribuído en el interior del municipio, es decir, su probabilidad es proporcional al área del círculo y el punto de llegada esta uniformemente distribuído en el interior de la ciudad.

Este estudio es el parámetro inicial de nuestra propuesta, combinada con el desarrollo hecho por A.M.Mathai y P.G.Moschopoulos "*Pollution by vehicular travels from satellite townships to the city*" elaborado en 1999, que complementa al primero. Se tiene en cuenta algunas clases generales de distribuciones aleatorias y se examinan las distancias de los viajes previstos en el marco de diferentes planes de viajes.

## 2.2. Probabilidad Geométrica

Trataremos de describir, informalmente, algunas de las ideas vinculadas con la noción clásica de probabilidad y una importante generalización de la misma.

Si tenemos una urna con 3 bolas rojas y 2 negras, se dice que la probabilidad de sacar una bola roja es  $3/5$  y que la probabilidad de sacar una bola negra es  $2/5$ . Esta idea es completamente intuitiva y responde a lo establecido por Laplace. Su famosa definición consigna que, si se pueden determinar los casos posibles  $C_p$  de un determinado experimento aleatorio (cantidad de bolas) y los casos favorables del mismo,  $C_f$  (cantidad de bolas de un color elegido de antemano), entonces, la probabilidad de un suceso se determina mediante el cociente.

$$P = \frac{C_f}{C_p}$$

Supongamos, ahora, el siguiente problema: se tienen tres recintos de forma irregular, cada uno de ellos dentro de tres rectángulos congruentes, tal como lo ilustra la figura 2.1.

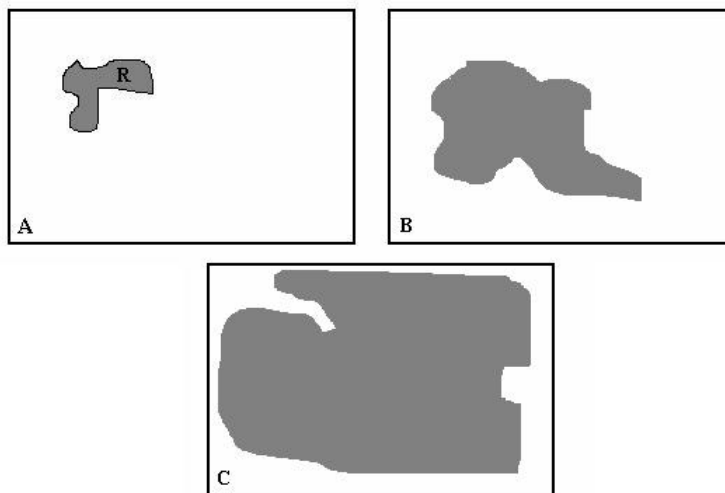


Figura 2.1: Diferentes probabilidades geométricas

Imaginemos ahora el siguiente experimento aleatorio: Se elige, al azar, un punto dentro de cada uno de los rectángulos A, B y C y se pide hallar, en cada caso, *la probabilidad de que el punto elegido esté ubicado dentro del recinto irregular respectivo*. Llamaremos  $S$  a este preciso suceso aleatorio.

Es fácil comprender que el problema planteado tiene bastante sentido, pues se verificará, sin demasiado esfuerzo, *que será más fácil acertar al recinto del rectángulo C que al recinto del rectángulo A*. Por su parte, el acierto al recinto del rectángulo B ofrecerá una dificultad intermedia.<sup>1</sup>

Por supuesto, la definición de Laplace no tiene lugar en este tipo específico de problema. Sin embargo, restringiéndonos al recinto R, del rectángulo A, la probabilidad buscada se determina mediante la siguiente definición:

$$P(S) = \frac{\text{Area}(R)}{\text{Area}(A)}$$

<sup>1</sup>Miro Ricardo. Tres problemas de probabilidad geométrica.

### 2.3. Dos puntos aleatorios sobre una circunferencia

Un problema elemental que podemos considerar es la selección de 2 puntos aleatorios  $M$  y  $M'$  sobre la circunferencia de radio  $r$ . Consideremos la circunferencia de la figura 2.2 y una longitud  $L$  dada. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud del arco  $\widehat{MM'}$  sea menor que  $L$  para  $\alpha < \pi$ , donde  $\alpha$  es el ángulo comprendido por el arco  $\widehat{MM'}$  en el centro de la circunferencia de radio  $r$ ? Como  $M$  se escoge arbitrariamente podemos considerar simetría y la probabilidad no se ve afectada. Así, no hay problema en escoger a  $M'$  a ambos lados; por ende,  $M'$  tiene que estar sobre un arco de longitud  $2S = 2r\alpha$ , cuyo punto medio es  $M$ . Luego la probabilidad deseada es:

$$\frac{2s}{2\pi r} = \frac{2r\alpha}{2\pi r} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{s}{r\pi}$$

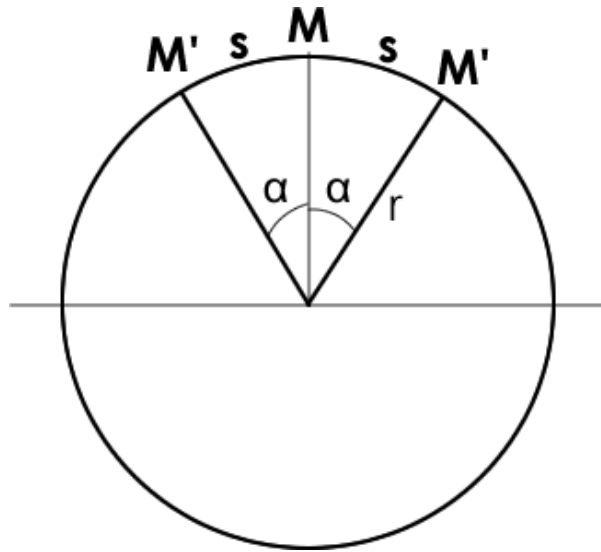


Figura 2.2: Puntos aleatorios sobre una circunferencia

Además, si utilizamos la definición de probabilidad, llegaríamos al mismo resultado

$$P = \int_{M_1=0}^{2\pi r} \int_{M_2=M_1-s}^{M_1+s} \frac{dM_2}{2\pi r} \frac{dM_1}{2\pi r} = \frac{1}{(2\pi r)^2} \int_{M_2=M_1-s}^{M_1+s} dM_2 dM_1$$

$$P = \frac{1}{(2\pi r)^2} \int_0^{2\pi r} M_1 + s - M_1 + s dM_1 = \frac{1}{(2\pi r)^2} \int_0^{2\pi r} 2s dM_1$$

$$P = \frac{2s}{(2\pi r)^2} M_1 \Big|_0^{2\pi r}$$

$$P = \frac{2s}{2\pi r} = \frac{s}{\pi r}$$

Como  $M$  es seleccionado al azar sobre toda la circunferencia, podemos decir que está uniformemente distribuido en el intervalo  $[0, 2\pi r]$ . Luego la probabilidad de que la longitud del arco  $MM'$  este entre  $s$  y  $s + ds$ , esta dada por:  $\frac{d\alpha}{\pi}$

Como  $s = r\alpha \Rightarrow s + ds = r(\alpha + d\alpha)$ , entonces:

$$P(\alpha \leq s \leq \alpha + d\alpha) = \frac{ds}{\pi r} = \frac{rd\alpha}{r\pi} = \frac{d\alpha}{\pi}, \text{ para } 0 < \alpha < \pi$$

Ahora, si queremos calcular el valor esperado para una función de  $\alpha$ , digamos  $\psi(\alpha)$ , procedemos de la siguiente manera<sup>2</sup>:

$$E[\psi(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha) d\alpha$$

$$E[\psi(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha) \frac{d\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\alpha) d\alpha$$

Luego:

$$E[\psi(\alpha)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(\alpha) d\alpha$$

Por ejemplo, el valor esperado para la longitud de arco  $MM' = r\alpha$ , esta dado por:

$$E[MM'] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} r\alpha d\alpha = \frac{r}{\pi} \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{r\pi}{2}$$

Entonces:

$$E[MM'] = \frac{r\pi}{2} \approx 1.571r$$

## 2.4. Dos puntos sobre la circunferencia y cuerdas aleatorias

Otro problema simple a estudiar es la distribución de probabilidad de la longitud de la cuerda  $MM'$ .

¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda  $MM'$  este entre  $a$  y  $b$ , con  $a < b$ ? Hay tres maneras diferentes de definir una cuerda aleatoria en un círculo. Sin perder generalidad, podemos escoger a  $M$  como un punto fijo. La cuerda  $MM'$  depende de  $\rho$ , donde  $\rho$  es la distancia desde el centro  $O$  del círculo al punto medio  $P$  de la cuerda  $MM'$

<sup>2</sup>A.M.Mathai and G. Pederzoli. Random points with reference to a circle, revisited, 1997.

y  $\phi$  es el ángulo formado entre la línea OP y una dirección fija.  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Mientras que  $\theta$  es el ángulo formado por  $\overline{OP}$ , como se muestra en la figura 2.3.<sup>3</sup>

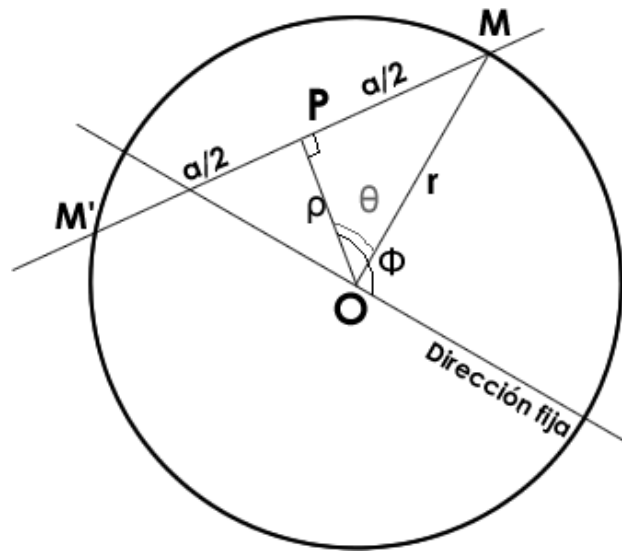


Figura 2.3: Cuerdas y puntos aleatorios sobre una circunferencia

### 2.4.1. Solución 1: Cuerda aleatoria (Modelo 1)

**Teorema 1.** Cuando una cuerda aleatoria de longitud  $a$ , en un círculo de radio  $r$ , está determinada por la distancia perpendicular  $\rho$  desde el centro del círculo al punto medio de la cuerda y por el ángulo  $\phi$  que esta perpendicular forma con una dirección fija, tal que la probabilidad conjunta asociada con  $\rho$  y  $\phi$  es proporcional a  $d\rho$  y  $d\phi$ , entonces:

i) La función de densidad de  $a$  está dada por:

$$f(a) = \frac{a}{2r\sqrt{4r^2 - a^2}} \quad \text{Para } 0 \leq a \leq 2r \quad (2.1)$$

ii) El valor esperado de  $a$

$$E[a] = \frac{\text{Perimetro del circulo}}{4} \approx 1.57r \quad (2.2)$$

iii) La varianza de  $a$

$$\text{Var}[a] = \frac{r^2}{12}(32 - 3\pi^2) \quad (2.3)$$

---

<sup>3</sup>A.M.Mathai.An introduction to geometrical probability,1999.

iv) La  $P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r)$  es:

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

*Demostración.* i) La cuerda  $MM'$  es seleccionada aleatoriamente; ésto se hace seleccionando  $\rho$  y  $\phi$  al azar. Teniendo en cuenta que  $\phi$  está uniformemente distribuída en  $[0, 2\pi]$  y que  $\rho$  es independiente y también uniformemente distribuído en  $[0, r]$ , la función de densidad conjunta de  $\phi$  y  $\rho$  está dada por:

$$g(\phi, \rho) = \frac{1}{2\pi r} \quad , \text{ para } 0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < \rho < r$$

Luego:

$$g(\phi, \rho)d\phi d\rho = \frac{d\phi d\rho}{2\pi r} \quad , \text{ para } 0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < \rho < r$$

Ahora, calculemos la probabilidad de que la longitud de la cuerda este entre  $a$  y  $b$ , con  $a < b$

$$d = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \quad c = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$$

Luego, la probabilidad deseada es:

$$\begin{aligned} P(a \leq MM' \leq b) &= P(0 < \phi < 2\pi; c < \rho < d) = \frac{1}{2\pi r} \int_c^d \int_0^{2\pi} d\phi d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_c^d 2\pi d\rho = \frac{d - c}{r} \end{aligned}$$

$$P(0 < \phi < 2\pi; c < \rho < d) = \frac{1}{r} \left[ \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)} - \sqrt{\left(r^2 - \frac{b^2}{4}\right)} \right]$$

Si queremos calcular la probabilidad de que  $MM'$  esté entre  $a$  y  $a + da$  hacemos  $b = a + da$  y derivamos con respecto a  $a$ , lo cual da:

$$f(a)da = \frac{1}{r} \frac{-\frac{a}{2}}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} da = -\frac{1}{2r} \frac{a}{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}} da = -\frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

$$f(a)da = -\frac{1}{r} \left[ \frac{a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} \right] da$$

Donde  $0 < a < 2r$  y  $f(a)$  es la pdf de la longitud de  $\mathbf{a}$ , para la cuerda MM'

ii) Ahora calculamos el valor esperado de la función  $\psi(a) = a$ , entonces:

$$E[a] = \int_0^{2r} \psi(a) \frac{a}{2r\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Haciendo  $a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta$ ; además si

$$\begin{aligned} a = 0 &\Rightarrow \theta = 0 \\ a = 2r &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$E[\psi(a)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a) 2r \sin \theta \frac{2r \sin \theta}{2r\sqrt{4r^2 - 2r \sin^2 \theta}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[\psi(a)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\psi(a)r \sin \theta \frac{\sin \theta}{\sqrt{4r^2(1 - \sin^2 \theta)}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[\psi(a)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a)(2r \sin \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$E[\psi(a)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(a)(2r \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

Por ejemplo, el valor esperado para la longitud de la cuerda está dado por:

$$E[a] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$E[a] = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$E[a] = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2\theta d\theta$$

$$E[a] = r \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E[a] = r \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$E[a] = \frac{2\pi r}{4}$$

$$E[a] = \frac{\text{Perimetro del circulo}}{4} \approx 1.57r$$

iii) Si queremos calcular la varianza, encontramos:

$$E[a^2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r \sin \theta)^2 \sin \theta \, d\theta$$

$$E[a^2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^2 \sin^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$E[a^2] = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$E[a^2] = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$E[a^2] = 4r^2 \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E[a^2] = 4r^2 \left[ -(-1 + \frac{1}{3}) \right] = \frac{8r^2}{3}$$

Entonces, la varianza está dada por:

$$\text{Var}(a) = E(a^2) - [E(a)]^2$$

$$\text{Var}(a) = \frac{8r^2}{3} - \frac{r^2\pi^2}{4}$$

$$\text{Var}(a) = \frac{r^2}{12}(32 - 3\pi^2)$$

iv) Si queremos calcular la probabilidad de que la longitud de la cuerda sea mayor o igual que  $\sqrt{3}r$ , entonces:

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\sqrt{3}r}^{2r} \frac{a}{2r\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Si

$$a = \sqrt{3}r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$a = 2r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ Como } a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r \sin \theta}{2r\sqrt{4r^2 - (2r \sin \theta)^2}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r \sin \theta}{2r\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = -\cos \theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3})$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{2}$$

□

De la figura 2.3 obtenemos

$$\sin \theta = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \frac{a}{2} = r \sin \theta$$

Luego la densidad de  $\mathbf{a}$ , dada en la ecuación 2.1, nos da la densidad de  $\theta$ , denotada por  $F_\theta(\theta)$ .

**Corolario 1.** *Consideremos la cuerda aleatoria del círculo estudiada en el Teorema 1, entonces, la función de densidad para  $\theta$  está dada por:*

$$F_\theta(\theta) = \sin \theta; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

### 2.4.2. Solución 2: Cuerda aleatoria (Modelo 2)

Sea  $P$  un punto sobre  $MM'$ , en el cual cae la perpendicular desde  $O$  a  $MM'$ ; luego la cuerda  $MM'$  está determinada por la selección aleatoria de  $P$ , en el interior del círculo, como se muestra en la figura 2.4.

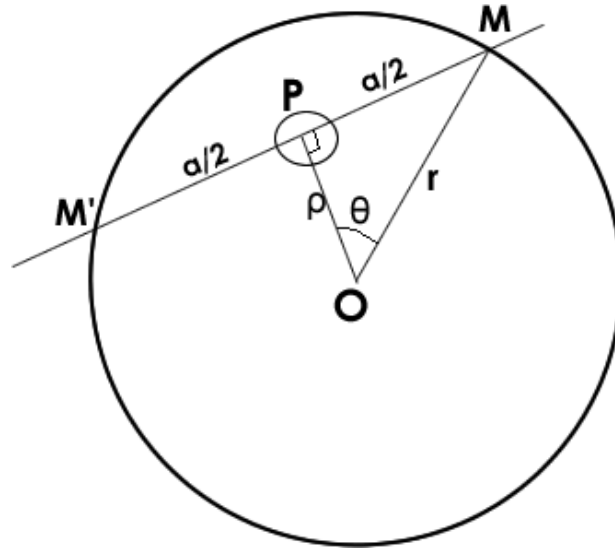


Figura 2.4: Cuerdas y puntos aleatorios sobre una circunferencia

**Teorema 2.** Sea  $\mathbf{a}$  una cuerda aleatoria en un círculo de radio  $r$ , teniendo  $\mathbf{a}$  una distribución uniforme sobre el área del círculo, donde  $\mathbf{P}$  es el punto perteneciente a la cuerda en el cual cae la perpendicular que pasa por el centro del círculo,  $\rho$  la longitud de  $\mathbf{P}$  hasta  $\mathbf{O}$  y  $\theta$  el ángulo central formado por el radio  $r$  que toca a  $M$  y la distancia  $\rho$ , como muestra la figura 2.4. Entonces:

i) La función de densidad de  $\rho$  esta dada por

$$g(\rho) = \frac{2\rho}{r^2}, \quad 0 \leq \rho \leq r \quad (2.5)$$

ii) La función de densidad de  $\mathbf{a}$  está dada por

$$f(a) = \frac{a}{2r^2}, \quad 0 \leq a \leq 2r \quad (2.6)$$

iii) La probabilidad de que  $\mathbf{a}$  este entre  $\sqrt{3}r$  y  $2r$  está dada por

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{4} \quad (2.7)$$

iv) El valor esperado para  $\mathbf{a}$  está dada por

$$E[a] = \frac{4r}{3} \approx 1.3333r \quad (2.8)$$

v) La varianza de  $\mathbf{a}$  está dada por

$$\text{Var}[a] = \frac{2}{9}r^2 \quad (2.9)$$

vi) La función de densidad de probabilidad de  $\theta$  está dada por

$$f_{\theta}(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

*Demostración.* i) El área total del círculo es  $\pi r^2$ . Entonces, para que  $P$  esté en el área  $A$ , se tiene que la probabilidad está dada por:

$$\frac{A}{\pi r^2}$$

Luego la probabilidad de que  $P$  esté dentro del círculo de radio  $\rho$  y  $\rho + d\rho$ , está dada por:

$$\frac{\pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2}{\pi r^2} \approx \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi r^2} = \frac{2\rho d\rho}{r^2}$$

La densidad de probabilidad de  $\rho$ , en este caso, denotada como  $g(\rho)$ , está dada por:

$$g(\rho) = \frac{2\rho d\rho}{r^2}, \quad 0 \leq \rho \leq r$$

ii) Ahora, si la longitud de la cuerda está dada por  $\mathbf{a}$ , entonces, de la gráfica 2.4, se deduce que

$$\rho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Sustituyendo en la ecuación 2.5 la densidad de  $\mathbf{a}$ , denotada por  $f(a)$ , está dada por:

$$f(a)da = \frac{a}{2r^2}da, \quad 0 \leq a \leq 2r$$

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda esté entre  $\sqrt{3}r$  y  $2r$ ?

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\sqrt{3}r}^{2r} f(a) da$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{2r^2} \int_{\sqrt{3}r}^{2r} a da$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{2r^2} \left[ \frac{a^2}{2} \right]_{\sqrt{3}r}^{2r}$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{2r^2} \left[ \frac{(2r)^2}{2} - \frac{(\sqrt{3}r)^2}{2} \right]$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{4}$$

iv) ¿Cuál es el valor esperado de la función  $\psi(a)$  de  $a$ ?

$$E[\psi(a)] = \int_0^{2r} f(a)\psi(a) da$$

$$E[\psi(a)] = \frac{1}{2r^2} \int_0^{2r} a\psi(a) da$$

Luego

$$E[a] = \int_0^{2r} af(a) da$$

$$E[a] = \frac{1}{2r^2} \int_0^{2r} a^2 da = \frac{4r}{3} \approx 1.3333r$$

v) Para calcular la varianza:

$$Var[a] = E[a^2] - (E[a])^2 = \frac{2}{9}r^2$$

vi) En esta relación podemos mirar la densidad de probabilidad para el ángulo  $\theta$ . Note de la figura 2.4 que

$$\rho = r \cos \theta \Rightarrow d\rho = -r \sin \theta d\theta$$

Si  $f_\theta(\theta)$  denota la densidad de probabilidad para  $\theta$ , entonces:

$$f_\theta(\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

□

### 2.4.3. Solución 3: Cuerda aleatoria (Modelo 3)

Sin perder generalidad, hacemos que  $M$  sea un punto fijo sobre la circunferencia.  $M'$  se escoge aleatoriamente, sobre la circunferencia, de forma tal que la probabilidad de que éste se encuentre sobre un segmento de arco dado de longitud  $dx$  es  $dx/2\pi r$ . Así, la cuerda queda únicamente determinada por los puntos  $M$  y  $M'$ . Notemos que  $M'$  podría tomarse, indistintamente, en ambos lados de  $M$  y -desde luego- la probabilidad de seleccionar  $M'$ , de forma que esté sobre un segmento de arco de longitud  $\delta c$ , como se muestra en la figura 2.5, está dada por:

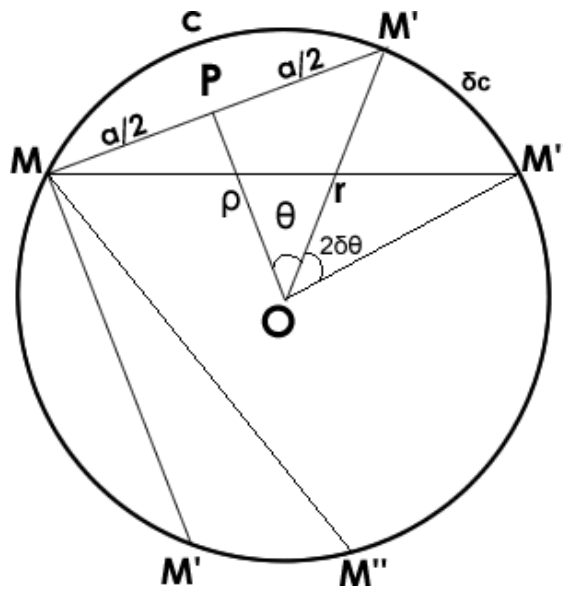


Figura 2.5: Otra Cuerda aleatoria sobre una circunferencia

$$\frac{2\delta c}{2\pi r} = \frac{\delta c}{\pi r} = \frac{2r\delta\theta}{\pi r} = \frac{2\delta\theta}{\pi}$$

**Teorema 3.** Sea  $a$  la longitud de una cuerda aleatoria determinada por dos puntos independientes y uniformemente distribuidos sobre la circunferencia.  $\theta$  el ángulo semicentral comprendido por la distancia  $\rho$  y el radio que pasa por  $M'$ , entonces:

i) La densidad de  $\theta$ , denotada por  $f_\theta(\theta)$ , está dada por:

$$f_\theta(\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}d\theta, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.11}$$

ii) La densidad de  $a$ , está dada por

$$f(a) = \frac{2}{\pi\sqrt{4r^2 - a^2}}, \quad \text{para } 0 \leq a \leq 2r \tag{2.12}$$

iii) La densidad de  $\rho$ , es:

$$g(\rho) = \frac{2}{\pi\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad \text{para } 0 \leq \rho \leq r. \quad (2.13)$$

iv) La probabilidad de  $\mathbf{a}$  este entre  $\sqrt{3}r$  y  $2r$ , es:

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{3}r}^{2r} \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da = \frac{1}{3} \quad (2.14)$$

v) El valor promedio de  $\mathbf{a}$ , será:

$$E[a] = \frac{4r}{\pi} \approx 1.274r \quad (2.15)$$

vi) La varianza de  $\mathbf{a}$

$$\text{Var}[a] = 2r^2 \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \right] \quad (2.16)$$

*Demostración.* i) La probabilidad de seleccionar  $M'$ , de forma que esté sobre un segmento de arco de longitud  $\delta c$ , está dada por:

$$\frac{2\delta c}{2\pi r} = \frac{\delta c}{\pi r} = \frac{2r\delta\theta}{\pi r} = \frac{2\delta\theta}{\pi}$$

Entonces:

$$\frac{2\delta c}{2\pi r} = \frac{2\delta\theta}{\pi}$$

Entonces, la función de densidad de probabilidad de  $\theta$ ,  $f_\theta(\theta)$ , está dada por:

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ii) Si  $MM' = a$ , entonces,

$$\sin \theta = \frac{a}{2r} \Rightarrow a = 2r \sin \theta$$

Luego,

$$a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta$$

$$\cos \theta = \frac{\rho}{r}$$

de otro lado

$$\begin{aligned} \rho^2 + \frac{a^2}{4} &= r^2 \\ \rho^2 &= r^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \rho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}}}{r} = \frac{1}{r} \left[ \sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}} \right] \\ \cos \theta &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} \end{aligned}$$

Sabiendo que

$$a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta \quad (2.17)$$

Luego

$$da = 2r \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Sustituyendo en 2.11

$$f(a)da = \frac{2}{\pi \sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Ahora, si miramos en 2.17, obtenemos que para  $\theta = 0 \Rightarrow a = 0$  y si  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = 2r$ , con lo cual podemos escribir:

$$f(a)da = \frac{2}{\pi \sqrt{4r^2 - a^2}} da \quad 0 \leq a \leq 2r$$

iii) Ahora, calculamos la función de densidad de probabilidad de  $\rho$ , denotada por  $g(\rho)$ , así:

$$\rho = r \cos \theta$$

Si  $\theta = 0 \Rightarrow \rho = r$  Si  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$

Además

$$d\rho = -r \sin \theta d\theta$$

Donde,

$$\sin \theta = \frac{a}{2r} \Rightarrow d\rho = -\frac{a}{2} d\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{2}{a} d\rho$$

Luego

$$g(\rho)d\rho = -\frac{2}{\pi} \frac{2}{a} d\rho$$

Entonces

$$g(\rho)d\rho = -\frac{2}{\pi \sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho \quad 0 \leq \rho \leq r$$

iv) ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda sea mayor que  $\sqrt{3}r$ ?

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\sqrt{3}r}^{2r} f(a) da$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \int_{\sqrt{3}r}^{2r} \frac{2}{\pi \sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{3}r}^{2r} \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Haciendo

$$a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta$$

$$\text{Si } a = 2r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$a = \sqrt{3}r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Sustituyendo

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2r \cos \theta}{\sqrt{4r^2 - 4r^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2r \cos \theta}{\sqrt{4r^2(1 - \sin^2 \theta)}} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{2r \cos \theta}{2r \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \left[ \theta \right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right]$$

$$P(\sqrt{3}r \leq a \leq 2r) = \frac{1}{3}$$

v) El valor esperado de la función  $\psi(a)$ , está dado por:

$$E[\psi(a)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{2r} \frac{\psi(a)}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Entonces, el valor esperado y la varianza de  $a$  son respectivamente:

$$E[a] = \frac{2}{\pi} \int_0^{2r} \frac{a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Usando la misma sustitución

$$a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta$$

$$\text{Si } a = 2r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$E[a] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2r \sin \theta}{\sqrt{4r^2 - 4r^2 \sin^2 \theta}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2r \sin \theta}{\sqrt{4r^2(1 - \sin^2 \theta)}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2r \sin \theta}{2r \sqrt{\cos^2 \theta}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a] = \frac{4r}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

$$E[a] = \frac{4r}{\pi} \left[ -\cos \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$E[a] = \frac{4r}{\pi} \left( -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right)$$

$$E[a] \approx 1.2732r$$

vi) Ahora, para calcular la varianza, y sabiendo que:

$$Var[a] = E[a^2] - (E[a])^2$$

Entonces, calculamos  $E[a^2]$

$$E[a^2] = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \frac{1}{\sqrt{4r^2 - a^2}} da$$

Haciendo

$$a = 2r \sin \theta \Rightarrow da = 2r \cos \theta d\theta$$

Además

$$a^2 = 4r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Si } a = 2r \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

Sustituyendo

$$E[a^2] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{4r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{4r^2 - 4r^2 \sin^2 \theta}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a^2] = \frac{8r^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{4r^2(1 - \sin^2 \theta)}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a^2] = \frac{8r^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{2r \sqrt{\cos^2 \theta}} 2r \cos \theta d\theta$$

$$E[a^2] = \frac{8r^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
E[a^2] &= \frac{8r^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta \\
E[a^2] &= \frac{8r^2}{\pi} \left[ \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) \right] \Big|_0^{\pi/2} \\
E[a^2] &= \frac{8r^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin \pi \right] \\
E[a^2] &= \frac{8r^2}{\pi} \frac{\pi}{4} \\
E[a^2] &= 2r^2
\end{aligned}$$

Luego, la varianza está dada por:

$$\begin{aligned}
Var[a] &= E[a^2] - (E[a])^2 \\
Var[a] &= 2r^2 - \left( \frac{4r}{\pi} \right)^2 \\
Var[a] &= 2r^2 - \frac{16r^2}{\pi^2} \\
Var[a] &= 2r^2 \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \right]
\end{aligned}$$

□

## 2.5. Paradoja de Bertrand

Joseph Bertrand, (1822-1900), fue un matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la teoría de números, la geometría diferencial y la teoría de probabilidades. En 1888 publicó el libro *Calcul des probabilitiés*, el cual contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los que, el resultado, depende del método de la resolución del problema. De todos ellos, el más renombrado *la paradoja de Bertrand*.<sup>4</sup>

### 2.5.0.1. Enunciado de la paradoja de Bertrand

Consideremos una circunferencia de radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda de esta circunferencia, elegida al azar, sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en los siguientes casos:

---

<sup>4</sup>J.M.Valderas, E.Olmedo, L.Franco. La paradoja de Bertrand,2000

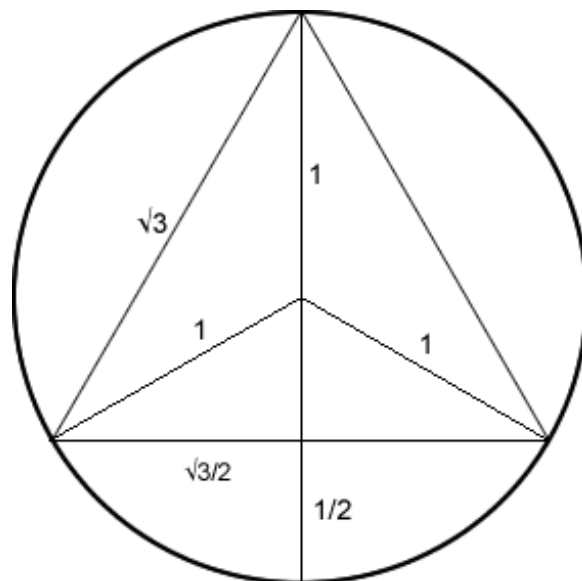


Figura 2.6: Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia

### 2.5.0.2. Caso 1

Fijamos un punto  $I$  en la circunferencia y elegimos, con distribución uniforme, un punto  $M$  del único diámetro que pasa el punto  $I$ . Este punto  $M$  determina de forma única una cuerda perpendicular en  $M$  al diámetro.

### 2.5.0.3. Caso 2

Fijamos un extremo de la cuerda en la circunferencia y elegimos el otro extremo con distribución uniforme en la circunferencia.

### 2.5.0.4. Caso 3

Elegimos un punto cualquiera  $M$  dentro del círculo y consideramos la cuerda perpendicular en  $M$  al único radio que pasa por  $M$ .

Antes de resolver hemos de notar que el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 es  $\sqrt{3}$ ; mientras que el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo inscrito es  $1/2$ .

Esto es fácil de obtener teniendo en cuenta que baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro coinciden en el mismo punto en un triángulo equilátero, ya que las medi-

anas, mediatrices, bisectrices y alturas son coincidentes. El punto de corte de estos segmentos es el centro de la circunferencia de radio 1, y por tanto, la distancia del centro de la circunferencia al vértice del triángulo es 1, como se puede apreciar en la figura 2.6. Por otro lado, la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es concéntrica con el la circunferencia circunscrita al mismo, y tangente a los lados del mismo en su punto medio. Por tanto, un radio es el segmento que une ambos puntos como se puede ver en la figura 2.7.

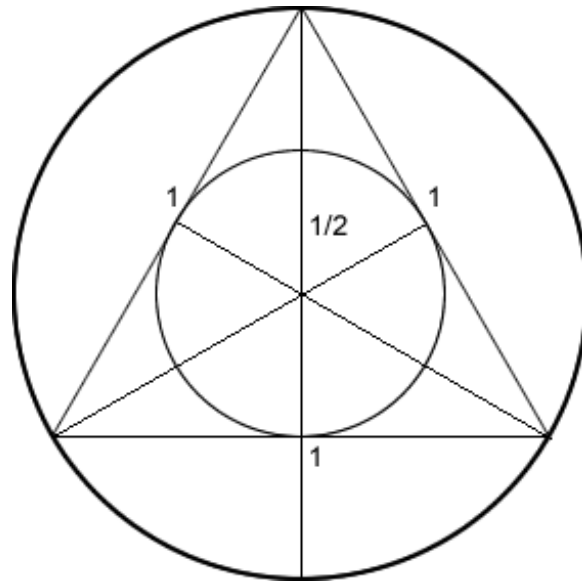


Figura 2.7: Circunferencia inscrita en un triángulo equilátero

La longitud del mismo es de  $1/2$  ya que el baricentro, punto de corte de las medianas, divide la mediana en dos segmentos, el más próximo al vértice con  $2/3$  de la longitud de la misma y el restante con  $1/3$ . Por tanto, el segmento que resta para completar el diámetro de la circunferencia también tiene longitud  $1/2$ , ya que el diámetro tiene longitud 1.

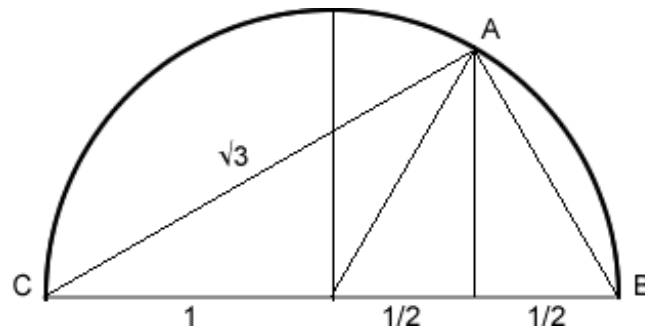


Figura 2.8: Triángulo ABC usado para calcular el segmento AC

Para calcular el lado del triángulo equilátero inscrito debemos considerar el triángulo ABC contenido en la figura 2.8. Dicho triángulo tiene por lados el diámetro BC de longitud 2, el lado AC del triángulo equilátero inscrito, cuya longitud queremos conocer y la cuerda AB. Es fácil ver que el ángulo  $\widehat{ACB}$  es de  $30^\circ$ , pues el diámetro CB es la bisectriz de un ángulo del triángulo equilátero inscrito, el ángulo  $\widehat{BAC}$  es de  $90^\circ$  y el ángulo  $\widehat{ABC}$  es de  $60^\circ$ . Por tanto la longitud de la cuerda AC, aplicando el teorema del Seno, es de  $\sqrt{3}$ .

$$\frac{\sin(\widehat{ABC})}{CA} = \frac{\sin(\widehat{CAB})}{CB}$$

Una vez conocidas las dimensiones del triángulo inscrito en la circunferencia y familiarizado con sus propiedades básicas, podemos pasar a resolver la paradoja de Bertrand.

### 2.5.0.5. Resolución del problema

#### 2.5.1. Caso 1

Fijando un punto I en la circunferencia, elegir un punto M del diámetro I'I y trazar la cuerda AB perpendicular a dicho diámetro. Las cuerdas que obtenemos por este procedimiento son los segmentos paralelos de la figura 2.9. La cuerda será mayor siempre que el punto M se encuentre dentro del segmento FG. Tanto OF como OG tienen longitud  $1/2$ . Aplicando la definición geométrica de la probabilidad, la probabilidad de que el punto M pertenezca al segmento FG es de  $1/2$  pues la medida de FG es 1, mientras que la medida de I'I es 2. Estamos suponiendo la hipótesis de que segmentos con la misma longitud tienen la misma probabilidad de ocurrir.

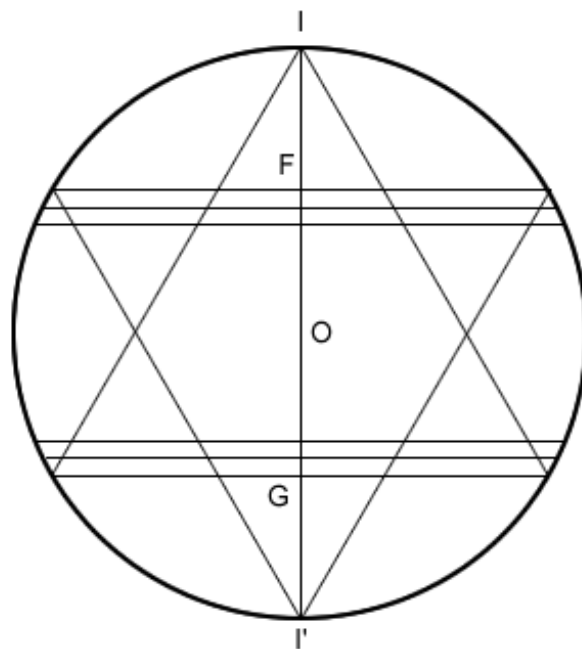


Figura 2.9: Caso 1

### 2.5.2. Caso 2

Fijado un punto  $I$  sobre la circunferencia, que suponemos coincidente con un vértice del triángulo equilátero, hemos de seleccionar un punto  $M$  sobre la circunferencia y trazar la cuerda  $IM$  que los une. Este problema es equivalente a considerar segmentos que parten desde el punto  $I$ , como en la figura 2.10, con final en la circunferencia. Cada cuerda  $IM$  forma un ángulo con el diámetro  $I'I$ . La cuerda será mayor que el lado del triángulo, siempre que el punto  $M$  se encuentre en el arco de circunferencia que está entre  $A$  y  $B$ , los otros dos vértices del triángulo inscrito o, lo que es igual, que el ángulo de dicha cuerda sea superior a  $60^\circ$  e inferior a  $120^\circ$ , tomando la tangente a la circunferencia que pasa por  $I$  y el diámetro perpendicular  $I'I$  como ejes de referencia. Aplicando la definición de probabilidad geométrica, en este caso para la medida angular, debemos seleccionar un ángulo al azar entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  y el resultado es favorable, siempre que el ángulo se encuentre en  $60^\circ$  y  $120^\circ$ . El resultado de la probabilidad es  $1/3$ . Suponemos que sectores con el mismo ángulo tienen la misma probabilidad de ocurrir.

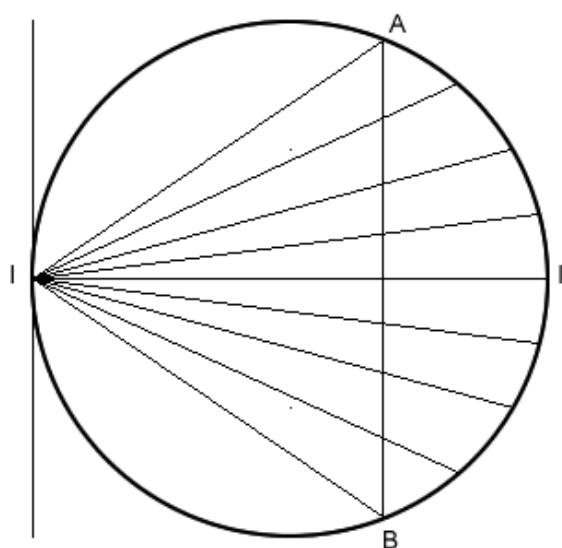


Figura 2.10: Caso 2

### 2.5.3. Caso 3

En este caso tenemos que considerar el círculo inscrito al triángulo equilátero. Si el punto  $M$  cae dentro de este círculo la cuerda perpendicular a  $OM$  es mayor que el lado del triángulo y viceversa. Por tanto, debemos escoger un punto al azar dentro de una figura de área  $\pi$ , el círculo de radio 1, y -para que el resultado sea favorable- dicho punto debe pertenecer a un subconjunto de área  $\pi/4$ , el círculo inscrito en el triángulo equilátero que posee radio  $1/2$ . Suponemos ahora que subconjuntos con la misma área tienen la misma probabilidad de ocurrir y, en consecuencia, la solución a nuestro problema, aplicando la definición de probabilidad geométrica bajo esta hipótesis, es de  $1/4$ .

#### 2.5.3.1. Observaciones

En definitiva, tenemos un problema para resolver de varias maneras, obteniendo diferentes soluciones. Hemos mostrado aquí alguna de ellas, las más conocidas y sencillas. No obstante, no son las únicas. Existen otros métodos de construcción de soluciones, por lo general no equivalentes a los mostrados aquí

¿Dónde radica la paradoja? ¿Cuál es la solución a nuestro problema?

La paradoja se origina en el hecho de trazar una cuerda al azar. En el problema de Bertrand, distintos métodos de seleccionar una cuerda al azar conducen a diferentes medidas de probabilidad no equivalentes. Las distribuciones de probabilidad no son objetivas.

Siempre que definamos una medida de probabilidad, dicha medida de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis. El concepto de probabilidad clásico o de Laplace se basa en la equiprobabilidad de los resultados elementales. Este método sólo es aplicable para espacios muestrales finitos como ya sabemos. El concepto de probabilidad geométrica generaliza el concepto de probabilidad de Laplace, en el sentido de que conjuntos que posean la misma medida geométrica deben de tener la misma probabilidad y de esta manera podemos generalizar la probabilidad para aplicarla a espacios infinitos. Sin embargo, no es una generalización objetiva, todo depende de qué medida consideremos, como hemos visto aquí. De igual manera, sobre un conjunto finito de elementos podemos definir otras medidas de probabilidad, basándonos en otras hipótesis, no coincidentes con la probabilidad clásica o de Laplace.

Llegado este punto podemos preguntarnos ¿es mejor una solución que otra? En absoluto. Esta pregunta sería equivalente a preguntarse: sobre todas las distribuciones de probabilidad, que podamos asignar a un conjunto finito de números, digamos del 0 al 9, o a los números enteros positivos, ¿cuál es la mejor? No existe una respuesta a esta pregunta. Cada asignación de probabilidad se basa en un conjunto de hipótesis diferentes, que nos determinan unas medidas de probabilidad diferente. Nosotros deberemos saber cuáles son estas hipótesis y ver cuáles de ellas están en mejor consonancia con el problema real que queremos resolver. Es muy común en el método científico, a la hora de resolver un problema, abstraerlo, formalizarlo y aplicar el aparato matemático y probabilístico conocido para resolver ese problema de manera abstracta. A la hora de operar de esta manera, debemos tener en cuenta que, aunque creamos que se ha resuelto de manera objetiva, los métodos se basan en hipótesis que deben ser conocidas.<sup>5</sup>

## 2.6. Algunas distribuciones de probabilidad asociadas con viajes cercanos a una ciudad circular homogénea.

Suponga un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  puesto sobre una ciudad circular de radio  $a$  con el origen en el centro de la ciudad y suponga que el viajero llega al punto  $(a, 0)$ . Asumimos que se desea viajar de manera equitativa a todos los puntos del interior

---

<sup>5</sup>A.M.Mathai, G.Perderzoli. Random points with reference to a circle, revisited,1997.

de la ciudad y puede utilizar los siguientes caminos.<sup>6</sup>:

### 2.6.1. Rectangulares:

A lo largo de una de las rutas más cortas, proporcionada por un sistema de coordenadas rectangulares, con eje paralelo al diámetro a través del punto de entrada. Cada viaje rectangular tiene una distancia

$$\alpha = a - r \cos \theta + r \sin \theta \quad (2.18)$$

A lo cual adjuntamos la ecuación

$$\beta = -a + r \cos \theta \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones nos llevan a la transformación

$$r = (a^2 + 2\beta^2 + 2a\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta)^{1/2} \quad (2.20)$$

$$\theta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{(a^2 + 2\beta^2 + 2a\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta)^{1/2}} \quad (2.21)$$

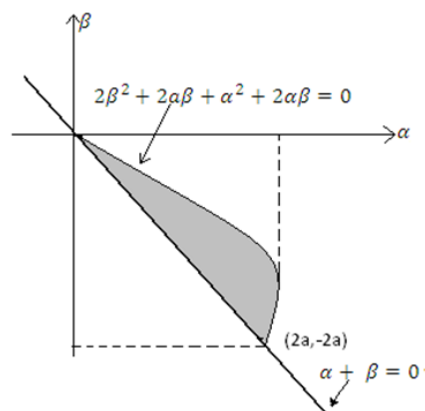


Figura 2.11:

El cálculo del Jacobiano en este caso lleva al valor  $1/r$ , entonces por escogencia de la ecuación 2.11, hemos obtenido una distribución rectangular de  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $2/(\alpha^2\pi)$ , pero esta vez el dominio está delimitado por la recta  $\alpha + \beta = 0$  y la cónica  $2\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta = 0$ ,

<sup>6</sup>Frank A.Haight. Some probability distributions associated with commuter travel in a homogeneous circular city. 1964

como muestra la figura 2.11.

Integrando obtenemos:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{a^2\pi}(\alpha - a + (a^2 + 2a\alpha - \alpha^2)^{1/2}), & 0 < \alpha < 2a \\ \frac{2}{\alpha^2\pi}(a^2 - \alpha^2 + 2a\alpha)^{1/2}, & 2a < \alpha < (1 + \sqrt{2})a \end{cases}$$

Con media  $\left[\frac{4}{3\pi} + 1\right]a$

### 2.6.2. Polares

Puesto que estamos suponiendo todos los puntos de la ciudad son igualmente atractivos, la distribución de probabilidad conjunta de  $r$  y  $\theta$  donde ese destino es el punto  $(r, \theta)$  será proporcional al elemento de área polar, es decir  $r, dr, d\theta$ .<sup>7</sup>

Viajar en un sistema de coordenadas polares significa usar el sistema interior para destinos con  $\theta < 2\text{rad}$ , y el sistema radial en su defecto. La función de densidad será una mezcla de las ecuaciones.

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{a^2\pi}, & 0 < \alpha < a \\ \frac{2(a\pi - \alpha)}{a^2\pi(\pi - 1)}, & a < \alpha < a\pi \end{cases} \quad (2.22)$$

Que es la función de densidad de una ruta de viaje interior con media  $\frac{1}{3}(\pi + 1)a$  y,

$$f(\alpha) = \frac{2(\alpha - a)}{a^2}, \quad a < \alpha < 2a \quad (2.23)$$

Que es la función de densidad de una ruta radial con media  $(5/3)a$ . Como podemos ver, la ecuación 2.22 consiste de 2 partes, dependiendo en las desigualdades de  $\alpha < a$  o  $\alpha > a$  y en términos de coordenadas polares estas desigualdades son equivalentes a que  $\theta < 1$  o  $\theta > 1$ . Entonces, el semicírculo de los destinos está dividido en tres partes, por las rectas  $\theta = 1, \theta = 2$

En la primera de estas, el área sería  $(1/2)a^2$  y por consiguiente la probabilidad será

$$\frac{(\frac{1}{2})a^2}{(\frac{1}{2})\pi a^2}$$

el viajero va por el sistema interior y utilizaríamos la primera parte de la ecuación 2.22. En la parte de la mitad la probabilidad sería  $1/\pi$  y usaríamos la segunda parte de la

<sup>7</sup>T. Tan. Road networks in expanding circular city. 1965

ecuación 2.22. El triángulo es comprimido al dominio  $(a, 2a)$  siendo entonces

$$\frac{2(2a - \alpha)}{\pi a^2}$$

Finalmente, en el tercer sector, utilizamos la ecuación 2.23 con probabilidad

$$\frac{\frac{1}{2}\pi a^2 - a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{\pi - 2}{\pi} \quad (2.24)$$

Aplicando este sistema de ponderados a las ecuaciones 2.22 y 2.23, obtenemos:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{a^2\pi}, & 0 < \alpha < a \\ \frac{2(\pi - 3)\alpha}{a^2\pi} + \frac{2(4 - \pi)}{\pi a}, & a < \alpha < a\pi \end{cases} \quad (2.25)$$

Con una media de valor  $\frac{(5\pi - 4)a}{3\pi}$

## Capítulo 3

# Viajes desde un municipio al centro de una ciudad

### 3.1. Viajes en el municipio

Representamos a nuestro municipio como un círculo de radio  $r$ . Sea  $P$  un punto fijo fuera del círculo y  $Q$  un punto aleatorio dentro del círculo. La recta que pasa por  $P$  y por el centro  $C$  del círculo la tomamos como el eje  $x$ , y, el punto más cercano desde  $P$  hasta la circunferencia, sobre el eje  $x$ , como el origen de nuestro sistema de coordenadas  $O$ . Como muestra la figura 3.1.

**Teorema 4.**<sup>1</sup> *Sea  $P$  un punto fijo que está ubicado afuera del círculo de radio  $r$  y  $Q$  un punto aleatorio dentro del círculo (uniformemente distribuido sobre el área del círculo). Sea  $\rho$  la distancia entre  $P$  y  $Q$ . Sea  $r_1$  la distancia desde  $P$  hasta la frontera del círculo sobre el eje  $x$ ; entonces, la densidad de  $\rho$ , denotada por  $g(\rho)$ , está dada por:*

$$g(\rho) = \frac{2\rho\phi}{\pi r^2} \tag{3.1}$$

Donde  $r_1 \leq \rho \leq r_1 + 2r$  ó  $R - r \leq \rho \leq R + r$ ,  $R = r_1 + r$  y

$$\cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

---

<sup>1</sup>A.M.Mathai. An introduction to geometrical probability, 1999

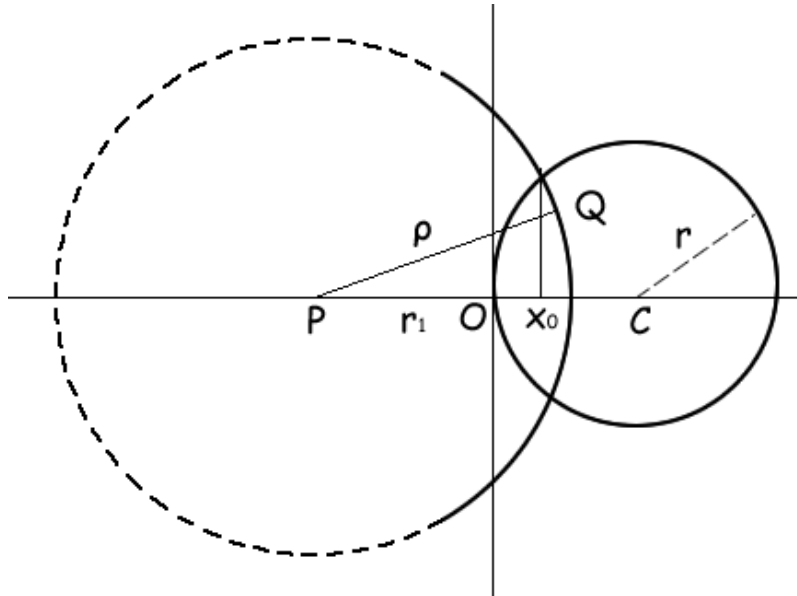


Figura 3.1: Punto fijo, (P), fuera de un círculo y punto aleatorio,(Q), dentro de él

*Demostración.* Sea la distancia  $|PQ| = r_1$  y la función de distribución de  $|PQ|$ ,  $F(\rho) = Pr(|PQ| \leq \rho)$ , donde  $F(\rho)$  es el área de intersección de los círculos:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2 \quad (3.2)$$

$$(x + r_1)^2 + y^2 = \rho^2 \quad (3.3)$$

Despejando  $y^2$  de 3.2, obtenemos:

$$y^2 = r^2 - (x - r)^2$$

Reemplazando en 3.3, queda:

$$(x + r_1)^2 + r^2 - (x - r)^2 = \rho^2$$

$$x^2 + 2xr_1 + r_1^2 + r^2 - (x^2 - 2xr + r^2) = \rho^2$$

$$x^2 + 2xr_1 + r_1^2 + r^2 - x^2 + 2xr - r^2 = \rho^2$$

$$2xr_1 + 2xr = \rho^2 - r_1^2$$

$$2x(r_1 + r) = \rho^2 - r_1^2$$

$$x = x_0 = \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r_1 + r)}$$

Luego

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} \left[ 2 \int_0^{x_0} \sqrt{r^2 - (x-r)^2} dx + 2 \int_{x_0}^{\rho-r_1} \sqrt{\rho^2 - (x+r_1)^2} dx \right]$$

Miremos las integrales por separado:

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{r^2 - (x-r)^2} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{r^2 - x^2 + 2xr - r^2} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{2xr - x^2} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{x(2r-x)} dx$$

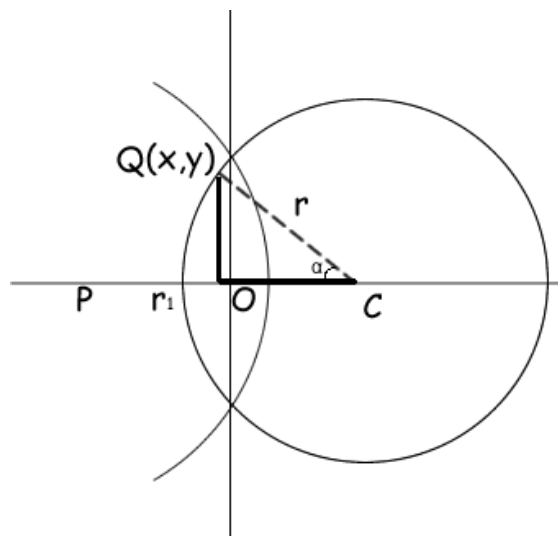


Figura 3.2: Integral 1 ( $I_1$ )

De la figura 3.2 se observa que:

$$\cos \alpha = \frac{x-r}{r}$$

$$x = r \cos \alpha + r$$

$$dx = -r \sin \alpha d\alpha$$

Luego,

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{x(2r-x)} dx = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{x(r+r-x)} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{rx \left[ \frac{r}{r} + \frac{r-x}{r} \right]} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{rx \left[ 1 - \frac{x-r}{r} \right]} dx$$

$$I_1 = 2 \int_0^{x_0} \sqrt{rx(1 - \cos \alpha)} dx$$

$$I_1 = 2 \int \sqrt{r(r \cos \alpha + r)(1 - \cos \alpha)} r \sin \alpha d\alpha$$

$$I_1 = 2r \int \sqrt{r^2(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} \sin \alpha d\alpha$$

$$I_1 = 2r^2 \int \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \sin \alpha d\alpha$$

$$I_1 = 2r^2 \int \sin^2 \alpha d\alpha$$

Como

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Entonces

$$I_1 = r^2 \int 1 - \cos 2\alpha d\alpha$$

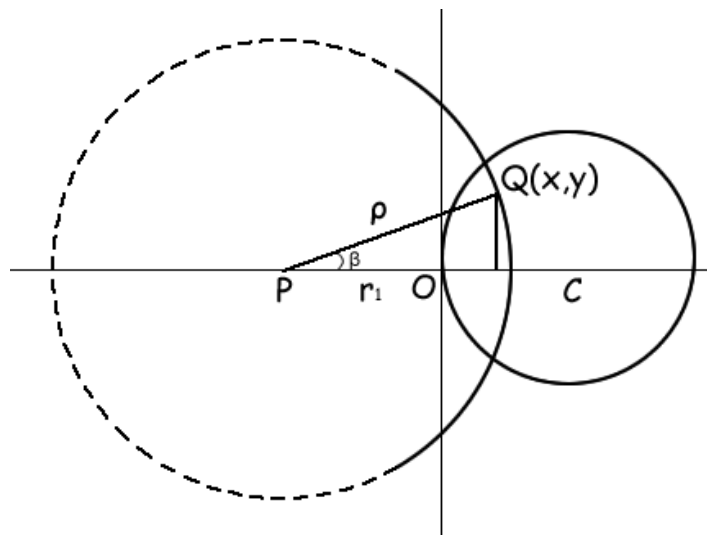


Figura 3.3: Integral 2 ( $I_2$ )

Entonces

$$I_1 = r^2 \left[ \int d\alpha - \int \cos 2\alpha d\alpha \right]$$

$$I_1 = r^2 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]$$

$$\therefore \cos \theta = 1 - \frac{\rho^2 - r_1^2}{2r(r + r_1)}$$

Para la integral 2, tenemos:

$$I_2 = 2 \int_{x_0}^{\rho-r_1} \sqrt{\rho^2 - (x + r_1)^2} dx \Big]$$

De la figura 3.3, se observa que:

$$\sin \beta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \beta$$

$$y = \sqrt{\rho^2 - (x + r_1)^2}$$

$$\cos \beta = \frac{x + r_1}{\rho}$$

$$x = \rho \cos \beta - r_1$$

$$dx = \rho \sin \beta d\beta$$

$$I_2 = 2 \int_{x_0}^{\rho-r_1} \sqrt{\rho^2 - (x + r_1)^2} dx \Big] = 2 \int y dx$$

$$I_2 = 2 \int \rho \sin \beta \rho \sin \beta d\beta$$

$$I_2 = 2 \int \rho^2 \sin^2 \beta d\beta$$

$$I_2 = 2\rho^2 \int \frac{1 - \cos 2\beta}{2} d\beta$$

$$I_2 = \rho^2 \int 1 - \cos 2\beta d\beta$$

$$I_2 = \rho^2 \left( \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right)$$

$$\therefore \cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

Luego

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} (I_1 + I_2)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} \left[ r^2 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \rho^2 \left( \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \right] \quad (3.4)$$

$$\therefore \cos \theta = 1 - \frac{\rho^2 - r_1^2}{2r(r + r_1)} \quad \cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

Si  $\rho = r_1$ , entonces

$$\cos \theta = 1, \theta = 0$$

$$\cos \phi = 1, \phi = 0,$$

Luego:

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} (r^2 * 0 + r_1 * 0) \Rightarrow F(\rho) = 0$$

Si  $\rho = r_1 + 2r$ , entonces

$$\cos \theta = 1 - \frac{(r_1 + 2r)^2 - r_1^2}{2r(r + r_1)}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{r_1^2 + 4r_1r + 2r^2 - r_1^2}{2r(r + r_1)}$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2(2rr_1 + 2r^2)}{2rr_1 + 2r^2}$$

$$\cos \theta = 1 - 2$$

$$\cos \theta = -1$$

$$\theta = \pi$$

De otro lado,

$$\cos \phi = \frac{1}{r_1 + 2r} \left[ r_1 + \frac{(r_1 + 2r)^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{r_1 + 2r} \left[ \frac{2r_1(r + r_1) + r_1^2 + 4rr_1 + 4r^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{r_1 + 2r} \left[ \frac{2r_1(r + r_1) + 4rr_1 + 4r^2}{2(r + r_1)} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{r_1 + 2r} \left[ \frac{2r_1(r + r_1) + 4r(r_1 + r)}{2(r + r_1)} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{r_1 + 2r} \left[ \frac{2(r + r_1)(r_1 + 2r)}{2(r + r_1)} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{r_1 + 2r}{r_1 + 2r}$$

$$\cos \phi = 1,$$

$$\phi = 0$$

Luego:

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} (r^2 \left( \pi - \frac{1}{2} \sin(2\pi) \right) + \rho^2 * 0)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} (\pi r^2)$$

$$F(\rho) = 1$$

Obtenemos

$$F(\rho) = 0 \text{ y } F(\rho) = 1$$

Como era de esperarse

Luego, la función de densidad de probabilidad para la distancia  $|\overline{PQ}|$ , denotada por  $g(\rho)$ , está dada por:

$$g(\rho) = \frac{d}{d\rho} F(\rho)$$

$$g(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\pi r^2} \left( r^2 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \rho^2 \left( \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \right) \right]$$

$$g(\rho) = \frac{1}{\pi r^2} \left\{ \frac{2\rho}{r + r_1} (r \sin \theta - \rho \sin \phi) + 2\rho \phi \right\}$$

Entonces

$$g(\rho) = \frac{2\rho\phi}{\pi r^2}$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

□

Ahora, bien

$$\cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right]$$

Haciendo  $R = r + r_1$

$$\cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{2r_1(r + r_1) + \rho^2 - r_1^2}{2R} \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2\rho R}(2r_1 r + 2r_1^2 + \rho^2 - r_1^2)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2\rho R}(\rho^2 + r_1^2 + 2r_1 r)$$

Como  $r_1 = R - r$

$$\cos \phi = \frac{1}{2\rho R} \left[ \rho^2 + (R - r)^2 + 2r(R - r) \right]$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2\rho R} \left[ \rho^2 + R^2 - 2Rr + r^2 + 2Rr - 2r^2 \right]$$

$$\cos \phi = \frac{\rho^2 + R^2 - r^2}{2\rho R} \tag{3.5}$$

Luego

$$\cos \phi = \frac{1}{\rho} \left[ r_1 + \frac{\rho^2 - r_1^2}{2(r + r_1)} \right] = \frac{1}{2\rho R}(\rho^2 + R^2 - r^2)$$

Ahora solucionamos para  $\rho$

$$\cos \phi = \frac{\rho^2 + R^2 - r^2}{2\rho R}$$

$$(2R \cos \phi)\rho = \rho^2 + R^2 - r^2$$

$$\rho^2 - (2R \cos \phi)\rho + (R^2 - r^2) = 0$$

Luego

$$\rho_{1,2} = \frac{2R \cos \phi \pm \sqrt{\left[ (2R \cos \phi)^2 - 4(R^2 - r^2) \right]}}{2}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{2R \cos \phi \pm \sqrt{\left[ 4R^2 \cos^2 \phi - 4(R^2 - r^2) \right]}}{2}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{2R \cos \phi \pm \sqrt{4 \left[ R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2) \right]}}{2}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{2R \cos \phi \pm 2\sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}}{2}$$

$$\rho_{1,2} = R \cos \phi \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$\rho_{min} = r_1 = R - r$ , entonces

$$\rho_{min} = R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$R - r = R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$R \cos \phi - (R - r) = \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$\left[ R \cos \phi - (R - r) \right]^2 = R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)$$

$$R^2 \cos^2 \phi - 2(R \cos \phi)(R - r) + (R - r)^2 = R^2 \cos^2 \phi - R^2 + r^2$$

$$-2R^2 \cos \phi + 2Rr \cos \phi + R^2 - 2Rr + r^2 = r^2 - R^2$$

$$2R(r - R) \cos \phi - 2R(r - R) = 0$$

$$(r - R) \cos \phi = (r - R)$$

$$\cos \phi = \frac{r - R}{r - R}$$

$$\cos \phi = 1$$

Para  $\rho = \sqrt{R^2 - r^2}$

$$\rho = R \cos \phi + \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$\sqrt{R^2 - r^2} = R \cos \phi + \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$R \cos \phi = \sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$(R \cos \phi)^2 = \left[ \sqrt{R^2 - r^2} - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right]^2$$

$$R^2 \cos^2 \phi = R^2 - r^2 - 2\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} + R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)$$

$$0 = -2\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \sqrt{\left[ R^2 - r^2 \right] \left[ R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2) \right]} \\
 0 &= \left[ R^2 - r^2 \right] \left[ R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2) \right] \\
 0 &= (R^2 \cos^2 \phi) - (R^2 - r^2) \\
 R^2 \cos^2 \phi &= (R^2 - r^2) \\
 \cos^2 \phi &= \frac{R^2 - r^2}{R^2} \\
 \cos \phi &= \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}
 \end{aligned}$$

Derivando la ecuación 3.5 con respecto a  $\rho$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 -\sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} &= \frac{2\rho R(2\rho) - (\rho^2 + R^2 - r^2)2R}{4\rho^2 R^2} \\
 \frac{2R \left[ 2\rho^2 - \rho^2 - R^2 + r^2 \right]}{4\rho^2 R^2} &= -\sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 \frac{2\rho^2 - \rho^2 - R^2 + r^2}{2\rho^2 R} &= -\sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 \frac{2\rho^2 - \rho^2 - R^2 + r^2}{2\rho} &= -R\rho \sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 \rho - \frac{(\rho^2 + R^2 - r^2)}{2\rho} &= -R\rho \sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 \rho - \frac{R(\rho^2 + R^2 - r^2)}{2R\rho} &= -R\rho \sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 \rho - R \cos \phi &= -R\rho \sin \phi \frac{d\phi}{d\rho} \\
 d\rho &= -\frac{R\rho \sin \phi}{\rho - R \cos \phi} d\phi
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, tenemos:

$$\int_{R-r}^{R+r} g(\rho) d\rho = \int_{R-r}^{R+r} \frac{2\rho\phi}{\pi r^2} d\rho$$

$$\frac{2}{\pi r^2} \int_{R-r}^{R+r} \rho \phi d \rho = \frac{2}{\pi r^2} \left[ \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \rho \phi d \rho + \int_{\sqrt{R^2-r^2}}^{R+r} \rho \phi d \rho \right]$$

Vamos a evaluar las integrales por separado

$$\text{Sea } I_1 = \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \rho \phi d \rho$$

$$\text{Sea } I_2 = \int_{\sqrt{R^2-r^2}}^{R+r} \rho \phi d \rho$$

Para  $I_1$ , tenemos:

$$I_1 = \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \phi \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \left[ -\frac{R \rho \sin \phi}{\rho - R \cos \phi} d \phi \right]$$

Sustituyendo  $\rho$ , da como resultado:

$$= \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \phi \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \left[ -\frac{R \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \sin \phi}{\left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] - R \cos \phi} d \phi \right]$$

$$I_1 = \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \phi \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \left[ -\frac{R \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \sin \phi}{-\sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}} d \phi \right]$$

$$I_1 = R \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \phi \left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \left[ \frac{\left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right] \sin \phi}{\sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}} d \phi \right]$$

$$I_1 = R \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \frac{\left[ R \cos \phi - \sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)} \right]^2 \phi \sin \phi}{\sqrt{R^2 \cos^2 \phi - (R^2 - r^2)}} d \phi$$

De forma análoga, para  $I_2$ , obtenemos que:

$$I_1 + I_2 = \pi r^2$$

NOTA: Cuando  $r_1 = 0$  se obtiene un punto fijo sobre el círculo. Esta situación es equivalente para el caso de un punto aleatorio, uniformemente distribuido sobre la circunferencia, y otro punto aleatorio uniformemente distribuido sobre el círculo<sup>2</sup>. Teniendo en cuenta que el  $h$ -ésimo momento de  $\rho$  se calcula usando la definición de valor esperado, la cual dice:

Si  $g(X)$  es una función de  $X$ , entonces, el valor esperado de  $g(X)$ , denotado por,  $E[g(X)]$ , está dado por la expresión:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$$

donde  $f(x)$  es la función de densidad de probabilidad de  $X$ , siempre y cuando la integral exista.

Vamos a evaluar el  $h$ -ésimo momento de  $\rho$ , es decir,  $E(\rho^h)$ , si el punto aleatorio  $Q$  se da en coordenadas polares  $(r_2, \phi)$ . Y tomando  $R = r + r_1$ . Entonces la distancia  $|PQ|$  se puede expresar como:

$$\rho = \sqrt{r_2^2 + R^2 - 2Rr_2 \cos \phi}$$

Ahora, cuando  $Q$  esta uniformemente distribuido sobre el área del círculo, entonces, el  $h$ -ésimo momento de  $\rho$  esta dado por:

$$E(\rho^h) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{r_2=0}^r \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[ r_2^2 + R^2 - 2Rr_2 \cos \phi \right]^{\frac{h}{2}} r_2 dr_2 d\phi$$

Luego, para calcular el  $h$ -ésimo momento de  $\rho$  hacemos  $g(\rho) = \rho^h$ , con lo cual obtenemos:

$$E[\rho^h] = \int_0^{2r \cos \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^h * \frac{\rho}{\pi r_1^2} d\rho d\theta$$

$$E[\rho^h] = \frac{1}{\pi r_1^2} \int_0^{2r \cos \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^h \rho d\rho d\theta$$

Si tomamos  $x = \frac{\rho_1}{R}$ , entonces

$$E[\rho^h] = \frac{1}{\pi r_1^2} \int_0^{2r \cos \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^h (1 + x^2 - 2 \cos \theta)^{h/2} R^2 x dx d\theta$$

$$E[\rho^h] = \frac{R^{h+2}}{\pi r_1^2} \int_0^{2r \cos \theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x (1 + x^2 - 2 \cos \theta)^{h/2} dx d\phi$$

$$E[\rho^h] = R^h {}_2F_1 \left( -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}; 2; \left( \frac{r_1}{R} \right)^2 \right) \tag{3.6}$$

Donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica de Gauss.

---

<sup>2</sup>A.M.Mathai. An introduction to geometrical probability, 1999

# Capítulo 4

## Viajes desde los municipios cercanos a la ciudad.

### 4.1. Diferentes planes de viajes

Supongamos que existen  $k$  municipios cercanos a la ciudad. Consideremos el  $i$ -ésimo municipio, para  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Sea  $C_i$  y  $C^*$  circunferencias de radios  $r_i$  y  $r^*$  y los centros  $O_i$  y  $O^*$  que representa el  $i$ -ésimo municipio y el centro de la ciudad, respectivamente. Teniendo en cuenta que los centros  $O_i$  y  $O^*$  están sobre la misma línea. Tomemos el punto de salida en  $C_i$  y el punto de llegada en  $C^*$ , como se muestra en la Figura 4.1. Teniendo en cuenta que todos los posibles viajes desde  $C_i$  hasta  $C^*$ , y tomando aleatoriamente tanto el punto de partida  $P_i$  como el punto de llegada  $P^*$ . Consideremos que  $P_i$  y  $P^*$  se distribuyen uniformemente en  $C_i$  y  $C^*$  respectivamente, entonces, la distancia de viaje entre  $C_i$  y  $C^*$ , en un trayecto dado, es un indicador de la cantidad de contaminantes emitidos por vehículos.

Si no intervienen otros factores, la hipótesis de que  $P_i$  y  $P^*$  son independientes y están uniformemente distribuidos dentro de  $C_i$  y  $C^*$  es razonable. Pero si hay congestión de tráfico, cerca de los centros de  $O_i$  y  $O^*$ , una situación natural, o si el sistema de carreteras empeora cuando nos alejamos de los centros, las distribuciones uniformes no son un modelo razonable para  $P_i$  y  $P^*$ . Vamos a empezar con un tipo general de la familia de las distribuciones que se ajustan muy bien al modelo planteado, Consideremos la familia de distribución generalizada  $\beta$  tipo 1 (función beta invertida) para  $\rho_i$ , para la distancia de  $P_i$  a  $O_i$ , y un modelo similar para  $\rho_i^*$  (la distancia desde  $P^*$  a  $O^*$ ) y nos centraremos a analizar  $C_i$ . Por el momento, supongamos que  $\rho_i$  y  $\theta_i$ , el ángulo que se forma con  $O_iP_i$  y el eje  $x$ , distribuyen en forma independiente, en la que  $\theta_i$  es uniforme en  $[0, 2\pi]$  y  $\rho_i$  tiene la densidad de:

$$g_i(\rho_i)d\rho_i = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)\rho_i^{\alpha_i-1}(r_i - \rho_i)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}}d\rho_i & 0 \leq \rho_i \leq r_i, \alpha_i > 0, \beta_i > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \quad (4.1)$$

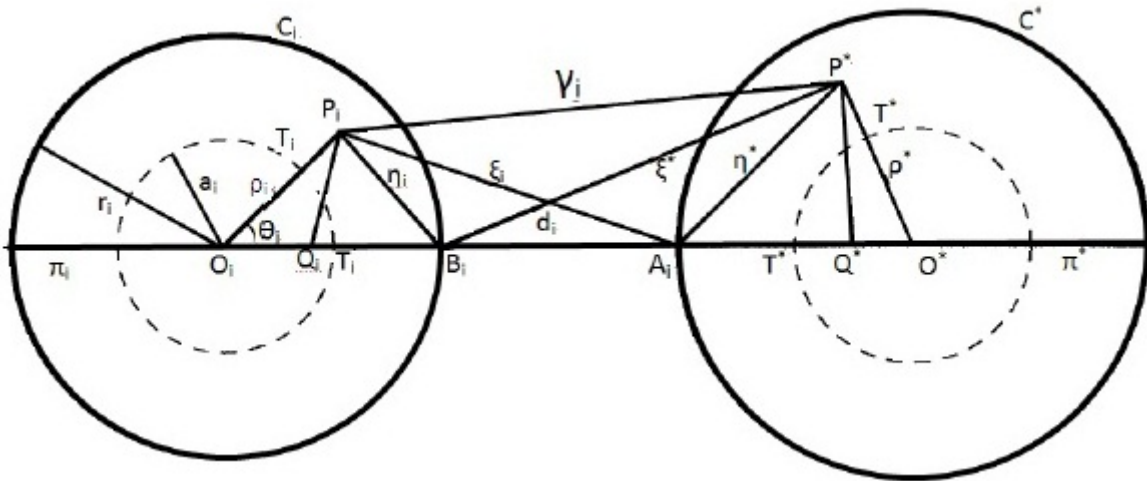


Figura 4.1:  $i$  – esimo municipio y ciudad circular

De modo que la densidad conjunta de  $\rho_i$  y  $\theta_i$  es el producto de la  $g_i(\rho_i)$  y la densidad uniforme en  $[0, 2\pi]$ . Llamemos la distancia en el plan de viaje  $j$  asociado con  $C_i$  por  $t_{ij}$  y sea  $d_i$  la distancia entre el punto de salida de  $B_i$  de  $C_i$ , y el punto de entrada a  $C^*$  como  $A_i$ . Consideremos diferentes planes de viaje<sup>1</sup>.

**4.1.1. Plan 1: Ir de  $P_i$  a  $O_i$  y luego a  $B_i$  y de allí a  $A_i$ .**

$$t_{i1} = \rho_i + r_i + d_i$$

Si el sistema de carreteras en  $C_i$  es de tipo polar, entonces el plan de viaje mas racional será llegar al centro y salir por la vía de salida principal. Por el momento, consideramos sólo un punto de salida,  $B_i$ . Este  $B_i$  podría ser un punto fijo en la circunferencia  $C_i$  ó un punto aleatorio de forma independiente y uniformemente distribuído sobre la circunferencia. Los resultados finales son los mismos.

<sup>1</sup>A.M.Mathai, G.Moschopoulos. Pollution by vehicular travels from satellite townships to the city, 1999

**4.1.2. Plan 2: Ir de  $P_i$  a  $Q_i$  y luego a  $B_i$  y de allí a  $A_i$ .**

Si la red de carreteras dentro de  $C_i$  es de tipo rectangular, la distancia total desde  $P_i$  a  $B_i$ , a lo largo de este sistema, es equivalente a la procedente desde  $P_i$  hasta el eje  $x$  de forma perpendicular, de allí a  $B_i$  y luego de  $B_i$  a  $A_i$ . Así pues, tenemos el *plan 2*.

$$t_{i2} = \rho_i |\sin \theta_i| + (r_i - \rho_i \cos \theta_i) + d_i \quad (4.2)$$

Si el sistema vial dentro de  $C_i$  es muy bueno, con todo tipo de cruces de vías, entonces podemos considerar dos rutas: ir desde  $P_i$  a  $B_i$  y luego a  $A_i$  (*Plan 3*), o ir desde  $P_i$  directamente a  $A_i$  (*Plan 4*).

**4.1.3. Plan 3: Ir de  $P_i$  a  $B_i$  y luego hasta  $A_i$ .**

$$t_{i3} = \eta + d_i = [\rho_i^2 + r_i^2 - 2r_i\rho_i \cos \theta_i]^{1/2} + d_i \quad (4.3)$$

**4.1.4. Plan 4: Ir de  $P_i$  directamente a  $A_i$ .**

$$t_{i4} = \zeta_i = [\rho_i^2 + (r_i + d_i)^2 - 2\rho_i(r_i + d_i) \cos \theta_i]^{1/2} \quad (4.4)$$

Sean los planes correspondientes en  $C^*$  los que se denotan como planes  $1^*, 2^*, 3^*, 4^*$ , respectivamente. Cuando el sistema de carreteras es de tipo polar, vale la pena investigar si es conveniente poner una circunvalar a una distancia fija  $\overline{a_i O_i}$  para que el plan de viaje sea de  $P_i$  a la circunvalar y luego sobre ésta tomar la línea  $O_i O_i^*$  hasta  $B_i$ . Teniendo en cuenta lo anterior podemos analizar dos casos: *Plan 5* y *Plan 6*

**4.1.5. Plan 5: Ir desde  $P_i$  a la circunvalar, luego, a lo largo de ésta dirigirse hasta el eje  $O_i O_i^*$  y después a  $B_i$ .**

$$t_{i5} = d_i + |\rho_i - a_i| + a_i \theta_i + r_i - a_i \quad (4.5)$$

Donde  $\theta_i$  se mide en radianes.

**4.1.6. Plan 6: Ir, directamente, de  $P_i$  a  $P^*$**

$$t_{i6} = \gamma_i \tag{4.6}$$

Para este último recorrido no existe ninguna expresión conveniente para las distancias previstas en el *Plan 6*, que no sea una expresión en términos de la función Lauricella<sup>2</sup>, aun cuando los puntos  $P_i$  y  $P^*$  están uniformemente distribuidos. Por lo tanto, vamos a considerar sólo los planes del 1 al 5 y los correspondientes planes de 1\* al 5\*.

**4.2. Distancias de viajes esperadas en  $C_i$  bajo diversos planes.**

Del Plan 1 y de la distribución  $\beta$  tipo-1, tenemos:

$$E(t_{i1}) = r_i + d_i + E(\rho_i)$$

$$E(t_{i1}) = r_i + d_i + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} \frac{\rho_i^{\alpha_i} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i d\theta_i}{r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \tag{4.7}$$

Dado que  $g(\rho_i)$  distribuye como una  $\beta$ -invertida, llevamos  $g(\rho_i)$  a la forma  $\beta$ , así: sea  $t = \rho_i/r$ , luego  $r dt = d\rho_i$ , y sustituyendo en la integral<sup>3</sup>, obtenemos:

$$\frac{1}{B(\alpha_i, \beta_i)} \int_0^r \frac{\left(\frac{\rho_i}{r}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\rho_i}{r}\right)^{\beta_i-1} r^{\alpha_i+\beta_i-1}}{r^{\alpha_i+\beta_i-1}} d\rho_i$$

Entonces

$$\frac{r}{B(\alpha_i, \beta_i)} \int_0^1 t^{\alpha_i} (1-t)^{\beta_i-1} dt$$

$$r \frac{1}{B(\alpha_i, \beta_i)} \int_0^1 t * t^{\alpha_i-1} (1-t)^{\beta_i-1} dt$$

Dando como resultado

$$rE(g(t)) = r \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \tag{4.8}$$

Reemplazando 4.8 en 4.7, tenemos:

$$E(t_{i1}) = r_i + d_i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} d\theta$$

<sup>2</sup>A.M. Mathai, Hans j. Haubold. Special Functions for Applied Scientists. 2008. Pags 58-60

<sup>3</sup>W.W. Bell ,Special funtions for scientists and engineers,1996

Finalmente obtenemos

$$E(t_{i1}) = r_i + d_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} r_i \quad (4.9)$$

Del plan 2 y de la distribución  $\beta$  tipo-1, tenemos:

$$E(t_{i2}) = r_i + d_i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|\sin \theta_i| - \cos \theta_i] d\theta_i \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \frac{\int_0^{r_i} \rho_i^{\alpha_i} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i}{r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}}$$

Siguiendo el análisis hecho para el plan 1, tenemos:

$$E(t_{i2}) = r_i + d_i + \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} r_i \int_0^{2\pi} [|\sin \theta_i| - \cos \theta_i] d\theta_i$$

$$E(t_{i2}) = r_i + d_i + \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} r_i \quad (4.10)$$

¿Es mejor el sistema vial rectangular que el sistema polar?

Podemos comparar  $E(t_{i1})$  y  $E(t_{i2})$ . Teniendo en cuenta que  $\frac{2}{\pi} < 1$ , para todos los valores admisibles de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , el sistema rectangular es mejor que el sistema polar con respecto a una distancia de viaje provisto.

Del plan 3 y del modelo  $\beta$  tipo 1, podemos calcular  $E[t_{i3}]$  con la siguiente técnica:

$$E(t_{i3}) = d_i + E[\rho_i^2 + r_i^2 - 2r_i\rho_i \cos \theta_i]^{1/2}$$

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} (\rho_i^2 + r_i^2 - 2r_i\rho_i \cos \theta_i)^{1/2} \frac{\rho_i^{\alpha_i-1} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i d\theta_i}{r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}}$$

Ahora, sea  $\rho_i = r_i \mu$ . Entonces

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{r_i}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \int_{u=0}^1 u^{\alpha_i-1} (1-u)^{\beta_i-1} \left[ \int_0^{2\pi} [1 + u^2 - 2u \cos \theta_i]^{1/2} d\theta_i \right] du$$

Teniendo en cuenta que

$$(1 + u^2 - 2u \cos \theta_j)^{1/2} = (1 - ue^{i\theta_j})^{1/2} (1 - ue^{-i\theta_j})^{1/2}, \text{ con } i = \sqrt{-1}$$

Entonces:

$$(1 + u^2 - 2u \cos \theta_j)^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!} u^{m+n} e^{i\theta_j(m-n)}$$

Utilizando:

$$(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1), \quad (a)_0 = 1, \quad (a) \neq 0$$

Haciendo la sustitución  $m + n = p$ . Entonces, la sumatoria se reduce a:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_{p-m}}{(p-m)!} u^p e^{i\theta_j(2m-p)}$$

La integración fuera de los  $\theta_j$  muestra que todos los términos son cero, excepto cuando  $p = 2m$  y la correspondiente integral da  $2\pi$ . Luego, reemplazando  $p = 2m$ , obtenemos:

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)r_i}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \int_0^1 u^{2m+\alpha_i-1} (1-u)^{\beta_i-1} du$$

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 B(2m + \alpha_i, \beta_i)$$

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \frac{\Gamma(2m + \alpha_i)\Gamma(\beta_i)}{\Gamma(2m + \alpha_i + \beta_i)}$$

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \frac{(2m + \alpha_i - 1)(2m + \alpha_i - 2)\dots\alpha_i\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)}{(2m + \alpha_i + \beta_i - 1)(2m + \alpha_i + \beta_i - 2)\dots(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}$$

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \frac{B(\alpha_i, \beta_i)\alpha_i(\alpha_i + 1)\dots(\alpha_i + 2m - 1)}{(\alpha_i + \beta_i)\dots(\alpha_i + \beta_i + 2m - 1)}$$

$$E(t_{i3}) = d_i + r_i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)\dots(\alpha_i + 2m - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)_m \left(-\frac{1}{2}\right)_m}{(\alpha_i + \beta_i)\dots(\alpha_i + \beta_i + 2m - 1)m!m!}$$

$$E(t_{i3}) = d_i + r_i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)\dots(\alpha_i + 2m - 1)}{(\alpha_i + \beta_i)\dots(\alpha_i + \beta_i + 2m - 1)} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!}$$

Convirtiendo cada término como símbolo de Pochhammer y escribiendo la expresión resultante como una función hipergeométrica, obtenemos:

$$E(t_{i3}) = d_i + \frac{\alpha_i r_i}{\alpha_i + \beta_i} {}_3F_2 \left( \frac{\alpha_i + 1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{\alpha_i + \beta_i + 1}{2}, 1; 1 \right) \quad (4.11)$$

En la tabla 4.1 encontramos algunos de los posibles valores esperados para el plan 3, en el cual se varían los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  desde 0.5 hasta 3

|                | $\beta = 0.5$ | $\beta = 0.6$ | $\beta = 0.7$ | $\beta = 0.8$ | $\beta = 1$ | $\beta = 2$ | $\beta = 3$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------|-------------|-------------|
| $\alpha = 0.5$ | 1.60102       | 1.54180       | 1.49285       | 1.45174       | 1.38665     | 1.22253     | 1.15526     |
| $\alpha = 0.6$ | 1.65744       | 1.59776       | 1.54767       | 1.50506       | 1.43655     | 1.25774     | 1.18177     |
| $\alpha = 0.7$ | 1.70483       | 1.64549       | 1.59504       | 1.55165       | 1.48094     | 1.29060     | 1.20703     |
| $\alpha = 0.8$ | 1.74523       | 1.68672       | 1.63642       | 1.59274       | 1.52071     | 1.32134     | 1.23112     |
| $\alpha = 1.0$ | 1.81053       | 1.75441       | 1.70528       | 1.66195       | 1.58905     | 1.37726     | 1.27612     |
| $\alpha = 2.0$ | 1.98535       | 1.94218       | 1.90249       | 1.86590       | 1.80067     | 1.57940     | 1.45248     |
| $\alpha = 3.0$ | 2.06338       | 2.02916       | 1.99700       | 1.96672       | 1.91118     | 1.70622     | 1.57524     |

Cuadro 4.1: Valores esperados para el plan 3

Del plan 4 y del modelo  $\beta - 2$ , tenemos:

$$E(t_{i4}) = E[\rho_i^2 + (r_i + d_i)^2 - 2\rho_i(r_i + d_i) \cos \theta_i]^{1/2}$$

Sea  $r_i + d_i = R_i$ , sustituyendo  $\rho_i = R_i \mu$ , entonces:

$$E(t_{i4}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i/R_i} \rho_i^{\alpha_i - 1} (r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} R_i^2 [1 + u^2 - 2u \cos \theta_i]^{1/2} d\theta_i du$$

Ahora, realizando los mismos pasos que en el caso de  $t_{i3}$ , vemos que:

$$\begin{aligned} E(t_{i4}) &= R_i^2 \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)} \frac{1}{r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \int_0^{r_i/R_i} (R_i u)^{\alpha_i - 1} u^{2m} (r_i - R_i u)^{\beta_i - 1} du \\ &= R_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_m}{m!} \right]^2 \frac{(\alpha_i + 1) \dots (\alpha_i + 2m - 1)}{(\alpha_i + \beta_i + 1) \dots (\alpha_i + \beta_i + 2m - 1)} (r_i/R_i)^{2m} \\ E(t_{i4}) &= R_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} {}_3F_2 \left( \frac{\alpha_i + 1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{\alpha_i + \beta_i + 1}{2}, 1; \frac{r_i}{R_i} \right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Evidentemente la serie es convergente, ya que  $\frac{r_i}{R_i} < 1$  para  $d_i > 0$  para  $d_i = 0$  se reduce al caso de  $E(t_{i3})$

Ahora para una distancia de  $d = 2$

En las tablas 4.2, 4.3 se puede observar como varían los valores esperados del plan 4 cuando la distancia  $d$  cambia de 1 a 2 y los parámetros de  $\alpha$  y  $\beta$  van desde 0.5 hasta 2.5

| d=1            | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 1.09668       | 0.71804       | 0.53202       | 0.42190       | 0.349272      |
| $\alpha = 1.0$ | 1.47090       | 1.08569       | 0.85860       | 0.70930       | 0.60385       |
| $\alpha = 1.5$ | 1.66128       | 1.31025       | 1.08018       | 0.91810       | 0.79792       |
| $\alpha = 2.0$ | 1.77701       | 1.46203       | 1.24067       | 1.07687       | 0.95090       |
| $\alpha = 2.5$ | 1.85494       | 1.57163       | 1.36240       | 1.20176       | 1.07466       |

Cuadro 4.2: Valores esperados para el plan 4 cuando d=1

| d=2            | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 1.59561       | 1.05088       | 0.78839       | 0.62173       | 0.51583       |
| $\alpha = 1.0$ | 2.13602       | 1.58483       | 1.25807       | 1.04229       | 0.889323      |
| $\alpha = 1.5$ | 2.40944       | 1.90912       | 1.57944       | 1.34616       | 1.17254       |
| $\alpha = 2.0$ | 2.57496       | 2.12735       | 1.81117       | 1.57620       | 1.39434       |
| $\alpha = 2.5$ | 2.68609       | 2.28440       | 1.98631       | 1.75650       | 1.57403       |

Cuadro 4.3: Valores esperados para el plan 4 cuando d=2

Del plan 5 y la distribución  $\beta$  tipo-1, tenemos:

$$E(t_{i5}) = d_i + r_i - a_i - a_i E(\theta_i) + E|\rho_i - \alpha_i|$$

Teniendo en cuenta que

$$E(\theta_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_i d\theta_i = \pi$$

Entonces

$$E(t_{i5}) = d_i + (\pi - 1)a_i + E[|\rho_i - a_i|] \tag{4.13}$$

Evaluando  $E[|\rho_i - a_i|]$

$$E[|\rho_i - a_i|] = \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}} \left[ \int_0^{a_i} (a_i - \rho_i)\rho_i^{\alpha_i - 1}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i + \int_{a_i}^{r_i} (\rho_i - a_i)\rho_i^{\alpha_i - 1}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i \right]$$

$$E[|\rho_i - a_i|] = \frac{\Gamma(\alpha_i + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\beta_i)r_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}} \left[ a_i \int_0^{a_i} \rho_i^{\alpha_i - 1}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i - \int_0^{a_i} \rho_i^{\alpha_i}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i + \int_{a_i}^{r_i} \rho_i^{\alpha_i}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i - \int_{a_i}^{r_i} \alpha_i \rho_i^{\alpha_i - 1}(r_i - \rho_i)^{\beta_i - 1} d\rho_i \right] \tag{4.14}$$

Llevando cada una de las integrales a la forma  $\beta$  y  $\beta$  incompleta, usando un procedimiento

análogo que en el *Plan 1*, tenemos:

$$a_i \int_0^{a_i} \rho_i^{\alpha_i-1} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i = \frac{a_i}{B(\alpha_i, \beta_i) r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \int_0^{a_i} \rho_i^{\alpha_i-1} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i = a_i I(\alpha_i, \beta_i; a_i/r_i)$$

Llevando a la forma de una  $\beta$  incompleta,

$$= \frac{a_i}{B(\alpha_i, \beta_i) r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \int_0^{a_i} \left(\frac{\rho_i}{r_i}\right)^{\alpha_i-1} \left(1 - \frac{\rho_i}{r_i}\right)^{\beta_i-1} r_i^{\alpha_i+\beta_i-1} d\rho_i$$

Haciendo  $t = \rho_i/r_i$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{a_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \frac{r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}}{r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \int_0^{a_i/r_i} (t)^{\alpha_i-1} (1-t)^{\beta_i-1} dt \\ &= \frac{a_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} B(\alpha_i, \beta_i) I(\alpha_i, \beta_i; \frac{a_i}{r_i}) \\ &= a_i I\left(\alpha_i, \beta_i; \frac{a_i}{r_i}\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

De forma analoga procedemos para la siguiente integral:

$$\frac{1}{B(\alpha_i, \beta_i) r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \int_0^{a_i} \rho_i^{\alpha_i} (r_i - \rho_i)^{\beta_i-1} d\rho_i$$

Siendo  $t = \rho_i/r_i$  tendremos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{B(\alpha_i, \beta_i) r_i^{\alpha_i+\beta_i-1}} \int_0^{a_i/r_i} r_i^{\alpha_i+\beta_i} t^{\alpha_i} (1-t)^{\beta_i-1} dt \\ &= \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} \int_0^{a_i/r_i} t^{\alpha_i} (1-t)^{\beta_i-1} dt \\ &= \frac{r_i}{B(\alpha_i, \beta_i)} B(\alpha_i, \beta_i) \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} I(\alpha_i + 1, \beta_i; \frac{a_i}{r_i}) \\ &= \frac{r_i \alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} I\left(\alpha_i + 1, \beta_i; \frac{a_i}{r_i}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Donde  $I(\alpha, \beta; \delta)$  representa la función beta incompleta<sup>4</sup>

$$I(\alpha, \beta; \delta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\delta x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

---

<sup>4</sup>G.E. Andrews, R.Askey, R.Roy, Special Funtions, 1999

Resolviendo de manera análoga a 4.15 y 4.16 las otras dos integrales faltantes en 4.14 y sustituyendo todos los resultados en 4.13, obtenemos finalmente

$$E(t_{i5}) = d_i + (\pi - 2)a_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} r_i + 2a_i I(\alpha_i, \beta_i; a_i/r_i) - 2r_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} I(\alpha_i + 1, \beta_i; a_i/r_i) \quad (4.17)$$

Por ejemplo sea  $\alpha = 1$ . Esto puede interpretarse en el sentido de que la congestión del tráfico aumenta cada vez que nos acercamos al centro  $O_i$  o disminuye a medida que uno se aleja del centro. Luego, mediante la evaluación de la expresión anterior en un  $\alpha = 1$ , tenemos:

$$E(t_{i5}) = d_i + \pi a_i + \frac{r_i \beta_i}{\beta_i + 1} + \frac{2r_i}{\beta_i + 1} \left(1 - \frac{a_i}{r_i}\right)^{\beta_i + 1}$$

¿Cuándo la circunvalar debe ser ubicada de modo que  $E(t_{i5})$  sea mínimo? Esto se puede hacer para reducir al mínimo con respecto a la  $a_i$ . El mínimo global se alcanza

$$a_i = r_i [1 - (\pi/2)^{1/\beta_i}] \text{ Con } 1 - (\pi/2)^{1/\beta_i} \text{ no negativo} \quad (4.18)$$

Teniendo en cuenta que  $0 \leq a_i \leq r_i$ , es decir que alcanza el mínimo en  $a_i = 0$ , con lo cual se concluye que es preferible pasar por el centro  $O_i$  en lugar de coger la circunvalar, en este caso.

| a=0            | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 1.50000       | 1.33000       | 1.25000       | 1.20000       | 1.16660       |
| $\alpha = 1.0$ | 1.66666       | 1.50000       | 1.40000       | 1.33330       | 1.28571       |
| $\alpha = 1.5$ | 1.75000       | 1.90912       | 1.57944       | 1.34616       | 1.17254       |
| $\alpha = 2.0$ | 1.80000       | 2.12735       | 1.81117       | 1.57620       | 1.39434       |
| $\alpha = 2.5$ | 2.68609       | 2.28440       | 1.98631       | 1.75650       | 1.57403       |

Cuadro 4.4: Valores esperados para el plan 5. r=1, d=1, a=0

| a=0.4          | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 2.85737       | 2.68946       | 2.57299       | 2.48237       | 2.40814       |
| $\alpha = 1.0$ | 2.35864       | 2.19663       | 2.08740       | 2.00680       | 1.94423       |
| $\alpha = 1.5$ | 2.85736       | 2.68946       | 2.57298       | 2.48236       | 2.40813       |
| $\alpha = 2.0$ | 2.29085       | 2.15885       | 2.06240       | 1.98863       | 1.93036       |
| $\alpha = 2.5$ | 2.30516       | 2.18678       | 2.09690       | 2.02647       | 1.96965       |

Cuadro 4.5: Valores esperados para el plan 5. r=1, d=1 a=0.4

| a=0.8          | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 5.24900       | 4.79076       | 4.40632       | 4.11297       | 3.88928       |
| $\alpha = 1.0$ | 3.68414       | 3.37327       | 3.11318       | 2.91505       | 2.76574       |
| $\alpha = 1.5$ | 3.23917       | 3.00175       | 2.80507       | 2.65462       | 2.54088       |
| $\alpha = 2.0$ | 3.05598       | 2.86439       | 2.70622       | 2.58394       | 2.49030       |
| $\alpha = 2.5$ | 2.96702       | 2.80700       | 2.67468       | 2.57092       | 2.49006       |

Cuadro 4.6: Valores esperados para el plan 5. r=1 d=1 a=0.8

| a=1.0          | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 7.35398       | 6.03048       | 5.33684       | 4.90159       | 4.59900       |
| $\alpha = 1.0$ | 5.03048       | 4.14160       | 3.66159       | 3.36381       | 3.16200       |
| $\alpha = 1.5$ | 4.26604       | 3.59493       | 3.23064       | 3.00554       | 2.85407       |
| $\alpha = 2.0$ | 3.90159       | 3.36380       | 3.07220       | 2.89160       | 2.76946       |
| $\alpha = 2.5$ | 3.69487       | 3.24772       | 3.00589       | 2.85517       | 2.75204       |

Cuadro 4.7: Valores esperados para el plan 5. r=1 d=1 a=1.0

En las tablas anteriores se observan los valores esperados para el plan 5, en cada una de ellas se hacen variar los parámetros de  $\alpha$  y  $\beta$  desde 0.5 hasta 2.5; Además en cada caso los valores de  $r$  y  $d$  es 1. se puede ver la importancia del valor de  $a$  y el cambio que experimentan los valores esperados de este plan.

### 4.3. Combinando varios planes de viaje.

Supongamos que la distancia de desplazamiento en el  $i$ -ésimo municipio y en la ciudad son independientes y que  $\rho_i$  y  $\rho^*$  distribuyen como una  $\beta$  tipo-1, con parámetros  $(\alpha_i, \beta_i)$  y  $(\alpha^*, \beta^*)$ , respectivamente <sup>5</sup>. Asumimos que  $\rho_i$  y  $\theta_i$  son independientes y que  $\theta_i$  distribuye uniforme sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ . De forma análoga, asumimos que  $\rho^*$  y  $\theta^*$  son independientes  $\theta^*$  distribuye uniforme en  $[0, 2\pi]$ . Si, por ejemplo, si se toma la ruta  $P_i O_i B_i A_i O^* P^*$  entonces, la distancia recorrida total está dada por:

$$t = t_{i1} + t_{i1}^* - d_i \tag{4.19}$$

Donde  $t_{i2}^*$  es la distancia asociada a  $C^*$  correspondiente a  $t_{i1}$ .

Sean  $T_i$  y  $T_i'$  los cruces entre la circunvalar y las rectas  $\overline{O_i P_i}$  y  $\overline{O_i B_i}$ , respectivamente. Del

<sup>5</sup>A.M.Mathai, P.G.Moschopoulos. Pollution by vehicular travels from satellite townships to the city, 1999

mismo modo, una circunvalar a una distancia  $a^*$  de  $O^*$  cruza por  $O^*P^*$  y  $O^*B_i$  en  $T^*$  y  $T'^*$  respectivamente. En las tablas se muestran los 5 planes de viajes, con sus respectivos parámetros, los cuales se hacen cambiar de acuerdo a sus restricciones.

# Capítulo 5

## Casos de aplicación

Para poder modelar los diferentes planes propuestos y los valores esperados encontrados en el capítulo anterior, se buscan ciudades que permitan un análisis que cumplan en lo posible la estructura circular como parámetro principal del modelo.

Se hacen pruebas con ciudades como Bogotá y sus alrededores, pero debido a la forma alargada de la ciudad se hace imposible considerarla; así, como el caso anterior, se buscan ciudades dentro de Colombia y fuera de ella, que puedan acoplarse al modelo. En esta búsqueda se encuentra a Medellín y el Valle de Aburrá que, debido a su ubicación y crecimiento, cuentan con las condiciones establecidas para dicho modelo.

Ahora, se inicia la tarea de ubicar los medios que permitan realizar las mediciones necesarias sobre cada una de las ciudades. Primero se toman mapas digitales de la zona del valle de Aburrá, pero se descartan por la ausencia de las distancias dadas entre dos puntos aleatorios.

Es así como tratando de dar solución a esta dificultad para la búsqueda y recolección de estos datos, se encuentra la herramienta Google Earth, que solo permite realizar mediciones en línea recta entre 2 puntos o, como máximo, determinar distancias entre puntos de una trayectoria recta. Google Earth tiene una versión profesional llamada Google Earth Pro, que tiene la herramienta de construcciones circulares y además permite medir radios de los mismos. Se empieza a recolectar los datos para poder calcular los valores esperados y a construirse modelos sobre las ciudades de Medellín, Bello y Rionegro.

Durante la construcción del tercer capítulo se encontró una gran dificultad a la hora de calcular los valores esperados de cada una de las rutas propuestas, debido a que la función existe en MATLAB pero, para los valores decimales de los parámetros usados, generaba conflicto sobre la función. Se hicieron, entonces, diferentes pruebas sobre las funciones necesarias para los cálculos de los valores esperados, pero siempre mostraron la inconsistencia del programa, para solucionar esta dificultad se recurre al software MATH-

EMATICA 6.0.2 que realiza estos cálculos con mucho menos recurso de máquina, que el solicitado por MATLAB.

Uniendo las dos herramientas anteriormente mencionadas se logra realizar una modelación de las rutas que son las que a continuación se presentan.

## 5.1. Viaje desde cualquier punto de Medellín hasta Bello.

Para empezar, tomaremos un viaje desde Medellín hasta el municipio de Bello. Discutiremos el viaje desde el punto de vista de cada plan.

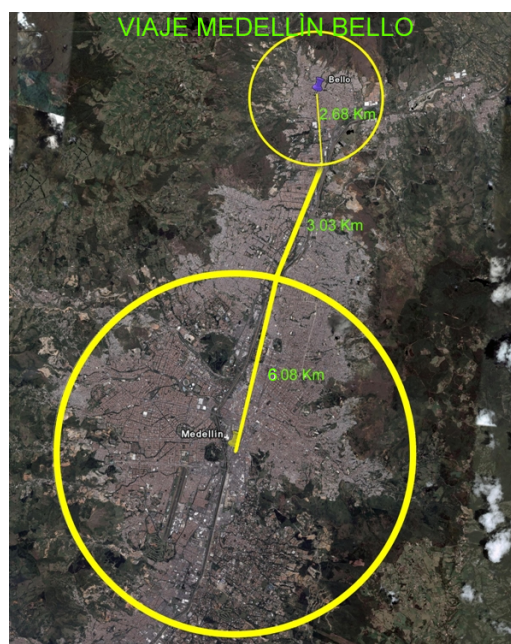


Figura 5.1: Viaje Medellín Bello

- i) *Plan 1. Ir desde el punto al centro de Medellín, luego a la salida más cercana hacia Bello y de allí a la entrada del municipio. como muestra la figura 5.2*

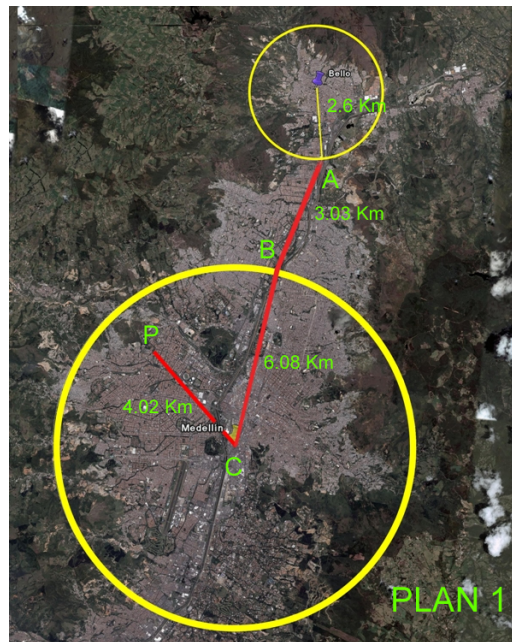


Figura 5.2: Plan 1

De la gráfica anterior se observa que el radio de Medellín es aproximadamente 6.08 Km y la distancia de Medellín a Bello es 3.03 Km. Utilizando la ecuación 4.9 para el punto aleatorio seleccionado, se obtienen los valores esperados para esta ruta.

| $\beta/\alpha$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 1.0$ | $\alpha = 1.5$ | $\alpha = 2.0$ | $\alpha = 2.5$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta = 0.5$  | 12.15000       | 13.16333       | 13.67000       | 13.97400       | 14.17667       |
| $\beta = 1.0$  | 11.13667       | 12.15000       | 12.75800       | 13.16333       | 13.45286       |
| $\beta = 1.5$  | 10.63000       | 11.54200       | 12.15000       | 12.58429       | 12.91000       |
| $\beta = 2.0$  | 10.32600       | 11.13667       | 11.71571       | 12.15000       | 12.48778       |
| $\beta = 2.5$  | 10.12333       | 10.84714       | 11.39000       | 11.81222       | 12.15000       |

Cuadro 5.1: Distancia esperada entre Medellín y Bello, Plan 1

En el modelo construido se tomó un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Bello es de 13,13 Km. Usando los valores esperados encontrados en la tabla anterior, y analizándolos, encontramos que éstos tienen una media de 12,1500Km, con una varianza de 1,229 y una desviación estándar de 1,109. Lo cual muestra que el modelo es adecuado.

ii) *Plan 2.* Este plan consiste en ir directamente desde P hasta Q, punto ubicado sobre la principal y de allí hasta el punto B, y luego dirigirse al punto A, como se muestra

en la figura 5.3. Es conocido que  $\overline{PQ} = 3.24\text{Km}$ ,  $\overline{QB} = 3.22\text{Km}$  y  $\overline{BA} = 3.03\text{Km}$ , así, calculamos la distancia esperada para dicho trayecto utilizando la ecuación 4.10, lo cual se muestra en el cuadro 5.2.

| $\beta/\alpha$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 1.0$ | $\alpha = 1.5$ | $\alpha = 2.0$ | $\alpha = 2.5$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta = 0.5$  | 11.04532       | 11.69043       | 12.01299       | 12.20652       | 12.33554       |
| $\beta = 1.0$  | 10.40022       | 11.04532       | 11.43239       | 11.69043       | 11.87475       |
| $\beta = 1.5$  | 10.07766       | 10.65826       | 11.04532       | 11.32180       | 11.52916       |
| $\beta = 2.0$  | 9.884130       | 10.40022       | 10.76885       | 11.04532       | 11.26036       |
| $\beta = 2.5$  | 9.755110       | 10.21590       | 10.56149       | 10.83029       | 11.04532       |

Cuadro 5.2: Distancia esperada entre Medellín y Bello, Plan 2

Ahora se toma un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Bello es de 9.49Km. Usando los valores esperados encontrados en la tabla 5.2, encontramos que estos tienen una media de 11.061, una varianza de 0.505 y una desviación estándar de 0.710. Lo cual muestra que el modelo es adecuado.

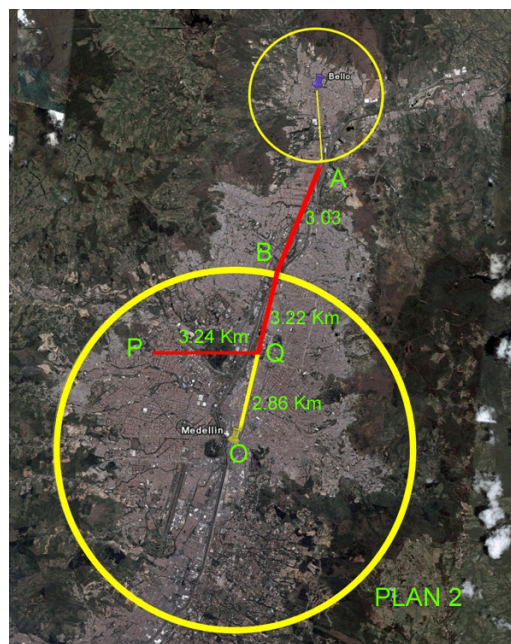


Figura 5.3: Plan 2

- iii) *Plan 3. Ir directamente desde P a B y luego hasta A.*  
Como muestra la figura 5.4, las distancias dadas son:

$$\overline{PB} = 4.92Km \text{ y } \overline{BA} = 3.03Km$$

Aplicando la ecuación 4.1, obtenemos el cuadro 5.3.

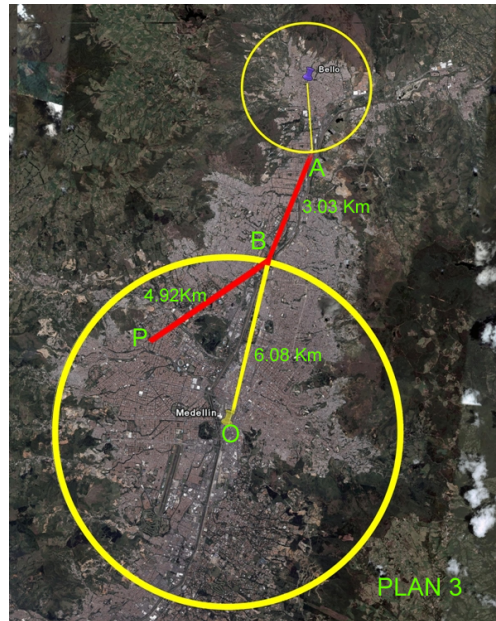


Figura 5.4: Plan 3

| $\beta/\alpha$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 1.0$ | $\alpha = 1.5$ | $\alpha = 2.0$ | $\alpha = 2.5$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta = 0.5$  | 6.68419        | 5.38084        | 4.75100        | 4.38297        | 4.14271        |
| $\beta = 1.0$  | 7.95804        | 6.61142        | 5.83046        | 5.32372        | 4.96961        |
| $\beta = 1.5$  | 8.61618        | 7.37532        | 6.57482        | 6.01810        | 5.60967        |
| $\beta = 2.0$  | 9.02091        | 7.89807        | 7.12079        | 6.55277        | 6.12050        |
| $\beta = 2.5$  | 9.29592        | 8.27927        | 7.53914        | 6.97770        | 6.53800        |

Cuadro 5.3: Distancia esperada entre Medellín y Bello. Plan 3

Se toma el punto aleatorio en Medellín, a una distancia de Bello de 7,95Km siguiendo el plan 3. Se estima que la media para esta trayectoria es 6,6229, con una varianza de 1,989 y desviación estándar de 1,4102. Si observamos el valor de la distancia tomada desde el punto aleatorio hasta la entrada de la ciudad de Bello, está dentro de lo esperado por el modelo.

iv) *Plan 4. Ir directamente desde P hasta A.*

Como muestra la figura 5.5, la distancia dada  $\overline{PA} = 8.73Km$ . Luego aplicando la ecuación 4.12, obtenemos el cuadro 5.4.

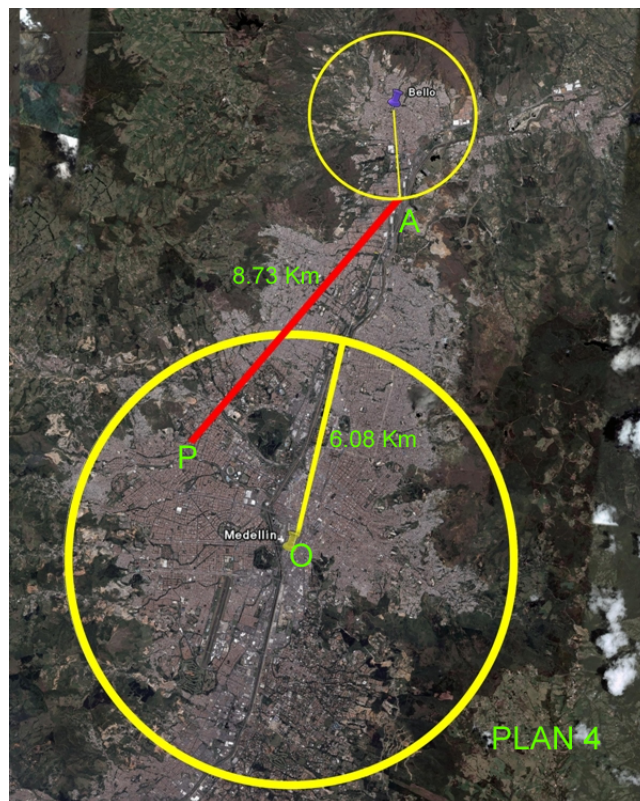


Figura 5.5: Plan 4

|                | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 5.15015       | 3.36239       | 2.47400       | 1.95629       | 1.61598       |
| $\alpha = 1.0$ | 6.92040       | 5.08182       | 4.00382       | 3.29819       | 2.80157       |
| $\alpha = 1.5$ | 7.82574       | 6.14398       | 5.04752       | 4.27837       | 3.71007       |
| $\alpha = 2.0$ | 8.37826       | 6.86494       | 5.80672       | 5.02688       | 4.42924       |
| $\alpha = 2.5$ | 8.75148       | 7.38731       | 6.38456       | 5.61755       | 5.01310       |

Cuadro 5.4: Distancia esperada entre Medellín y Bello. Plan 4

En el modelo construido se tomó un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Bello es de 8,73 Km siguiendo el plan 4. Calculando la media correspondiente para los valores esperados de esta trayectoria es 5,104, con una varianza de 3,753 y desviación estándar de 1,937. Con lo que nuestro valor sigue estando en el intervalo esperado.

v) *Plan 5. Ir desde P a la circunvalar, sobre esta llegar a la principal y salir de la*

ciudad llegando hasta  $A$ .

Como muestra la figura 5.6, el ángulo  $\widehat{POQ}$  es  $0.925 \text{ rad}$ .

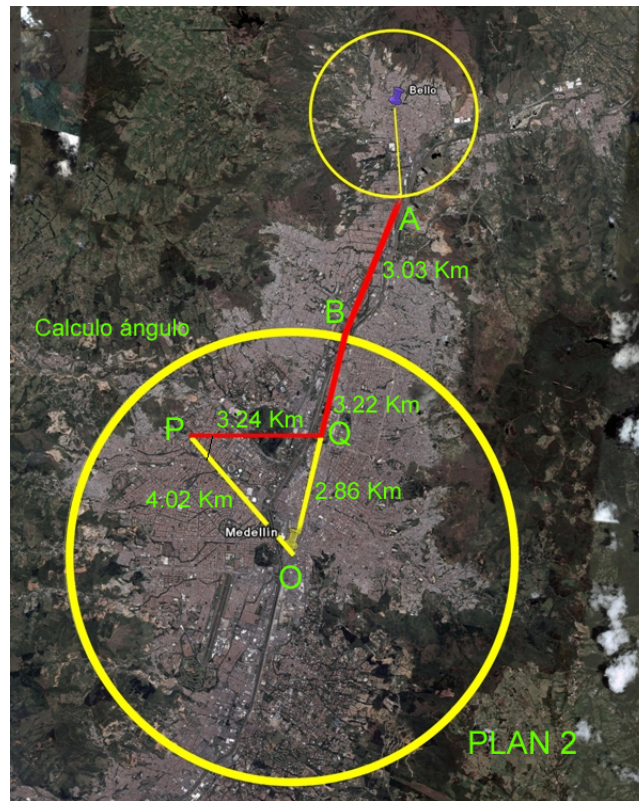


Figura 5.6: Calculo ángulo

Ahora, para el plan 5, calculamos la longitud del arco  $s = 2.248 \text{ Km}$ , de la gráfica 5.7 se observa que:  $\overline{BA} = 3.030 \text{ Km}$ ,  $\overline{TB} = 3.650 \text{ Km}$ , y la distancia de  $P$  a la circunvalar es  $1.590 \text{ Km}$ . Luego aplicando la ecuación 4.17, obtenemos el cuadro 5.5

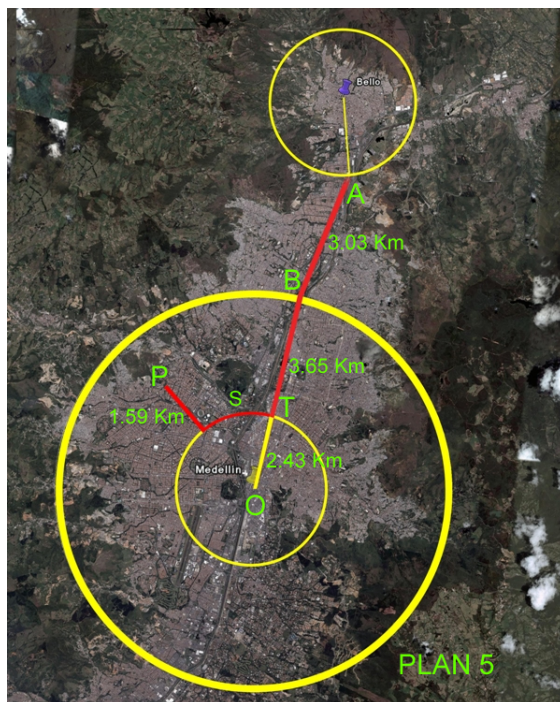


Figura 5.7: Plan 5

Se escoge un punto aleatorio en Medellín, cuya distancia a la entrada de Bello es de 10.5177 Km siguiendo el plan 5. Usando los valores esperados encontrados en el cuadro 5.5. La media de los valores esperados para esta trayectoria es 10,3358, con una varianza de 2,329 y desviación estándar de 1,526. Si observamos el valor de la distancia tomada desde el punto aleatorio hasta la entrada de la ciudad de bello, está dentro de lo esperado.

|                | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 14.3134       | 13.2929       | 12.5853       | 12.0349       | 11.58141      |
| $\alpha = 1.0$ | 11.2858       | 10.9009       | 9.63696       | 9.14750       | 8.76697       |
| $\alpha = 1.5$ | 10.8716       | 9.97601       | 9.34893       | 8.88171       | 8.51868       |
| $\alpha = 2.0$ | 10.8755       | 10.0730       | 9.48658       | 9.03820       | 8.68396       |
| $\alpha = 2.5$ | 10.9629       | 10.2431       | 9.69707       | 9.26843       | 8.92300       |

Cuadro 5.5: Distancia esperada entre Medellín y Bello. Plan 5

Ahora se muestra un resumen de los valores para la media, Varianza y desviación estandar para los correspondientes planes de viaje.

|                            | Plan 1  | Plan 2  | Plan 3 | Plan 4  | Plan 5  |
|----------------------------|---------|---------|--------|---------|---------|
| <b>MEDIA</b>               | 12.1498 | 11.0616 | 6.6229 | 5.1040  | 10.3357 |
| <b>VARIANZA</b>            | 1.2297  | 0.5046  | 1.9887 | 3.7532  | 2.3289  |
| <b>DESVIACION ESTÁNDAR</b> | 1.1089  | 0.7103  | 1.4102 | 1.93731 | 1.5260  |

Cuadro 5.6: Valores esperados entre Medellín y Bello.

## 5.2. Viaje desde cualquier punto de Medellín hasta Rionegro.

Ahora, tomaremos un viaje desde Medellín hasta el municipio de Rionegro. Discutiremos el viaje desde el punto de vista de cada plan.



Figura 5.8: Viaje Medellín Rionegro

- i) Plan 1. Ir desde el punto al centro de Medellín, luego a la salida más cercana hacia Rionegro y de allí a la entrada del municipio. como muestra la figura 5.9*



Figura 5.9: Medellín Rionegro Plan 1

De la figura 5.8 se observa que el radio de Medellín es aproximadamente 6.08 Km, la distancia de Medellín a Rionegro es 15.13 Km. Luego en el cuadro 5.7 se muestran los valores esperados para esta ruta desde un punto  $P$ .

Para el plan 1 usando la ecuación 4.9, obtenemos:

| $\beta/\alpha$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 1.0$ | $\alpha = 1.5$ | $\alpha = 2.0$ | $\alpha = 2.5$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta = 0.5$  | 24.25000       | 25.26333       | 25.77000       | 26.07400       | 26.27667       |
| $\beta = 1.0$  | 23.23667       | 24.25000       | 24.85800       | 25.26333       | 25.55286       |
| $\beta = 1.5$  | 22.73000       | 23.64200       | 24.25000       | 24.68429       | 25.01000       |
| $\beta = 2.0$  | 22.42600       | 23.23667       | 23.81571       | 24.25000       | 24.58778       |
| $\beta = 2.5$  | 22.22333       | 22.94714       | 26.49000       | 23.91222       | 24.25000       |

Cuadro 5.7: Distancia esperada entre Medellín y Rionegro. Plan 1.

En el modelo construido se tomó un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Rionegro es de 25.1 Km. Usando los valores esperados encontrados en la tabla anterior, encontramos que estos tienen una media de 24.374Km, con una varianza de 1,398 y una desviación estándar de 1,182. Lo cual muestra que el modelo es adecuado.

ii) *Plan 2.* Este plan consiste en ir directamente desde P hasta Q, punto ubicado sobre la principal y de allí hasta el punto B, y luego dirigirse al punto A.

Las distancias  $\overline{PQ} = 3.27$  Km,  $\overline{QB} = 4.53$  Km y  $\overline{BA} = 15.13$  Km, proporcionan la información requerida para calcular la distancia del viaje esperado.

Así, utilizando la ecuación 4.10 podemos calcular la distancia esperada de viaje trazado para el plan 2 de la figura 5.10, como muestra el cuadro 5.8.

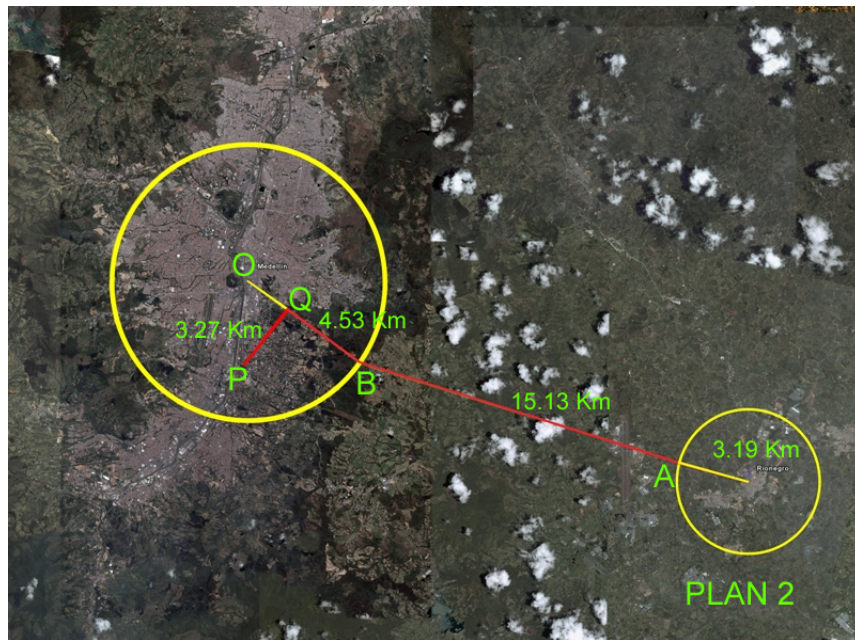


Figura 5.10: Medellín Rionegro Plan 2

| $\beta/\alpha$ | $\alpha = 0.5$ | $\alpha = 1.0$ | $\alpha = 1.5$ | $\alpha = 2.0$ | $\alpha = 2.5$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta = 0.5$  | 23.14532       | 23.79043       | 24.11299       | 24.30652       | 24.43554       |
| $\beta = 1.0$  | 22.50022       | 23.14532       | 23.53239       | 23.79043       | 23.97475       |
| $\beta = 1.5$  | 22.17766       | 22.75826       | 23.14532       | 23.42180       | 23.62916       |
| $\beta = 2.0$  | 21.98413       | 22.50022       | 22.86885       | 23.14532       | 23.36036       |
| $\beta = 2.5$  | 21.85511       | 22.31590       | 22.66149       | 22.93029       | 23.14532       |

Cuadro 5.8: Distancia esperada entre Medellín y Rionegro. Plan 2.

Ahora se toma un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Rionegro es de 22.93Km. Usando los valores esperados encontrados en la tabla 5.8, encontramos que estos tienen una media de 23.145, una varianza

de 0.498 y una desviación estándar de 0.705. Lo cual muestra que el modelo es adecuado.

iii) *Plan 3. Ir directamente desde P a B y luego hasta A.*

Como muestra la figura 5.11, las distancias dadas son:  $\overline{PB} = 5.01\text{Km}$  y  $\overline{BA} = 15.13\text{Km}$ , y, aplicando la ecuación 4.1, obtenemos el cuadro 5.9.



Figura 5.11: Medellín Rionegro Plan 3

| $\alpha/\beta$ | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 18.78420      | 17.48080      | 16.85100      | 16.48300      | 16.24270      |
| $\alpha = 1.0$ | 20.05800      | 18.71140      | 17.93050      | 17.42370      | 17.06960      |
| $\alpha = 1.5$ | 20.71620      | 19.47530      | 18.67480      | 18.11810      | 17.70970      |
| $\alpha = 2.0$ | 21.12090      | 19.99810      | 19.22080      | 18.65280      | 18.22050      |
| $\alpha = 2.5$ | 21.39590      | 20.37930      | 19.63910      | 19.07770      | 18.63800      |

Cuadro 5.9: Distancia esperada entre Medellín y Rionegro. Plan 3.

Se toma el punto aleatorio en Medellín, a una distancia de Rionegro de 20.14Km siguiendo el plan 3. Se estima que la media para esta trayectoria es 18.723, con una varianza de 1,988 y desviación estándar de 1,4102. Si observamos el valor de la

distancia tomada desde el punto aleatorio hasta la entrada de la ciudad de Rionegro, está dentro de lo esperado por el modelo.

iv) *Plan 4. Ir directamente desde P hasta A.*

Como muestra la figura 5.12, la distancia dada  $\overline{PA} = 19.12$  Km. Luego aplicando la ecuación 4.12, obtenemos el cuadro 5.10.



Figura 5.12: Plan 4

|                | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 11.18460      | 7.378520      | 5.495030      | 4.373860      | 3.631050      |
| $\alpha = 1.0$ | 14.96450      | 11.11940      | 8.836240      | 7.326540      | 6.255260      |
| $\alpha = 1.5$ | 16.87400      | 13.38760      | 11.08680      | 9.456660      | 8.242220      |
| $\alpha = 2.0$ | 18.02850      | 14.91210      | 12.70760      | 11.06720      | 9.769810      |
| $\alpha = 2.5$ | 18.80290      | 16.00920      | 13.93120      | 12.32820      | 11.05410      |

Cuadro 5.10: Distancia esperada entre Medellín y Rionegro. Plan 4.

En el modelo construido se tomó un punto aleatorio dentro de la ciudad de Medellín, cuya distancia a la entrada de Rionegro es de 19.12 Km siguiendo el plan 4. La media correspondiente para los valores esperados de esta trayectoria es 11.1289, con una

varianza de 17.2224 y desviación estándar de 4.1500. Con lo que nuestro valor sigue estando en el intervalo esperado.

v) *Plan 5. Ir desde P a la circunvalar, sobre esta llegar a la principal y salir de la ciudad llegando hasta A.*

Como muestra la figura 5.13, el ángulo  $\widehat{POQ}$  es 0.9675 rad.



Figura 5.13: Calculo ángulo

|                | $\beta = 0.5$ | $\beta = 1.0$ | $\beta = 1.5$ | $\beta = 2.0$ | $\beta = 2.5$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\alpha = 0.5$ | 26.41340      | 25.39290      | 24.68530      | 24.13490      | 23.68410      |
| $\alpha = 1.0$ | 23.38580      | 22.40090      | 21.73700      | 21.24750      | 20.86700      |
| $\alpha = 1.5$ | 22.97160      | 22.07600      | 21.44890      | 20.98150      | 20.61870      |
| $\alpha = 2.0$ | 22.97550      | 22.17300      | 21.38660      | 21.13820      | 20.78400      |
| $\alpha = 2.5$ | 23.06290      | 22.34310      | 21.79710      | 21.36840      | 21.02300      |

Cuadro 5.11: Distancia esperada entre Medellín y Rionegro. Plan 5.

Se escoge un punto aleatorio en Medellín, cuya distancia a la entrada de Rionegro es de 25.5910 Km siguiendo el plan 5. Usando los valores esperados encontrados en el cuadro 5.11. La media de los valores esperados para esta trayectoria es 22.4038, con una varianza de 2.3307 y desviación estándar de 1.5267. Si observamos el valor

de la distancia tomada desde el punto aleatorio hasta la entrada de la ciudad de Rionegro, está dentro de lo esperado.

Ahora, para el plan 5, calculamos la longitud del arco  $s = 2.3510$  Km, de la gráfica 5.14 se observa que:  $\overline{BA} = 15.13$  Km,  $\overline{TB} = 3.65$  Km, y la distancia de  $P$  a la circunvalar es 1.46 Km. Luego aplicando la ecuación 4.17, obtenemos el cuadro 5.11.

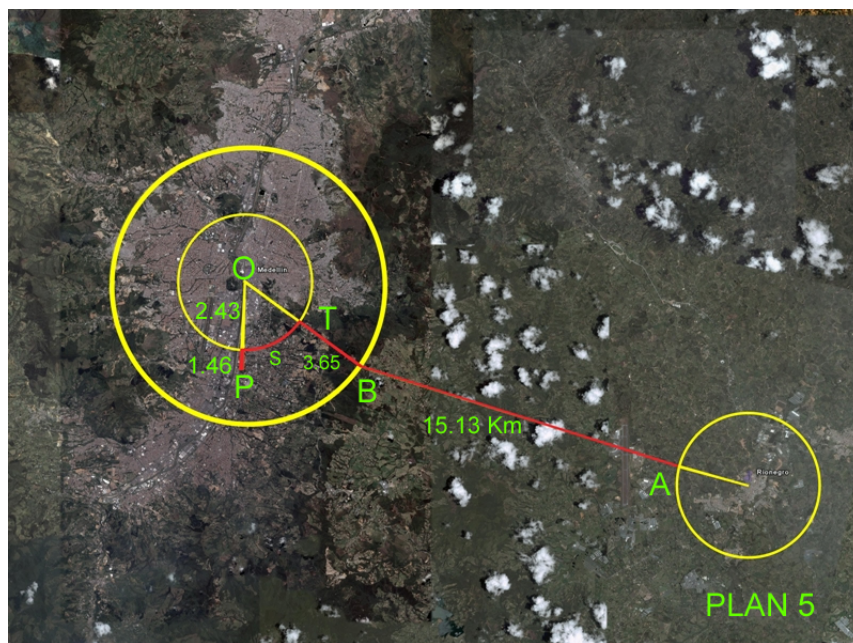


Figura 5.14: Plan 5

Ahora se muestra un resumen de los valores para la media, Varianza y desviación estándar para los correspondientes planes de rutas, para el viaje de Medellín a Rionegro.

|                            | Plan 1  | Plan 2  | Plan 3  | Plan 4  | Plan 5  |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>MEDIA</b>               | 24.3740 | 23.1453 | 18.7229 | 11.1290 | 22.4039 |
| <b>VARIANZA</b>            | 1.3982  | 0.498   | 1.9886  | 17.2222 | 2.3307  |
| <b>DESVIACION ESTÁNDAR</b> | 1.1825  | 0.7057  | 1.4102  | 4.1499  | 1.5267  |

Cuadro 5.12: Valores esperados entre Medellín y Rionegro.

Podemos observar que los valores esperados obtenidos para cada uno de los planes, teniendo en cuenta los parámetros de la distribución utilizada, son una buena aproximación a los casos reales planteados.

El trabajo desarrollado deja ver la utilidad del modelo para realizar planes que permitan a empresas de transporte de pasajeros y carga buscar las rutas que generen los menores valores esperados para trayectorias entre dos ciudades, las cuales favorecerían el nivel de consumo de combustible y disminuiría la contaminación.

El reconocimiento de la utilidad de una herramienta común (Google Earth), para poder hacer los análisis para cada una de las rutas propuestas dentro del modelo planteado, al igual que la utilidad que presenta el software MATHEMATICA 6.0.2 en la obtención de los valores esperados para las funciones hipergeométricas usadas, con parámetros no enteros. En este trabajo se realizaron pruebas con diferentes valores para los parámetros de las funciones de las cuales dependen los valores esperados de las trayectorias, los resultados obtenidos de estos valores esperados permite a grupos que deseen continuar con este trabajo realizar un análisis más preciso para encontrar los valores óptimos para dichos parámetros en una aplicación específica. Los desarrollos hechos en este trabajo pueden ser usados no solamente dirigidos a la proyección de modelos de rutas para el transporte terrestre general, sino para el diseño de toda clase de redes, entre otras, redes de datos, alcantarillado, acueducto, etc.

# Capítulo 6

## ANEXO

Para el desarrollo de las aplicaciones de los modelos construidos en este trabajo, se hizo uso de 2 herramientas, la primera el software Google Earth en su versión profesional llamada Google Earth-Pro que permitió obtener los valores de distancias de imágenes digitalizadas de la ciudades escogidas y la segunda el programa Wolfram Mathematica 6.0.2, con el cual se pudo calcular los valores esperados de aquellas rutas que involucraban la función hipergeométrica. A continuación se hace una descripción del uso de cada una de ellas.

### Google Earth -Pro

Dentro de los muchos desarrollos hechos por Google esta Google Earth que es una herramienta que contiene los mapas digitales de un gran número de ciudades y sitios de importancia mundial. Estos mapas digitalizados permiten hacer acercamientos al detalle e incluso para algunas ciudades como New York (U.S.A.) ver sus construcciones en perspectiva 3D.

No solo tiene las ventajas anteriormente descritas, sino que su versión profesional permite hacer cálculos sobre construcciones que se realicen sobre estos mapas digitales, tales como distancia entre puntos, sobre poner imágenes, hacer medidas de áreas y perímetros de zonas o sectores y demarcaciones de sitios de interés entre otros.

A continuación se presenta unas imágenes que nos permiten ver el uso de este programa.

1) Seleccionar la ciudad

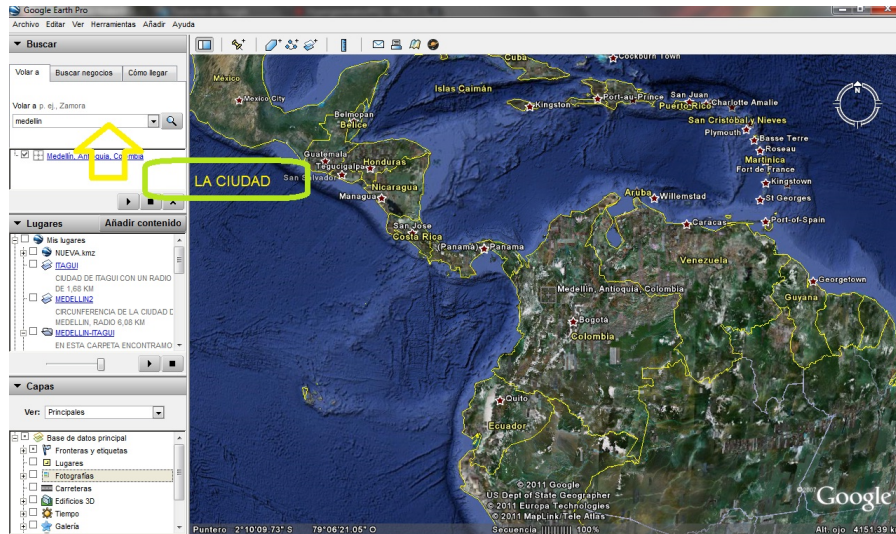


Figura 6.1: Seleccionar ciudad

2) Herramienta regla.

Esta herramienta permite hacer construcciones de círculos de los cuales podemos calcular área, radio y perímetro, en unidades de metros, millas kilómetros, solo haciendo clic en el punto seleccionado como centro y halando el mouse hasta donde se considere. La interfaz de este programa permite ver como cambian los valores a medida que se mueve el cursor.

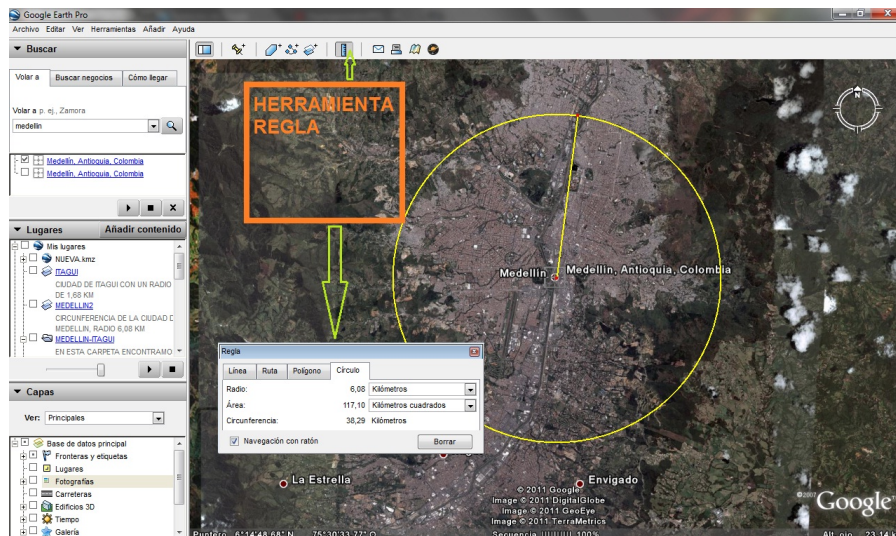


Figura 6.2: Herramienta Regla

3) Distancia entre las ciudades Usando la misma herramienta regla podemos calcular la distancia que separa las dos ciudades circulares Este es otro de los valores necesarios para calcular los valores esperados en nuestro plan.

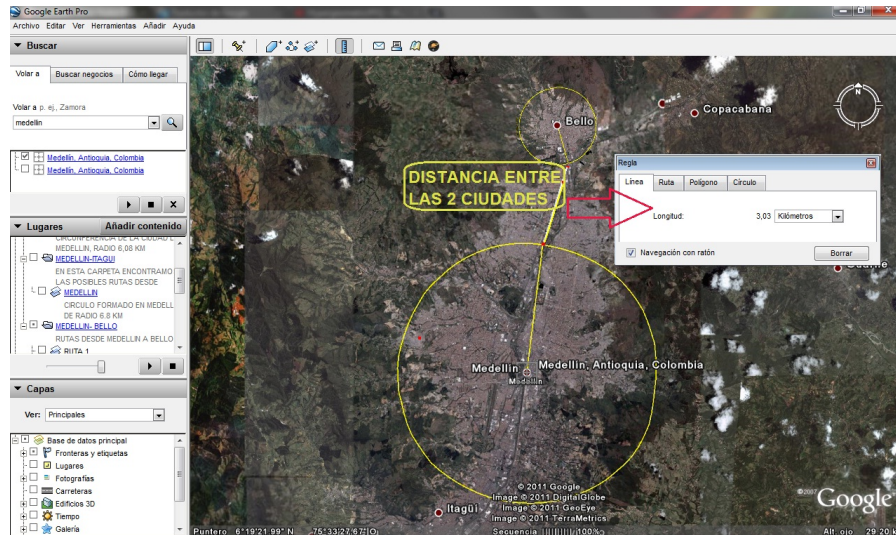


Figura 6.3: Distancia entre dos ciudades

#### 4) Punto aleatorio en la ciudad de partida

Tomamos un punto P aleatoriamente dentro de la circunferencia, usando la herramienta regla podemos hacer los caculos de distancias necesarias para poder determinar los valores requeridos dentro de cada uno de los planes y hacer comparación con los valores reales obtenidos por medición directa sobre nuestro punto P para cada una de las rutas planteadas.

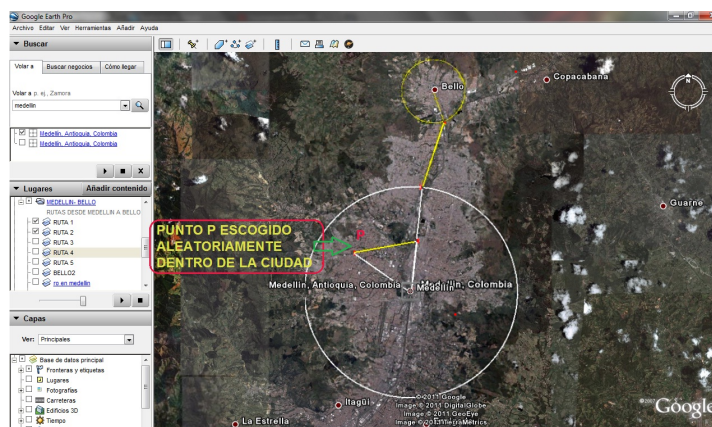


Figura 6.4: Punto aleatorio

## Wolfram Mathematica 6.0.2

Para realizar los cálculos de los valores esperados para la ruta 3 y 4 era necesaria la ayuda de una herramienta de que permitiera agilizar la obtención de los valores sobre la función hipergeométrica. Inicialmente se hizo uso de el programa MATLAB, pero al introducir valores no enteros en dicha función se observó que no era posible encontrar resultados de forma rápida, así que se decidió trabajar con el software Wolfram Mathematica 6.0.2, en el cual se podía encontrar y calcular el valor para la función hipergeométrica introduciendo valores no enteros, de forma rápida y segura.

Una función hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q, x)$  es una función que se puede definir en forma de una serie hipergeométrica, es decir, una serie que puede ser la relación entre términos sucesivos escritos a continuación:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)(k+1)} x.$$

En el caso específico de nuestro trabajo los valores que toman  $p = 3$  y  $q = 2$ , los valores que se deben tener en cuenta dentro de nuestra función son el radio de nuestra ciudad, y la distancia que la separa de la segunda ciudad, valores que son extraídos del Google Earth-Pro, además de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que se hacen variar y los podemos ver en las tablas de cada una de las rutas.

La función que se introdujo para este caso en dicho programa fue la siguiente:

$$\text{HypergeometricPFQ}[(a_1, \dots, a_p); (b_1, \dots, b_q); z]$$

# BIBLIOGRAFÍA

1. Mathai, arakaparambil. (1997) *Random Points With Reference to a Circle, Serie II*
2. T Tan, Ming. (1965) *Road Networks in an Expanding Circular City*
3. Haight, Frank. (1964) *Some Probability Distributions Associated with Commuter Travel  $i$  in a Homogeneous Circular.*
4. Mathai, Arakaparambil. (1998) *Pollution by vehicular travels from the suburbs to the city core.*
5. Mathai, Arakaparambil; Moschopoulos, Panagis. (1999) *Pollution by vehicular travels from satellite townships to the city.*
6. Mathai, Arakaparambil. (2000) *An introduction to geometrical probability, Distributional Aspects with Applications.*
7. Bell, W. (1996) *Special Functions for Scientists and Engineers. Special functions for scientists and engineers*
8. Andrews, George; Askey Richard; Roy, Ranjan. (2006) *Special Functions.*