



Vigilada Mineducación

**GENERACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE: UN ENFOQUE DE MUESTREO  
ALEATORIO APLICADO AL S&P500**

**Efficient Frontier Generation: A Random Sampling Approach Applied to the S&P500**

**Trabajo de Grado como requisito parcial para obtener el título de  
Magister en Administración Financiera**

**MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ ÚSUGA  
DANIEL MAURICIO APONTE RODRÍGUEZ**

**Asesor, docente**

**JUAN MANUEL ARIAS SÁNCHEZ**

**UNIVERSIDAD EAFIT**

**ESCUELA DE FINANZAS, ECONOMÍA Y GOBIERNO**

**MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA - MAF**

**MEDELLÍN**

**2023**

## RESUMEN

Este trabajo de investigación analiza el mercado de acciones del S&P500, mediante un muestreo aleatorio de 81 acciones transadas durante los últimos cinco años (entre 2018 y 2022). A partir de allí se generan portafolios de acciones basados en combinaciones para construir la frontera eficiente del mercado y efectuar un análisis de los resultados de los portafolios al incorporar variables del análisis fundamental, tales como los indicadores de rentabilidad, liquidez, endeudamiento, y valoración. Esto permitirá comprender cómo las variables del análisis fundamental afectan los movimientos en el precio de las acciones, además, de determinar qué comportamientos presentaron los retornos de los portafolios, gracias a que se evalúan en retrospectiva los retornos de tenencia que se habrían alcanzado en distintas periodicidades.

En la práctica, esta investigación aporta al mundo financiero y a sus grupos de interés una metodología para evaluar conjuntos de acciones de cara a enfrentar el proceso de construcción de portafolios. De esta manera, se permite planear, proyectar resultados y evaluar los posibles riesgos a asumir al realizar inversiones en el mercado de capitales.

***Palabras clave:*** Análisis fundamental, Simulación de Montecarlo, Simulación de portafolios, Decisiones de Inversión, Finanzas computacionales.

## **ABSTRACT**

This research analyzes the S&P500 stock market through a random sampling of 81 traded stocks over the last five years (between 2018 and 2022). From this sampling, portfolios of stocks based on combinations are generated to construct the market's efficient frontier. These portfolios are later on evaluated by incorporating variables from fundamental analysis, such as profitability indicators, liquidity, indebtedness, and valuation. This analysis will enable an understanding of how fundamental analysis variables impact stock price movements, as well as the behaviors exhibited by portfolio returns, achieved by retrospectively evaluating the holding returns that would have been achieved at different time intervals.

In practice, this research contributes a methodology to the financial world and its stakeholders for evaluating sets of stocks when constructing portfolios. It enables planning, projecting outcomes, and assessing potential risks associated with investments in the capital market.

**Keywords:** Fundamental Analysis, Monte Carlo Simulation, Portfolio Simulation, Investment Decisions, Computational Finance.

## CONTENIDO

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	2
1.2 OBJETIVOS .....	6
1.2.1 <i>Objetivo general</i> .....	6
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i> .....	6
CAPÍTULO 2: MARCO CONCEPTUAL .....	7
2.1 SIMULACIÓN DE MONTE CARLO .....	9
2.2 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE PORTAFOLIOS .....	10
2.2.1 <i>Retorno Diario</i> .....	10
2.2.2 <i>Retorno Financiero</i> .....	11
2.2.3 <i>Retorno de Tenencia</i> .....	11
2.2.4 <i>Retorno Anualizado</i> .....	11
2.2.5 <i>Valor en Riesgo (Value at Risk -VaR-)</i> .....	12
2.2.6 <i>Matriz Varianza – Covarianza</i> .....	13
2.2.7 <i>Ratio de Sharpe</i> .....	13
2.2.8 <i>Frontera Eficiente</i> .....	14
2.3 COMBINACIÓN MATEMÁTICA .....	15
2.4 ANÁLISIS FINANCIERO .....	15
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA .....	17
3.1 PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO Y EL PROCESO DE ANÁLISIS .....	17
3.2 MUESTREO DEL S&P500 .....	18
3.2.1 <i>Muestreo de portafolios y dimensión del problema</i> .....	22
3.2.2 <i>Generación de combinaciones: Muestreo de Reserva</i> .....	23
3.3 DESCRIPCIÓN DE LA TABLA DE PRECIOS DIARIOS DE COTIZACIONES .....	24

3.3.1 <i>Preprocesamiento realizado a los precios y supuestos adoptados:</i> .....	25
3.4 DESCRIPCIÓN DE LA TABLA DE INDICADORES GENERADA .....	26
3.4.1 <i>Preprocesamiento y supuestos implementados en la tabla de indicadores</i> .....	26
3.4.2 <i>Metodología de agregación de indicadores</i> .....	27
3.5 IMPLEMENTACIÓN DE MONTE CARLO Y RESULTADOS DE SIMULACIÓN ....	28
CAPÍTULO 4: GENERACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE.....	30
4.1 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN Y RECREACIÓN DEL UNIVERSO DE INVERSIÓN .....	30
4.1.1 <i>Retornos anualizados</i> .....	32
4.1.2 <i>Riesgo anualizado</i> .....	33
4.1.3 <i>Índice de Sharpe y VaR (1,000 USD)</i> .....	34
4.1.4 <i>Indicadores de Rentabilidad y Eficiencia</i> .....	35
4.1.5 <i>Indicadores de Endeudamiento y Liquidez</i> .....	36
4.1.6 <i>Indicadores de Valoración</i> .....	36
4.1.7 <i>Indicadores de retorno de inversión</i> .....	38
4.2 EXTRACCIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE .....	39
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES.....	43
REFERENCIAS .....	46

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Distribución normal.....	10
Figura 2. Frontera eficiente .....	15
Figura 3. Compañías por Industria (S&P500).....	19
Figura 4. Comparativa: Participación por números de Compañías Muestra vs S&P500 .....	22
Figura 5. Mosaico del universo de inversiones 2018-2022 (Izq. – Der.).....	30
Figura 6. Gráfico de Violín: Distribución de los retornos de los portafolios 2018-2022 .....	32
Figura 7. Gráfico de Violín: Distribución del riesgo de los portafolios 2018-2022.....	33
Figura 8. Gráfico de Violín: Distribución de la razón de Sharpe de los portafolios 2018-2022...34	
Figura 9. Dispersión de retornos: Benchmark (Y) vs Muestra (X) con R cuadrado .....	39
Figura 10. Mosaico del universo de inversiones 2018-2022 con sus respectivas fronteras eficientes (puntos naranjas).....	40

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Compañías por Industria (S&P500) .....	19
Tabla 2. Tamaño de muestra (S&P 500) para distintos parámetros Z y e.....	21
Tabla 3. Muestras procesadas de portafolios.....	23
Tabla 4. Muestra de la tabla de precios.....	25
Tabla 5. Muestra de tabla de indicadores por compañía por año del 2018 al 2022.....	26
Tabla 6. Inventario de simulaciones: número de portafolios, simulaciones, valores .....	29
Tabla 7. Retorno anualizado medio por cada año de universo de inversión .....	32
Tabla 8. Riesgo anualizado medio por cada año de universo de inversión.....	33
Tabla 9. Razón de Sharpe y VaR (1.000 USD) medios por cada año de universo de inversión...34	
Tabla 10. Evolución de los indicadores de Rentabilidad y Eficiencia por año .....	35
Tabla 11. Evolución de los indicadores de Endeudamiento y Liquidez por año.....	36
Tabla 12. Evolución de los indicadores de Valoración por año .....	36
Tabla 13. Evolución de los indicadores de retorno de tenencia .....	38
Tabla 14. Comparativa de retornos Benchmark (S&P500) contra Muestreo.....	39

## CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

En la presente investigación se realiza un análisis del mercado de acciones, con enfoque en uno de los índices más importantes de Estados Unidos y el mundo: el Standard & Poor's 500 (S&P500). Este índice refleja los movimientos de precio de 500 compañías que transan en bolsa en Estados Unidos, por lo cual es uno de los más estudiados y seguidos, tanto por la academia como por las compañías de inversiones en el mercado de capitales.

Al tomar como referencia la información de mercado disponible para el público (precios de las acciones e indicadores financieros), se genera un proceso investigativo basado en el Muestreo Aleatorio y la Construcción de Portafolios con el fin de hacer un análisis empírico de la Frontera Eficiente.

La investigación se centra en el mercado estadounidense, dado que este presenta condiciones ideales en términos de liquidez y variedad de emisores. Además, se crea una limitación respecto al tamaño de las muestras y los portafolios, dado que, al considerar una mayor amplitud en ambas variables, incrementa considerablemente la complejidad del problema y, por tanto, el tiempo de procesamiento. Siendo esta una primera aproximación, se entienden limitaciones en la investigación respecto a la versatilidad de la simulación, precisamente por lo antes mencionado.

En un primer apartado se realiza una descripción de la metodología adoptada para aproximarse al mercado y los datos recopilados. Esta consiste en la selección aleatoria de activos para la creación de una muestra de 81 acciones, la cual actúa como el universo de activos de inversión. Como única condición excluyente del muestreo, cada acción debió transarse libremente dentro del período de análisis en cuestión (2018 - 2022), de modo que se excluyen

compañías que hayan presentado fenómenos como las Ofertas Públicas de Adquisición (OPA) o primeras emisiones realizadas durante el periodo de análisis. Para la muestra se realiza la construcción de la frontera eficiente por medio de la generación de todas las combinaciones posibles de N activos, utilizando el conjunto definido de 81 acciones. En este sentido, cada portafolio tiene sus pesos de inversión asignados utilizando el método de Simulación de Monte Carlo.

En el grueso de la investigación, se realiza la evaluación de los portafolios resultantes y se agregan las variables del análisis fundamental (indicadores de rentabilidad, liquidez y endeudamiento) con el objetivo de interpretar los resultados obtenidos, así como la racionalidad del mercado en su proceso de generación de dicha Frontera Eficiente. En este apartado se concluye el estudio analizando la Frontera Eficiente, respondiendo a preguntas tales como: ¿Qué tipo de compañías conformaron la Frontera Eficiente?, ¿Cuál fue el comportamiento de la Frontera Eficiente dentro del período de tiempo analizado?

Finalmente, para la construcción de las conclusiones y recomendaciones resultantes de la investigación, se realizan cruces de variables. Esto con el fin de identificar las relaciones existentes entre la generación de la Frontera Eficiente y los fundamentales de las compañías analizadas, además de evaluar el desempeño (riesgo-rendimiento) de los portafolios a distintas periodicidades.

## **1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En el mundo financiero actual, la incertidumbre se ha acrecentado por las crisis recientes generadas por la pandemia (COVID-19) y los escalamientos en la geopolítica (Guerra entre Rusia y Ucrania). Adicionalmente, se debe tener en cuenta que las crisis financieras, según lo expresa Minsky (1982) y como se citó en (De Antoni, 2010), hace más de veinte años, a medida

que avanzan las bonanzas financieras, estas tienden a aumentar la confianza, lo cual conduce a que los agentes financieros tomen posiciones cada vez más riesgosas en el sentido de que las obligaciones financieras superan sus ingresos corrientes. O, visto desde la perspectiva de las hojas de balance, que aumenta el endeudamiento en relación con el capital (De Antoni, 2010).

Por lo anterior, la construcción de portafolios y la optimización de inversiones se han convertido en áreas de interés cruciales para una gran variedad de actores, incluyendo gestores de portafolio, inversionistas no controladores y la comunidad académica. Estas disciplinas desempeñan un papel esencial en la toma de decisiones financieras, la gestión de riesgos y la búsqueda de rendimientos sostenibles. Por tanto, esta investigación explora en profundidad una de las disciplinas cuantitativas más atractivas para el mundo de las finanzas y el mercado de capitales: Optimización y Simulación para la construcción de portafolios.

Desde la perspectiva de los gestores de portafolio, estos enfrentan el desafío de administrar activos de manera eficiente para alcanzar los objetivos de inversión de sus clientes. Tal como lo menciona Robles (2012), la inversión en activos reales para el desarrollo efectivo de todas las operaciones de la empresa debe contar con el equipo necesario, por lo que se tiene que invertir en activos, “con una simple regla: toda inversión debe ser en activos productivos” (Robles, 2012, p.13), es decir, se deben generar fondos. Para cumplir con este propósito, hacen el proceso de construir un portafolio, el cual permite combinar una variedad de activos, como acciones, bonos, fondos mutuos y otros instrumentos financieros, en una cartera diversificada. Sin embargo, dado que el objetivo normalmente se centra en maximizar los resultados obtenidos (sean financieros o no), es común cuestionar si la estrategia adoptada representaba el punto óptimo para el inversionista. En este punto, cobra relevancia la optimización de inversiones como en una herramienta esencial para los gestores, ya que les ayuda a identificar combinaciones

ideales de activos que maximicen los rendimientos esperados al tiempo que minimizan los riesgos.

Por otro lado, para los inversionistas no controladores, la construcción de portafolios y la optimización de inversiones son fundamentales para lograr sus objetivos financieros personales. Dado que estos inversionistas a menudo tienen un menor acceso a recursos y asesoramiento profesional en comparación con instituciones financieras, es importante generar esquemas de inversiones fácilmente replicables para que puedan tomar decisiones informadas sobre cómo distribuir sus activos, los cuales normalmente están limitados entre diferentes clases y tipos. Vale la pena anotar que la construcción de portafolios bien diversificados puede ayudar a los inversionistas no controladores a mitigar el riesgo y mejorar las posibilidades de rendimientos consistentes con sus metas a largo plazo.

En el ámbito académico, bien es sabido que la investigación en estas áreas ha llevado al desarrollo de teorías y modelos que han transformado la forma en que se comprende y aborda la gestión de activos. La teoría moderna de carteras de Harry Markowitz y el modelo de precios de activos de William Sharpe han influido en gran medida en la forma en que los inversores y gestores consideran el riesgo y el rendimiento en la toma de decisiones financieras (Martínez, 2021). En la actualidad, la academia continúa explorando nuevas formas de optimización, incluyendo enfoques basados en inteligencia artificial y aprendizaje automático, para mejorar aún más la precisión y la eficiencia en la construcción de portafolios. Por ello cobra especial relevancia analizar en mayor profundidad la forma cómo se genera la frontera eficiente de distintos portafolios de inversión. El comprender cómo dichas variables fundamentales de las compañías inciden en el movimiento de los precios, tiene implicaciones de suma importancia para el campo de estudio.

En este orden de ideas, el enfoque aleatorio aplicado a la construcción de portafolios planteado en esta investigación ofrece una solución alternativa para las necesidades de estos actores. Al simular una amplia gama de posibles combinaciones de activos con sus respectivos rendimientos y riesgos esperados, se permite a los gestores de portafolio tomar decisiones informadas y basadas en datos para lograr objetivos específicos de inversión. En el caso de los inversionistas no controladores, esta metodología proporciona una herramienta para evaluar diferentes escenarios y niveles de riesgo, facilitando la toma de decisiones bien fundamentadas al construir carteras adaptadas a sus necesidades y tolerancia al riesgo. Finalmente, desde la perspectiva académica, se genera una base cuantitativa para la investigación y el desarrollo de modelos más precisos, contribuyendo así al avance continuo de la teoría financiera y la comprensión de los mecanismos subyacentes de la inversión. En última instancia, el análisis aleatorio por combinaciones actúa como una herramienta poderosa y versátil que aborda las demandas de estos actores al brindar un enfoque sistemático para la toma de decisiones financieras.

Aunque hoy se cuenta con importantes limitaciones técnicas que imposibilitan realizar experimentos como el propuesto a una mayor escala, lo antes planteado refuerza el interés creciente en la disciplina por encontrar métodos que impulsen la innovación y la colaboración entre diferentes partes interesadas en la búsqueda de estrategias de inversión exitosas. Todo lo anterior, máxime, si se considera el hecho de que los mercados financieros evolucionan y se vuelven cada vez más complejos.

## **1.2 OBJETIVOS**

### ***1.2.1 Objetivo general***

Realizar un análisis del mercado de acciones del S&P500 utilizando muestreos aleatorios y generación de portafolios para construir la frontera eficiente y comprender cómo las variables del análisis fundamental explican los movimientos en el precio de las acciones.

### ***1.2.2 Objetivos específicos***

1. Realizar un muestreo aleatorio de las compañías transadas en el S&P500 entre 2018 y 2022.
2. Generar muestras de portafolios de acciones mediante combinaciones entre dos y siete activos por portafolio, para construir la frontera eficiente del S&P500.
3. Evaluar los resultados de los portafolios al incorporar variables del análisis fundamental, tales como indicadores de valoración, rentabilidad, liquidez, y endeudamiento,
4. Comprender cómo las variables del análisis fundamental influyen en los movimientos de precios de las acciones en el mercado del S&P500.
5. Realizar un análisis retrospectivo (backtesting) de los portafolios pertenecientes al universo de posibilidades de inversión en distintas periodicidades.

## CAPÍTULO 2: MARCO CONCEPTUAL

En esta investigación se genera una base teórica y conceptual de cómo pueden interactuar el muestreo aleatorio, las combinaciones matemáticas y la Simulación de Monte Carlo (SMC), con los procesos de construcción de portafolios, con el fin de generar la frontera eficiente de un mercado (población) para un período de tiempo determinado. Adicionalmente, una vez generada la frontera, los portafolios que la componen son analizados a la luz de los principales componentes del análisis fundamental para comprender la formación de esta.

Para comprender mejor el comportamiento de un sistema físico se desarrollan modelos que simulan la situación real, con base en hechos históricos. Es necesario tener en cuenta que existen diferentes métodos de simulación, entre los cuales se destaca el Método de SMC, basado en el muestreo sistemático de variables aleatorias.

El objetivo del muestreo consiste en seleccionar un grupo representativo de una población, con el objetivo de evitar el tener que realizar un experimento, encuesta, o proceso de retroalimentación con todo el universo analizado. En el caso de la investigación, se adopta un enfoque de muestreo aleatorio sobre las acciones pertenecientes a un índice llamado S&P500. Por tanto, se consideran las 500 Compañías que hacen parte del índice como la población total o universo a muestrear, buscando generar combinaciones representativas de acciones para su análisis. La aleatoriedad garantiza que todas las acciones tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas, evitando sesgos.

En esta investigación, se realiza un muestreo aleatorio de 81 acciones del S&P500 entre los años 2018 y 2022 para capturar diferentes segmentos del mercado. Tomando como referencia la muestra seleccionada, se genera la construcción de portafolios, la cual involucra en esencia, la combinación de diferentes activos para obtener un equilibrio óptimo entre rendimiento y riesgo.

Por medio de un proceso iterativo, se explora cómo las combinaciones ponderadas de acciones en las muestras generan portafolios diversificados. Estas combinaciones matemáticas permiten trazar la frontera eficiente de todas las fronteras eficientes que se pueden crear para la población de estudio, encontrando así las combinaciones óptimas de portafolios para un determinado nivel de riesgo.

Toda vez que se cuenta con las combinaciones a evaluar, para la construcción final de las fronteras eficientes se aplica el método numérico de SMC, el cual simula múltiples escenarios aleatorios para estimar el comportamiento de variables en una población total atomizada. En esta investigación, dicha técnica se aplica al generar pesos aleatorios de inversión en los portafolios, representando así distintas asignaciones de activos, y permitiendo construir un conjunto amplio de portafolios cuya relación de riesgo y rendimiento esperado es evaluable bajo diferentes condiciones de pesos de inversión.

Finalmente, en el proceso de investigación se incluyen los componentes del análisis fundamental, tales como los indicadores de rentabilidad, liquidez, endeudamiento y valoración, los cuales influyen en la evaluación de la salud financiera y el potencial de crecimiento de una compañía. Con ello es posible explorar cómo estas variables afectan los rendimientos de las acciones y, por ende, la composición y rendimiento de los portafolios.

La integración de estas técnicas permite examinar cómo la diversidad de acciones en las muestras, las ponderaciones aleatorias y las variables del análisis fundamental impactan en la generación de la frontera eficiente. Además, el análisis de los portafolios resultantes y su relación con las variables del análisis fundamental ofrece una nueva perspectiva de cómo las compañías y su desempeño financiero contribuyen a la formación de portafolios óptimos en un mercado específico.

## 2.1 SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

Las simulaciones tienen el objetivo de duplicar características y comportamientos propios de un sistema real, es decir, imita el comportamiento de un sistema a través de la manipulación de un modelo que representa la realidad (Rodríguez, 2011). La Simulación de Monte Carlo - SMC no es ajena al anterior objetivo, y se caracteriza primordialmente porque permite simular el comportamiento de las variables que inciden en el problema a analizar, cuando se tiene incertidumbre sobre el comportamiento que éstas van a tener y su efecto sobre la variable dependiente. Esto se hace a través de una técnica de base científica que brinda mayor soporte a las proyecciones futuras (Lledó & Rivarola, 2007).

La SMC es una herramienta estadística, con base en la generación de números aleatorios, que posibilita modelar expectativas probabilísticas. Para esto usa como base el comportamiento histórico de variables y probabilidad de ocurrencia.

Se debe tener en cuenta que el objetivo del método en la SMC consiste en aproximar cualquier cantidad de los parámetros asociados con su posible distribución posterior por medio de una simulación, donde se utilizan métodos aleatorios (Metrópolis, 2021).

Este método es usado para encontrar la expectativa matemática de una o varias variables, que serían complejas de evaluar con exactitud, haciendo posible identificar estructuras dentro de las distintas variables que permitan determinar una relación causa – efecto. Para esto, se deben generar diversas muestras independientes de la variable aleatoria para luego tomar el promedio empírico de la muestra como una estimación puntual de la expectativa.

A nivel de supuestos, principalmente la SMC se basa en variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, teniendo en cuenta que la distribución empírica es

un aproximado de la distribución simulada (o viceversa). Se destaca que la precisión se incrementa toda vez que la robustez del modelo esté más cerca de escenarios reales, medido como un incremento en el tamaño de muestra (número de escenarios evaluados).

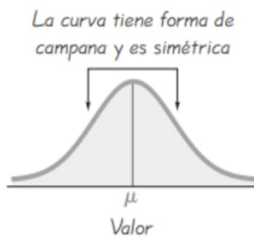
### ***2.1.1 Distribución Normal:***

De acuerdo con Triola (2009), una distribución normal es una variable aleatoria continua que genera una gráfica simétrica, en forma de campana y puede expresarse por medio de una expresión matemática (figura 1). La distribución normal estándar tiene las siguientes propiedades: i). Presenta forma de campana; ii). Posee una media igual a cero y iii). Tiene una desviación estándar igual a uno.

### **Figura 1.**

#### *Distribución normal*

*Figura 1. Distribución normal*



Fuente: (Triola, 2009), p. 246.

## **2.2 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE PORTAFOLIOS**

### ***2.2.1 Retorno Diario***

El retorno diario es la ganancia o pérdida diaria que percibe un individuo o una organización en un tiempo determinado, con relación al dinero que ha invertido en una compañía o un negocio.

Este retorno muestra el resultado de la rentabilidad financiera de la inversión, así como de su crecimiento económico y de ventas.

### ***2.2.2 Retorno Financiero***

Según Hayes (2019), durante un determinado periodo de tiempo el retorno financiero se explica como el dinero ganado o perdido en una inversión. Un rendimiento puede expresarse como el cambio en el valor de una inversión en un tiempo determinado o como un porcentaje asociado al beneficio de la inversión. Asimismo, Hayes (2019), como se citó en (Díaz Valverde, 2019), detalla una serie de conceptos claves para poder entender la definición de retorno:

- Es el cambio en el precio de una inversión, durante un periodo de tiempo; el cual puede representarse en términos porcentuales o variaciones de precio.
- Existen varios tipos de retorno, donde cada uno posee un uso específico y su principal función es ayudar para el análisis fundamental de una empresa o inversionista (p. 21).

### ***2.2.3 Retorno de Tenencia***

Es el rendimiento que tiene un activo durante el tiempo en el que es propiedad del inversionista. Si se desea comparar esta medida con otra, Hayes (2019) como se citó en (Díaz Valverde, 2019) recomienda que se deben tener los mismos intervalos de tiempo.

### ***2.2.4 Retorno Anualizado***

El retorno anualizado, también llamado retorno anual, es la media geométrica que poseen las ganancias de una inversión en un año. Esta fórmula determina la tasa de rendimiento sobre el capital invertido y no tiene en cuenta el efectivo disponible o comprometido (Huertas Camones, 2016).

Es importante tener en cuenta que este cálculo no muestra a un inversor la volatilidad de su inversión, pues el análisis de la tasa de rentabilidad de una inversión en un solo año no es el mejor indicador de su valor. Esto puede realizarse calculando la tasa de rendimiento de cada año.

Con este indicador, un inversor puede determinar la eficacia de la inversión realizada comparando su rentabilidad con inversiones similares.

### ***2.2.5 Valor en Riesgo (Value at Risk -VaR-)***

El Value at Risk (VaR) es una metodología cuyo objetivo es cuantificar cuánto puede perder un portafolio en un tiempo determinado y con un nivel de confianza dada. Su desarrollo se produjo por los resonantes desastres financieros ocurridos a comienzos de la década de los años noventa, como Orange County (Estados Unidos), Daiwa (Japón), Metallgesellschaft (Alemania), Barings (Reino Unido), entre muchos otros (Menichini, 2004). La lección aprendida de estos desastres financieros es que se pueden perder millones de dólares como consecuencia de un control interno inexistente y de administraciones que no gestionan los riesgos significativos en las compañías.

Es importante tener en cuenta que esta metodología administra los riesgos financieros de las compañías. No obstante, para comprender correctamente los resultados proporcionados por el VaR resulta importante comprender el concepto de riesgo. Steven Allen lo define como “la variabilidad de los resultados diferentes a los esperados” (como se citó en Menichini, 2004). De acuerdo con ello, se puede concluir que un activo es riesgoso cuando genera resultados diferentes a los esperados inicialmente.

En este sentido, los riesgos financieros son aquellos que provienen de potenciales pérdidas en los mercados financieros. Se trata de riesgos que se intentan mitigar con la metodología del VaR, según Menichini (2004) y que pueden subdividirse en:

- Riesgo de mercado: Surge de la volatilidad de los precios de mercado.
- Riesgo de crédito: Surge de la posibilidad de que las contrapartes no puedan o se nieguen a cumplir con sus obligaciones contractuales.
- Riesgo de liquidez: Posibilidad de no poder cumplir con las obligaciones de pago forzando una liquidación anticipada de la posición.
- Riesgo operacional: Surge de errores o accidentes técnicos o humanos.
- Riesgo legal: Surge cuando un contrato no puede cumplirse legalmente.

De acuerdo con lo anterior, Phillippe Jorion define el VaR como “la máxima pérdida esperada en un período de tiempo determinado y bajo un nivel de confianza dada en condiciones de mercado” (como se citó en Menichini, 2004, p.129).

### ***2.2.6 Matriz Varianza – Covarianza***

Esta matriz se caracteriza por tener el mismo número de filas y columnas, en las que tiene distribuidas las varianzas en la diagonal principal y las covarianzas en los elementos fuera de la diagonal principal. Se trata de una matriz se usa principalmente en la regresión lineal mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios, entre otros (Shvarzer, 1984).

En finanzas, esta matriz se utiliza para para tener una imagen general de la volatilidad de los activos financieros. Por ejemplo, las acciones.

### ***2.2.7 Ratio de Sharpe***

La ratio de Sharpe es un indicador cuyo objetivo es medir la rentabilidad que ofrece a una inversión con relación a su riesgo inherente. Su creador fue el economista estadounidense y premio Nobel de Economía William Forsyth Sharpe (Cambridge, Massachusetts, 1934). Indica que cada unidad de rentabilidad realista, es decir la media del portafolio de activos seleccionados

para el análisis, una vez deducida la rentabilidad libre de riesgo, sobre la varianza (que es un grado de dispersión frente a la media) y la medida de riesgo que utiliza este indicador, compensa o no cada unidad de riesgo de la cartera. El ratio o índice de Sharpe se lee bajo una proporcionalidad entre el resultado y la rentabilidad, es decir, cuanto mayor sea el resultado, mejor es la rentabilidad a la cantidad del riesgo que se ha tomado en la inversión.

De manera más precisa, este indicador se mide bajo la siguiente fórmula:

$$I_{Sh} = (M_c - M_f) / S_c$$

Donde:

*I<sub>Sh</sub>*: Índice de Sharpe.

*M<sub>c</sub>*: Rentabilidad media de la cartera.

*M<sub>f</sub>*: Rentabilidad Libre de riesgo.

*S<sub>c</sub>*: Desviación típica o varianza de cartera.

Fuente: (Torres Casas, Guevara Vargas, & Saenz Meneses, 2020).

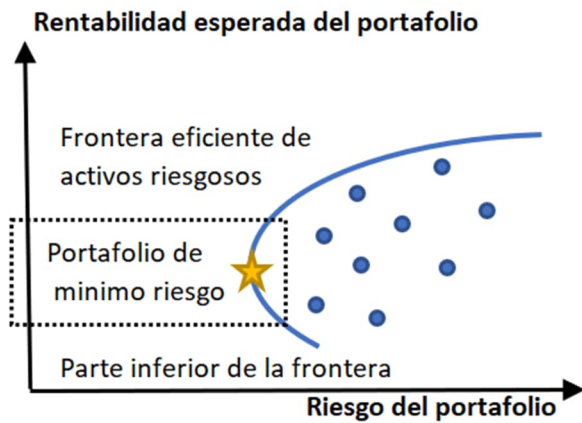
### **2.2.8 Frontera Eficiente**

La teoría de Markowitz permite determinar la frontera eficiente, definida como el conjunto de portafolios conformados por todas las combinaciones de riesgo – rendimientos posibles que puedan obtenerse entre los diversos activos que hacen parte del mismo portafolio y que ofrecen el rendimiento esperado más alto para cualquier nivel de riesgo dado.

Es importante resaltar que no existen limitaciones para la creación de nuevos portafolios, debido a que estos se ajustan a los diferentes criterios de rentabilidad y riesgo de cada inversionista.

**Figura 2.**

*Figura 2. Frontera eficiente*



Fuente: (Bodie, Kane, & Marcus, 2004). p. 140.

### **2.3 COMBINACIÓN MATEMÁTICA**

Combinación es el acto de unir, complementar o ensamblar cosas diversas para lograr un objetivo. El concepto posee múltiples aplicaciones ya que los elementos factibles de combinar son infinitos y con diversos objetivos (Ibañez Torres, 2023).

En términos matemáticos, este concepto obedece al acto de combinar variables con el objetivo de obtener y analizar resultados para posteriormente ser comparados entre sí. Desde un punto de vista de orden de elementos, la combinación se centra en la generación de valores únicos entre estos, por lo tanto, a diferencia de las permutaciones, en las combinaciones no importa el orden asignado de los elementos.

### **2.4 ANÁLISIS FINANCIERO**

El concepto de Análisis Financiero es muy amplio y mencionado por muchos autores en el transcurso del desarrollo financiero y económico. Por ejemplo, (Rubio, 2007) lo menciona como un proceso que consiste en la aplicación de un conjunto de técnicas e instrumentos analíticos a

los estados financieros, para generar una serie de medidas y relaciones que son significativas y útiles para la toma de decisiones. Vale la pena tener en cuenta que, la información registrada en los estados financieros por sí sola no resulta suficiente para realizar una planificación financiera pertinente, o analizar e interpretar los resultados obtenidos para conocer la situación financiera de la empresa.

Adicionalmente, se manifiesta que el análisis financiero es una importante herramienta para determinar la situación financiera de una compañía, de modo que se logre una gestión eficiente. De ahí que resulta necesario llevar un control correcto del uso de los activos y de los recursos financieros que están destinados para las inversiones, con el fin de convertir las inversiones, portafolios, y demás activos en dinero, sin que se genere pérdida de valor en el tiempo.

Por otro lado, es relevante realizar un análisis sobre en qué grado y de qué forma participan los acreedores dentro del financiamiento de la empresa, con el fin de poder analizar el grado de endeudamiento y así tomar decisiones correctas. Generando un control adecuado sobre las dos variables de liquidez y endeudamiento, se puede crear una mayor probabilidad de rentabilidad en las finanzas de las compañías (Nava, 2009).

## **CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA**

### **3.1 PLANTEAMIENTO DEL EXPERIMENTO Y EL PROCESO DE ANÁLISIS**

Tras la fundamentación conceptual y matemática expuesta en las secciones previas, en los siguientes apartados se realizará el diseño del experimento y los procedimientos adoptados con el fin de generar una muestra representativa del S&P 500, con la cual sea posible replicar el universo de inversiones que los actores del mercado habrían podido realizar en los períodos comprendidos entre 2018 y 2022.

En líneas generales, el mercado accionario comprende una de las fuentes de financiación e inversión más llamativas para los inversionistas, dados los retornos alcanzables por conceptos de valorización y dividendos. Sin embargo, como en todo sistema complejo, es evidente que muchos de los comportamientos observables en la cotidianidad del mismo pueden carecer de una explicación lógica o de orden racional-lineal. En consecuencia, es coherente afirmar que el proceder del mercado puede incluso obedecer a un caos inconmensurable.

Ante tales condiciones, y pese a la existencia de variables fundamentales que dictan el nivel, la tendencia, y la estacionalidad del propio mercado por distintos períodos de tiempo, no es atípico evidenciar casos en los que las apuestas que se pueden realizar en el mercado terminan teniendo resultados esperados por fuera de los parámetros considerados “normales”.

En este sentido, cobra especial relevancia el realizar un análisis profundo de aquellas variables que podrían terminar impactando los fundamentales más importantes de un instrumento de inversión, es decir, su rendimiento esperado y el nivel de exposición (riesgo) asumido. Así las cosas, desde una perspectiva de simplificación se construye sobre la idea de que dicho rendimiento esperado y riesgo, pueden encontrarse altamente influenciados, tanto por las

variaciones de la cotización de los precios de la acción, así como por el desempeño de la compañía representada, medido por distintos indicadores financieros.

De este modo, surge el planteamiento central de que los actores del mercado de capitales toman decisiones influenciados por los precios y los resultados de las compañías. Y en este contexto nace la siguiente pregunta: ¿En qué grado el relacionar de manera cuantitativa dichas fluctuaciones con los indicadores de las compañías en que se invierte puede adoptarse como un estimador insesgado del potencial de un portafolio de inversiones en acciones?

Dada la complejidad de la pregunta planteada anteriormente, se propone un experimento en el que, para los distintos años de análisis, se realice una generación artificial de los comportamientos del mercado objetivo (S&P 500). Esto con el fin de poder evaluar de manera Ex Post, qué resultados podría haber enfrentado un inversionista en caso de haber seguido distintas piezas de información (precios e indicadores financieros) en su proceso de toma de decisiones para la construcción de un portafolio.

A grandes rasgos, este experimento consiste en escoger una muestra representativa de acciones del mercado a analizar (S&P 500), para que al asociar las condiciones de riesgo y rendimiento esperado observados por los inversionistas de manera Ex Ante, junto con los indicadores financieros y los resultados de inversión a distintos años, para que sea posible extraer conclusiones de lo que podría haber sucedido con una determinada inversión en caso de haber seguido distintas “señales” predictoras para cada portafolio.

### **3.2 MUESTREO DEL S&P500**

El punto de partida es el Standard & Poor's 500 (S&P 500), un índice bursátil de referencia que refleja el rendimiento de las 500 empresas de mayor cotización en los mercados financieros de

Estados Unidos. En general, este índice comprende una amplia variedad de sectores y compañías, las cuales son incluidas luego de ser seleccionadas por un comité de expertos basándose en criterios como la capitalización bursátil, la liquidez y la representatividad del sector. Dada su diversificación sectorial y su tamaño, el S&P 500 se ha convertido en un indicador clave para inversores y profesionales financieros, brindando una visión integral del rendimiento general del mercado accionario en los Estados Unidos. Además, por su amplia historia y posición preeminente, se priorizó su análisis por encima de otros índices como el Dow Jones Industrial Average (DJIA).

Para el momento de la construcción de este experimento, el S&P 500 se encuentra compuesto por 503 compañías con representación de los siguientes sectores:

**Tabla 1.**

*Tabla 1. Compañías por Industria (S&P500)*

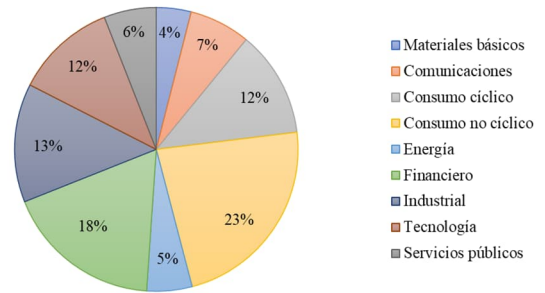
Industria	Número de compañías
Consumo no cíclico	115
Financiero	90
Industrial	68
Consumo cíclico	61
Tecnología	58
Comunicaciones	35
Servicios públicos	30
Energía	26
Materiales básicos	20
<b>Total</b>	<b>503</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de datos

de Bloomberg (2023).

**Figura 3.**

*Figura 3. Compañías por Industria (S&P500)*



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Con el fin de simplificar el proceso de generación de la frontera eficiente, se asume que las 503 compañías comprenden el universo total de alternativas de inversión disponibles para

cualquier actor del mercado de capitales durante el período de análisis. Ello implica que cualquier inversión podría realizarse utilizando únicamente alguna de estas compañías de manera individual, o en combinación con otras acciones pertenecientes al índice.

Dada la imposibilidad práctica y de eficiencia evidenciable desde un punto de vista computacional<sup>1</sup>, se opta por tomar un muestreo de la población definida (S&P 500), para obtener una muestra representativa, eliminando así la necesidad de analizar todas las acciones para la derivación de conclusiones. En este sentido, se toma una aproximación similar a la que se adopta al momento de realizar encuestas de intención de voto. Se sabe que realmente, no es necesario consultar a toda la población para obtener una posición general de la misma al respecto de un determinado tema.

Siendo así, para este experimento, la muestra de posibles acciones a escoger en la construcción de un portafolio queda reducido a 81 compañías, producto de la siguiente formulación:

$$\text{Tamaño de muestra } (n) = \frac{\frac{z^2 * p * (1 - p)}{e^2}}{1 + \left(\frac{z^2 * p * (1 - p)}{e^2 * N}\right)}$$

Donde:

N: Tamaño de la población.

e: Margen de error (porcentaje expreso con decimales).

z: Puntuación z.

---

<sup>1</sup> La eficiencia alcanzada utilizando Python para ejecutar la simulación de portafolios propuesta con todos los cálculos realizados osciló entre 2,205 y 3,804 portafolios por minuto, lo que se tradujo en aproximadamente cuatro días de ejecuciones por lotes. Esto es simulando 50,229 portafolios con 50 pesos aleatorios cada uno. Por tanto, incrementar el tamaño de muestra y el número de pesos simulados pueden incrementar significativamente el tiempo de ejecución.

p: Proporción de la población que poseen la característica de estudio (estándar: 0.5)

$$\text{Tamaño de muestra (S\&P 500)} = \frac{\frac{1.96^2 * 0.5 * (1 - 0.5)}{0.1^2}}{1 + \left(\frac{1.96^2 * 0.5 * (1 - 0.5)}{0.1^2 * 503}\right)} \cong 81$$

Fuente: (Núñez Granados, 2022). P. 19.

En la fórmula se asume un tamaño de la población (N) de 503, correspondiente al número de acciones en el índice, un valor z de 1.96, equivalente a un nivel de confianza del 95 por ciento del muestreo, y un margen de error del 10 por ciento. En este caso, la selección de un margen de error del 10 por ciento obedece a una decisión guiada por practicidad computacional, dado que modelar márgenes de error más bajos puede ser costoso al ampliar la cantidad de acciones y combinaciones posibles, significativamente.

**Tabla 2.**

*Tabla 2. Tamaño de muestra (S&P 500) para distintos parámetros Z y e*

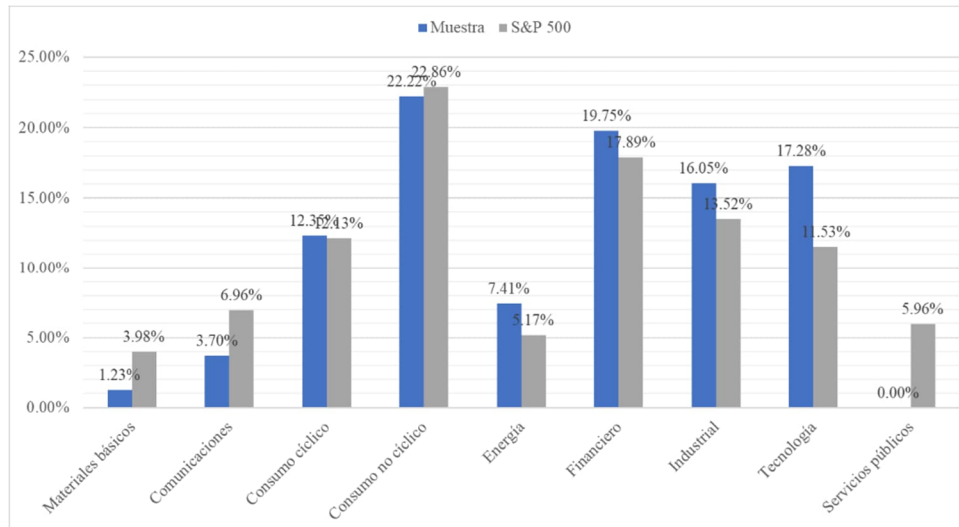
		Margen de Error										
		N=503	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
Nivel de Confianza	80%	449	338	240	170	124	93	72	57	47	38	
	85%	459	363	269	198	148	113	88	70	57	48	
	90%	469	389	303	231	177	138	110	88	73	61	
	95%	479	417	343	274	219	175	142	116	97	81	
	99%	489	449	396	340	287	242	203	172	147	126	

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Una vez obtenido el tamaño de muestra, se procede a realizar el muestreo aleatorio de las 81 compañías, dando como resultado la siguiente composición por industria:

## Figura 4

Figura 4. Comparativa: Participación por números de Compañías Muestra vs S&P500



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Como puede observarse en la figura 4, con el muestreo aleatorio no se seleccionó ninguna compañía del sector de servicios públicos. Sin embargo, se considera que esto no reviste un impacto significativo en el proyecto, ya que existe una representación muy precisa de las industrias restantes, y la exclusión hace parte del margen de error definido.

### 3.2.1 Muestreo de portafolios y dimensión del problema

Del mismo modo que existe un universo de acciones a elegir, también se tiene un universo para cada una de las combinaciones de acciones que pueden realizarse para distintos  $n$  (número de activos en el portafolio). Al emplear la fórmula de combinaciones matemáticas  $nCr$  es posible obtener el universo total de opciones posibles partiendo de la muestra de 81 compañías y variando el número de compañías por portafolio. Para el problema de representación del S&P 500, el resumen sería el siguiente:

**Tabla 3.***Tabla 3. Muestras procesadas de portafolios*

Activos por Portafolio (n)	Universo (nCr ; r=81)	Muestra (z=95%, e=1%)	Procesados
2	3,240.00	2,423.00	3,240.00
3	85,320.00	8,632.00	8,632.00
4	1,663,740.00	9,549.00	9,549.00
5	25,621,596.00	9,600.00	9,600.00
6	324,540,216.00	9,604.00	9,604.00
7	3,477,216,600.00	9,604.00	9,604.00
8	32,164,253,550.00	9,604.00	-
9	260,887,834,350.00	9,604.00	-
Total	296,881,218,612.00	68,620.00	50,229.00

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Como puede evidenciarse, el universo de combinaciones posibles integrando hasta nueve activos por portafolio, alcanza el orden de 296 mil millones de alternativas en total, presentando un salto exponencial entre los portafolios de 7 y 8 activos. Como consecuencia, no es práctico y resulta complejo modelar todas las opciones existentes, lo que hace necesario utilizar nuevamente muestreos para reducir la dimensionalidad del problema.

### ***3.2.2 Generación de combinaciones: Muestreo de Reserva***

En el proceso de generación de las combinaciones, se utilizó el lenguaje de programación Python, junto con las librerías *math*, *itertools*, *random*, y *pandas*, logrando así construir un reporte con el registro de los 50,229 portafolios indicados en la Tabla 3.

Dada la extensión de los universos de combinaciones de inversión (poblaciones), se identifica un reto de memoria<sup>2</sup> del ordenador, por el cual es necesario utilizar una técnica de

<sup>2</sup> En este caso, de memoria RAM, la cual es un componente esencial en la ejecución de programas y algoritmos, ya que almacena datos temporales y variables usadas para las operaciones en curso. Cuando un algoritmo debe evaluar miles de millones de combinaciones, especialmente en operaciones intensivas en memoria, puede exceder la capacidad de la memoria RAM disponible en la computadora causando errores por agotamiento de memoria, interrumpiendo así los cálculos.

muestreo aleatorio aplicable a conjuntos de datos de extensiones tendientes a infinito: el muestreo de reserva (*Reservoir sample*).

Para la implementación del muestreo de reserva en Python, se utiliza un generador que produce las combinaciones en tiempo real, sin almacenar en memoria todo el conjunto de combinaciones. De esta manera, permite reducir la complejidad del algoritmo en términos de memoria a  $O(1)$  -es decir constante-, ya que genera secuencialmente todas las opciones, y en memoria almacena únicamente las muestras seleccionadas de acuerdo con la probabilidad asignada, según el tamaño de muestra:

$$\text{Probabilidad de escogencia} = \frac{\text{Tamaño de muestra}}{\text{Universo (Población)}}$$

Fuente: (Sánchez Pedraza & Echeverry Raad, 2001). P. 175 – 180.

Toda vez que se cumpla la probabilidad de escogencia en la iteración correspondiente, dicho valor es asignado al conjunto de combinaciones seleccionadas.

### **3.3 DESCRIPCIÓN DE LA TABLA DE PRECIOS DIARIOS DE COTIZACIONES**

Para la construcción de los retornos esperados y el riesgo de los instrumentos financieros, se construyó una base de datos de series de tiempo utilizando Bloomberg, con índices de fecha y variables que representan cada una de las compañías incluidas en el S&P 500. El resultado fue un conjunto de datos que contiene los precios ajustados diarios de las acciones para el período comprendido entre 2018 y 2022. En total, el conjunto de datos tiene 1,259 filas y 503 columnas totalizando 633,277 valores, cuya representación se presenta en la siguiente tabla:

#### **Tabla 4.**

*Tabla 4. Muestra de la tabla de precios*

Fecha	Compañía A	...	Compañía N
1/1/2018	10.95	...	53.41
...	...	...	...
12/31/2022	21.84	...	40.09

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Las fechas del conjunto de datos están alineadas con las fechas de negociación en bolsa, las cuales en promedio comprenden 252 días por año, ya que se consideran sólo días de negocio.

#### ***3.3.1 Preprocesamiento realizado a los precios y supuestos adoptados:***

En el caso de los precios, se identificaron valores faltantes en las series de tiempo, los cuales pueden ser asociados con menos días de cotización en bolsa por distintos fenómenos como pueden ser:

1. Eventos corporativos: Fusiones, Adquisiciones, Listado, Desliste.
2. Eventos legislativos: Suspensión temporal o permanente de cotizaciones por parte de la SEC (Comisión Reguladora de Valores de EE. UU.).
3. Errores aleatorios de registro en los sistemas de información (Bloomberg).

Ante esta situación, se adoptó una interpolación lineal para completar las series de datos para aquellas compañías que contaban con valores para las fechas seleccionadas. Entre tanto, se eliminaron las series de tiempo con cotizaciones inferiores en días debido a haber sido sujeto de listado/desliste durante el período de análisis. Adicionalmente, se optó por utilizar los precios diarios ajustados para eliminar el ruido generado por distintos eventos corporativos o factores que podrían distorsionar la verdadera representación del valor de una acción, tales como los

repartos de dividendos, splits, reverse splits, IPOs, y cambios en la estructura de capital de las compañías.

### 3.4 DESCRIPCIÓN DE LA TABLA DE INDICADORES GENERADA

Con el fin de complementar la perspectiva de las cotizaciones de las compañías analizadas, se construyó también una base de datos de indicadores utilizando Bloomberg como fuente, con índices de fecha y variables que representan cada una de las métricas financieras asociables a las compañías del S&P 500. El resultado fue una tabla de 25 indicadores financieros y características de compañías, estructurada de la siguiente forma:

#### Tabla 5

*Tabla 5. Muestra de tabla de indicadores por compañía por año del 2018 al 2022*

Año	Compañía	Industria	Métrica A	...	Métrica N
2018	AVY UN	Consumo no cíclico	25.12	...	64.36
...	...	...	...	...	...
2022	LVS UN	Consumo cíclico	33.51	...	40.09

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

La tabla cuenta con 33 columnas y 2,414 filas, generando así un total de 86,904 valores de indicadores para cada una de las compañías del S&P 500 en los períodos comprendidos entre 2018 y 2022. Es importante destacar que cada métrica corresponde al valor de cierre de año de la compañía, por lo que son indicadores anualizados.

#### 3.4.1 Preprocesamiento y supuestos implementados en la tabla de indicadores

Un problema evidenciado de manera consistente al momento de extraer los datos, es que incluso en sistemas de información altamente estructurados como Bloomberg, aún es posible observar diversas problemáticas relacionadas con la calidad de la información. Por ejemplo, en varios indicadores era común encontrar valores atípicos, valores faltantes e información inconsistente.

La estimación de valores faltantes estuvo al orden del 6.22 por ciento del total de valores utilizados en el análisis (cálculos propios). Como estrategia de reemplazo para estos valores, se realizó el cálculo de la media por industria para cada uno de los indicadores y años de estudio, cuyo resultado se dio en una matriz de media dinámica con la que se podía asignar la media de un indicador diferenciada por el año en que el dato no estaba disponible. Por otro lado, en casos más graves en los que faltaban aún más indicadores, se optó por la supresión del análisis de dichas métricas. Finalmente, la gran mayoría de los indicadores implementados ya se encontraban en base 100, por lo que no fue necesario resolver diferencias de escala entre valores.

### ***3.4.2 Metodología de agregación de indicadores***

Al analizar los conjuntos de datos resultantes (precios y métricas), surge una problemática del nivel de agregación de la información: dado que se realizará un proceso de simulación para construir portafolios, la tabla de resultados final se encuentra a nivel de portafolios. Es decir, cada fila de los conjuntos de datos representa un portafolio distinto. Por tanto, para asociar los resultados del portafolio (estadísticas del portafolio) con sus métricas (variables fundamentales) se requiere una estrategia de agregación que reconozca la variedad en acciones existente en cada portafolio.

En este caso, optar por la media simple del indicador entre las compañías integradas en el portafolio puede no ser una solución adecuada, considerando que los pesos de inversión de este indican una prevalencia de ciertos activos por encima de otros. Por ejemplo, la media simple podría subestimar o sobrestimar las métricas de las compañías de un portafolio en el que una acción tenga un nivel amplio de concentración de lo invertido.

En este contexto, se optó entonces por agregar las métricas de las compañías en la forma del promedio de los indicadores de cada empresa, ponderados por los pesos de inversión del portafolio. Esto sustentado en la siguiente racionalidad:

1. Cada portafolio representa una compañía sintética, puesto que los pesos de inversión denotan participación del inversionista en distintos negocios (compañías).
2. Dado que la agregación final se genera a nivel de portafolio, el uso de los pesos hace mímica del factor que determina el propio retorno y exposición (riesgo), extrapolado a los indicadores financieros de las empresas.

### **3.5 IMPLEMENTACIÓN DE MONTE CARLO Y RESULTADOS DE SIMULACIÓN**

Como eslabón final de la metodología implementada para la generación de los portafolios, se utilizó el método de SMC para asignar 50 pesos de inversión aleatorios para cada uno de los 50,229 portafolios incluidos en el análisis por medio de muestreos.

En este caso, la decisión de no utilizar ningún método de optimización para extraer la frontera eficiente obedece al hecho de que, computacionalmente es altamente costoso, considerando la cantidad de variables y portafolios incluidos en el análisis. De haber realizado una optimización, la modelación podría haber escalado exponencialmente su tiempo de ejecución. El utilizar un método numérico como la SMC permite obtener, no sólo la frontera eficiente, sino también el conjunto muestreado de posibilidades de inversión.

Ahora bien, este experimento se replicó durante los cinco años de análisis (2018-2022), aplicando 50 pesos aleatorios a cada portafolio categorizado por el número de activos incluidos (2, 3, 4, 5, 6, 7). Se simularon en total 12,557,250 portafolios, que comprenden tablas finales con más de 615 millones de valores entre los que se encuentran retornos históricos, indicadores

financieros, y *backtesting* para distintas periodicidades. La tabla 6 resume las ejecuciones

hechas:

**Tabla 6**

*Tabla 6. Inventario de simulaciones: número de portafolios, simulaciones, valores*

Año de entrenamiento	Acciones por portafolio	Número de portafolios	Simulaciones	Filas	Columnas	Número total de valores
2018	2	3,240	50	162,000	49	7,938,000
2018	3	8,632	50	431,600	49	21,148,400
2018	4	9,549	50	477,450	49	23,395,050
2018	5	9,600	50	480,000	49	23,520,000
2018	6	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2018	7	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2019	2	3,240	50	162,000	49	7,938,000
2019	3	8,632	50	431,600	49	21,148,400
2019	4	9,549	50	477,450	49	23,395,050
2019	5	9,600	50	480,000	49	23,520,000
2019	6	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2019	7	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2020	2	3,240	50	162,000	49	7,938,000
2020	3	8,632	50	431,600	49	21,148,400
2020	4	9,549	50	477,450	49	23,395,050
2020	5	9,600	50	480,000	49	23,520,000
2020	6	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2020	7	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2021	2	3,240	50	162,000	49	7,938,000
2021	3	8,632	50	431,600	49	21,148,400
2021	4	9,549	50	477,450	49	23,395,050
2021	5	9,600	50	480,000	49	23,520,000
2021	6	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2021	7	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2022	2	3,240	50	162,000	49	7,938,000
2022	3	8,632	50	431,600	49	21,148,400
2022	4	9,549	50	477,450	49	23,395,050
2022	5	9,600	50	480,000	49	23,520,000
2022	6	9,604	50	480,200	49	23,529,800
2022	7	9,604	50	480,200	49	23,529,800
Total	2-7	251,145	50	12,557,250	49	615,305,250

Fuente: Elaboración propia a partir de las combinaciones generadas (2023).

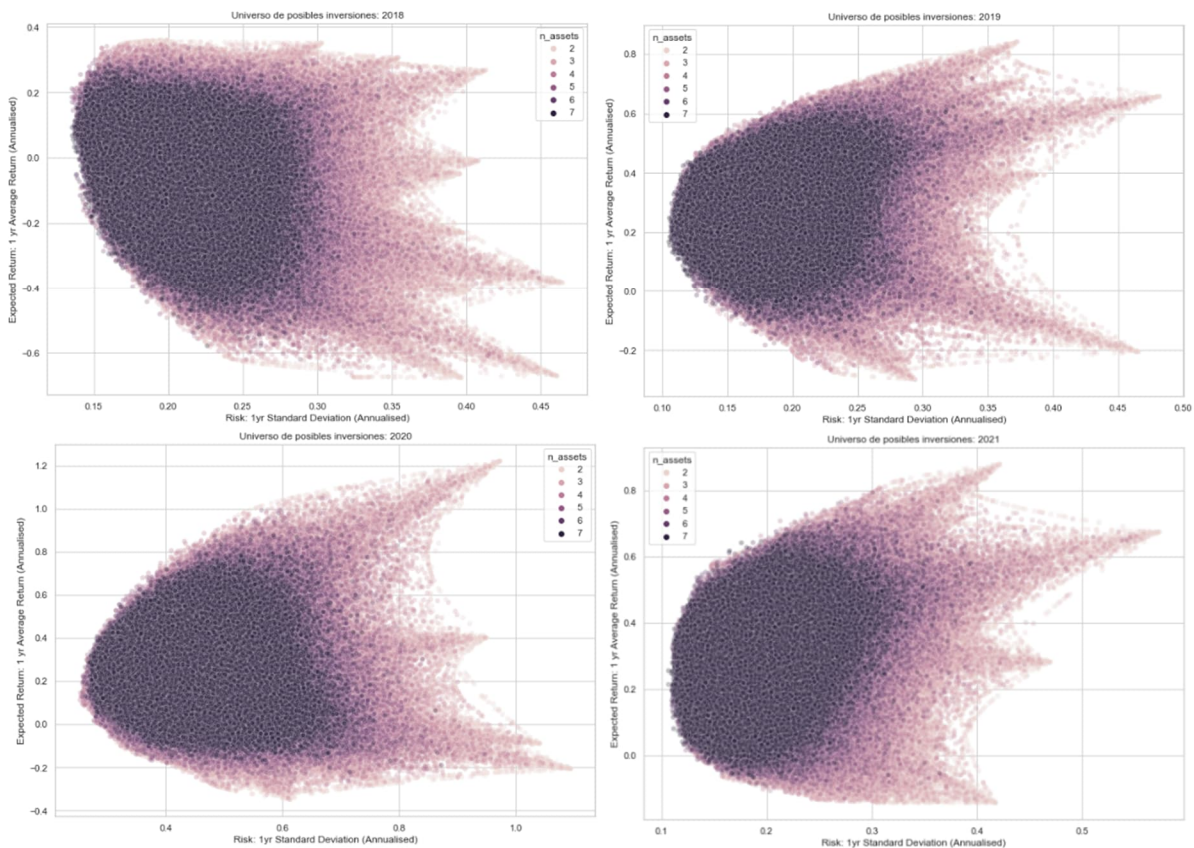
## CAPÍTULO 4: GENERACIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE

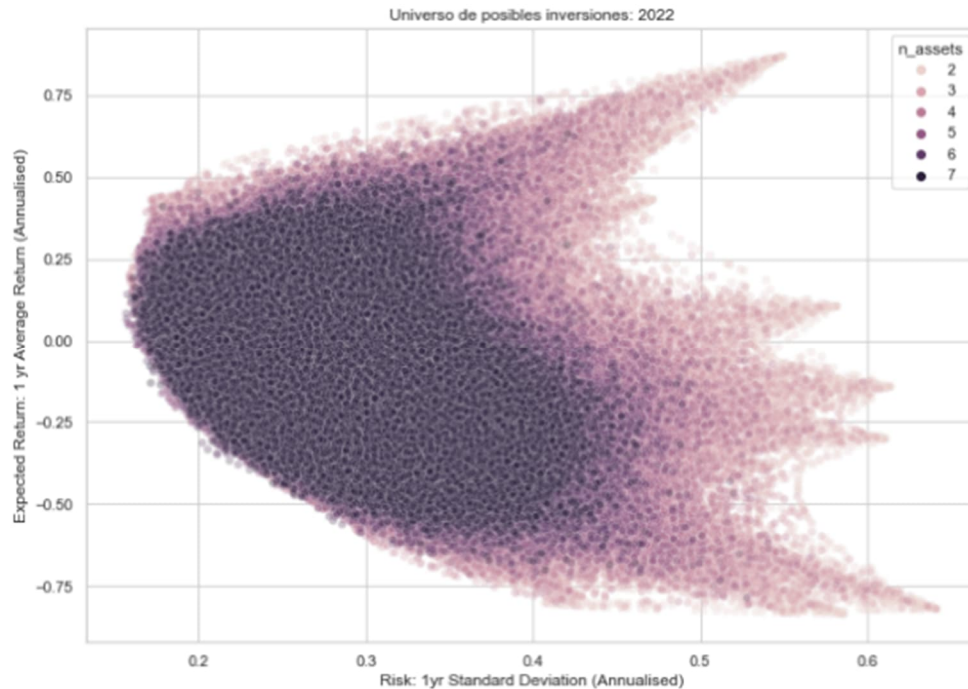
### 4.1 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN Y RECREACIÓN DEL UNIVERSO DE INVERSIÓN

Tras generar las combinaciones muestreadas y asociarlas con 50 pesos aleatorios utilizando SMC, fue posible recrear los universos de inversión observados por los actores del mercado en los períodos comprendidos entre 2018 y 2022. En el siguiente conjunto de figuras, puede apreciarse el universo de inversión de cada año, el cual es el resultado de integrar todos los portafolios modelados compuestos de dos a siete activos.

#### Figura 5

Figura 5. Mosaico del universo de inversiones 2018-2022 (Izq. – Der.)





Fuente: Elaboración propia a partir de datos de cotizaciones utilizando Python (2023).

Como puede evidenciarse en cada uno de estos diagramas de dispersión, el incrementar el número de activos en el portafolio tiene un efecto de acercamiento hacia el agrupamiento principal del universo de inversión. Este comportamiento se evidencia con mayor claridad en los portafolios de siete acciones.

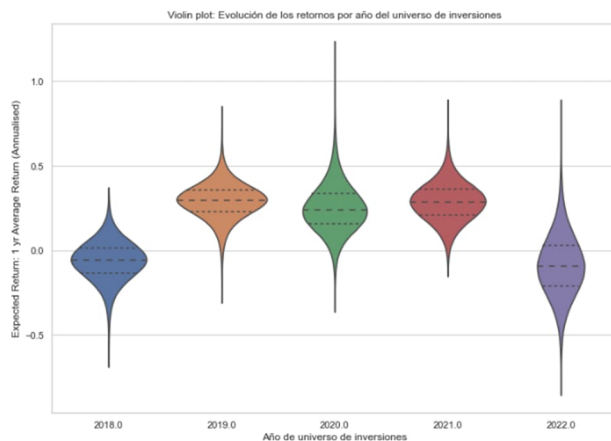
Lo anterior demuestra gráficamente uno de los principios financieros más antiguos de la humanidad. Se trata de la diversificación como mecanismo de reducción de riesgo por excelencia. Incrementar el número de activos en el portafolio reduce la varianza de este, haciendo que se reduzca significativamente el área de relación riesgo-rendimiento en la que pueda encontrarse un portafolio determinado. Visualmente, este efecto se logra capturar con el desplazamiento hacia la izquierda en el eje de riesgo, representando así una reducción en la desviación estándar de los retornos.

En detalle, en el período de análisis seleccionado, se encontraron sucesos importantes para la economía. Hubo períodos de inestabilidad política, crisis económicas y de salubridad (pandemia), y el inicio de eventos de conflicto geopolítico como la guerra entre Rusia y Ucrania. Dichos eventos tuvieron efectos trasladados al mercado de capitales, en forma de incrementos de inestabilidad y valores dispares de Riesgo-Rendimiento. Los resultados pueden evidenciarse a continuación, en los análisis de distribuciones basados en las tablas de promedios y gráficos de violín:

#### 4.1.1 Retornos anualizados

**Figura 6**

*Figura 6. Gráfico de Violín: Distribución de los retornos de los portafolios 2018-2022*



Fuente: Elaboración propia utilizando Python (2023).

**Tabla 7.**

*Tabla 7. Retorno anualizado medio por cada año de universo de inversión*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
Retorno (%)	-6.37	29.18	24.91	28.5	-9.04

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

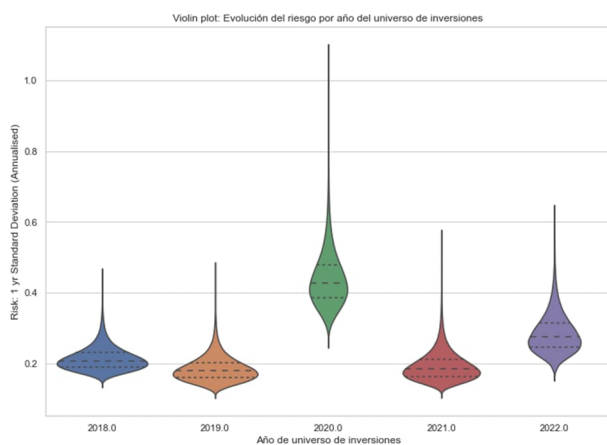
Para la ventana de tiempo analizada, los períodos de retornos más bajo se relacionan con los momentos de mayor incertidumbre a nivel político y económico: 2018 y 2022. Aunque la pandemia incrementó la volatilidad de los retornos (evidenciable en la sección siguiente y en la

figura 6), el entorno favorable de tasas de interés bajas fue determinante para la rentabilidad media de los portafolios.

#### 4.1.2 Riesgo anualizado

##### Figura 7

Figura 7. Gráfico de Violín: Distribución del riesgo de los portafolios 2018-2022



Fuente: Elaboración propia utilizando Python (2023).

##### Tabla 8.

Tabla 8. Riesgo anualizado medio por cada año de universo de inversión

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
Riesgo (%)	21.29	18.39	43.90	19.21	28.48

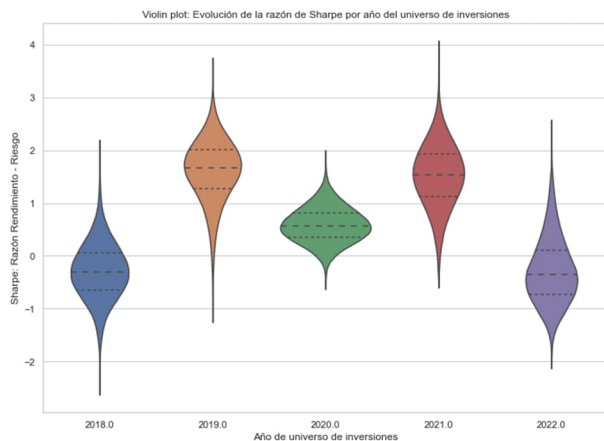
Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

La tabla 8 presenta el riesgo promedio anual de los portafolios de inversión de la muestra del S&P 500 para los años 2018 a 2022, mientras que la figura 7 agrega el contexto visual de la distribución de los valores. En términos generales, el mercado tuvo comportamientos estables en términos de volatilidad, pero la irrupción de la pandemia en 2020 se destacó con un significativo aumento en el riesgo. Este alcanzó el 43.90 por ciento y se refuerza con una distribución de una cola pesada hacia mayores niveles de riesgo, denotando incertidumbre. Si bien, se evidenció una recuperación en 2021 con un riesgo del 19.21 por ciento, nuevamente en 2022 este volvió a aumentar al 28.48 por ciento, producto de la creciente inestabilidad macroeconómica post pandemia.

### 4.1.3 Índice de Sharpe y VaR (1,000 USD)

**Figura 8**

*Figura 8. Gráfico de Violín: Distribución de la razón de Sharpe de los portafolios 2018-2022*



Fuente: Elaboración propia utilizando Python (2023).

**Tabla 9.**

*Tabla 9. Razón de Sharpe y VaR (1.000 USD) medios por cada año de universo de inversión*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
Índice de Sharpe	-0.29	1.61	0.59	1.52	-0.28
VaR (\$1,000 USD)	21.81	20.21	46.47	21.04	29.15

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

En términos de riesgo y retorno es evidenciable cómo en los años de eventos generadores de inestabilidad, los indicadores presentan un comportamiento atípico al socavar las primas de riesgos atribuibles al mercado accionario. Por ejemplo, en 2020, la máxima pérdida diaria esperable con un 95 por ciento de confianza, correspondía a 46,47 USD medida por el VaR, representando cerca de un cinco por ciento del valor total del portafolio de 1,000 USD. Cabe anotar que fue este el valor más elevado de todo el período de análisis.

#### 4.1.4 Indicadores de Rentabilidad y Eficiencia

**Tabla 10.**

*Tabla 10. Evolución de los indicadores de Rentabilidad y Eficiencia por año*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
Política de dividendos	47.83	54.76	82.54	40.89	39.40
Retorno de dividendo	2.33	2.52	2.27	1.94	2.07
Margen EBITDA	27.01	28.62	23.64	30.69	30.28
Margen bruto	46.11	46.61	45.97	48.39	48.44
Margen operacional	17.30	17.53	10.52	19.85	19.33
Margen neto	13.15	14.01	9.20	18.63	12.80
Retorno sobre los activos	7.28	7.85	5.85	9.52	8.51
Retorno sobre el capital	12.81	15.34	12.44	16.45	15.48
Retorno sobre el patrimonio común	22.25	25.81	21.03	39.22	48.94

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

En promedio, desde el punto de vista de rentabilidad y eficiencia, se reconocen claros deterioros en algunos de los márgenes de las compañías analizadas, producto de la pandemia ocurrida en 2020. El efecto es más evidente en los márgenes del Estado de Resultados (Margen bruto, operacional, neto y EBITDA), y en la productividad por activo y capital.

#### 4.1.5 Indicadores de Endeudamiento y Liquidez

**Tabla 11.**

*Tabla 11. Evolución de los indicadores de Endeudamiento y Liquidez por año*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
Razón Corriente	1.70	1.61	1.67	1.64	1.53
Deuda / Activos	30.03	31.94	34.13	32.61	34.43
Deuda / Patrimonio	147.48	145.02	242.40	232.63	390.21
Deuda / Valor de empresa	22.81%	23.17%	23.76%	22.53%	23.68%
Deuda neta / EBITDA	1.41	2.09	2.56	2.19	2.16

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

En consonancia con los indicadores anteriores, se identifica un evidente deterioro en el nivel de endeudamiento y la capacidad de pago de las compañías. La depresión en las capitalizaciones de las empresas luego de la pandemia influyó en elevados índices de endeudamiento en comparación con el patrimonio por efecto de pérdida de valor.

#### 4.1.6 Indicadores de Valoración

**Tabla 12.**

*Tabla 12. Evolución de los indicadores de Valoración por año*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021	2022
EBIT / Valor de empresa	5.40	5.10	4.58	4.91	6.49
Precio por utilidad	118.33	33.19	38.99	37.80	24.86
Valor de empresa / EBITDA	18.09	21.62	20.65	19.62	14.84
Valor de empresa / Ventas	3.98	4.61	5.28	5.59	4.11
Capitalización bursátil / EBITDA	17.22	15.41	24.33	18.48	14.08
Capitalización bursátil / Valor en libros	21.14	22.39	23.47	27.98	41.27

Capitalización bursátil / Flujo de caja	16.92	23.01	34.74	23.25	17.15
Capitalización bursátil / Ventas	3.44	3.82	4.52	4.94	3.94
Crecimiento de ingresos anual	10.16	4.48	-2.00	21.20	14.83

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Durante el período comprendido entre 2018 y 2022, los indicadores de valoración de las acciones del S&P 500 experimentaron una serie de cambios significativos como respuesta a diversos eventos económicos y geopolíticos. Inicialmente, en 2018 se observó una volatilidad notable en los mercados, marcada por tensiones comerciales entre Estados Unidos y China, así como por inquietudes sobre el aumento de las tasas de interés. Estos factores contribuyeron a una disminución en los múltiplos de valoración, reflejando la preocupación de los inversores.

Específicamente en 2021 y 2022, se evidenció un ambiente de mercado mixto, con indicadores de valoración que reflejaban la preocupación por la inflación, la normalización de las políticas monetarias y la incertidumbre geopolítica. A pesar de la variabilidad, los múltiplos de valoración se mantuvieron en niveles relativamente elevados, lo que indica la confianza de los inversores en la recuperación económica. En este contexto, el período analizado revela la influencia de eventos clave en la dinámica de los indicadores de valoración, subrayando la importancia de considerar el contexto económico y geopolítico al evaluar el rendimiento de las acciones del S&P 500 (González Rodríguez, 2023).

#### 4.1.7 Indicadores de retorno de inversión

**Tabla 13.**

*Tabla 13. Evolución de los indicadores de retorno de tenencia*

Año de universo de inversión	2018	2019	2020	2021
Retorno del portafolio: 1 día	0.27%	0.71%	-1.63%	0.33%
Retorno del portafolio: 1 semana	2.74%	0.49%	3.01%	-0.22%
Retorno del portafolio: 1 mes	9.38%	-1.94%	1.57%	-2.64%
Retorno del portafolio: 3 meses	16.47%	-29.45%	13.36%	-3.22%
Retorno del portafolio: 6 meses	20.02%	-9.72%	20.37%	-15.28%
Retorno del portafolio: 1 año	31.84%	19.13%	28.35%	-9.06%

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

Finalmente, en promedio los retornos de los portafolios contruidos para la ventana de tiempo analizada no presentan una tendencia marcada a plazos menores a un año. Esto era de esperarse, considerando que en períodos cortos de tiempo, los precios de las acciones siguen comportamientos aleatorios, cuyas muestras son independientes entre sí y su distribución sigue un aproximado de la distribución normal, es decir cercano al Ruido Blanco Gaussiano<sup>3</sup> (Navarrete Forero, 2023).

Para la periodicidad de un año, en general sí se evidenciaron crecimientos salvo en el último año, lo cual es consistente con la lectura de un ambiente macroeconómico que desincentiva la inversión en instrumentos como la renta variable.

Simultáneamente, al comparar los resultados obtenidos en distintas periodicidades para estos portafolios, se puede concluir que la muestra seleccionada sí representó de manera

<sup>3</sup> El ruido blanco gaussiano es un tipo de señal aleatoria que tiene una intensidad constante en todas las frecuencias audibles y una distribución de amplitud que sigue una distribución gaussiana (normal). En términos simples, es un sonido que contiene una mezcla equitativa de todas las frecuencias audibles y tiene amplitudes que siguen una forma de campana de Gauss. Desde un punto de vista de mercado de capitales, esto implica igualdad de probabilidad entre pérdida y ganancia a corto plazo.

adecuada al índice. Esto se evidencia porque los retornos alcanzados en promedio corresponden con los retornos generados por el índice en los años de análisis, tal como puede evidenciarse en la tabla 14 y en el coeficiente de determinación R cuadrado de la figura 9.

**Tabla 14.**

*Tabla 14. Comparativa de retornos Benchmark (S&P500) contra Muestreo*

Año	Período	Benchmark (%)	Muestreo (%)	Error (Delta)
2018	1 m	8.01	9.38	-1.37
	3 m	13.53	16.47	-2.94
	6 m	18.33	20.02	-1.69
	1 año	31.22	31.84	-0.62
2019	1 m	-0.04	-1.94	1.90
	3 m	-19.45	-29.45	10.00
	6 m	-3.21	-9.72	6.51
	1 año	18.33	19.13	-0.80
2020	1 m	-1.02	1.57	-2.59
	3 m	6.35	13.36	-7.01
	6 m	15.24	20.37	-5.13
	1 año	28.73	28.35	0.38
2021	1 m	-5.27	-2.64	-2.63
	3 m	-4.61	-3.22	-1.39
	6 m	-19.98	-15.28	-4.70
	1 año	-18.18	-9.06	-9.12

Fuente: Elaboración propia a partir de datos

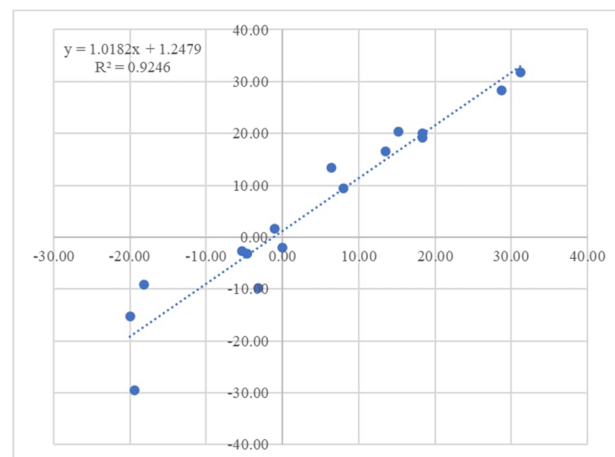
de Bloomberg (2023).

## 4.2 EXTRACCIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE

Hasta este punto, se ha realizado un análisis histórico del universo de posibilidades de inversión, gracias al cual se han logrado reconocer la forma en que los distintos factores analizados se han comportado durante el período de tiempo del análisis. Sin embargo, para completar el análisis hace falta integrar la extracción de la frontera eficiente.

**Figura 9**

*Figura 9. Dispersión de retornos: Benchmark (Y) vs Muestra (X) con R cuadrado*

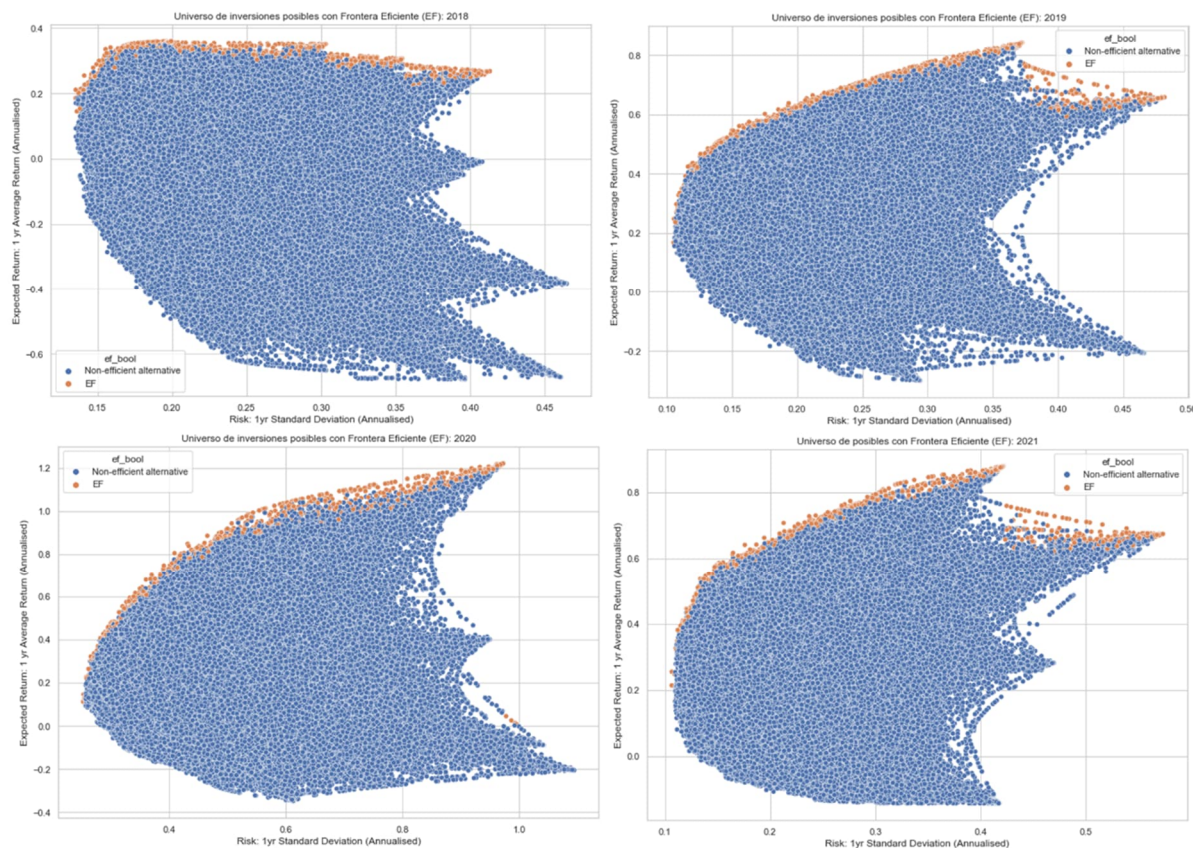


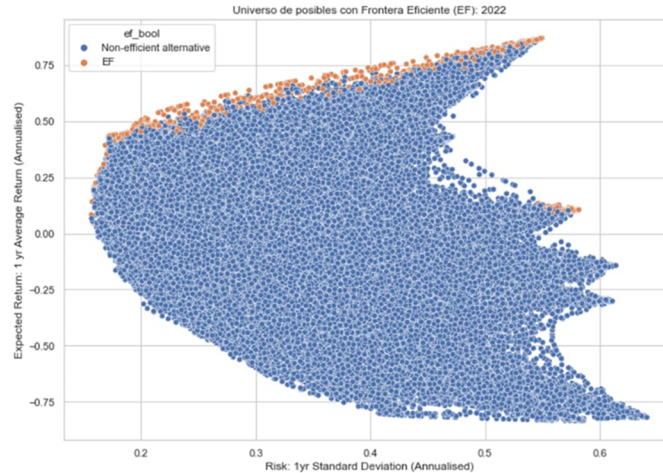
Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg (2023).

En forma gráfica, no es complejo identificar las distintas fronteras eficientes que se han obtenido en el análisis de cada año. No obstante, hacer la distinción de la misma es clave para comprender su proceso de generación. Partiendo de su definición base, se entiende que la frontera eficiente comprende al conjunto de inversiones que maximizan el retorno esperado de una inversión dado un nivel de riesgo determinado. Esto significa que dicho portafolio, al menos desde una perspectiva histórica, representa el máximo de eficiencia en retorno contra riesgo para un período de tiempo determinado. De acuerdo con esta lógica, las fronteras eficientes identificadas de los universos de inversión son las siguientes (figura 10):

### Figura 10

Figura 10. Mosaico del universo de inversiones 2018-2022 con sus respectivas fronteras eficientes (puntos naranjas)





Fuente: Elaboración propia a partir de datos de cotizaciones utilizando Python (2023).

Es interesante observar cómo la frontera eficiente no es estática en el tiempo. Por el contrario, está en constante cambio. Y, puede incluso llegar a presentar comportamientos extraños, como el observado en el año 2018, cuando la frontera eficiente no ofreció una prima de retorno por cada unidad de riesgo extra asumida, y en cambio, tuvo pendiente decreciente (castigó a los instrumentos riesgosos). En esta línea de pensamiento, incluso es válido cuestionarse por dicha contrariedad del mercado, ya que la noción básica de riesgo requiere un incremento en el retorno percibido para así hacer sentido.

Por otro lado, es interesante observar cómo el mercado estadounidense -en este caso representado por el S&P 500-, no completa a la perfección las fronteras eficientes, como es el caso de los años 2019 y 2022, en los que la continuidad de la curva se ve interrumpida por una diferencia de nivel en términos de retorno. Además, cuenta con un amplio vacío dentro del universo de posibilidades de inversión. Lo anterior, puede atribuirse naturalmente al descarte ocasionado como efecto colateral del muestreo de compañías y portafolios, o bien por la no disponibilidad de instrumentos que cubran esa sección de la curva.

Finalmente, en algunos casos llama la atención el hecho de que la pendiente de las fronteras eficientes generadas pueda representarse de manera casi lineal. Ello significa que, sin importar el tamaño de los portafolios generados (diversificación), el mercado mantiene unas primas fundamentales de variación constante para las inversiones en acciones.

## CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

El objetivo de este proyecto fue estudiar la viabilidad de la generación de la frontera eficiente, utilizando muestreos aleatorios para la construcción de portafolios de inversión. El estudio se centró en los componentes del S&P 500, utilizando datos de precios históricos entre 2018 y 2022. En la búsqueda por comprender el mercado accionario, los muestreos aleatorios terminaron proporcionando una base sólida para el análisis, abarcando un período significativo que permitió capturar diversas condiciones del mercado como la pandemia y el escalamiento de tensiones políticas y económicas. La generación subsiguiente de muestras de portafolios, combinando activos en rangos de dos a siete, delineó la frontera eficiente del *benchmark* seleccionado, permitió extraer combinaciones óptimas que maximizan el rendimiento esperado para un determinado nivel de riesgo.

Desde un punto de vista metodológico, el producir el universo de inversiones que pudo observarse en los períodos de análisis es enriquecedor para el campo de las finanzas. De esta manera se trasciende más allá del análisis específico de un solo portafolio, al incluir otros 2,5 millones de simulaciones adicionales (portafolios potenciales) por año. Ello permite tener una respuesta inmediata sobre los distintos escenarios existentes para una determinada decisión de inversión en un mercado específico. En este sentido, la simpleza conceptual del muestreo, las combinaciones, y la simulación, demostraron una vez más ser una herramienta de mucho poder para el proceso de toma de decisiones, dada la capacidad de recrear tantos escenarios como sea necesario para contar con información robusta y precisa.

Los resultados mostraron que las carteras generadas con muestreo aleatorio ofrecen un equilibrio óptimo entre riesgo y rendimiento, y que la diversificación introducida por el muestreo aleatorio contribuye a la estabilidad de las carteras en diferentes escenarios de mercado.

Asimismo, el haber integrado variables del análisis financiero como mecanismo de evaluación de los resultados de los portafolios constituye un método que permite considerar el cómo los factores de rentabilidad, liquidez, endeudamiento, y valoración, terminan impactando el proceso de generación de la frontera eficiente, y a su vez permiten mejorar la eficiencia de los portafolios y comprender mejor las dinámicas del mercado.

Sin embargo, en el proceso de investigación también se encontraron múltiples desafíos potenciales. Por ejemplo, la aplicación de muestreo aleatorio puede generar carteras sensibles a la volatilidad y a eventos extremos, o que no pueden necesariamente presentarse como una alternativa para la diversificación dada la no representatividad de los muestreos producidos por los parámetros utilizados<sup>4</sup>. Además, la calidad de los datos utilizados y la necesidad de actualizaciones frecuentes del modelo representan un reto desde el punto de vista computacional y de la practicidad del mismo, ya que los insumos requeridos para recrear el universo de inversiones y sus indicadores financieros pueden no encontrarse de manera sencilla en fuentes abiertas.

En conclusión, la generación de la frontera eficiente utilizando un enfoque de muestreo aleatorio demuestra ser una estrategia prometedora para el proceso de construcción de carteras de inversión. Además, es altamente llamativo desde el punto de vista analítico por la posibilidad de cruzar variables fundamentales y retornos. Los resultados sugieren que la introducción de la aleatoriedad en la selección de activos fue efectiva para replicar el índice objetivo, mejorar la diversificación y, por ende, la eficiencia de la cartera, sin contar que existen muchas relaciones

---

<sup>4</sup> En el caso de esta investigación, el margen de error seleccionado (10%) es un punto mejorable para incrementar aún más la precisión y variedad del análisis. Reducir el margen de error habría representado el usar aún más compañías en el análisis, intercambiando rendimiento/tiempo de ejecución por precisión.

dignas de explorar a distintas periodicidades asociadas a los indicadores financieros. Sin embargo, es necesario considerar que se necesita una evaluación continua y ajustes a la estrategia para abordar desafíos potenciales. En esta línea, las perspectivas futuras de investigación podrían incluir la exploración de enfoques más avanzados de modelado, tales como la incorporación de inteligencia artificial para generar análisis predictivos que tengan capacidad adaptativa del modelo en entornos financieros complejos.

## REFERENCIAS

- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2004). *Principios de inversiones*. McGraw-Hill.
- De Antoni, E. (2010). *Minsky, Keynes, and Financial Instability: The Recent Subprime Crisis*. International Journal of Political Economy.
- Díaz Valverde, F. (2019). *Buen Gobierno corporativo en empresas constituyentes y no constituyentes del índice IBGC en relación al retorno financiero*. Retrieved from ODUCAL: <https://repositorio.ucsp.edu.pe/backend/api/core/bitstreams/cf829d6a-3541-4aba-b5a2-064b5d36accb/content>
- González Rodríguez, E. (2023, Julio). *Banco Central Europeo y Reserva Federal Americana: análisis de la solvencia de los bancos principales*. Retrieved from Universidad de Valladolid: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/61655/TFG-E-1817.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Huertas Camones, E. (2016, Diciembre). *Bolsas de valores: rentabilidad y riesgo*. Retrieved from Dialnet: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6171235>
- Ibañez Torres, R. (2023). *Las matemáticas como herramienta de creación artística*. Los libros de la Catarata. Retrieved from <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=Dd3eEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT5&dq=que+es+Combinaci%C3%B3n+matem%C3%A1tica&ots=SiAYNdZDmH&sig=EPLTKwf4V1W4mH5QKmXaJ62Cm9Q#v=onepage&q=que%20es%20Combinaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica&f=false>
- Lledó, P., & Rivarola, G. (2007). *GESTIÓN DE PROYECTOS*. Buenos Aires: PEARSON EDUCATION S.A. Retrieved from [https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w25596w/Gestion\\_De\\_Proyectos\\_c.pdf](https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w25596w/Gestion_De_Proyectos_c.pdf)
- Martínez, R. (2021, Junio 1). Toma de decisiones en inversión de cartera de activos del Índice Dow Jones de la bolsa de valores de Nueva York, mediante la teoría de Markowitz Y Sharpe, utilizando trading 212 y Microsoft Excel. *Toma de decisiones en inversión de cartera de activos del Índice Dow Jones de la bolsa de valores de Nueva York, mediante la teoría de Markowitz Y Sharpe, utilizando trading 212 y Microsoft Excel*. Ciudad de

- Panamá, Ciudad de Panamá, Panamá: Repositorio Universidad de Panamá. Retrieved from [http://up-rid.up.ac.pa/3234/1/roberto\\_martinez.pdf](http://up-rid.up.ac.pa/3234/1/roberto_martinez.pdf)
- Menichini, A. (2004, Noviembre 13). *Value at risk: metodologia de administracion del riesgo*. Retrieved from Universidad del Centro Educativo Latinoamericano: <https://www.redalyc.org/pdf/877/87713709.pdf>
- Metrópolis, N. (2021). *Métodos de Monte Carlo*. Retrieved from RPubs: <https://rpubs.com/jcsosam/830745>
- Nava, M. (2009, Diciembre). *Análisis financiero: una herramienta clave para una gestión financiera eficiente*. Retrieved from Revista venezolana de gerencia: [https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=s1315-99842009000400009](https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=s1315-99842009000400009)
- Navarrete Forero, F. (2023). *Reducción de Ruido en Señales de Espectroscopia en Resonancia Magnética con Transformada Wavelets COINFLET Y BIORTHOGONAL*. Retrieved from Los Libertadores Fundación Universitaria: [https://repository.libertadores.edu.co/bitstream/handle/11371/6087/Navarrete\\_Fabio\\_2022.pdf.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repository.libertadores.edu.co/bitstream/handle/11371/6087/Navarrete_Fabio_2022.pdf.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Núñez Granados, A. D. (2022, Febrero). *Prevalencia de infarto agudo al miocardio en pacientes jóvenes y hallazgos angiograficos en el hospital de especialidades*. Retrieved from Universidad Autonama de Mexico: <https://ru.dgb.unam.mx/bitstream/20.500.14330/TES01000818243/3/0818243.pdf>
- Robles, C. (2012). *Fundamentos de administración financiera*. Estado de Mexico: RED TERCER MILENIO S.C. Retrieved from [http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/bitstream/123456789/3175/1/Fundamentos\\_de\\_administracion\\_financiera.pdf](http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/bitstream/123456789/3175/1/Fundamentos_de_administracion_financiera.pdf)
- Rodríguez, L. (2011). *Métodos Cuantitativos de Organización Industria*. Retrieved from uclm: [https://www.uclm.es/profesorado/licesio/Docencia/mcoi/Tema4\\_guion](https://www.uclm.es/profesorado/licesio/Docencia/mcoi/Tema4_guion)
- Rubio, P. (2007). *Manual de análisis financiero*. Retrieved from Universidad de Malaga: <https://www.eumed.net/libros-gratis/2007a/255/>

- Sánchez Pedraza, R., & Echeverry Raad, J. (2001). Aspectos sobre diseño y tamaño de muestra en estudios de pruebas diagnósticas. *Revista de la Facultad de Medicina*, 175 - 180.
- Shvarzer, O. (1984). INTERPRETACION Y UTILIDAD DE LAS MATRICES. *Instituto Geográfico Militar*, 231 - 246. Retrieved from Instituto Geografico Militar: [http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/138039/Documento\\_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/138039/Documento_completo.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Torres Casas, S., Guevara Vargas, S., & Saenz Meneses, L. (2020). *Performances del MILA, bajo el modelo de Harry Markowitz, mediante la aplicación de las ratios de Sharpe, Jensen y Treynor*. Retrieved from Universidad Piloto de Colombia: <http://repository.unipiloto.edu.co/bitstream/handle/20.500.12277/9550/Paper%20Oficial%20Trabajo%20de%20Grado%2002-11-2020.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Triola, M. (2009). *Estadística 10*. Ciudad MX: Editorial Pearson. Retrieved from <https://www.uv.mx/rmipe/files/2015/09/Estadistica.pdf>