

ESTUDIO DE LA ORIENTACION DE LAS FIBRAS DE UN MATERIAL
COMPUESTO EN UN RECIPIENTE SOMETIDO A PRESION INTERNA

RAFAEL IVAN HERNANDEZ NAVARRO

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE INGENIERIAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
MEDELLIN
2007

ESTUDIO DE LA ORIENTACION DE LAS FIBRAS DE UN MATERIAL
COMPUESTO EN UN RECIPIENTE SOMETIDO A PRESION INTERNA

RAFAEL IVAN HERNANDEZ NAVARRO

Proyecto de Investigación
Como parte de los requerimientos para la obtención del título
de Ingeniero Mecánico

Asesor
I.M. CARLOS EDUARDO LOPEZ ZAPATA

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE INGENIERIAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
MEDELLIN
2007

DEDICATORIA

A mi familia y muy especialmente a Luz Adriana.

AGRADECIMIENTOS

A todas las personas que permitieron que este proyecto saliera adelante.

Al ingeniero mecánico Carlos López, en calidad de asesor, por sus aportes y conocimientos en el tema de materiales, y su apoyo incondicional en el transcurso del proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
0. PROLOGO	13
0.1. INTRODUCCION	13
0.2. OBJETIVO GENERAL	15
0.3. OBJETIVOS ESPECIFICOS	15
1. NORMAS Y METODOS UTILIZADOS PARA LA FABRICACION DE TANQUE CON MATERIALES COMPUESTOS	16
1.1. CLASIFICACIÓN DE LOS TANQUES DE MATERIAL COMPUESTO	16
1.2. DISEÑO DE TANQUES	18
1.2.1. Temperatura de diseño	18
1.2.2. Presión de diseño	19
1.2.3. Cálculo del diseño del espesor de los laminados	19
1.2.4. Espesor	21
1.2.5. Opción de construcción:	21
1.3. MATERIALES Y MANUFACTURA	21
1.3.1. Resina	21
1.3.2. Refuerzo:	22
1.3.3. Requisitos del diseño	23
1.3.4. Limitaciones de la forma	24
1.3.5. Cascarones cilíndricos y esféricos sometidos a presiones internas	26

1.3.6. Extremos finales	26
1.4. METODOS DE FABRICACION DE LOS TANQUES CON MATERIALES COMPUESTOS	28
1.4.1. Construcción por capas múltiples	28
1.4.2. Recipientes de presión de filamento – bobinado	29
2. COMPORTAMIENTO MECANICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS	35
2.1. INTRODUCCION Y GENERALIDADES	35
2.2. COMPORTAMIENTO MACROMECHANICO DE UNA LAMINA	37
2.2.1. Relaciones de esfuerzo y deformación para materiales anisotrópicos	37
2.2.2. Rigidez, flexibilidad, y constantes en ingeniería para los materiales ortotrópicos	47
2.3. MACROMECHANICA DEL LAMINADO	49
2.3.1. Comportamiento del esfuerzo – deformación de la lámina	49
2.3.2. Variación de las deformaciones y esfuerzos en un laminado	50
2.4. FUERZAS Y MOMENTOS RESULTANTES DE LOS LAMINADOS	54
2.5. CASOS ESPECIALES DE LOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DEL LAMINADO	61
2.5.1. Configuraciones de una sola - capa	61
2.5.2. Laminados simétricos	65
2.5.3. Laminados antisimétricos	73
2.5.4. Laminados Asimétricos	78

2.5.5. Definiciones comunes de los laminados	79
3. SELECCION DEL MATERIAL Y DETERMINACION DE LA GEOMETRIA	83
3.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES TEORICAS	83
3.2. EVALUACION DE LOS MATERIALES ENCONTRADOS	85
3.3. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL SELECCIONADO. FIBRA DE VIDRIO	
TIPO E	87
3.3.1. Definición	87
3.3.2. Especificaciones técnicas (filamentos sin acabados)	87
3.3.3. Aplicaciones	88
3.3.4. Marcas comerciales	88
3.4. DEFINICION DE LA GEOMETRIA Y DIMENSIONES DEL RECIPIENTE	89
3.5. SIMULACION DEL RECIPIENTE SOMETIDO A PRESION INTERNA	91
4. ANALISIS DE EL RECIPIENTE PROPUESTO	96
4.1. ANALISIS Y RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES	
APLICADOS EN EL RECIPIENTE	96
4.1.1. Análisis y resultados de configuraciones con la misma orientación en todas las capas	96
4.1.2. Análisis y resultados de configuraciones simétricas con orientaciones de la forma $[\pm\theta/\mp\theta/\pm\theta]_S$	98
4.1.3. Análisis y resultados de configuraciones con orientaciones de la forma $[\pm\theta/\mp\theta]_3$	100

4.1.4. Análisis y resultados de configuraciones de capas cruzadas	101
4.1.5. Análisis y resultados de otras configuraciones simétricas	102
4.2. ANALISIS Y RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES APLICADAS EN LAS SECCIONES DEL RECIPIENTE	104
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	108
5.1. CONCLUSIONES	108
5.2. RECOMENDACIONES	111
BIBLIOGRAFIA	113

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Categorías mínimas de tanques y tuberías	17
Tabla 2. Factor de forma para los extremos	27
Tabla 3. Notación del tensor contra la notación contraída para los esfuerzos y las deformaciones	38
Tabla 4. Laminado simétrico con tres capas múltiples isotrópicas	67
Tabla 5. Laminado simétrico con cinco capas especialmente ortotrópico	69
Tabla 6. Laminado simétrico con cinco capas generalmente ortotrópicas	72
Tabla 7. Laminado antisimétrica con seis capas especialmente ortotrópicas	76
Tabla 8. Laminado de seis capas angulares antisimétricas	77
Tabla 9. Propiedades típicas para una lámina uniaxial (datos de fibras en una resina epóxica)	85
Tabla 10. Evaluación de las propiedades para determinar el mejor material	86
Tabla 11. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta]_6$	97
Tabla 12. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta/\mp\theta/\pm\theta]_5$	99
Tabla 13. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta/\mp\theta]_3$	100
Tabla 14. Resultados del alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para configuraciones de capas cruzadas	102
Tabla 15. Resultados del alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo en otras configuraciones simétricas	103

Tabla 16. Resultados del alargamiento máximo y de los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo con las fibras orientadas igualmente en todas las capas, en la sección cilíndrica	105
Tabla 17. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo de la combinación de configuraciones en las secciones del recipiente	106

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Cabeza semiesférica	24
Figura 2. Cabeza semielipsoidal	25
Figura 3. Cabeza toriesférica	25
Figura 4. Filamento bobinado de un recipiente cilíndrico	30
Figura 5. Geometría de un recipiente de filamento bobinado	30
Figura 6. Fuerzas en los filamentos en un recipiente fabricado por el filamento bobinado	31
Figura 7. Esfuerzo en un elemento	38
Figura 8. Deformación cortante de ingeniería contra el tensor de deformación cortante	39
Figura 9. Deformación de un cubo anisotrópico bajo σ_y	46
Figura 10. Significado físico de las relaciones anisotrópicas de esfuerzo - deformación	47
Figura 11. Diferencia entre ν_{12} y ν_{21}	48
Figura 12. Geometría de deformación en el plano $x - z$	51
Figura 13. Variación hipotética de los esfuerzos y las deformaciones a través del espesor del laminado	54
Figura 14. Fuerzas en el plano de un laminado plano	55
Figura 15. Momentos de un laminado plano	55
Figura 16. Geometría de un laminado de N - capas	56
Figura 17. Torsión de un laminado antisimétrico de dos capas bajo tensión	58
Figura 18. Significado físico de los coeficientes de rigidez en fuerzas y momentos resultantes	59
Figura 19. Formas del material	60

Figura 20. Vista de un laminado desarmado simétrico de capas isotrópicas	66
Figura 21. Vista de un laminado desarmado simétrico de tres capas cruzadas regulares	70
Figura 22. Vista de laminado simétrico desarmado de tres capas angulares regulares	72
Figura 23. Vista de laminado de dos capas cruzadas regulares	75
Figura 24. Vista de laminado de dos capas angulares antisimétricas	77
Figura 25. Laminado desarmado cuasi - isotrópico	82
Figura 26. Dimensiones del recipiente	90
Figura 27. Geometría del tipo de elemento utilizado en la evaluación SHELL99 de ANSYS®	92
Figura 28. Restricciones en el modelo	93
Figura 29. Modelo del recipiente con malla mapeada	94
Figura 30. Análisis de la convergencia del número de elementos	94
Figura 31. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ]_6$	98
Figura 32. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ/\pm 45^\circ]_5$	99
Figura 33. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ]_3$	101
Figura 34. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/0^\circ]_2$	104
Figura 35. Distribución de los esfuerzos de von Mises con las fibras orientadas a $[0^\circ]_6$ en la sección cilíndrica y $[45^\circ/-45^\circ]_3$ en la sección esférica, en el recipiente simulado	107

0. PROLOGO

0.1. INTRODUCCION

Los fluidos a través del tiempo han requerido ser almacenados para su posterior uso en recipientes que cumplan las exigencias de resistencia y rigidez, a la vez que puedan contener una mayor cantidad de fluido, en la actualidad el fabricante busca un menor costo tanto de producción del recipiente como de los materiales involucrados en su construcción.

Actualmente el uso de materiales compuestos ha tenido una mayor demanda en el mercado, por las ventajas mecánicas y por su fácil obtención en el mercado. Además cabe resaltar que en el medio local existen varias industrias dedicadas a la fabricación de esta clase de recipientes. Y que el problema básico al cual nos enfrentamos de almacenar fluidos seguirá dándose y el cliente demandara un mejor recipiente para su almacenaje.

Los materiales más comúnmente usados en el diseño de productos pueden ser categorizados en cuatro grupos: metales, polímeros, compuestos y cerámicos. Estos han sido usados en varios niveles desde el inicio de los tiempos. Su importancia relativa ha fluctuado a través de la historia. La importancia de los materiales compuestos ha experimentado un crecimiento estable desde los años 60 y se espera permanezca de este mismo modo por varias décadas (Ashby, 1987). Los plásticos reforzados son uno de los principales tipos de materiales compuesto que se procesan en Colombia, además son los de mayor volumen de producción y consumo en todo el mundo.

El estudio analítico y diseño de materiales compuestos, requiere conocimiento de elasticidad anisotrópica, teorías estructurales y criterios de falla y daño. Contrario a

los materiales isotrópicos, un material anisotrópico presenta un complejo comportamiento mecánico.

Las propiedades de los materiales compuestos y de sus componentes, son obtenidas mediante ensayos mecánicos tradicionales, aunque no siempre son los más adecuados. El propósito de estas pruebas es determinar la resistencia y las propiedades elásticas de un material. Sin embargo durante un ensayo sólo pueden ser medidas las magnitudes de carga, desplazamientos y deformaciones. La teoría de la elasticidad para cuerpos anisotrópicos es usada para establecer las propiedades deseadas a partir de los datos medidos.

Los métodos de diseño actuales permiten desarrollar geometrías más complejas y simularlas por medios computacionales disminuyendo los posteriores costos de manufactura, ya que anteriormente existía la imposibilidad de predecir el comportamiento mecánico, que implicaba numerosos ensayos destructivos sobre prototipos.

0.2. OBJETIVO GENERAL

Diseñar un recipiente cilíndrico de material compuesto en base a la orientación de las fibras.

0.3. OBJETIVOS ESPECIFICOS

Primer objetivo

Recolectar información sobre los métodos y normas utilizadas actualmente en la construcción de tanques con materiales compuestos

Segundo objetivo

Estudiar las propiedades de los materiales utilizados actualmente en la fabricación de recipientes cilíndricos con el fin de obtener los datos necesarios para el estudio.

Tercer objetivo

Estudiar las posibles alternativas de configuración de las fibras y la orientación de las láminas necesarias para cada sección del recipiente.

Cuarto objetivo

Comparar los resultados encontrados en las diferentes orientaciones de las fibras.

1. NORMAS Y METODOS UTILIZADOS PARA LA FABRICACION DE TANQUE CON MATERIALES COMPUESTOS

Las normas utilizadas en nuestro país para la fabricación de tanques de materiales compuestos no son muy utilizadas en nuestro país, ya que en el medio no existen muchas empresas que fabriquen tanques de esta clase para fluidos gaseosos, ya que la mayoría de estos son realizados en materiales metálicos, por la fácil obtención de estos como por su valor, ya que los recipientes que almacenan fluidos de materiales compuestos proporcionan otras cualidades explicadas en este capítulo.

1.1. CLASIFICACIÓN DE LOS TANQUES DE MATERIAL COMPUESTO

Los tanques se clasifican según el tipo de la siguiente manera:

Tipo I. Tanques a presión atmosférica ventilados directamente a la atmosfera, diseñados para presiones no superiores o menores que la presión atmosférica.

Tipo II. Tanques a presión atmosférica ventilados directamente a un sistema de conservación del humo, y diseñados para soportar la presión específica positiva y negativa sin exceder las 14 pulgadas (355.6 mm) de agua. (ASTM D3299, 2000)

Los tanques además están clasificados según el grado de la siguiente forma:

Grado I. Tanque manufacturados con un solo tipo genérico de tipo de resina termofixa en todas partes.

Grado II. Tanques fabricados con diversos tipos genéricos de resina termofixa en la barrera y en la porción estructural. (ASTM D3299, 2000)

La norma británica del BSI¹, clasifica o categoriza los tanques y recipientes a presión de acuerdo a la siguiente tabla

¹ BSI *British Standards Institution*, en castellano Institución Británica de Estandarización

Tabla 1. Categorías mínimas de tanques y tuberías

	Categoría I	Categoría II	Categoría III
Contenido*			
Toxico	X		
Altamente corrosivo	X		
Corrosivo			X
Inflamable	X		
Otros			X
Compatibilidad química del trazador de líneas con el líquido de proceso. Compatibilidad a largo plazo conocida basada en la experiencia del servicio. Compatibilidad basada en datos relacionados del funcionamiento. Solamente datos del espécimen disponibles.	X	X	X
Temperatura de diseño, T T<60°C y T≤(HTD ⁺ – 40°C) T≥60°C y T≤(HTD – 40°C) T>(HTD – 40°C) y T≤(HTD – 20°C)	X	X	X
Diseño de presión y/o vacío Solamente Cabeza estática < ±5 mbar (por debajo de la cabeza estática) ≥ ±5 mbar (por debajo de la cabeza estática)	X	X	X
Tamaño del recipiente o tanque (capacidad) <10 m ³ 50 m ³ ≤ capacidad < 100 m ³ >100 m ³	X	X	X
Geometría y soportes Fondo plano soportes completos Otros diferentes, por ejemplo aros, armazón, faldas		X	X
Otro criterio Si el artículo es crítico	X		
*Descripción de los contenidos de clasificación Toxico. El contenido puede presentar un riesgo significante para la salud de las personas expuestas. Altamente Corrosivo. El contenido puede causar quemaduras severas, ceguera, desfiguración o desmembramiento. Corrosivo. El contenido puede causar daño en la piel o los ojos. Inflamable. El contenido tiene un punto de ignición igual o menor que 55°C. Otros. El contenido se considera que no causa quemaduras, ceguera o daño a los miembros. ⁺ Temperatura de distorsión de la resina, del inglés (<i>Heat distortion temperature</i>) = 1mbar = 100N/m ² = 100Pa			

British Standard Institution, 1987

La norma BS 4994 : 1987 define los siguientes términos de la siguiente manera:

Gel coat: capa delgada de la resina en la superficie de un laminado, que se puede o no reforzar con una tela, un tejido fino o lona.

Laminado: hoja de resina o moldeado reforzado con una forma de fibra de vidrio o de otro material similar.

Recipiente. Contenedor cerrado sometido a presión o a vacío, con o sin cabeza hidrostática.

Tanque. Envase para el almacenaje de líquidos sujeta solamente a su propia cabeza hidrostática y ventilada libremente a la atmósfera. (BS 4994, 1987)

1.2. DISEÑO DE TANQUES

Los tanques o recipientes deben diseñarse para las combinaciones más severas de condiciones las cuales incluyen:

- a) presión interna y externa;
- b) cabeza estática de contenidos;
- c) peso del tanque o recipiente y contenido;
- d) temperatura de diseño;
- e) cargas impuestas y de viento;
- f) momentos de torsión dados por cargas excéntricas;
- g) cargas localizadas que actúan en los soportes, pulmones y otros accesorios;
- h) cargas de choque;
- i) cargas debido al calentamiento o enfriamiento y gradientes térmicos;
- j) cargas aplicadas durante el transporte o el montaje;
- k) cargas impuestas por el personal durante el montaje y la operación;
- l) fatiga

1.2.1. Temperatura de diseño

La temperatura del diseño será la temperatura máxima que es posible para que el recipiente o el tanque trabaje bajo las condiciones de funcionamiento.

1.2.2. Presión de diseño

La presión de diseño es aquella que es utilizada en los cálculos que sirven para establecer la resistencia requerida de los componentes que componen el tanque o el recipiente, los cuales no pueden ser menores que:

- a) la presión que existe en aquellas partes del recipiente o del tanque cuando los dispositivos de alivio de la presión comienzan a funcionar o la presión fija del sistema de alivio de la presión, se elige la mayor de estas dos; (BS 4994, 1987)
- b) la presión o la cabeza máxima que se puede alcanzar en el servicio, que no es limitada por los dispositivos de alivio. (BS 4994, 1987)

A pesar de esto, la resistencia de los laminados calculada será aumentada cuando sea necesario para asegurarse que al realizar los ensayos de presión hidráulica o la cabeza estática el laminado en ningún punto está deformado más allá de los valores límites, es decir. 0.26 %, o $1.3 \epsilon_d$, cualquiera sea el más pequeño, donde el ϵ_d , es la deformación mínima, determinada de las cargas y propiedades de la resina permisibles. (BS 4994, 1987)

El valor de las presiones del diseño utilizadas en el cálculo incluirá la cabeza estática del medio del contenido o de prueba, tomando en cuenta la densidad relativa.

La capacidad total de la descarga de los dispositivos de alivio de presión será tal que durante la descarga la presión dentro del recipiente o del tanque no excede la presión del diseño por más del 10%. (BS 4994, 1987)

1.2.3. Cálculo del diseño del espesor de los laminados

Para cada región del recipiente o del tanque, una construcción laminada propuesta será determinada considerando la carga de diseño para cada capa constitutiva. Estas cargas serán relacionadas con las cargas unitarias que se llevarán por la región referida. Se especifica los cálculos para las cargas de la unidad, determinados de la geometría del recipiente y el más grande de estas cargas unitarias será utilizada en ecuación (1). La conveniencia de la construcción

laminada propuesta entonces en cada caso será comprobada usando siguiente ecuación: (BS 4994, 1987)

$$u_1 \cdot m_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot m_2 \cdot n_2 + \dots + u_z \cdot m_z \cdot n_z \geq Q \quad (1)$$

Donde

m_z : masa del refuerzo por unidad de área (en kg/m² de vidrio) en una capa de tipo z

n_z : número de capas de tipo z en construcción bajo consideración (para el filamento bobinado una capa consistirá en dos hélices enrolladas en el $\pm \theta^\circ$)

Q : carga máxima aplicada (en N/mm), es decir fuerza máxima por unidad de ancho, llevado por el laminado

u_z : *carga de diseño* (en N/mm por kg/m² de vidrio) para la capa tipo z

NOTA 1. puede pasar que el valor de más de un n_z sea indeterminado. El chequeo debe entonces hacerse por el método de ensayo y error y más de una solución aceptable se puede encontrar en estas circunstancias. (BS 4994, 1987)

Alternativamente, todos sino uno (o dos interdependientes) los valores de n_z pueden ser fijos y el valor restante determinado. (BS 4994, 1987)

Si la suma de los términos son menos que Q, uno o más de los valores de n será aumentado o una diversa construcción laminada serán propuestos y los cálculos repetidos hasta que la condición requerida está satisfecha. Si la suma de los términos excede por gran margen a Q, el laminado está sobre diseñado para la región referida. (BS 4994, 1987)

NOTA 2. La consideración adicional es necesaria si el recipiente o el tanque es fabricado por el método de filamento bobinado y está sujeto a una carga biaxial. Es importante observar que la respuesta de un recipiente o un tanque de filamento bobinado a las combinaciones de la carga aplicada simultáneamente es diferente de la respuesta de esas cargas aplicadas independientemente. (BS 4994, 1987)

Para determinar el comportamiento de un recipiente o de un tanque de filamento bobinado a las cargas combinadas cualquiera; un análisis anisotrópico completo de la tensión/de la tensión será llevado hacia fuera, la respuesta del material a esas cargas combinadas examinadas, y el cortante o tensión normal presente dentro de cada uno la capa será menor que eso. (BS 4994, 1987)

1.2.4. Espesor

Donde los valores del espesor se requieren en las ecuaciones en esta sección, el espesor del laminado en la región bajo consideración será tomado como la suma de los espesores de las capas individuales que componen ese laminado.

De ningún modo el espesor del laminado sea menor de 3 milímetros para aquellos tanques donde su contenido sea líquido y 5 milímetros para los recipientes sometidos a presión interna o vacío. (BS 4994, 1987)

Los cambios precipitados en el espesor del laminado serán evitados. Las combinaciones entre regiones de diferentes espesores no será más de 1 en 6. (BS 4994, 1987)

1.2.5. Opción de construcción:

Las capas exteriores del recipiente o el tanque debe ser normalmente CSM (mínimo 300 g/m²), y un tejido con una superficie rica en resina

1.3. MATERIALES Y MANUFACTURA

1.3.1. Resina

La resina usada debe ser comercial, la termofixa resistente a la corrosión debe haber sido evaluada en un laminado cumpliendo la prueba o que ha sido determinada por anterior servicio documentado para ser aceptable las condiciones del servicio. (BS 4994, 1987)

(1)La resina no contendrá ningún pigmento, tintes, colorantes, o relleno excepto lo siguiente:

Un agente tixotrópico que no interfiere con la inspección visual de la calidad laminada, o con la resistencia a la corrosión requerida del laminado, se puede agregar para el control de la viscosidad. (BS 4994, 1987)

Nota. La adición de un agente tixotrópico puede reducir la resistencia de muchos de muchos sistemas de resina a ciertos ambientes químicos corrosivos.

Las pastas de resina usadas para llenar las grietas antes del recubrimiento no debe estar conforme a las limitaciones de (1),

Nota. La adición del pigmento, de tintes o de colorantes puede interferir con la inspección visual de la calidad laminada.

Los absorbentes ultravioletas se pueden agregar a la superficie exterior para la mejorar la resistencia al clima.

Los compuestos del antimonio u otros agentes ignífugos se pueden agregar a las resinas halogenadas para mejorar la resistencia al fuego. (BS 4994, 1987)

NOTA - porque la adición de agentes ignífugos puede interferir con la inspección visual de la lámina, no deben ser utilizados en la superficie interna o la capa interior al menos que sus ventajas funcionales compensara la pérdida de inspección visual. (BS 4994, 1987)

1.3.2. Refuerzo:

- Malla de fieltro discontinuo (CMS). Será construida de fibra de vidrio tipo E de categoría normal de filamentos de cristal enlazados junto con un aglutinante. Los filamentos se deben tratar con un apresto que sea químicamente compatible con el sistema de la resina usado. (BS 4994, 1987)

NOTA 7 - La selección de una malla de filamentos de fieltros discontinuos es depende de las características de funcionamiento requeridas del producto final y sobre las técnicas de proceso que se utilizan. (BS 4994, 1987)

- Bobinado continuo. El Bobinado continuo será un grado comercial de la fibra de vidrio Tipo - E con un arreglo que sea químicamente compatible con el sistema de la resina usado (BS 4994, 1987)
- Tela biaxial o unidireccional no tejida. Estos productos serán un grado comercial de fibra de vidrio tipo E con un arreglo que sea químicamente compatible con el sistema de la resina usado. (BS 4994, 1987)
- Malla de superficie. El refuerzo usado para la superficie interna debe ser una malla de superficie de vidrio comercial resistente químicamente o una fibra de malla orgánica superficial. En los ambientes que atacan el vidrio, el uso de una fibra de malla orgánica superficial es requerida. (BS 4994, 1987)

1.3.3. Requisitos del diseño

Laminado de filamento bobinado. la tensión máxima permitida del laminado total (que es la bobina del filamento más la superficie interna y la capa interior será limitada por el movimiento permisible (tensión) de la pared del tanque cuando está llena de líquido. (BS 4994, 1987)

La tensión máxima permitida del aro será determinada como sigue:

Donde:

S_H = tensión del aro, psi (kPa).

E_T = módulo extensible del aro del el laminado total, psi (kPa). y

Z = tensión permisible.

NOTA 8. El uso de una técnica analítica aceptada, tal como teoría laminada de la placa (LPT²) para el diseño y el análisis de recipientes compuestos puede predecir tensiones, tensiones, y fuerza en una capa por la base de la capa, dada algunas características básicas de la lámina. (BS 4994, 1987)

NOTA 9. Los tanques instalados al medio externo serán diseñados para el efecto de la carga del viento y otros factores de ambiente de acuerdo con la práctica de de diseño, incluyendo análisis de flexión del tanque. (BS 4994, 1987)

² Del inglés *laminated plate theory*

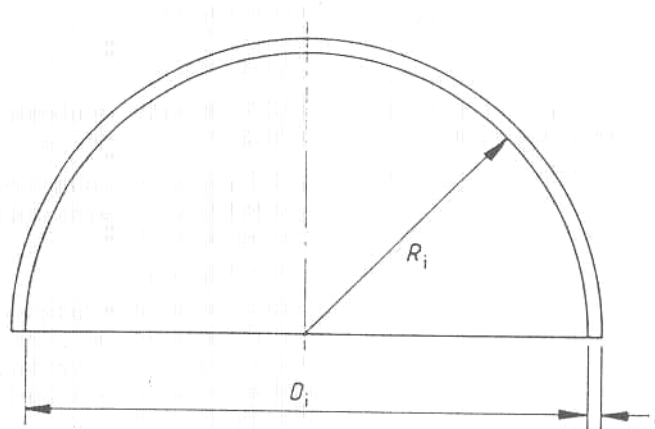
NOTA 10. Tanques con cargamentos físicos significativos con excepción de la cabeza de fluido (tal como el equipo montado, agitación violenta, índices de corriente inusualmente altos, y los fondos sin apoyo) le será dado consideraciones especiales de diseño. (BS 4994, 1987)

1.3.4. Limitaciones de la forma

Las cabezas deben tener las siguientes formas:

- (a) Semiesférica (Figura 1)

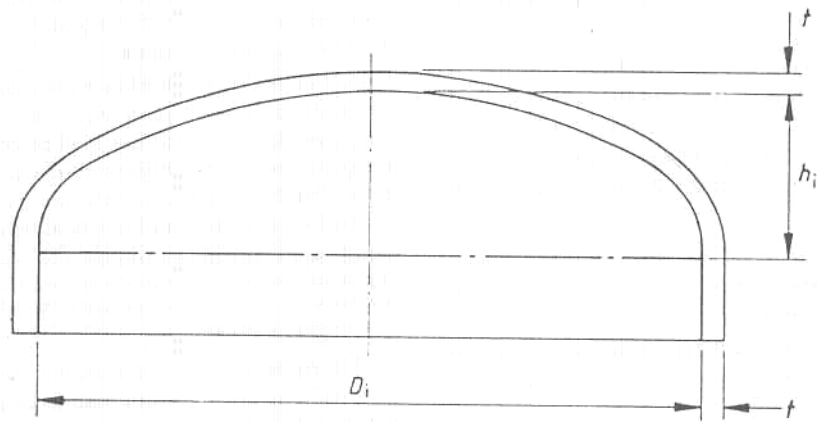
Figura 1. Cabeza semiesférica



BS 4994 : 1987

- (b) Semi – elipsoidal: la proporción de la altura interna de la cabeza, h_i , al diámetro interno, D_i no debe ser menor a 0.2. Figura 2. (BS 4994, 1987)

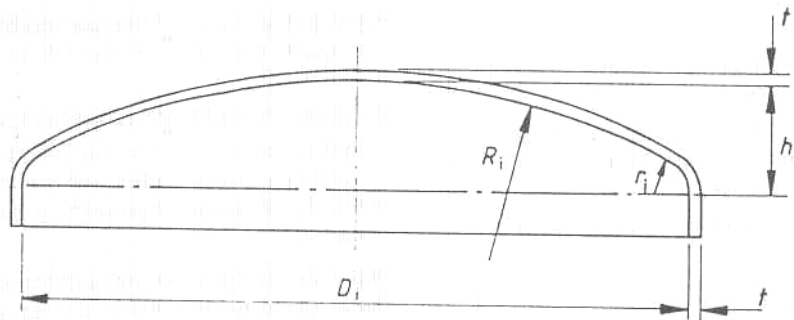
Figura 2. Cabeza semielipsoidal



BS 4994 : 1987

- (c) Toriesférica: el radio interno del disco R_i , no debe ser mayor a el diámetro interno, D_i , y el radio interno del nudillo, r_i , no debe ser menor a una decima del diámetro interno, D_i , Figura 3. (BS 4994, 1987)

Figura 3. Cabeza toriesférica



BS 4994 : 1987

- (d) Cónico
(e) Plano: soportadas totalmente o encostilladas.
(f) Cubierta plana con pernos

1.3.5. Cascarones cilíndricos y esféricos sometidos a presiones internas

La unidad de carga circunferencial máxima, Q_ϕ , debe determinarse por medio de las siguientes ecuaciones (1) (2).

Para cascarones cilíndricos:

$$Q_\phi = \frac{pD_i}{2} \quad (2)$$

Para cascarones esféricos:

$$Q_\phi = \frac{pD_i}{4} \quad (3)$$

Donde

Q = carga máxima aplicada (en N/mm), es decir fuerza máxima por unidad de longitud, llevado por el laminado.

p = presión efectiva total (en N/mm²).

D_i = Diámetro interno del cascaron (en mm).

1.3.6. Extremos finales

Los extremos finales deben incluir las formas *a*, *b*, y *c* descritas anteriormente.

En los extremos finales sometidos a presión interna: La unidad de carga que debe ser sustituida en la ecuación (4):

$$Q = 0.5pD_iK_s \quad (4)$$

Desde que el valor de K_s (factor de forma de los extremos finales) a utilizar es dependiente de el espesor del extremo, y su espesor no puede ser determinada con precisión hasta que el laminado haya sido diseñado, un valor para la relación de t/D_i debe ser asumida para seleccionar el valor apropiado de K_s .

El valor de K_s determinado debe ser sustituido en la ecuación (4) para determinar la unidad de carga Q , y este valor de Q debe ser utilizado en la ecuación (1) para determinar el laminado apropiado.

El espesor de el laminado debe ser calculado luego debe determinado según el enunciado 1.3.5., y el valor de la relación t/D_i dada para este espesor deben ser comparados. Si su diferencia es significativa, los cálculos deben ser repetidos utilizando un nuevo valor para K_s apropiado al espesor probable del laminado final. (BS 4994, 1987)

Tabla 2. Factor de forma para los extremos

h_i/D_i	t/D_i	Factor de forma K_s		
		Toriosférica		Semielipsoidal
		$0.1 \leq r_i/D_i \leq 0.15$	$r_i/D_i > 0.15$	
0.20	0.005	2.95	No es permitido desde $R_i > D_i$	2.00
	0.01	2.85		2.10
	0.02	2.65		2.20
	0.01	2.35		2.25
	0.05	2.25		2.35
0.25	0.005	2.35	1.90	1.30
	0.01	2.25	1.80	1.35
	0.02	2.10	1.75	1.45
	0.04	1.85	1.70	1.45
	0.05	1.75	1.70	1.45
0.32	0.005	1.95	$0.15 < r_i/D_i \leq 0.25$	
	0.01	1.85	1.45	0.85
	0.02	1.60	1.45	0.95
	0.04	1.40	1.40	1.00
	0.05	1.30	1.35	1.05
0.50 (hemiesférica)	Todos los valores	1.30	1.30	1.10
		0.60	0.60	0.60

BS 4994 : 1987

1.4. METODOS DE FABRICACION DE LOS TANQUES CON MATERIALES COMPUESTOS

Los metales y otros materiales usados en la construcción de recipientes a presión son esencialmente isotrópicos, exhibiendo propiedades mecánicas similares en todas las direcciones. En tales materiales es imposible determinar la resistencia del enlace molecular, el cual es aproximadamente de un 6894 MPa (1'000.000 psi), por ello no es sencillo manufacturar estos materiales con una perfecta uniformidad de estructura o libre enteramente de defectos. Alrededor de estos defectos los esfuerzos se concentran, y las grietas aparecen por el esfuerzo inducido externamente, propagado a través del material. Se cree que los diámetros extremadamente pequeños disminuyen el tamaño de los defectos de la superficie y limita las direcciones de la grieta. La resistencia teórica de los materiales ha sido aproximada en *whiskers*, los cuales son elongaciones de cristales alargados bajo condiciones controladas, para minimizar la aparición de defectos. Estos materiales de alta resistencia, junto con la selectiva orientación de sus fibras, forman la base de los compuestos. Los compuestos son materiales en donde las propiedades de uno de sus componentes realzan las propiedades de los otros. (Harvey, 1991)

Los materiales compuestos combinan una de alta resistencia de tensión (resistencia a la ruptura) y un alto modulo de elasticidad (resistencia al alargamiento antes de la ruptura) con una combinación de una comparativa bajo modulo de elasticidad. Si las fibras con una alta resistencia a la tensión y un alto modulo de elasticidad se incrustan en una adhesión de una matriz con bajo modulo de elasticidad ambas tensiones se igualan cuando se cargan, las fibras pueden soportar la mayoría de la carga suministrada. (Harvey, 1991)

1.4.1. Construcción por capas múltiples

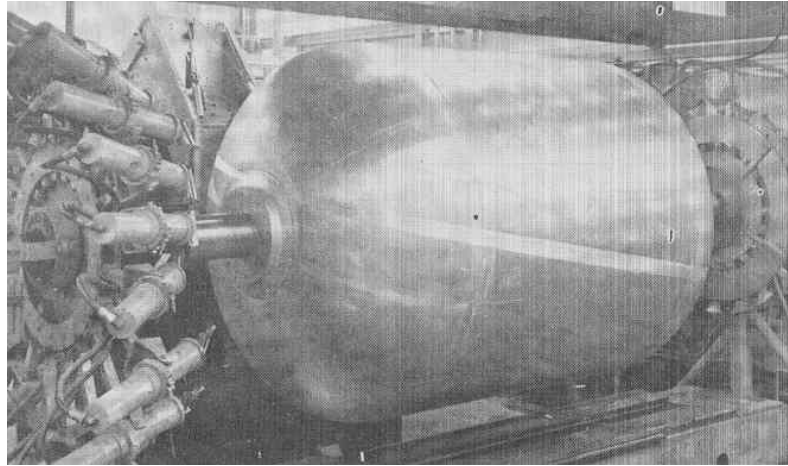
Es uno de los métodos más utilizados para la construcción de recipientes. Consiste en un cascaron (*shell*) interno formado por capas concéntricas, aproximadamente de un cuarto de pulgada de espesor, estas se envuelven y se unen para obtener el

grosor requerido. El cascaron interno contiene la membrana media; mientras que, los agujeros de respiradero se perforan con las capas restantes a la cáscara interna. Esto permite la supervisión y la detección constante de salidas de fluido mientras que el recipiente sigue siendo estructuralmente estable, y en el caso de presencia de un medio de hidrógeno caliente previene una acumulación de difusión del hidrógeno en el material externo de la capa de tal modo que evita que el hidrogeno debilite al material.

1.4.2. Recipientes de presión de filamento – bobinado

Estos son fabricados por un bobinado continuo de un filamento sobre un mandril que tiene la forma y el tamaño del recipiente que se desea fabricar. El mandril puede ser removible, o puede permanecer como parte del recipiente. La matriz del material usualmente es aplicado en simultánea con la operación de bobinado. El bobinado de recipientes puede ser realizado usando dos sistemas de bobinado independientes orientados en la dirección de los dos esfuerzos principales, o una sola bobina helicoidal con los filamentos colocados sobre el mandril en un ángulo al eje dependiendo de la consideración del diseño, tal como se puede observar en la figura 4. El diseño del recipiente a presión de filamento bobinado debe ser tal que los filamentos estén colocados solamente donde se necesitan y de manera que sean todos tensionados uniformemente. Por ejemplo, en un recipiente cilíndrico a presión donde la carga tangencial es dos veces la carga longitudinal, es necesario que el espesor del bobinado circunferencial sea dos veces mayor que el espesor longitudinal para que las tensiones en los filamentos sean uniformes. La figura 5 muestra la geometría básica de un recipiente cilíndrico típico a presión con las cabezas cerradas con aberturas incorporadas. El ángulo del bobinado α es el que cubrirá las cabezas y proporcionará la resistencia longitudinal. El ángulo β es el que proporcionará la resistencia transversal necesaria en la porción cilíndrica del recipiente. (Harvey, 1991)

Figura 4. Filamento bobinado de un recipiente cilíndrico

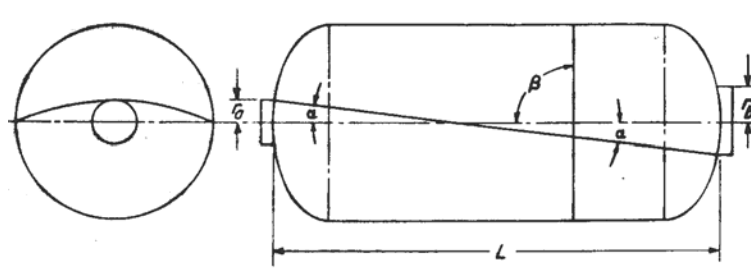


Harvey, 1991

El ángulo α puede ser determinado por la geometría de el recipiente como

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r_a + r_b}{L}\right) \quad (5)$$

Figura 5. Geometría de un recipiente de filamento bobinado



Harvey, 1991

Una vez el ángulo α es conocido, puede obtenerse el espesor de bobinado, h_α , a este ángulo comparando este con la carga longitudinal del recipiente (Harvey, 1991),

$$\frac{F_1}{\cos \alpha} = \sigma_f \cdot h_\alpha \cdot \cos \alpha \quad (6)$$

$$\frac{F_1}{\sigma_f} = h_\alpha \cdot \cos^2 \alpha \quad (7)$$

Donde,

F_1 = Carga de presión longitudinal, en libras por pulgada de circunferencia.

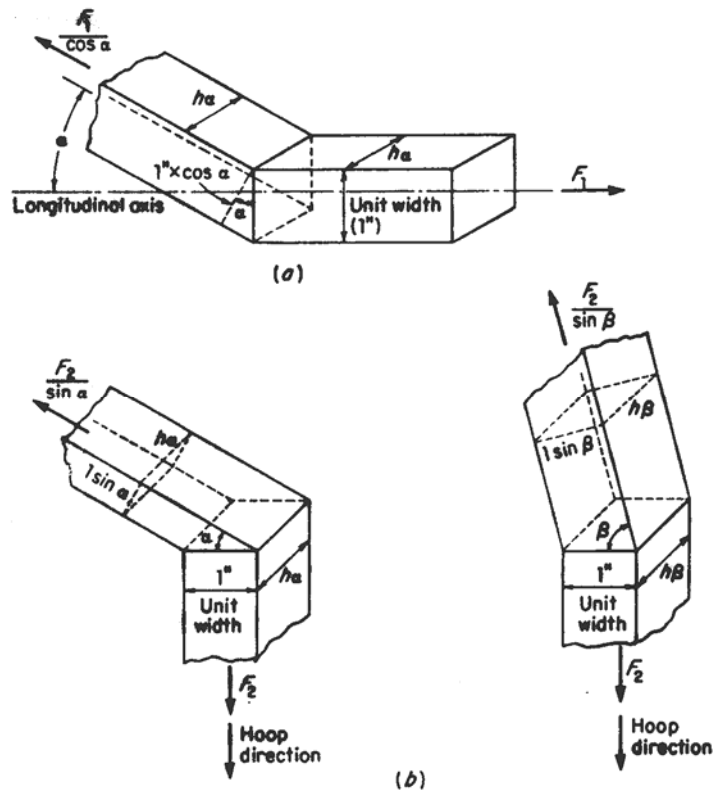
F_2 = Carga de presión de tangencial, en libras por pulgada de longitud.

h_α = Espesor total de filamentos en la dirección α .

h_β = Espesor total de filamentos en la dirección β .

σ_f = Esfuerzo permisible unidireccional para el material del filamento.

Figura 6. Fuerzas en los filamentos en un recipiente fabricado por el filamento bobinado



Harvey, 1991

El espesor de la bobina en la dirección tangencial, h_β , de la porción cilíndrica puede ser determinado comparando la carga tangencial, F_2 , a la suma del componente de la dirección tangencial de α y β de las bobinas del filamento, Figura 5b. (Harvey, 1991)

$$\frac{F_2}{\sigma_f} = h_\beta \cdot \sin^2 \beta + h_\alpha \cdot \sin^2 \alpha \quad (8)$$

Un solo sistema de la bobina del filamento con un solo ángulo α se puede utilizar también para los recipientes cilíndricos. En este caso debe soportar todas las cargas longitudinales y transversales; es decir, debe satisfacer estas ecuaciones:

$$\frac{F_1}{\sigma_f} = h_\alpha \cdot \cos^2 \alpha \quad (9)$$

$$\frac{F_2}{\sigma_f} = h_\alpha \cdot \sin^2 \alpha \quad (10)$$

Al dividir las dos ecuaciones anteriores, y se conoce que en un recipiente cilíndrico la presión interna $F_2 = 2F_1$, da:

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha &= 2 \\ \alpha &= 54^\circ 44' \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo tanto, un solo ángulo de la bobina de $54^\circ 44'$ dará lugar a un recipiente cilíndrico a presión con esfuerzos uniformes. (Harvey, 1991)

El inyector del extremo o las aberturas del acceso emplea las configuraciones apropiadas que permiten que todos los esfuerzos sean llevados a lo largo del eje de los filamentos y evitan los esfuerzos cortantes. El bobinado sobre estas configuraciones finales deben seguir una trayectoria geodésica (la distancia más

corta entre dos puntos en una superficie curva) para obtener una distribución correcta en los filamentos. Figura 5 (Harvey, 1991)

Una diferencia importante entre los FRP³ compuestos y la mayoría de los aceros ocurre en su comportamiento a la fatiga. No tienen un límite de la resistencia donde la falla no ocurre sin importar el número de los ciclos de esfuerzo aplicados. En cambio, como con la mayoría de las aleaciones de aluminio, la resistencia continúa disminuyendo con cada ciclo. Esto se debe a la naturaleza de los materiales y los efectos del medio de servicio (longitud de la fibra, la temperatura, la humedad, del etc.); por lo tanto, la necesidad de establecer la vida de la fatiga de la prueba σ -n en el ambiente del servicio total. Sin embargo, estos materiales ofrecen reducciones efectivos del peso cuando esto es un objetivo prioritario del diseño por ejemplo con los equipos de transporte. (Harvey, 1991)

En los recipientes de presión de filamento bobinado se utilizan en lugar del metal homogéneo para usos o ambientes especiales. Algunos de éstos son: (Harvey, 1991)

Ahorro del peso. Esto es sobre todo debido a los niveles extremadamente altos de la tensión y a la baja densidad que se pueden obtener con este tipo de construcción. Es la razón de su uso amplio en cohetes y dispositivos de vuelo espacial. (Harvey, 1991)

Resistencia a la corrosión. Esto es debido principalmente a la resistencia generalmente alta de la tensión del material plástico usado en la matriz. En muchos casos, las resinas usadas en estos materiales se aplican con frecuencia a las estructuras metálicas para mejorar su resistencia a la corrosión. (Harvey, 1991)

Baja Conductividad térmica. Esto es debido al valor más bajo general de esta característica para los plásticos con respecto a los recipientes metálicos homogéneos. Esto se ha encontrado ventajoso en los casos que implican propulsores de cohetes. (Harvey, 1991)

Baja sensibilidad de muesca. Las cosas tales como rasguños, las soldaduras pobres, las soldaduras mal unidas y otros tipos de defectos en recipientes

³ FRP (*Fiber-reinforced plastic*) en castellano plástico con fibra reforzada

homogéneos del metal pueden dar lugar, a faltas de la sensibilidad de la muesca. Esto evita con los recipientes de presión de filamento bobinado debido al tipo construcción, en donde la falta de un filamento no separa a los adyacentes. (Harvey, 1991)

Alta resistencia al impacto y al astillamiento. Esto es debido principalmente al principio de no probación de las grietas. La resistencia de impacto es buena y son totalmente inastillables, según lo comparado con el metal homogéneo, él cual puede astillarse después de estallar. (Harvey, 1991)

El uso y el mercado potencial los recipientes a presión de filamento bobinado cae sobre el transporte y el almacenaje del petróleo y de los productos químicos donde el peso o un ambiente resistente a la corrosión exige el uso de materiales ligeros o especiales e inusualmente costosos. La fibra de vidrio y los alambres de acero de alta resistencia explica actualmente el uso de estas aplicaciones; sin embargo, el uso de compuestos avanzados, tales como los *whiskers* de carbón para los filamentos puede dar lugar a recipientes de presión con los niveles de esfuerzo de 5860MPa con un módulo de la elasticidad de 586054.4 MPa, y a una densidad de 0.061 1688.47 Kg/m³. Esto significaría un cociente de la fuerza - densidad más alto que los valores de fibra de vidrio actualmente usados como filamento. (Harvey, 1991)

2. COMPORTAMIENTO MECANICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

2.1. INTRODUCCION Y GENERALIDADES

Algunas características son simples modificaciones del comportamiento convencional; otros son totalmente nuevos y requieren de procedimientos analíticos y experimentales. La mayoría de los materiales son homogéneos e isotrópicos. (Jones, 1999)

Un cuerpo homogéneo tiene propiedades uniformes por todas las direcciones, es decir que las propiedades son independientes de la posición del cuerpo.

Un cuerpo isotrópico tiene propiedades del material que son las mismas en cualquier dirección en un punto en el cuerpo, es decir, que las propiedades son independientes de la orientación en un punto en el cuerpo.

Los materiales compuestos son la mayoría de las veces no homogéneos (o heterogéneos) y no isotrópicos (ortotrópicos o, generalmente anisotrópicos).

Un cuerpo no homogéneo tiene propiedades que no son uniformes sobre el cuerpo, es decir las características dependen de la posición en el cuerpo.

Un cuerpo ortotrópico tiene propiedades del material que son diferentes en las 3 direcciones mutuamente perpendiculares en un punto determinado del cuerpo y, más allá tiene 3 planos mutuamente perpendiculares de propiedades del material simétricas. Así, las características dependen de la orientación en un punto en el cuerpo. (Jones, 1999)

Para los materiales isotrópicos, la aplicación de la misma fuerza causa extensión en la dirección de la tensión y contracción en la dirección perpendicular, pero no hay deformación por cortante. Solo se necesitan dos propiedades de los materiales, el modulo de Young y el coeficiente de Poisson para calcular las deformaciones. El modulo de cortante puede ser utilizado como alternativa de alguno de los dos.

En los materiales ortotrópicos, al igual que los isotrópicos al aplicar una tensión normal en la dirección principal del material (a lo largo de una de las intersecciones de los tres planos ortogonales de simetría del material) resulta en extensión en la dirección de la tensión y contracción perpendicular a la tensión. La magnitud de la extensión en una de las direcciones del material bajo la tensión normal es de diferente magnitud en otra dirección principal del material bajo la misma tensión normal en esa otra dirección. (Jones, 1999)

Así existen diferentes coeficientes de Young en las otras direcciones principales del material. Además, porque hay dos propiedades diferentes del material en las dos direcciones principales del material, la contracción puede ser a la vez mayor o menor que la contracción de una carga similar en un material isotrópico con el mismo módulo de elasticidad en la dirección de la carga. La aplicación de una carga cortante causa una deformación cortante, pero la magnitud de la deformación es totalmente independiente de los módulos de Poisson y Young. El módulo de cortante en los materiales ortotrópicos a diferencia de los materiales isotrópicos, no depende de otras propiedades del material. Así, son necesarias al menos cinco propiedades de materiales para describir el comportamiento mecánico de los materiales ortotrópicos. (Jones, 1999)

Para los materiales anisotrópicos, la aplicación de una tensión normal conduce no solo a la extensión y contracción perpendicular a este, pero a la deformación por cortante. La aplicación de una carga cortante causa una extensión y contracción además de una deformación cortante. Este acompañamiento entre ambas cargas y ambos modelos de deformación (el acople de cortante – extensión), es característica de los materiales ortotrópicos sujetos a cargas normales en una dirección no principal del material. (Jones, 1999)

2.2. COMPORTAMIENTO MACROMECHANICO DE UNA LAMINA

2.2.1. Relaciones de esfuerzo y deformación para materiales anisotrópicos

La ley del Hooke generalizada, relaciona esfuerzos y deformaciones y puede ser escrita de la siguiente manera

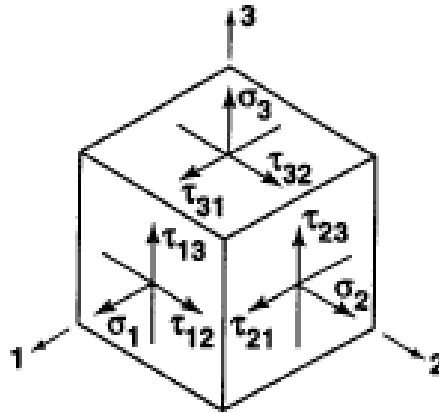
$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (12)$$

donde σ_i son los componentes del esfuerzo mostrados en un cubo tridimensional en coordenadas x , y , y z en la figura 7, C_{ij} es la matriz de rigidez, y ε_j son los componentes de la deformación. La notación contraída para los esfuerzos y las deformaciones está definida en comparación con la notación usual del tensor descrita en la tabla 3 para las situaciones en las cuales los tensores del esfuerzo y la deformación son simétricas (el caso generalmente cuando las fuerzas del cuerpo están ausentes). Observe que, en virtud de la tabla 3, las deformaciones están definidas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (13)$$

donde u , v , y w son los desplazamientos en las direcciones x , y , y z (o las direcciones 1, 2, y 3).

Figura 7. Esfuerzo en un elemento



Jones, 1999

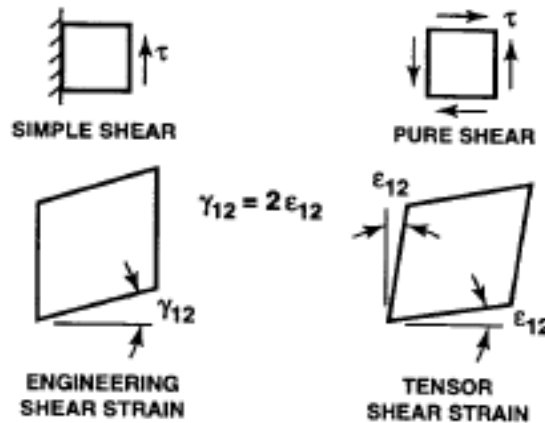
Tabla 3. Notación del tensor contra la notación contraída para los esfuerzos y las deformaciones

Esfuerzos		Deformaciones	
Notación Tensor	Notación Contraída	Notación Tensor	Notación Contraída
σ_{11}	σ_1	ϵ_{11}	ϵ_1
σ_{22}	σ_2	ϵ_{22}	ϵ_2
σ_{33}	σ_3	ϵ_{33}	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{32}$	σ_4	$\gamma_{23} = \sigma_{32}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = \sigma_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = \sigma_{12}$	ϵ_6

(Jones, 1999)

Observe que la deformación cortante, γ_{ij} en la tabla 3 es el ángulo total de cortante, bajo estado de cortante simple en la Figura 8. También, el tensor de deformación cortante, ϵ_{ij} es la mitad del ángulo del cortante, bajo un esfuerzo cortante puro en la Figura 8. La deformación por cortante de ingeniería implica una rotación de un elemento originalmente cuadrado, mientras que el tensor de deformación cortante no tiene ningún acompañamiento de rotación.

Figura 8. Deformación cortante de ingeniería contra el tensor de deformación cortante



(Jones, 1999)

La matriz de rigidez, C_{ij} tiene 36 constantes en la ecuación (12). Se puede demostrar que al menos 36 de las constantes son independientes para los materiales elásticos cuando se considera la energía de deformación. Los materiales elásticos para los cuales existe una función de potencial elástico o una densidad de energía de deformación tienen un trabajo que se incrementa por unidad de volumen de (Jones, 1999)

$$dW = \sigma_i d\epsilon_i \quad (14)$$

cuando los esfuerzos σ_i actúan a través de las deformaciones $d\epsilon_i$. Sin embargo, debido a las relaciones de esfuerzo - deformación, ecuación (12), al incrementar el trabajo se convierte en

$$dW = C_{ij} \epsilon_j d\epsilon_i \quad (15)$$

Al integrar todas las deformaciones, el trabajo por unidad de volumen es

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (16)$$

Sin embargo, la ley de Hooke, ecuación (12), puede ser derivada de Ecuación

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \quad (17)$$

Con lo cual

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \quad (18)$$

Igualmente,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad (19)$$

Ya que la diferenciación de W es inmaterial, entonces

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (20)$$

la matriz de rigidez es simétrica, así solo 21 de las constantes son independientes.

De una igual manera, podemos demostrar que

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (21)$$

donde S_{ij} es la matriz de flexibilidad definida como la inversa de la relación esfuerzo - deformación, nombrando las relaciones de esfuerzo – deformación, como:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (22)$$

Un razonamiento similar del párrafo anterior conduce a:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (23)$$

Las ecuaciones anteriores nos quieren decir que la matriz de flexibilidad es simétrica y por lo tanto solamente 21 de las constantes son independientes.

Con la reducción de 36 a 21 constantes independientes, las relaciones del esfuerzo-deformación son (Jones, 1999)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

La ecuación anterior es la expresión más general en el marco de la elasticidad lineal. Realmente, las relaciones en la ecuación (24) se refieren a la caracterización de los materiales anisotrópicos porque no hay planos de la simetría para las propiedades del material. Un nombre alternativo para un material tan anisotrópico es un material triclinico (los tres ejes del material son todas oblicuas una de la otra). (Jones, 1999)

Si hay algún plano de simetría de las propiedades del material, las relaciones de esfuerzo - deformación se reducen a

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Donde el plano de simetría es $z=0$ (o el plano 1-2). A tal material se le llama monoclinico y tiene 13 constantes elásticas independientes. (Jones, 1999)

Si hay dos planos ortogonales simétricos las propiedades del material, la simetría existirá relativamente a un tercer plano mutuamente ortogonal. Las relaciones de esfuerzo - deformación en las coordenadas alineadas con las direcciones principales del material son (Jones, 1999)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

La ecuación define un material ortotrópico. Se puede observar que no hay una interacción entre los esfuerzos normales y las deformaciones por cortante tal cosa sucede en los materiales anisotrópicos (por ejemplo, por la presencia de C_{14}). Similarmente, no hay una interacción entre los esfuerzos cortantes y las deformaciones normales, a la vez que no hay esfuerzos cortantes y deformaciones cortantes en los diferentes planos. Se ve también que solo hay nueve constantes independiente en la matriz de rigidez. (Jones, 1999)

Si en cualquier punto de un material hay un plano en el cual las propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones, entonces el material se llama transversalmente isotrópico. Por ejemplo, así el plano 1-2 es el plano de isotropía, entonces los subíndices 1 y 2 en los coeficientes de rigidez son intercambiables. Las relaciones de esfuerzo - deformación tienen solo cinco constantes independientes: (Jones, 1999)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Si hay un número infinito de planos de simetría de las propiedades del material, entonces las relaciones anteriores simplifican la relación del material isotrópico con solo dos constantes independientes en la matriz de rigidez: (Jones, 1999)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Las relaciones de esfuerzo - deformación para los cinco casos de simetría de las propiedades se muestran en las siguientes ecuaciones: (Jones, 1999)

Anisotrópico (21 constantes independientes)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Monoclínico (13 constantes independiente) (para una simetría respecto a z=0)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Ortotrópico (9 constantes independientes)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Transversalmente isotrópico (5 constantes independientes)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Isotrópico (2 constantes independientes)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Uno de los objetivos principales de estudiar las relaciones de esfuerzo – deformación es poder concluir que la respuesta de la deformación ocurre por una aplicación de esfuerzos específicos. Las relaciones de esfuerzo deformación pueden ser escritas como (Jones, 1999)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\tau_{23} + S_{15}\tau_{31} + S_{16}\tau_{12} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\gamma_{12} &= S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{36}\sigma_3 + S_{46}\tau_{23} + S_{56}\tau_{31} + S_{66}\tau_{12}
\end{aligned} \quad (34)$$

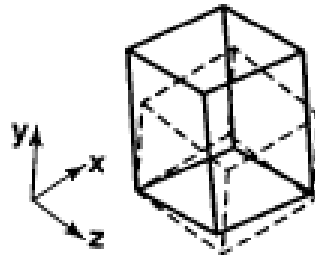
Por consiguiente, para un esfuerzo uniaxial aplicado, $\sigma_1 \neq \sigma$ (todos los otros esfuerzos son cero):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{11}\sigma & \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma & \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma \\
\gamma_{23} &= S_{14}\sigma & \gamma_{31} &= S_{15}\sigma & \gamma_{12} &= S_{16}\sigma
\end{aligned} \quad (35)$$

La interpretación física de estas deformaciones en un cubo con todas sus caras iguales puede sufrir muchas deformaciones. Específicamente, cada cara se deforma en una forma diferente de las otras caras (ya que $S_{11} \neq S_{12} \neq S_{13}$), y cada cara de el cubo esta sometido a deformaciones por cortante diferentes (porque $S_{14} \neq S_{15} \neq S_{16}$), como se describe en la figura 9, donde las líneas discontinuas representan el cubo sin deformar y las líneas continuas representan el cubo deformado. Diferentemente, un material isotrópico tendría el mismo cambio de longitud en el lado del cubo en las direcciones 2- y 3- (porque $S_{12}=S_{13}$) y no tendría

deformación por cortante en ninguna otra de las caras (porque $S_{14}=S_{15}=S_{16}=0$). Además, para un material anisotrópico, ocurren acoplos significativos entre los esfuerzos aplicados y la diversas respuestas de las deformaciones. (Jones, 1999)

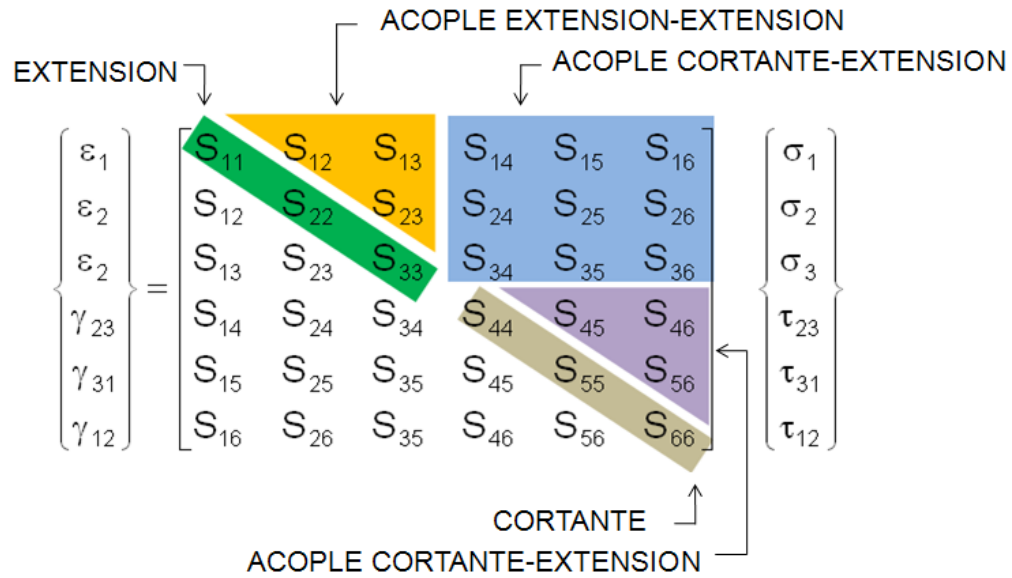
Figura 9. Deformación de un cubo anisotrópico bajo σ_y



Jones, 1999

Estos diversos acoplos se ilustran para un cuerpo arbitrariamente esforzado en la Figura 10., donde el significado físico de cada coeficiente de flexibilidad está marcado. Donde los términos S_{11} , S_{22} , y S_{33} representan la respuesta extensional a un esfuerzo aplicado, σ_1 , σ_2 y σ_3 , respectivamente, en la misma dirección. Los términos S_{44} , S_{55} , y S_{66} representan la respuesta de una deformación cortante a un esfuerzo aplicado en el mismo plano. Los términos S_{12} , S_{13} , y S_{23} representan el acople entre distintos esfuerzos y deformaciones normales (acople extensión - extensión conocida comúnmente como efecto Poisson). Los términos S_{14} , S_{15} , S_{16} , S_{24} , S_{25} , S_{26} , S_{34} , S_{35} y S_{36} representan la respuesta de deformación normal al aplicar un esfuerzo cortante en una manera más compleja que los coeficientes de flexibilidad anteriores (acople cortante - extensión). Finalmente los términos S_{45} , S_{46} , y S_{56} representan la respuesta de la deformación cortante a un esfuerzo cortante aplicado en otro plano (acople cortante - cortante). El único acople que existe para un material isotrópico es el acople extensión - extensión. (Jones, 1999)

Figura 10. Significado físico de las relaciones anisotrópicas de esfuerzo - deformación



(Jones, 1999)

2.2.2. Rigidez, flexibilidad, y constantes en ingeniería para los materiales ortotrópicos

La matriz de flexibilidad para los materiales ortotrópicos en términos de las constantes es:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

E_1, E_2, E_3 = Modulo de Young (extensión) en direcciones 1-, 2-, 3.

ν_{ij} = Modulo de Poisson (acople extensión – extensión)

G_{23}, G_{31}, G_{12} = modulo cortante en planos 2-3, 3-1, y 1-2.

Note que en un material ortotrópico que es cargada en las coordenadas principales (1, 2 y 3) no muestra otro acople cortante - extensión o cortante – cortante. Recuerde que un material ortotrópico tiene 9 constantes independientes porque

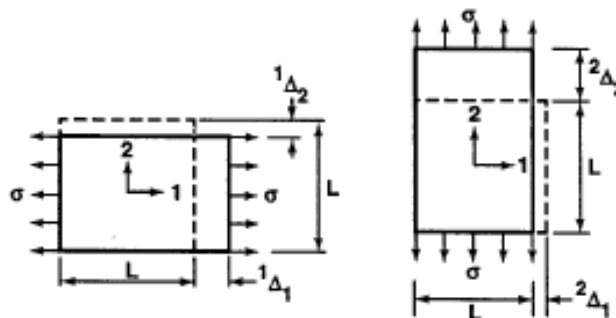
$$S_{ij} = S_{ji} \quad (37)$$

Y la matriz de flexibilidad es la inversa de la rigidez (C_{ij}) la cual muestra que es simétrica ($C_{ij} = C_{ji}$). Cuando las constantes son sustituidas en la ecuación (37),

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (38)$$

Además, deben satisfacerse tres relaciones reciprocas para un material ortotrópico y solo ν_{12}, ν_{13} y ν_{23} necesitan ser consideradas porque ν_{21}, ν_{31} y ν_{32} pueden ser expresadas en términos del primer grupo mencionado de coeficientes de de Poisson y el modulo de Young. (Jones, 1999)

Figura 11. Diferencia entre ν_{12} y ν_{21}



Jones, 1999

La diferencia entre ν_{12} y ν_{21} para los materiales ortotrópicos se enfatiza en la Figura 11., donde los dos casos de carga uniaxial están mostrados en un elemento cuadrado. La primera carga es aplicada en la dirección 1.

2.3. MACROMECHANICA DEL LAMINADO

La teoría clásica de la laminación consiste de una colección de hipótesis de esfuerzo y deformación de la mecánica de materiales. En la literatura de los materiales compuestos, la teoría clásica de la laminación se abrevia como CLT⁴.

2.3.1. Comportamiento del esfuerzo – deformación de la lámina

Las relaciones de esfuerzo - deformación en las coordenadas principales del material para una lámina de material ortotrópico bajo un plano de esfuerzos es

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Los coeficientes de rigidez reducidos, Q_{ij} , están definidos en términos de las constantes de ingeniería. En los otros sistemas coordenados en el plano de la lámina, los esfuerzos son

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (40)$$

⁴ CLT, *classical lamination theory*

Donde los coeficientes de rigidez transformados, \bar{Q}_{ij} , están dados en términos de los coeficientes de rigidez reducidos, Q_{ij} .

Las relaciones de esfuerzo – deformación en los planos coordenados arbitrarios, nombrados así por la orientación arbitraria de los constituyentes de la lámina. Ambas ecuaciones (39) y (40) pueden ser nombradas como las relaciones de esfuerzo – deformación de la k-énésima capa de un laminado de múltiples capas, la ecuación (40) puede ser escrita como

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \quad (41)$$

2.3.2. Variación de las deformaciones y esfuerzos en un laminado

El conocer la variación de los esfuerzos y las deformaciones a través del espesor del laminado es esencial para definir los coeficientes de extensión y flexión de un laminado. Se presume que el laminado tiene capas perfectamente unidas. Además, se presume que las uniones son infinitamente delgadas además que no se deforman por cortante. Los desplazamientos son continuos a través de las fronteras de las láminas, las láminas no pueden separarse unas de otras. Así, el laminado actúa como una sola capa con propiedades muy especiales que luego se podrá ver que constituyen un elemento estructural.

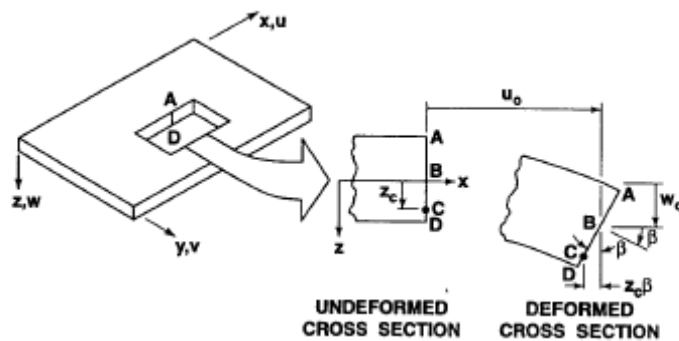
Por consiguiente, si el laminado es delgado, una línea originalmente recta y perpendicular a la superficie media de la lámina, es decir, una superficie media normal, se asume permanece recta y perpendicular a la superficie media cuando el laminado se deforma, por ejemplo, doblado, contraído, torcido, contraído o cortado. Requiriendo que la superficie media permanezca recta y normal bajo deformación es equivalente a ignorar las deformaciones cortantes en los planos perpendiculares a la superficie media, esto es, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ donde z es la dirección de la normal bajo la superficie media en la Figura 12 (se puede observar que γ_{xz} y γ_{yz} son los ángulos que una normal deformada puede hacer con la superficie media deformada).

Además se presume que las normales tienen una distancia constante, entonces se ignora también la deformación perpendicular a la superficie media, lo que lleva a, $\epsilon_z = 0$. Estas suposiciones del comportamiento de una sola capa que representa el laminado es conocida como la hipótesis de Kirchhoff para placas y la hipótesis Kirchhoff – Love para cascarones.

Las implicaciones de la hipótesis de Kirchhoff en los desplazamientos del laminado en u , v y w en las direcciones x , y y z se derivan de la sección transversal del laminado en el plano x - z que se muestra en la Figura 12. Los desplazamientos en la dirección x del punto B de la superficie media sin deformar a la superficie media deformada es u_0 . Porque la línea $ABCD$ permanece recta bajo deformación del laminado, el desplazamiento en el punto C es

$$u_C = u_0 - z_C \beta \quad (42)$$

Figura 12. Geometría de deformación en el plano x - z



Jones, 1999

Pero porque, bajo deformación, la línea $ABCD$ más lejana permanece perpendicular a la superficie media, β es la inclinación de la superficie media del laminado en la dirección x , el cual es

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (43)$$

Donde, el desplazamiento, u , en cualquier punto z a través del espesor del laminado es

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (44)$$

Por razones similares, el desplazamiento, v , en la dirección y es

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (45)$$

Las deformaciones del laminado han sido reducidas a ε_x , ε_y y ε_z por virtud de la hipótesis de Kirchhoff. Que es, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Además las derivadas de los desplazamientos u y v en las ecuaciones (44) y (45), las deformaciones son

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Donde las deformaciones en la superficie media son

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Las curvaturas de la superficie media son

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (48)$$

(El último termino de la ecuación (48) es la curvatura de torsión de la superficie media) nos referimos solo a las curvas de la superficie media como superficie de referencia y no de cualquier otra superficie, así que los superíndices con valor cero no son necesarios en κ_x , κ_y y κ_{xy} . Así la hipótesis de Kirchhoff se ha verificado fácilmente para implicar una variación lineal de la deformación con el espesor del laminado porque los esfuerzos en la ecuación (46) tienen forma de una línea recta, es decir $y = mx + b$. Para los cascarones circulares cilíndricos, el término ε_y debe ser suplementado por w_o/r donde r es el radio del cascaron; otros cascarones tienen relaciones de deformación - desplazamiento más complicados.

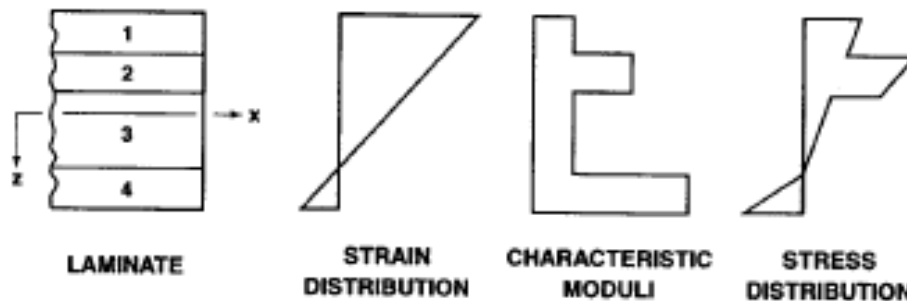
Al sustituir la variación de la deformación a través del espesor, ecuación (46), en las relaciones de deformación – desplazamiento, ecuación (41), los esfuerzos en la K-ésima capa puede ser expresada en términos de las deformaciones y curvas de la superficie media de el laminado como

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (49)$$

El \bar{Q}_{ij} puede ser diferente para cada lámina, entonces la variación del esfuerzo puede variar a través del espesor del laminado y no es necesariamente lineal, aún cuando la variación de la deformación es lineal. En cambio, la variaciones típicas del

esfuerzo y la deformación son mostradas en la Figura 13 donde los esfuerzos capa a capa son lineales (es decir lineal para cada capa, pero discontinuo en las fronteras entre las láminas)

Figura 13. Variación hipotética de los esfuerzos y las deformaciones a través del espesor del laminado



Jones, 1999

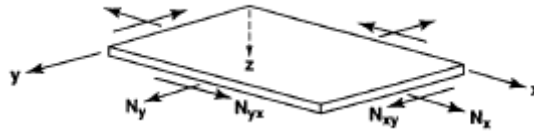
2.4. FUERZAS Y MOMENTOS RESULTANTES DE LOS LAMINADOS

Las fuerzas y momentos resultantes que actúan en un laminado son obtenidos por la integración de los esfuerzos en cada capa o lámina a través del espesor del laminado, por ejemplo

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \quad M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (50)$$

Nótese que en la Figura 13, los esfuerzos varían dentro de cada lámina, así como de lámina a lámina, entonces la integral no es trivial. Actualmente, N_x es una fuerza por unidad de longitud de la sección transversal del laminado mostrado en la Figura 14.

Figura 14. Fuerzas en el plano de un laminado plano

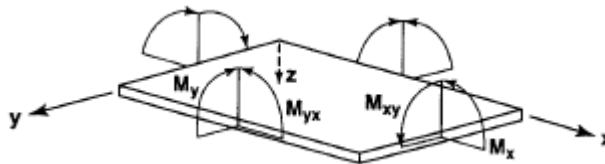


Jones, 1999

Similarmente, M_x es un momento por unidad de longitud como en la Figura 15.

La colección entera de las fuerzas y los momentos resultantes para una capa N del laminado está representado en las Figuras 14 y 15.

Figura 15. Momentos de un laminado plano



Jones, 1999

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (51)$$

Y

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad (52)$$

Donde z_k y z_{k-1} están definidas como la geometría básica del laminado Figura 16. Observe allí que z_i son distancias directas (coordenadas) de acuerdo con la convención que z es positivo hacia abajo. Donde, z_k es la distancia directa del inferior de la capa k – enésima, y z_{k-1} es la distancia directa a la parte superior de la capa k – enésima. Por otra parte, $z_0 = -t/2$, $z_1 = -t/2 + t_1$, etc., mientras que $z_N = +t/2$, z_N

$z_1 = +t/2 + t_N$, etc. Estas fuerzas y momentos resultantes no dependen de z después de la integración, pero son funciones de x y y , las coordenadas en el plano de la superficie media.

Figura 16. Geometría de un laminado de N - capas

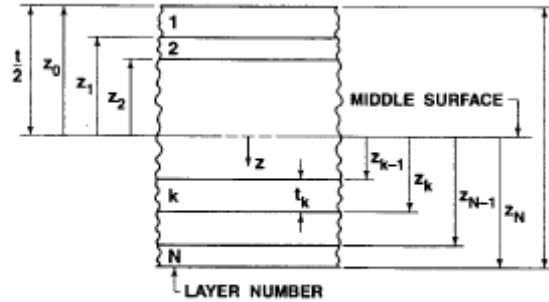


Figure 4-8 Geometry of an N-Layered Laminate

Jones, 1999

Las ecuaciones (51) y (52) pueden cambiarse para aprovechar el hecho que la matriz de rigidez para la lámina es a menudo constante dentro de la lámina. Así, la matriz de rigidez va fuera de la integración de cada capa, pero está dentro de la sumatoria de las fuerzas y momentos resultantes para cada capa. Cuando las relaciones de esfuerzo - deformación de la lámina, ecuación (50) se sustituyen en las fuerzas y momentos se convierten en

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z dz \right] \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \quad (54)$$

Se debe recordar que ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 , κ_x , κ_y y κ_{xy} no son funciones de z , pero son valores de la superficie media que pueden ser removidos de los signos de la sumatoria. Así las ecuaciones (53) y (54) pueden ser escritas de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Donde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (57)$$

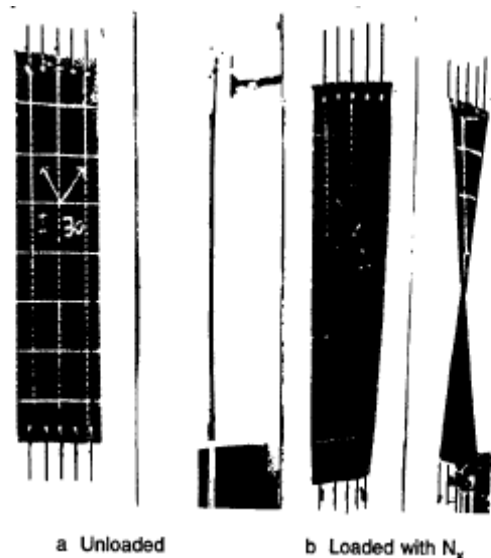
En las ecuaciones (55), (56), y (57), los A_{ij} son los coeficientes de rigidez extensionales, los B_{ij} son el acople de flexión - extensión y el D_{ij} son los componentes de la rigidez de torsión. La sola presencia del B_{ij} implica un acople entre flexión y extensión de un laminado (porque ambas fuerzas y los diagramas así como los momentos y deformaciones existen simultáneamente en las ecuaciones (55) y (56). Así, es imposible tirar de un laminado que tenga términos de B_{ij} sin que al mismo tiempo de una flexión y/o torsión del laminado. Es decir, una fuerza de extensión resulta no solo en una deformación por extensión, sino una flexión y/o torsión de la lámina. También, tal laminado no puede estar sometido a un momento

sin que al mismo tiempo sufra de una extensión de la superficie media. La primera observación es confirmada para un laminado compuesto de dos láminas caucho de nylon reforzado mostrado en la figura 17. Sin carga, el laminado es plano como en la figura 17a. El laminado sometido a una fuerza resultante N_x y, por la manera en que esta soportado y cargado, $N_y = N_{xy} = M_x = M_{xy} = 0$. Cuando las direcciones principales del material de las dos láminas están orientadas en $+\alpha$, y $-\alpha$, respectivamente, al eje x del laminado, se puede mostrar que la expresión general para N_x es

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^o + A_{12}\varepsilon_y^o + B_{16}\kappa_{xy} \quad (58)$$

Así, la fuerza resultante N_x produce una torsión de un laminado como evidencia el termino κ_{xy} además de las deformaciones normales usuales ε_x^o (extensión) y ε_y^o (contracción) como se puede observar en la figura 17a.

Figura 17. Torsión de un laminado antisimétrico de dos capas bajo tensión



Jones, 1999

La teoría clásica de la laminación consiste de un sistema comprensivo de hipótesis de deformación que conducen a unas relaciones de fuerza - deformación, y momento - deformación de las ecuaciones (55) y (56) mostradas en la figura 18 donde los significados físicos de A_{ij} , B_{ij} , y D_{ij} están marcados. Donde, A_{16} y A_{26} representan el acople de cortante - extensión en el laminado análogo al encontrado para una lámina simple en el numeral 2.2.1. Por supuesto, los B_{ij} representan el acople entre flexión y extensión, un fenómeno que no se encuentra a nivel de la lámina. Finalmente, D_{16} y D_{26} representan el acople flexión - torsión.

Figura 18. Significado físico de los coeficientes de rigidez en fuerzas y momentos resultantes

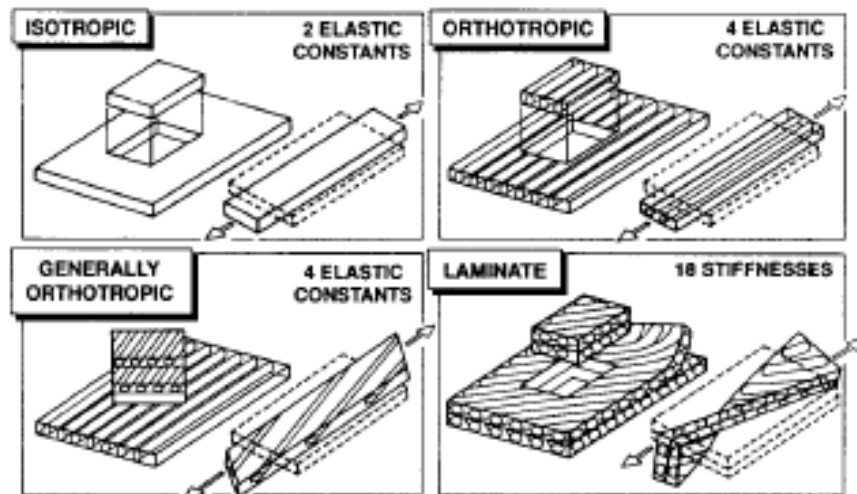
$$\begin{array}{c}
 \text{ACOUPLE CORTANTE - EXTENSION} \quad \text{ACOUPLE FLEXION - EXTENSION} \\
 \left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} M_x \\ M_y \\ M_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} \\
 \text{ACOUPLE FLEXION - EXTENSION} \quad \text{ACOUPLE FLEXION - TORSION}
 \end{array}$$

Jones, 1999

Los comportamientos estudiados hasta ahora incluyen los materiales isotrópicos, los materiales ortotrópicos, los materiales generalmente ortotrópicos, y los laminados. Cada una de las configuraciones es mostrada en la figura 18 junto con la deformación como respuesta a una carga axial. Se puede ver que el acople de cortante - extensión no ocurre en materiales ortotrópicos cargados en las

direcciones principales del material, pero si aparece cuando no es cargado en esas direcciones. También en la figura 19 se muestra el número de constantes elásticas independientes para cada material. Obsérvese especialmente que un laminado tiene un máximo de 18 coeficientes de rigidez (seis de cada A_{ij} , B_{ij} y D_{ij}). El número de constantes elásticas para cada laminado es de un máximo de 4 por capa, pero si el laminado es hecho del mismo material para cada lámina, entonces el laminado solo tiene cuatro constantes elásticas.

Figura 19. Formas del material



Jones, 1999

Algunos ingenieros han tratado de caracterizar los laminados con coeficientes de rigidez efectivos del laminado E_x , E_y , ν_{xy} , y G_{xy} , y tales características se pueden determinar de hecho para un laminado por medio de las medidas usuales. Sin embargo, es crucial reconocerlos con un acercamiento de los coeficientes de rigidez efectivos del laminado (1) Se ignora el acople cortante – extensión y ;(2) toda la respuesta de flexión es ignorada (incluyendo el acople flexión – torsión) Se ignora el acople entre flexión y extensión (muchos laminados son simétricos, pero muchos otros no).

2.5. CASOS ESPECIALES DE LOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DEL LAMINADO

Ahora veremos los casos especiales de los laminados rígidos, para los cuales las constantes de rigidez toman unos valores simplificados en comparación con la forma general en la ecuación (57). Las relaciones generales del diagrama de fuerza - momento- deformación en las ecuaciones (55) y (56) son demasiado complicadas. Así, debe comenzarse por entenderse los casos de comportamiento de los laminados más sencillos para luego entender los casos más complejos. Algunos de los casos son casi triviales, otros son especializados, algunos no ocurren a menudo en la práctica, pero el punto es que todos contribuyen a entender el concepto de laminados rígidos. Muchos de los casos resultan de la práctica común de construir laminados de las láminas que tienen las mismas características de espesor y materiales, pero tienen diversas orientaciones de las direcciones principales del material de una a otra y de acuerdo a los ejes del laminado.

Las constantes de rigidez para las configuraciones de una sola – capa se analizan primero para proporcionar una base para la discusión subsecuente. Tales constantes de rigidez deben ser reconocibles en términos de conceptos encontrados previamente en el estudio de placas y de cascarones. Después, se discute y clasifica los laminados que son simétricos a partir de su superficie media. Luego se describe los laminados que tienen láminas con una configuración antisimétrica sobre su superficie media. Finalmente, se discute los laminados con una carencia completa de simetría en la superficie media, ósea los laminados antisimétricos. Para todos los laminados surge la pregunta acerca del espesor. Los laminados regulares tienen láminas de igual espesor y los laminados irregulares tienen láminas con espesores diferentes.

2.5.1. Configuraciones de una sola - capa

Las configuraciones especiales de una sola capa son tratados en éste numeral son isotrópicos, especialmente ortotrópicos, generalmente ortotrópicos y anisotrópicos.

La configuración generalmente ortotrópica no puede ser analizada del punto de vista de una capa anisotrópica, pero tiene solo cuatro propiedades del material independientes de un material ortotrópico.

2.5.1.1. Capa isotrópica simple:

Para una capa anisotrópica simple con las propiedades, E y ν , y espesor, t , las ecuaciones (57) de las constantes de rigidez de el laminado se reduce a

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} = A & D_{11} &= \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} = D \\
 A_{12} &= \nu A & D_{12} &= \nu D \\
 A_{22} &= A & D_{22} &= A \\
 A_{16} &= 0 & D_{16} &= 0 \\
 A_{26} &= 0 & D_{26} &= 0 \\
 A_{66} &= \frac{E \cdot t}{2(1 + \nu)} = \frac{1 - \nu}{2} A & D_{66} &= \frac{E \cdot t^3}{24(1 + \nu)} = \frac{1 - \nu}{2} D
 \end{aligned}
 \quad B_{ij} = 0 \quad (59)$$

Entonces las fuerzas resultantes dependen solo de las deformaciones en el plano de la superficie media del laminado, y los momentos resultantes solo dependen en las curvas de la superficie media:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 \\ \nu A & A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Así, no hay acople entre flexión y extensión de una capa isotrópica simple.

$$D = \frac{A \cdot t^2}{12} \quad (62)$$

2.5.1.2. Capa especialmente ortotrópica simple

Para una capa especialmente ortotrópica simple de espesor, t , y las constantes de rigidez de la lámina, Q_{ij} , los coeficientes de rigidez del laminado es

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}t & D_{11} &= \frac{Q_{11}t^3}{12} \\ A_{12} &= Q_{12}t & D_{12} &= \frac{Q_{12}t^3}{12} \\ A_{22} &= Q_{22}t & D_{22} &= \frac{Q_{22}t^3}{12} \\ A_{16} &= 0 & D_{16} &= 0 \\ A_{26} &= 0 & D_{26} &= 0 \\ A_{66} &= Q_{66}t & D_{66} &= \frac{Q_{66}t^3}{12} \end{aligned} \quad B_{ij}=0 \quad (63)$$

Como una capa isotrópica simple, las fuerzas resultantes dependen solo de las deformaciones en el plano, y los momentos resultantes dependen solo de las curvas

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (65)$$

2.5.1.3. Capa generalmente ortotrópica simple

Para una capa generalmente ortotrópica de espesor, t , y las constantes de rigidez de la lámina, \bar{Q}_{ij} , las constantes de rigidez son

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij}t \quad B_{ij}=0 \quad D_{11} = \frac{\bar{Q}_{ij}t^3}{12} \quad (66)$$

De nuevo, no hay un acople entre flexión y extensión, entonces las fuerzas y momentos resultantes son

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Se puede observar que para la capa isotrópica y la generalmente ortotrópica, las fuerzas de extensión dependen de la deformación por cortante a la vez que de la deformación por extensión. También, las fuerzas cortantes resultantes, N_{xy} , dependen de las deformaciones de extensión, ε_x^0 y ε_y^0 , así como de la deformación por cortante, γ_{xy}^0 . Similarmente, los momentos resultantes todos dependen de las curvas de flexión, κ_x y κ_y , y de las curvas de torsión, κ_{xy} .

2.5.1.4. Capa anisotrópica simple

La única diferencia entre una capa generalmente ortotrópica y una anisotrópica es que la última tiene las constantes de rigidez de la lámina, Q_{ij} , definida en la

mientras que la capa generalmente ortotrópica tiene las constantes de rigidez, \bar{Q}_{ij} . Las constantes de rigidez son

$$A_{ij} = Q_{11}t \qquad B_{ij}=0 \qquad D_{11} = \frac{Q_{ij}t^3}{12} \qquad (69)$$

2.5.2. Laminados simétricos

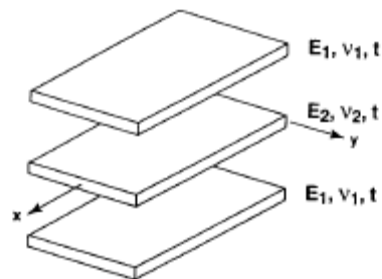
Los laminados que son simétricos en las propiedades del material y geometría sobre la superficie media, las ecuaciones generales de rigidez, ecuación (57), se simplifican considerablemente. Esa simetría tiene tal forma *para* cada par de láminas de igual espesor: (1) ambas láminas tienen las mismas propiedades del material y orientación en las direcciones principales, es decir, ambas láminas tienen la misma $(\bar{Q}_{ij})_k$; y (2) si una lámina está a cierta distancia encima de la superficie media, entonces la otra lámina está a la misma distancia debajo de la superficie media. Una sola capa que sobre la superficie media se puede considerar un par de láminas con medio espesor que satisface el requisito de simetría (nótese que tal lámina es simétrica sobre la superficie media).

Debido a la simetría de las $(\bar{Q}_{ij})_k$ y de los espesores t_k , todos los acoples de las constantes de rigidez de flexión - extensión, es decir, se puede demostrar que las B_{ij} son cero. Eliminar el acople entre flexión y extensión tiene dos ramificaciones prácticas importantes. Primero, tal lámina es por lo general más fácil de analizar que la lámina con acople de flexión - extensión. Las fuerzas y momentos resultantes *para* un laminado simétrico son iguales que en las ecuaciones (67) y (68). En cada caso, algunos valores de A_{ij} y D_{ij} en las ecuaciones mencionadas anteriormente, pueden desaparecer. Se puede ver que incluso un laminado que es hecho simétricamente sobre la superficie media puede tener un acople de entre la flexión y la extensión.

2.5.2.1. Laminados simétricos con múltiples capas isotrópicas

Si múltiples capas isotrópicas de varios espesores se arreglan simétricamente sobre una superficie media con propiedades del material y geometría, entonces el laminado que resulta no muestra el acople entre flexión y la extensión. Un ejemplo simple de un laminado simétrico con tres capas isotrópicas se ilustra en la figura 20. Allí, los dos tipos de simetría, las propiedades del material y la geometría son evidentes. Un ejemplo de un laminado simétrico con seis capas isotrópicas de diversas propiedades elásticas y espesores se enuncia en la tabla 4. En esta también, las propiedades del material y la geometría son obvias. Observe que las capas 3 y 4 en la tabla 20 se podrían considerar juntas como una sola capa de espesor $6t$ sin cambiar las características de la rigidez.

Figura 20. Vista de un laminado desarmado simétrico de capas isotrópicas



Jones, 1999

Tabla 4. Laminado simétrico con tres capas múltiples isotrópicas

Capa	Propiedades del material	Espesor de las capas
1	E_1, ν_1	t
2	E_2, ν_2	2t
3	E_3, ν_3	3t
4	E_3, ν_3	3t
5	E_2, ν_2	2t
6	E_1, ν_1	t

Jones, 1999

Los coeficientes de rigidez de extensión y flexión para los casos generales son calculados de la ecuación (57) donde para la capa k – enésima

$$\begin{aligned}
 (\bar{Q}_{11})_k &= (\bar{Q}_{22})_k = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} & (\bar{Q}_{16})_k &= (\bar{Q}_{26})_k = 0 \\
 (\bar{Q}_{12})_k &= \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2} & (\bar{Q}_{66})_k &= \frac{E_k}{2(1-\nu_k)}
 \end{aligned} \tag{70}$$

Las fuerzas y momentos resultantes toman la forma simplificada igual a las ecuaciones (64) y (65) donde, para las capas isotrópicas, $A_{11} = A_{22}$ y $D_{11} = D_{22}$ por las primera condición de la ecuación (70). La forma específica de los A_{ij} y D_{ij} puede ser un tanto complicada.

2.5.2.2. Laminado simétrico con capas múltiples especialmente ortotrópicas

Por la complejidad analítica que implican las constantes de rigidez A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} a veces se desea que el laminado no tenga estas constantes de rigidez. Los laminados pueden ser hechos con capas ortotrópicas que tienen las direcciones principales del material alineadas con los ejes del laminado. Si los espesores, las localizaciones, y las propiedades del material de las láminas son simétricas sobre la

superficie media del laminado, no hay acople entre la flexión y la extensión. Un ejemplo se muestra en la tabla 5. Se puede ver que las propiedades simétricas del material requieren igual $(\bar{Q}_{ij})_k$ de las dos capas las cuales se colocan en la misma distancia encima y debajo de la superficie media. Así, ambas propiedades del material ortotrópico, $(\bar{Q}_{ij})_k$, de las capas y el ángulo de las direcciones principales del material a los ejes del laminado (es decir, la orientación de cada capa) deben ser idénticas.

Los coeficientes de rigidez de extensión y flexión se calculan de la ecuación (57) en donde para la capa del k – enésima es

$$\begin{aligned} (\bar{Q}_{11})_k &= \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} & (\bar{Q}_{12})_k &= \frac{\nu_{12}^k E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} & (\bar{Q}_{22})_k &= \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} & (71) \\ (\bar{Q}_{16})_k &= 0 & (\bar{Q}_{26})_k &= 0 & (\bar{Q}_{66})_k &= G_{12}^k \end{aligned}$$

Porque $(\bar{Q}_{16})_k$ y $(\bar{Q}_{26})_k$ son cero, las constantes de rigidez A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} desaparecen. También, las constantes de rigidez B_{ij} del acople la flexión - extensión es cero debido a simetría del laminado. Este tipo de laminado se podría llamar laminado especialmente ortotrópico en analogía a una lámina especialmente. Los resultados de la fuerza y del momento toman la forma de las ecuaciones (64) y (65), respectivamente, salvo que $A_{11} = A_{22}$ y $D_{11} = D_{22}$.

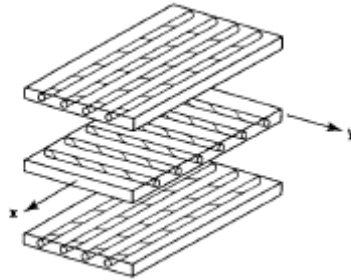
Tabla 5. Laminado simétrico con cinco capas especialmente ortotrópico

Capa	Propiedad del material				Orientación	Espesor
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	2t
3	H_1	H_2	H_3	H_4	90°	4t
4	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	2t
5	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	t

Jones, 1999

Un caso especial muy común de laminados simétricos con múltiples capas especialmente ortotrópicos ocurre cuando las láminas tienen las mismas propiedades del material y del espesor, pero las direcciones principales del material se alternan en 0° y 90° a los ejes de el laminado, por ejemplo, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. A tal laminado se le llama laminado de capas cruzadas simétricas regulares porque los espesores de las láminas son iguales y cruzada porque las fibras en capas adyacentes están en 90° a uno otro). Un ejemplo de un laminado cruzado simétrico regular con tres capas de igual espesor y propiedades se ilustran en figura 21 Las direcciones de las fibras de cada lámina están esquemáticamente indicadas por el uso de líneas ligeras. El laminado debe tener un número impar de las capas para satisfacer el requisito de la simetría por el cual el acople entre la flexión y la extensión es eliminado. Los laminados de capas cruzadas con un número par de capas no son simétricos.

Figura 21. Vista de un laminado desarmado simétrico de tres capas cruzadas regulares



Jones, 1999

La lógica para establecer los varios coeficientes de rigidez será remontada para ilustrar los procedimientos generales. Primero, considere los coeficientes de rigidez de extensión A_{ij} que son a la primera ecuación de las ecuaciones (57).

El A_{ij} es la sumatoria del producto de los \bar{Q}_{ij} individuales de las láminas y los espesores de las láminas. Así, las únicas maneras de obtener un individual A_{ij} cero para todo el \bar{Q}_{ij} sea cero o para algunos \bar{Q}_{ij} sean negativos y algunos positivos de modo que sus productos con su respectiva suma de los espesores sean cero. De las expresiones para las constantes de rigidez transformadas \bar{Q}_{ij} de la lámina, aparentemente \bar{Q}_{11} , \bar{Q}_{12} , \bar{Q}_{22} y \bar{Q}_{66} son definidos positivo porque todas las funciones trigonométricas parecen igualar energías. Así, A_{11} , A_{12} , A_{22} y A_{66} son definidos positivos porque los espesores son siempre positivos. Sin embargo, \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} son cero para las orientaciones del lámina de 0° y de 90° a los ejes laminados. Así, A_{16} y A_{26} son cero para los laminados de láminas ortotrópicas orientados en cualquiera de los dos, 0° o 90° a los ejes laminados.

Segundo, considerar las constantes de rigidez del acople flexión – extensión, que son los B_{ij} la segunda ecuación del conjunto de las ecuaciones (57).

Si el laminado cruzado es simétrico sobre la superficie media en las propiedades del material y geometría, entonces todo el B_{ij} desaparece como se demuestra fácilmente.

Finalmente, considere las constantes de rigidez de flexión, D_{ij} , mostrados en la última ecuación del grupo de ecuaciones (57).

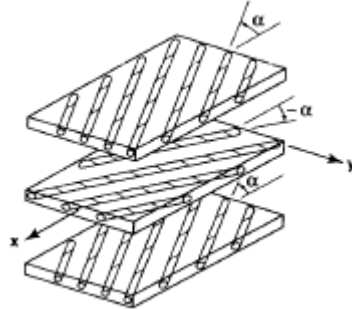
Los D_{ij} son la sumatoria de los productos de los \bar{Q}_{ij} individuales de las láminas y el término $(z_k^3 - z_{k-1}^3)$. Porque \bar{Q}_{11} , \bar{Q}_{12} , \bar{Q}_{22} y \bar{Q}_{66} son definidos positivos y el término geométrico es definido positivo, entonces D_{11} , D_{12} , D_{22} y D_{66} son definidos positivos. También, \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} son cero para las orientaciones del lámina de 0° y de 90° a los ejes coordenados del laminado. Así, D_{16} y D_{26} son cero.

2.5.2.3. Laminados simétricos con múltiples capas generalmente ortotrópicos

Un laminado con múltiples capas generalmente ortotrópicos arreglados simétricamente sobre la superficie media no exhiben ningún acople entre la flexión y la extensión; es decir, el B_{ij} es cero. Por lo tanto, las fuerzas y los momentos resultantes son representados por las ecuaciones (67) y (68), respectivamente. Allí, todos los A_{ij} y D_{ij} se requieren para los acoples entre las fuerzas normales y las deformaciones cortantes, fuerzas cortantes y las deformaciones normales, los momentos normales y torsión, y momento torsión y las curvas normales. Tales acoples son evidenciados por las constantes de rigidez A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} .

Una subclase especial de esta clase de laminados simétricos es el laminado simétrico de capas angulares regulares porque las láminas adyacentes están en $+\alpha$ y $-\alpha$ a la dirección axial del laminado). Tales laminados tienen láminas ortotrópicas de iguales espesores. Las láminas adyacentes tienen ángulos de signos opuestos de las propiedades principales del material orientados con respecto a los ejes del laminado, por ejemplo, $[+\alpha / -\alpha / +\alpha]$. Así, para la simetría, debe haber un número impar de capas. Un ejemplo de un laminado simétrico de tres capas angulares regulares se muestra en la figura 22. Un ejemplo más complejo de un laminado simétrico con capas generalmente ortotrópicas se da en la tabla 6. Se puede observar que las propiedades del material, orientaciones, y espesores de las láminas ortotrópicas son todas simétricas sobre la superficie media.

Figura 22. Vista de laminado simétrico desarmado de tres capas angulares regulares



Jones, 1999

Tabla 6. Laminado simétrico con cinco capas generalmente ortotrópicas

Capa	Propiedad del material				Orientación	Espesor
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	$+ 30^\circ$	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	$- 60^\circ$	$3t$
3	H_1	H_2	H_3	H_4	$+ 10^\circ$	$5t$
4	G_1	G_2	G_3	G_4	$- 60^\circ$	$3t$
5	F_1	F_2	F_3	F_4	$+ 30^\circ$	t

Jones, 1999

El acople ya mencionado que implica A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} adquieren una forma especial para los laminados de capas angulares. Se puede demostrar que estas constantes de rigidez pueden ser los más grandes cuando $N = 3$ (el más bajo N para la cual esta clase de laminado existe) y decrece en proporción a $1/N$ cuando N aumenta. En las expresiones para las constantes de rigidez de extensión y flexión A_{16} y D_{16} ,

$$A_{16} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{16})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (72)$$

$$D_{16} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{16})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (73)$$

Obviamente, A_{16} y D_{16} son sumatoria de de términos de signos alternados porque

$$(\bar{Q}_{16})_{+\alpha} = -(\bar{Q}_{16})_{-\alpha} \quad (74)$$

Así, para los laminados simétricos de capas angulares con muchas capas, los valores de A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} pueden ser pequeños cuando se comparan con el otro de A_{ij} y el D_{ij} respectivos.

2.5.2.5. Laminados simétricos con múltiples capas anisotrópicas

El caso general de un laminado con múltiples capas anisotrópicas dispuestas simétricamente sobre la superficie media no tienen ninguna simplificación de las constantes de rigidez con excepción de la eliminación del B_{ij} en virtud de la simetría. Todas las constantes de rigidez A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} existen y no son necesariamente cero mientras que el número de capas aumenta. Es decir, la constante de rigidez A_{16} , por ejemplo, se deriva de la matriz del Q_{ij} en para un lámina anisotrópica que es más independiente de las propiedades del material que la lámina ortotrópica.

2.5.3. Laminados antisimétricos

La simetría de un laminado sobre la superficie media es a menudo deseable para evitar el acople entre la flexión y la extensión. Sin embargo, muchas aplicaciones físicas de los laminados de materiales compuestos requieren laminados asimétricos para alcanzar los requisitos de diseño. Por ejemplo, si la constante de rigidez cortante de un laminado hecho de láminas con las fibras unidireccionales debe ser aumentada, un modo para alcanzar este requisito es orientar las capas a cierto ángulo de los ejes del laminado. Para permanecer dentro de requisitos del peso y del costo, un número par de tales capas puede ser necesario en las orientaciones

que se alternan de capa a capa, puede ser, $[+ \alpha/- \alpha/+ \alpha/- \alpha]$. Por lo tanto, la simetría sobre la superficie media se destruye, y las características del comportamiento del laminado se pueden cambiar substancialmente del caso simétrico. Aunque el laminado del ejemplo no es simétrico, es antisimétrico sobre la superficie media, y son posibles ciertas simplificaciones de la constante de rigidez.

La antisimetría de un laminado requiere (1) simetría de la geometría sobre la superficie media (es decir, considere un par de láminas del igual espesor, a una cierta distancia encima de la superficie media y la otra la misma distancia pero por debajo de la superficie media), pero (2) alguna clase de imagen de espejo de las características materiales $[\bar{Q}_{ij}]_k$. De hecho, las propiedades características $[\bar{Q}_{ij}]_k$ de los materiales ortotrópicos son simétricas, pero las orientaciones de las direcciones principales del material de las láminas no son simétricas sobre la superficie media. Esas orientaciones se invierten de 0° a 90° (o viceversa) o de $+\alpha$ a $-\alpha$ (como una imagen de espejo sobre el eje x del laminado). Porque $[\bar{Q}_{ij}]_k$ no es simétrica, el acople de la flexión - extensión existe.

El laminado antisimétrico debe tener un número par de capas si las láminas adyacentes también tienen muestras que se alternan en las direcciones principales de las propiedades del material con respecto a los ejes del laminado. Si las láminas adyacentes no tienen muestras de que se alternan, entonces el número de capas no necesita ser uniforme.

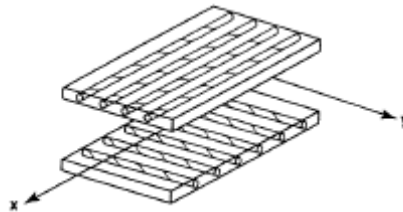
Las constantes de rigidez de un laminado antisimétrico de láminas anisotrópicas no se simplifican de los presentados en las ecuaciones (55) y (56). Sin embargo, como una consecuencia de la antisimetría las propiedades de los materiales de las láminas generalmente ortotrópicas, pero con espesores simétricos, la constantes de rigidez A_{16} del acople de cortante – extensión es igual a A_{16} de la ecuación (72) y puede verse fácilmente es cero por la misma razón expuesta en la ecuación (74) y

las capas simétricas sobre la superficie media tienen igual espesor por lo tanto el mismo valor del término geométrico que multiplica $(\bar{Q}_{16})_k$. De igual manera, A_{26} es cero al igual que el acople de flexión - torsión D_{16} por la misma razón expuesta en la ecuación (73) y la condición de la ecuación (74) permanece, y el término geométrico que multiplica a $(\bar{Q}_{16})_k$ es el mismo para las dos capas simétricas sobre la superficie media. El razonamiento realizado anteriormente se aplica también para D_{26} . Las constantes de rigidez del acople de flexión - extensión, B_{ij} varían para diversas clases de laminados antisimétricos de láminas generalmente ortotrópicas.

2.5.3.1. Laminados antisimétrico de láminas cruzadas

Un laminado antisimétrico de láminas cruzadas consiste en un número par de las láminas ortotrópicas puestas una sobre otras con las direcciones principales del material alternando en 0° y 90° a los ejes del laminado como en el ejemplo de la figura 23. Un ejemplo más complejo se da en la tabla 7 (donde las capas adyacentes no tienen siempre la secuencia 0° , luego 90° , luego 0° , etc.). Tal lámina no tiene A_{16} , A_{26} , D_{16} y D_{26} pero tiene el acople de la flexión - extensión.

Figura 23. Vista de laminado de dos capas cruzadas regulares



Jones, 1999

Tabla 7. Laminado antisimétrica con seis capas especialmente ortotrópicas

Capa	Propiedad del material				Orientación	Espesor
	Q ₁₁	Q ₁₂	Q ₂₂	Q ₆₆		
1	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	0°	t
2	G ₁	G ₂	G ₃	G ₄	90°	3t
3	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	90°	2t
4	H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	0°	2t
5	G ₁	G ₂	G ₃	G ₄	0°	3t
6	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	90°	T

Jones, 1999

Las fuerza y momentos resultantes del acople de acople flexión – extensión son

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (76)$$

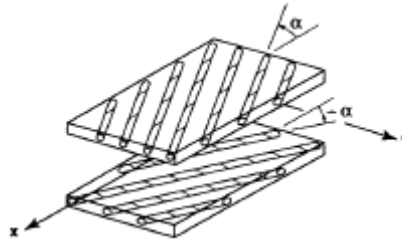
Un laminado regular antisimétrico de capas cruzadas es definido como un laminado que tiene todas las capas de igual espesor y es común por su simplicidad para la fabricación. Mientras que el número de capas aumenta, la constante de rigidez B_{11} del acople flexión - extensión se puede demostrar que se acerca a cero.

2.5.3.2. Laminado antisimétrico de capas angulares

Un laminado antisimétrico de capas en ángulo orientados en $+\alpha$ grados a los ejes coordenados del laminado en un lado de la superficie media y de las láminas

correspondientes de igual espesor orientados en $-\alpha$ grados del el otro lado a la misma distancia de la superficie media. Un ejemplo sencillo de un laminado de este tipo se muestra en la figura 24. Un ejemplo más complejo con materiales y ángulos de laminación mezclados se da en la tabla 8.

Figura 24. Vista de laminado de dos capas angulares antisimétricas



Jones, 1999

Tabla 8. Laminado de seis capas angulares antisimétricas

Capa	Propiedad del material				Orientación	Espesor
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	-45°	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	$+30^\circ$	$2t$
3	H_1	H_2	H_3	H_4	0°	$3t$
4	H_1	H_2	H_3	H_4	0°	$3t$
5	G_1	G_2	G_3	G_4	-30°	$2t$
6	F_1	F_2	F_3	F_4	$+45^\circ$	t

Jones, 1999

Un laminado regular antisimétrico de capas en ángulo sus láminas tiene el mismo espesor y material que facilita la fabricación. Esta clase de laminados se pueden restringir más a fondo para que solo tengan un valor de α en comparación con las orientaciones, materiales, y espesores en la tabla 8.

Las fuerzas y momentos resultantes para esta clase de laminados antisimétricos con capas en ángulo son

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (78)$$

Las constantes de rigidez B_{16} y B_{26} del acople de flexión - extensión se pueden demostrar para que sean cero como el número de capas en aumentan en el laminado a un espesor fijo.

2.5.4. Laminados Asimétricos

Los laminados asimétricos son el caso más general de los laminados. La carencia de simetría puede ser producto de construir un diseño deliberadamente no simétrico con respecto a la superficie media.

Para el caso general de capas isotrópicas múltiples el espesor t_k y las propiedades del material, E_k y ν_k , las constantes de rigidez de extensión, del acople flexión - extensión, y de flexión están dados por la ecuación (70) en donde $(\bar{Q}_{11})_k$, $(\bar{Q}_{22})_k$, $(\bar{Q}_{12})_k$, $(\bar{Q}_{16})_k$, $(\bar{Q}_{26})_k$ y $(\bar{Q}_{66})_k$ son iguales a los de la ecuación (70).

No es posible una reducción especial de las constantes de rigidez cuando t_k es arbitrario. Esto es, el acople entre flexión y extensión se puede obtener por una configuración de capas isotrópicas asimétricas sobre la superficie media con diversas propiedades del material y posiblemente (pero no necesariamente) diversos espesores. Así, el acople entre la flexión y la extensión no es un resultado de un material ortotrópico pero un poco de un laminado heterogéneo. Esto es, una

combinación de las propiedades del material y de la geometría. Las fuerzas y los momentos resultantes son

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (80)$$

Las fuerzas y momentos resultantes de los laminados asimétricos con múltiples capas especialmente ortotrópicas se muestran en las ecuaciones (79) y (80) pero con diferente A_{22} , B_{22} y D_{22} de A_{11} , B_{11} y D_{11} respectivamente. Es decir, no hay términos del acople cortante - extensión ni términos del acople flexión - torsión, así que la solución de problemas con esta clase de laminado es igual de sencilla como con capas isotrópicas.

Para los laminados asimétricos con múltiples capas generalmente ortotrópicas o con múltiples capas anisotrópicas las fuerzas y los momentos resultantes no son más sencillos que los de las ecuaciones (55) y (56). Todas las constantes de rigidez están presentes. Por lo tanto, las configuraciones con cualquiera de estas dos clases de láminas son mucho más difíciles de analizar que las configuraciones con múltiples capas isotrópicas o múltiples capas especialmente ortotrópicas.

2.5.5. Definiciones comunes de los laminados

Primero, necesitamos una manera común, no ambigua de escribir una especificación de las capas de un laminado. Es decir, una notación de la secuencia de las capas.

2.5.5.1. Notación de la Secuencia de apilamiento

La manera de describir un laminado por medio de los espesores de cada lámina, de las orientaciones principales de las propiedades del material y de la secuencia que apilamiento total, podrían involucrarse. Sin embargo, afortunadamente, todos los parámetros pertinentes se representan de una manera simple, sujeta por medio de la siguiente terminología de la secuencia. Para laminados regulares (con láminas de igual espesor), es suficiente un listado de las capas y sus orientaciones, por ejemplo, $[0^\circ/90^\circ/45^\circ]$, se puede ver que solo se necesita designar las orientaciones de las propiedades del material de las capas. Diferentes laminados se pueden hacer con las mismas capas, por ejemplo $[90^\circ/0^\circ/45^\circ]$. Para laminados irregulares (con láminas que no tienen el mismo espesor), se le debe añadir a la anterior notación los espesores de las láminas, por ejemplo, $[0_{2t}^\circ/90_{2t}^\circ/45_{3t}^\circ]$ o $[0^\circ@t/90^\circ@2t/45^\circ@3t]$. Finalmente, para laminado simétrico, se puede representar abreviadamente, por ejemplo, el laminado $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/45^\circ/90^\circ/0^\circ]$ es $[0^\circ/90^\circ/45^\circ]_{\text{simétrico}}$ o el $[0^\circ/90^\circ/45^\circ]_{\text{sym}}$ o $[0^\circ/90^\circ/45^\circ]_S$. Si las múltiples láminas tienen el mismo ángulo, se pueden utilizar subíndices para señalar el número de tales capas, por ejemplo $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ] = [0^\circ_3/90^\circ_2]$. Si las secuencias de las láminas se repiten, esas secuencias se agrupan con un subíndice para indicar el número de las repeticiones de cada secuencia, por ejemplo, $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ/90^\circ/45^\circ] = [0^\circ/90^\circ/45^\circ]_2$. Si una capa se parte de equitativamente por la superficie media, una barra que es colocada encima es de la capa partida, un ejemplo, $[0^\circ/90^\circ/0^\circ] = [0^\circ/\overline{90^\circ}]_S$. Finalmente, si todas las láminas están especificadas en la secuencia de apilado y no hay implicaciones de la simetría, de secuencias repetidas, etc., se puede utilizar un subíndice T que indica que la especificación esta completa, por ejemplo, $[0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_T$.

2.5.5.2. Laminados cuasi-isotrópicos

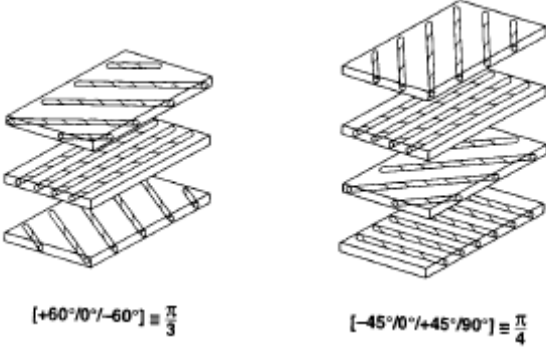
El término laminado cuasi-isotrópico describe a los laminados que tienen constantes de rigidez extensionales isotrópicas (las mismas en todas las direcciones en el plano del laminado). Como anexo a la definición, se puede recordar que el término isotropía es una propiedad del material mientras que las constantes de rigidez de

los laminados son una función tanto de las propiedades del material como de la geometría. El prefijo cuasi “en un sentido o una manera”. Así, un laminado cuasi-isotrópico debe significar un laminado que, en un cierto sentido, aparezca isotrópico, pero no es realmente isotrópico en todos los sentidos. En este caso, un laminado cuasi-isotrópico se toma para definir a un laminado que tiene iguales constantes de rigidez de extensión en todas las direcciones del plano del laminado, ósea,

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} \quad A_{11} = A_{22} \quad A_{12} = \nu A_{11} \quad A_{66} = \frac{1-\nu}{2} A_{11} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad (81)$$

Donde la barra encima de A_{ij} designa la propiedad de la transformada y ν es el coeficiente de Poisson del laminado definido solo por sus propiedades de extensión. Por otra parte, todas las capas son del mismo material y espesor. (Otra posible definición de un laminado cuasi-isotrópico es uno que tiene las constantes de rigidez de flexión iguales en todas las direcciones del plano) el ejemplo más sencillo de un laminado cuasi-isotrópico es un laminado de la tres capas $[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$. El ejemplo siguiente es un laminado de cuatro capas $[0^\circ/-45^\circ/45^\circ/90^\circ]$. Estos laminados se representan en la figura 25 en donde se utiliza la notación $\pi/3$ y $\pi/4$. Estos nombres, $\pi/3$ y $\pi/4$, resultado de los siguientes datos (1) el ángulo entre las capas 60° y 45° , respectivamente, y (2) 60° y 45° son $\pi/3$ y $\pi/4$, respectivamente, en unidades del sistema internacional. Mientras que el número de capas aumenta, el ángulo entre las láminas adyacentes disminuye tales que $\Delta\theta = 180^\circ/N$ donde N es el número de capas, aunque el A_{ij} es idéntico en todas las direcciones, el de B_{ij} y el D_{ij} dependen de la orientación de los ejes coordenados del laminado. Así, un laminado cuasi-isotrópico puede tener un acople de la flexión - extensión tan bien como una respuesta de flexión que varía mientras que el laminado se rota en plano.

Figura 25. Laminado desarmado cuasi - isotrópico



Jones, 1999

3. SELECCION DEL MATERIAL Y DETERMINACION DE LA GEOMETRIA

Uno de los parámetros más importantes es determinar el material con el cual se va a realizar el estudio del recipiente a presión para ello se desea que el material tenga las propiedades anteriormente nombradas en el conjunto de principios de la teoría clásica de la lámina y del laminado. El material seleccionado servirá de ayuda para determinar posteriormente la incidencia de la orientación de las fibras en el modelo seleccionado sometido presión interna.

Los factores que deben ser evaluados para la elección del material son en importancia los siguientes, rigidez y resistencia. Estos se deben considerar ya sea para esta clase de recipientes como para todas las aplicaciones estructurales.

3.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES TEORICAS

Aunque la selección del material depende principalmente de las orientaciones de las fibras y del número de capas, y esta es la parte que se investigará y desarrollará en este estudio, es importante seleccionar un material que cumpla tanto con las relaciones teóricas de las propiedades del material como de las encontradas en los textos, ya que muchas de los materiales descritos en diferentes textos no cumplen las relaciones teóricas, expuestas a continuación.

Los materiales ortotrópicos como se vio anteriormente, ecuación (31), deben ser designados con nueve propiedades elásticas las cuales son E_1 , E_2 , E_3 , G_{12} , G_{13} , G_{23} , ν_{12} , ν_{13} , y ν_{23} .

De estas propiedades E_1 , E_2 , G_{12} y ν_{12} pueden ser determinadas por métodos experimentales. En ausencia de datos experimentales de estas propiedades, es razonable asumir la isotropía transversal en los planos 2-3. Por esta razón se

asumirá un material ortotrópico, transversalmente isotrópico para el cual se necesitan al menos 5 propiedades tal como se indica en la ecuación (32) los cuales son E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} y ν_{23} . Asumir esto implica entonces que: (CRC, 2000)

$$E_3 = E_2, \nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{21} = \nu_{31}, \nu_{23} = \nu_{32}, G_{13} = G_{12}, G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (82)$$

Aún con esta suposición, ν_{23} debe ser medido o estimado para tener un conocimiento completo de las nueve propiedades elásticas independientes del material. (CRC, 2000)

En la mayoría de los textos aparecen solo cuatro de las cinco propiedades que se necesitan, muchos de estos datos recolectados de estudios realizados en las láminas, que para cada fabricante son diferentes ya que cada uno de ellos maneja diferentes procesos de fabricación ya sea de las fibras como de la resina que contiene estas, por ello muchas de las propiedades elásticas varían poco de acuerdo al material, además cada uno de estos ensayos se realizan tanto en compresión o en tensión y con las fibras en cierta orientación con respecto a la máquina de toma del ensayo (CRC, 2000). A continuación una tabla en donde se muestra los datos de tres tipos de fibras en una resina epóxica.

Tabla 9. Propiedades típicas para una lámina uniaxial (datos de fibras en una resina epóxica)

Tipo de Fibra	Densidad Kg/m ³	Índice costo del laminado (vidrio =1)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12} (GPa)
Vidrio tipo E	1980	1	45	8.2	5.0	0.26
Carbono HS	1536	3	139	9.0	7.1	0.30
Aramida	1338	2	78	5.5	2.3	0.34

Mallick, 1997

3.2. EVALUACION DE LOS MATERIALES ENCONTRADOS

De los tres materiales de la tabla, se puede seleccionar aquel que cumpla con los requisitos que se buscan para el modelo que se quiere generar, para ello tenemos los valores tanto de las propiedades elásticas como de la densidad y el índice del costo, este último hace una relación del costo entre el material de la tabla y la fibra de vidrio, de donde podemos ver que el más económico de los tres es la fibra de vidrio tipo E, seguida de la Aramida y por último la fibra de carbono de alta resistencia, el propósito pues de este proyecto es seleccionar la más común en el medio colombiano, para ello se tomara como prioridad el costo entre las variables a tener en cuenta, luego la resistencia y por último el peso del material, para ello se debe realizar una tabla en el cual calificaremos tanto cualitativa como cuantitativamente las propiedades de estos materiales.

El costo lleva un 50% de lo deseado, las propiedades elásticas se dividen un 36% de lo deseado y el 14% restante el peso del material. Cada uno de ellos será evaluado de acuerdo a los otros dos, el número 3 será el número mayor, y se le

colocará a la variable que tenga la mejor característica, 2 a la siguiente y 1 a la menor. Por último los valores dados para cada uno de las propiedades se multiplica por el porcentaje asignado a cada característica y al final se suma las de todo el material. El valor más alto es el material que se seleccionará.

Tabla 10. Evaluación de las propiedades para determinar el mejor material

Material	Costo (C)	E ₁	E ₂	G ₁₂	Peso (P)	Total (C*0.5+0.12*(E ₁ +E ₂ +G ₁₂)) + P*0.14)
Vidrio Tipo E	3	1	2	2	1	2.24
Carbono	1	3	3	3	2	1.86
Aramida	2	2	1	1	3	1.9

El material que obtuvo el mejor resultado para la selección es la fibra de vidrio tipo E con resina epóxica, las propiedades faltantes de este material pueden hallarse de las relaciones dadas en la ecuación (82), las cuales son entonces

$$E_3 = 8.2 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 5.0 \text{ GPa}$$

$$\nu_{13} = 0.26$$

$$\nu_{23} = 0.26$$

$$G_{23} = 4.02 \text{ GPa}$$

Al no tener los valores de ν_{23} estos se pueden suponer ya que una diferencia de 0.50 contra 0.40 (una diferencia del 20%) puede dar lugar solamente a una diferencia del 2% en los resultados de los esfuerzos o las deformaciones de un laminado o de un análisis estructural (CRC, 2000). Por ello ν_{23} es un valor supuesto y se tomó el mismo valor de ν_{13} . De esta manera se calculó G_{23} .

3.3. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL SELECCIONADO. FIBRA DE VIDRIO TIPO E

Fibra de vidrio es vidrio en forma de filamentos, elaborada a partir de sílice, cal, alúmina y magnesita. A estas materias se les añaden óxidos diversos y se trituran finamente consiguiendo una masa homogénea, que más tarde se introducen en un horno a 1.550 °C. Los filamentos pueden ser hechos con diversos tipos de vidrio, designados con las letras A, E, C, AR y S. Los más comúnmente utilizados para refuerzo de productos son los tipos E (eléctrico), AR (Alcali Resistente) y C (con resistencia química). (AITEX@2005).

3.3.1. Definición

Fibra inorgánica compuesta de 53-54% SiO₂, 14-15.5% Al₂O₃, 20-24% CaO, MgO y 6.5-9% B₂O₃, y escaso contenido en álcalis. Este tipo de fibra posee buenas propiedades dieléctricas, además de sus excelentes propiedades frente al fuego. El vidrio tipo E tiene un peso específico de 2.6 g/cm³. (AITEX@2005)

3.3.2. Especificaciones técnicas (filamentos sin acabados)

- Mecánicas

Tenacidad (N/tex): 1.30

Resistencia a la tracción (MPa): 3400

Elongación hasta rotura (%): 4.5

- Térmicas

Conductividad Térmica (W/m °K): 1

Resistencia termomecánica: 100% después de 100 h a 200 °C

- Eléctricas

Resistividad (ohm x cm): 10¹⁴ - 10¹⁵

Factor de disipación dieléctrica: 0.0010 - 0.0018 a 106 Hz

- Químicas

Absorción de humedad a 20 °C y 60% de humedad relativa (%): 0.1

Resistencia a los disolventes: alta

Resistencia a la intemperie y los rayos UV: alta

Resistencia a microorganismos: alta (AITEX@2005)

3.3.3. Aplicaciones

Construcción: tejidos para decoración en locales públicos.

Automotores: compuestos para componentes de vehículos.

Deporte: compuestos para utensilios o aparejos para la práctica de deportes.

Usos industriales: para todo tipo de compuestos para usos industriales, como piezas plásticas reforzadas con éste tipo de fibra, material para techos, tanques de agua, tinas de baño, tubería. (AITEX@2005)

3.3.4. Marcas comerciales

ADVANTEX

CAM EL YAF

CENTRAL GLASS FIBER E

HERCUFLEX

DANYANG ZHONGYA

EVANITE

GLASSEIDEN GMBH

NIPPON ELECTRIC GLASS FIBER

NITOBO ASCO

S-2

STARSTRAIN, TERMOFLOW

THERMO E-GLASS

TUFROV

TURBOFIL

VETROTEX

3.4. DEFINICION DE LA GEOMETRIA Y DIMENSIONES DEL RECIPIENTE

El recipiente al cual se le aplicará el respectivo análisis de la influencia de la orientación de las fibras es un acercamiento a un objeto real, en este caso en particular al uso de este para el almacenamiento de gases, específicamente de gas propano, actualmente para este fin se utiliza en Colombia tanques fabricados a partir de láminas de acero. Los recipientes actuales utilizados para este tipo de aplicaciones son de 24 litros, y la presión es de 1.65MPa.

Para cumplir con los 24 L, se parte que los extremos del recipiente son dos cascarones semiesféricos, y el cuerpo del tanque es un cilindro y la dimensiones se calculan las dimensiones de la siguiente manera, un tercio del volumen será de los dos cascarones semiesféricos del cual es necesario calcular el radio de estos y del cilindro r , luego de allí se calcula la altura del cilindro, h , de la siguiente manera

$$V_{esf} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (83)$$

Entonces

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \times V_{esf}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 0.008m^3}{4\pi}} \cong 0.125m \quad (84)$$

Y la altura de la porción cilíndrica es entonces

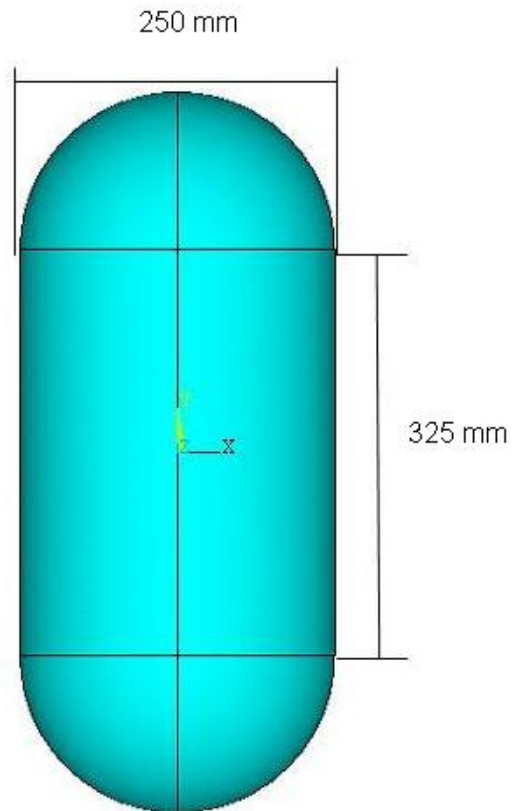
$$V_{cil} = \pi r^2 h \quad (85)$$

Entonces

$$h = \frac{V_{cil}}{\pi r^2} = \frac{0.016m^3}{\pi \times (0.125m)^2} \cong 0.325m \quad (86)$$

Las dimensiones del recipiente como se ilustra en la figura 33, son las siguientes:

Figura 26. Dimensiones del recipiente



El recipiente simulado, tendrá seis capas, todas éstas tendrán el mismo espesor, la única restricción del espesor es el espesor total del laminado no debe ser menor de 5 mm para los recipientes sometidos a presión interna o vacío, enunciado en el numeral 1.2.5. Para ello el espesor de cada una de las láminas es de 1 mm el cual da un espesor total de 6 mm por encima del descrito en la norma BS 4994. El recipiente no tiene agujeros ya que en que este proyecto se quiere analizar la incidencia de la orientación de las fibras del laminado, a partir de ciertas configuraciones estudiadas.

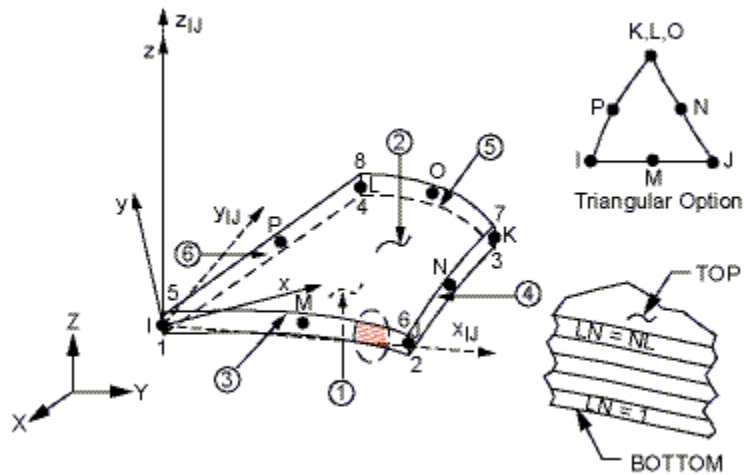
3.5. SIMULACION DEL RECIPIENTE SOMETIDO A PRESION INTERNA

Para estudiar y analizar las diferentes orientaciones del laminado, se desarrolla por medio de la herramienta computacional ANSYS® el modelo de la geometría seleccionada, y a esta se le añade por medio de este programa los datos tanto de las dimensiones de la figura 26, y las propiedades del material determinadas anteriormente. A partir de esto se analiza varias configuraciones diferentes, todas estas de seis capas o láminas, para el recipiente seleccionado.

El recipiente será analizado solo para configuraciones de ángulos de 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° y 90° , tanto para valores positivos como negativos ósea que se tendrá en cuenta -15° , -30° , -45° , -60° y -75° . Estas configuraciones se realizaron tanto para laminados simétricos, antisimétricos, de capas cruzadas y otras.

El tipo de elemento utilizado para evaluar estas configuraciones en ANSYS es el tipo SHELL99, el cual se utiliza para el análisis de aplicaciones laminadas de una geometría en forma de cascaron. SHELL99 tiene un tiempo de procesamiento menor que otros tipos de elementos utilizados en ANSYS, similares a este. Este tipo de elemento permite examinar laminados de 250 capas como máximo, en el cual el usuario puede introducir el espesor, material y ángulo de cada una de las capas en las constantes reales. Este tipo de elemento tiene seis grados de libertad en cada nodo: translaciones en las direcciones nodales en x, y y z rotaciones sobre los ejes nodales x, y y z. En la figura 27 se ilustra la geometría de SHELL99. (ANSYS 10.0 Documentation, 2005)

Figura 27. Geometría del tipo de elemento utilizado en la evaluación SHELL99

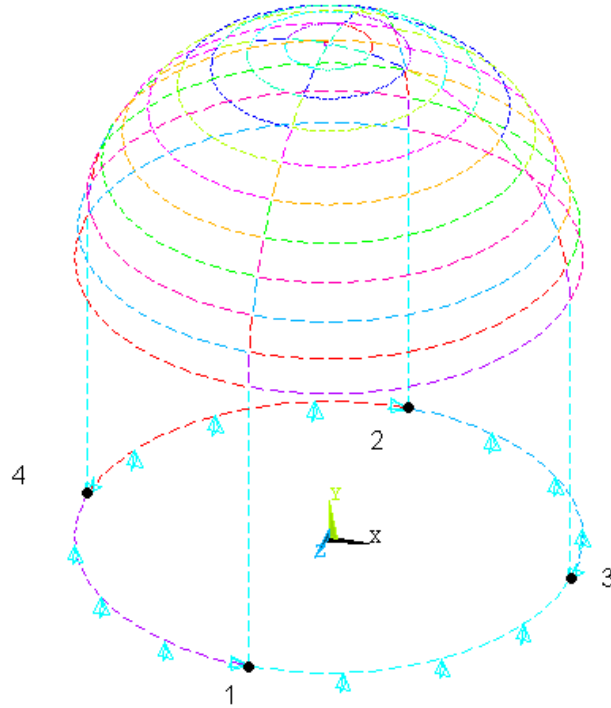


ANSYS 10.0 Documentation, 2005

Se define el tipo de material, como un material estructural lineal y ortotrópico, al cual se introduce las propiedades elásticas mencionadas en la selección del material.

El modelo por ser simétrico en su geometría, forma y cargas en la parte superior como inferior, puede evaluarse la mitad del recipiente para disminuir el tiempo de análisis, para esto se le aplican las restricciones necesarias permitiendo analizarlo como si el recipiente estuviera completo, colocando en las líneas y en los puntos adecuadas las restricciones en x, y y z. Tal como se ilustra en la figura 28, en el cual se puede ver que las líneas que forman la base inferior circular del recipiente son restringidas en la dirección y, se busca físicamente impedir el desplazamiento del recipiente hacia abajo, donde supuestamente estaría el resto del recipiente, en los puntos señalados con los números 1 y 2 se aplica una restricción en la dirección x y en los puntos 3 y 4 se aplica una restricción en la dirección z, se busca que en estos puntos el recipiente no se desplace en estas direcciones a las cuales se les ha aplicado esta restricción.

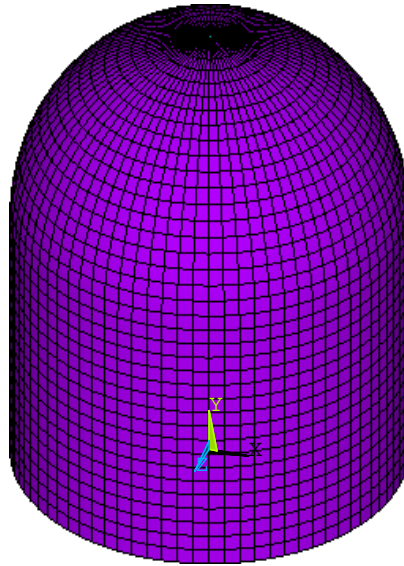
Figura 28. Restricciones en el modelo



La geometría generada está formada por cuarenta y cuatro áreas, cuarenta en la porción superior o esférica del recipiente, y las cuatro restantes en la porción inferior o cilíndrica. Todas ellas reciben la misma presión interna de 1,65 MPa, la cual se carga de igual manera en todas las áreas del recipiente.

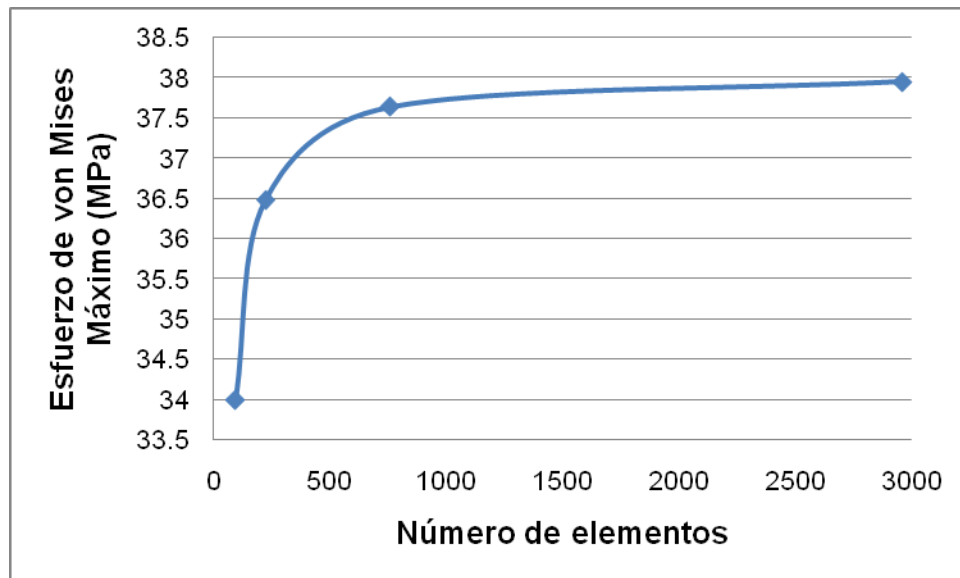
Después de realizado todo lo anterior se procede a continuación a generar el mallado correspondiente, el mallado es originado en todas las áreas generadas en el modelo. El tipo de malla utilizado para el análisis de la estructura es un mallado mapeado que a diferencia del mallado libre, el mapeado esta restringido en términos de la forma del elemento que lo contenga y no tiene ningún patrón en la malla específico aplicado a él, tiene un patrón regular. El área con un malla mapeada solo puede contener elementos triangulares (3 lados), o elementos cuadriláteros (4 lados), nunca los dos al mismo tiempo. En la figura 29 se muestra un mallado mapeado en el recipiente modelado. (ANSYS 10.0 Documentation, 2005)

Figura 29. Modelo del recipiente con malla mapeada



A continuación el análisis de convergencia para encontrar el número de elementos necesarios para generar el análisis posterior, en la figura 30, se gráfica los resultados del esfuerzo de von Mises máximo por cada número de elementos.

Figura 30. Análisis de la convergencia del número de elementos



El resultado del análisis de convergencia permite evaluar el modelo con un número de elementos mayor a 2000 elementos, para obtener el número de elementos necesarios, el tamaño de los elementos de la malla es de 10mm, que da un número de elementos de 2960, suficientes para realizar el análisis del modelo. Después de todo lo anterior se puede realizar el análisis estructural del modelo simulado, de este se obtendrán los resultados de los esfuerzos en este caso los esfuerzos de von Mises donde se obtiene la deformación máxima y los esfuerzos máximos y mínimos del objeto analizado. Como se debe conocer el alargamiento máximo del recipiente puede indicar que tan rígido es una estructura, a menor el alargamiento máximo, mayor es la rigidez del objeto.

4. ANALISIS DE EL RECIPIENTE PROPUESTO

4.1. ANALISIS Y RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES APLICADOS EN EL RECIPIENTE

Las configuraciones analizadas representan solo una pequeña porción de la cantidad de configuraciones posibles ya que se puede realizar casi un número infinito de ellas, es entonces que se realiza el estudio ciertas configuraciones, las cuales constan de seis láminas cada una de ellas será evaluada en los ángulos 0° , $\pm 15^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$, $\pm 75^\circ$ y 90° (la disposición de las fibras con los valores de 90° y -90° , son las mismas por ello solo se trabajó y analizó con el valor positivo de 90°) estos arreglos serán designados de acuerdo a los términos utilizados en el numeral 2.5.5.1., donde se indica la forma en que se hace la notación de las distintas configuraciones.

4.1.1. Análisis y resultados de configuraciones con la misma orientación en todas las capas

El análisis de la estructura se comienza orientando las seis capas del laminado del recipiente con el mismo ángulo, en este caso se obtuvo para los mismos valores positivos y negativos de la orientación de las fibras los mismos resultados de alargamiento máximo y de los esfuerzos de von Mises mínimo y máximo tal como se ve en la tabla 11, donde theta (θ) es el valor del ángulo. En el diseño se busca que los esfuerzos que se generan en sean uniformes en toda la estructura, está es la razón en la que se busca que la diferencia entre los esfuerzos máximos y mínimos, en este caso de von Mises sea la más pequeña posible. Con relleno de color se señala los valores del esfuerzo de von Mises máximo y mínimo que arrojan una diferencia menor entre estos dos, de los demás resultados de la tabla.

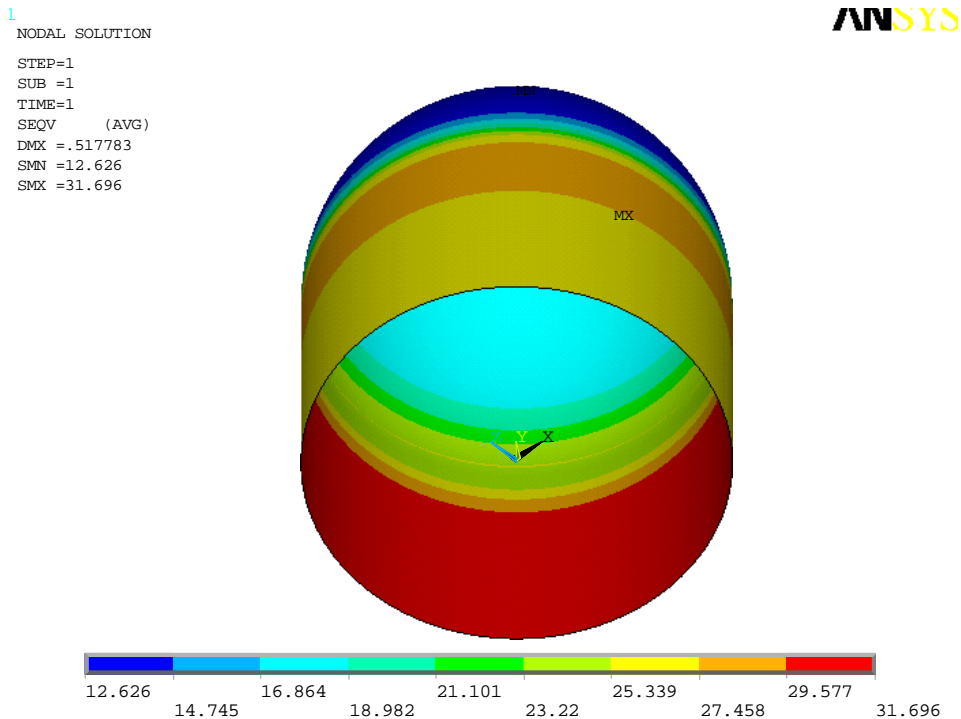
Los valores del alargamiento máximo, indican la rigidez del recipiente, a menor el valor del alargamiento más rígido, todos los resultados del alargamiento son menores de 1mm y es menor para la configuración $[\pm 60^\circ]_6$, lo cual representa que el alargamiento del recipiente no es muy significativo y por ello solo se le ha prestado atención a la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo.

En la tabla 11, se puede ver el comportamiento del esfuerzo de von Mises máximo que es el mismo comportamiento que la diferencia entre el esfuerzo de von Mises máximo y mínimo, del cual se observa que los resultados del esfuerzo de von Mises disminuye hasta la configuración de $[\pm 45^\circ]_6$ y de allí aumenta hasta la configuración $[90^\circ]_6$, en la figura 31 se ve la distribución del esfuerzo de von Mises en la configuración $[\pm 45^\circ]_6$, en está se obtuvo el mejor resultado en la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo, en esta figura se observa que el esfuerzo es máximo en las capas interiores en la sección cilíndrica del recipiente y mínima en la porción esférica exterior, el alargamiento del recipiente no es visible en la estructura pero es mayor en la dirección tangencial que en la dirección axial del recipiente.

Tabla 11. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta]_6$

Configuración	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[0^\circ]_6$	0.85764	2.901	35.718
$[\pm 15^\circ]_6$	0.781052	1.777	31.986
$[\pm 30^\circ]_6$	0.569966	5.333	31.72
$[\pm 45^\circ]_6$	0.517783	12.626	31.696
$[\pm 60^\circ]_6$	0.49365	12.156	46.897
$[\pm 75^\circ]_6$	0.509408	11.287	65.509
$[90^\circ]_6$	0.520437	11.326	72.099

Figura 31. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ]_6$



4.1.2. Análisis y resultados de configuraciones simétricas con orientaciones de la forma $[\pm\theta/\mp\theta/\pm\theta]_s$

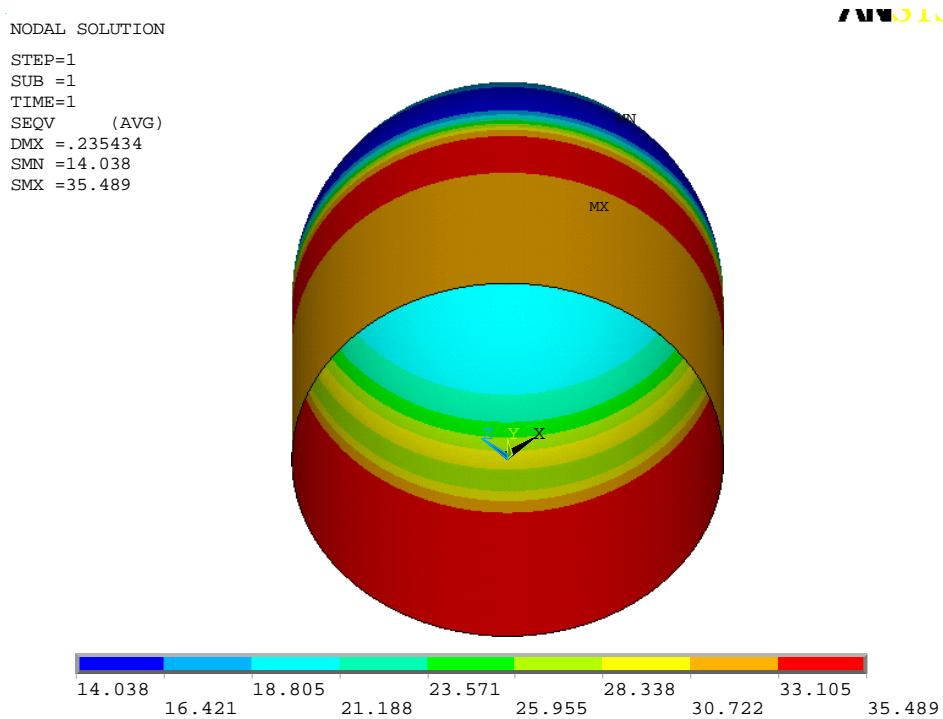
Al igual que los resultados de las configuraciones con la misma orientación de las capas, se puede ver en la tabla 12 que la diferencia de los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo es menor cuando θ es igual a 45° , y el alargamiento máximo es menor también para esta configuración. Para este tipo de configuraciones $[\pm\theta/\mp\theta/\pm\theta]_s$ el menor esfuerzo de von Mises máximo se obtiene cuando θ es igual a 30° , y al igual que las configuración de $[\pm\theta]_6$ la diferencia entre el esfuerzo de von Mises máximo y mínimo, disminuye hasta que theta es igual a 45° y de aumenta la diferencia entre los esfuerzos hasta que theta es igual a 90° . En la figura 32 se observa la distribución de los esfuerzos de von Mises en la mitad del recipiente en la configuración $[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ/\pm 45^\circ]_s$, donde el esfuerzo de von Mises máximo se

presenta en la sección cilíndrica del recipiente y el mínimo se encuentra en la sección esférica externa del mismo.

Tabla 12. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta/\mp\theta/\pm\theta]_S$

Configuración	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[\pm 15^\circ/\mp 15^\circ/\pm 15^\circ]_S$	0.770777	3.278	34.297
$[\pm 30^\circ/\mp 30^\circ/\pm 30^\circ]_S$	0.493407	1.16	33.105
$[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ/\pm 45^\circ]_S$	0.235434	14.038	35.489
$[\pm 60^\circ/\mp 60^\circ/\pm 60^\circ]_S$	0.383172	8.53	60.63
$[\pm 75^\circ/\mp 75^\circ/\pm 75^\circ]_S$	0.48746	9.034	71.259

Figura 32. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ/\pm 45^\circ]_S$



4.1.3. Análisis y resultados de configuraciones con orientaciones de la forma

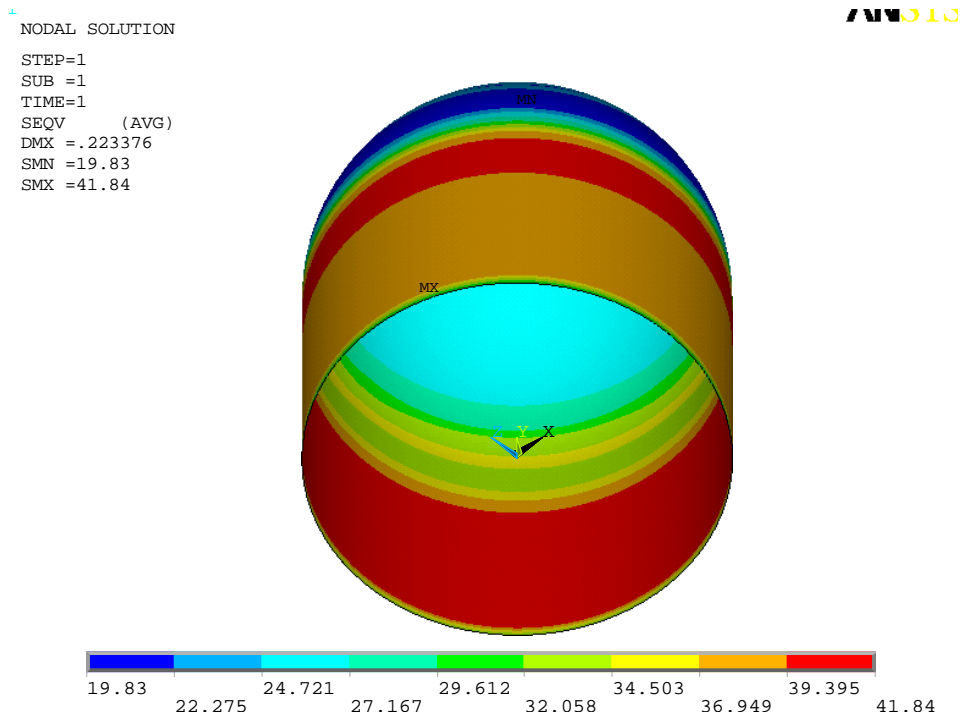
$$[\pm\theta/\mp\theta]_3$$

Para esta clase de configuración (llamadas antisimétricas, ver numeral 2.5.3.) al igual que los otros dos tipos de configuraciones vistos anteriormente se obtuvieron resultados del alargamiento máximo y de los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo, los cuales pueden ser observados en la tabla 13. La diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo se obtuvo cuando theta es igual a 45°, en este tipo de configuración el valor de los esfuerzos de von Mises máximos y la diferencia entre los esfuerzos, son mayores con respecto a las dos configuraciones de las tablas 11 y 12, con igual valor de theta. En la figura 33 se observa la distribución de los esfuerzos de von Mises para medio recipiente. Se observa en la figura que al igual que las configuraciones anteriores el esfuerzo de von Mises es máximo en la sección cilíndrica y mínimo en la sección esférica del mismo. Los resultados indican que el recipiente es más rígido en esta clase de configuraciones cuando theta es igual a $\pm 45^\circ$.

Tabla 13. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para las configuraciones del tipo $[\pm\theta/\mp\theta]_3$

Configuración	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[\pm 15^\circ/\mp 15^\circ]_3$	0.769864	4.07	35.329
$[\pm 30^\circ/\mp 30^\circ]_3$	0.489024	3.014	39.823
$[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ]_3$	0.223376	19.83	41.84
$[\pm 60^\circ/\mp 60^\circ]_3$	0.377992	11.999	61.248
$[\pm 75^\circ/\mp 75^\circ]_3$	0.485687	11.225	71.726

Figura 33. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/\mp 45^\circ]_3$



4.1.4. Análisis y resultados de configuraciones de capas cruzadas

Como se explica en el numeral 2.5.2.2., las configuraciones se alternan los ángulos de 0° y 90° en el laminado, a continuación en la tabla 14, se observa los resultados del alargamiento, y de los esfuerzos de von Mises máximos y mínimos para las dos configuraciones posibles de este tipo. En las cuales los resultados entre las dos no son similares entre si, lo cual sería lo que se podría esperar de estos dos, pero la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo si, son similares, y esta diferencia en comparación a los de las anteriores configuraciones vistas es de las más altas encontradas. El alargamiento entre las dos configuraciones no ofrece una diferencia significativa entre estas.

Tabla 14. Resultados del alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo para configuraciones de capas cruzadas

Configuración	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[90^{\circ}/0^{\circ}]_3$	0.187189	10.534	60.107
$[0^{\circ}/90^{\circ}]_3$	0.169964	5.272	52.796

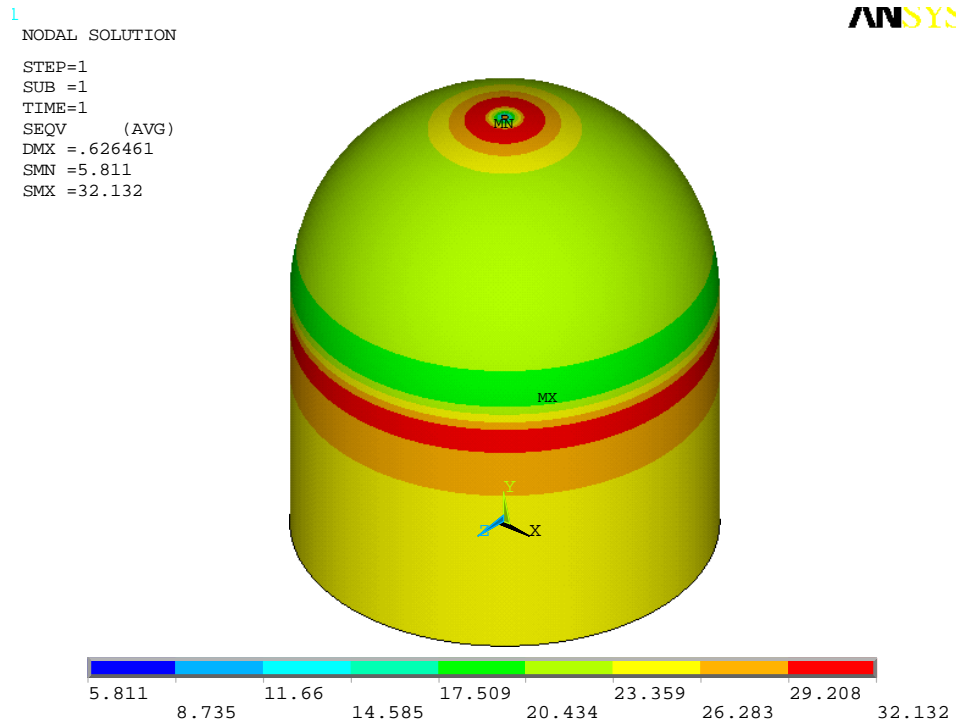
4.1.5. Análisis y resultados de otras configuraciones simétricas

En la tabla 15 se observan los resultados de alargamiento y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo de otras configuraciones simétricas, en las cuales se varía la posición de theta en cada con respecto a las otras capas que tienen como valor 0° , la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo es menor cuando theta es igual a $\pm 45^{\circ}$, y se encuentra en la primera y última capa ósea en la configuración $[\pm 45^{\circ}/0^{\circ}]_2$ s, tal como se señala en la tabla 15, lo mismo sucede cuando theta es igual a $\pm 15^{\circ}$, $\pm 30^{\circ}$ y $\pm 60^{\circ}$, donde la diferencia de los esfuerzos es menor también cuando se encuentra theta en la primera y última capa, en comparación cuando theta esta en otras capas. El recipiente es más rígido cuando theta es igual a 90° , tal y como lo indica el valor del alargamiento máximo que es menor en estas configuraciones. En la figura 34, se presenta la distribución de los esfuerzos de von Mises en la configuración $[\pm 45^{\circ}/0^{\circ}]_2$ s, se puede observar que el esfuerzo máximo esta tanto en la porción cilíndrica, y el esfuerzo de von Mises mínimo en la porción esférica del recipiente.

Tabla 15. Resultados del alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo en otras configuraciones simétricas

Configuración	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[0^{\circ}_2/\pm 15^{\circ}]_s$	0.828452	2.383	35.642
$[0^{\circ}/\pm 15^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.82943	2.764	35.846
$[\pm 15^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.831794	3.605	35.009
$[0^{\circ}_2/\pm 30^{\circ}]_s$	0.74302	1.38	35.286
$[0^{\circ}/\pm 30^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.745926	2.396	35.581
$[\pm 30^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.753773	5.749	33.077
$[0^{\circ}_2/\pm 45^{\circ}]_s$	0.611111	3.089	38.798
$[0^{\circ}/\pm 45^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.614849	1.266	38.824
$[\pm 45^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.626461	5.811	32.132
$[0^{\circ}_2/\pm 60^{\circ}]_s$	0.457766	8.257	41.951
$[0^{\circ}/\pm 60^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.460607	3.301	41.97
$[\pm 60^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.470512	3.902	36.665
$[0^{\circ}_2/\pm 75^{\circ}]_s$	0.328149	13.439	44.2
$[0^{\circ}/\pm 75^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.329677	10.894	44.197
$[\pm 75^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.335529	5.776	39.906
$[0^{\circ}_2/\pm 90^{\circ}]_s$	0.276138	15.574	45.028
$[0^{\circ}/\pm 90^{\circ}/0^{\circ}]_s$	0.27213	14.678	45.013
$[\pm 90^{\circ}/0^{\circ}_2]_s$	0.281199	8.849	41.005

Figura 34. Distribución de los esfuerzos de von Mises en el recipiente con la fibras orientadas a $[\pm 45^\circ/0^\circ]_S$



4.2. ANALISIS Y RESULTADOS DE LAS CONFIGURACIONES APLICADAS EN LAS SECCIONES DEL RECIPIENTE

El recipiente como se pudo observar en la figura 26, está dividido en tres secciones, una cilíndrica que es la porción media del recipiente y las otras dos secciones son esféricas, que está en los extremos del recipiente. Recordemos que se analizó la mitad del recipiente que por su simetría en la forma y en la geometría podría realizarse de esta manera.

En la producción de esta clase de recipientes se suele utilizar una orientación de las fibras diferente para cada una de las secciones, permitiendo obtener un recipiente más rígido o con una mejor distribución de los esfuerzos, es por ello que se realizó un análisis con diferentes configuraciones en ambas secciones, cilíndrica y esférica.

Para la sección cilíndrica se realizó un análisis aparte, ósea se modeló la mitad de la sección cilíndrica total con las restricciones pertinentes y con configuraciones donde theta es igual en todas las capas, según los resultados de la tabla 16, con un theta de 0° en la sección cilíndrica la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo es menor.

Se obtiene de igual manera con un theta de 0° un alargamiento máximo menor, esto se debe a que el recipiente tiende a deformar en mayor proporción en la dirección tangencial que en la dirección axial, y con esta orientación de 0° el recipiente es más rígido, ya que el módulo de elasticidad E_1 (45GPa) está orientado en esta dirección y es mayor que el resto de los módulos.

Tabla 16. Resultados del alargamiento máximo y de los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo con las fibras orientadas igualmente en todas las capas, en la sección cilíndrica

Configuración sección cilíndrica	Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[0^\circ]_6$	0.094292	32.784	35.304
$[\pm 15^\circ]_6$	0.239248	31.99	35.359
$[\pm 30^\circ]_6$	0.392651	30.808	34.946
$[\pm 45^\circ]_6$	0.47634	30.212	33.954
$[\pm 60^\circ]_6$	0.507023	29.935	33.06
$[\pm 75^\circ]_6$	0.514788	29.98	32.742
$[90^\circ]_6$	0.517455	30.147	32.805

De los resultados obtenidos se decidió utilizar para la sección cilíndrica la configuración $[0^\circ]_6$ y se analizará la sección esférica con los resultados de las tablas anteriores en las que se encontró la diferencia menor entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo. En la tabla 17, se observan los resultados obtenidos al analizar el recipiente con las fibras en la sección cilíndrica orientadas en 0° y con las diferentes configuraciones en la sección esférica, las cuales son en su mayoría las

configuraciones de las tablas 11, 12, 13 y 15 en las que se señala la menor diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo, y se evaluó además con una orientación en la sección esférica de 90°.

Se puede ver en la tabla 17, la combinación de configuraciones que arroja una diferencia menor entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo, se señala los valores de estos esfuerzos en color azul claro y este es el valor menor obtenido de todas las configuraciones analizadas en este trabajo. En esta combinación de configuraciones se obtiene además el menor valor de alargamiento máximo entre las demás de la tabla. Por lo cual se decide utilizar para la sección esférica una orientación de las fibras de $[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_S$ y en la sección cilíndrica una orientación de 0° para las seis capas. En la figura 35, se observa la distribución de los esfuerzos en esta combinación seleccionada, en la cual se observa que los esfuerzos de von Mises son mayores en la sección cilíndrica del recipiente y menores en la sección esférica, su valor máximo lo alcanza en el interior de la sección cilíndrica y el menor en la parte exterior de la sección esférica.

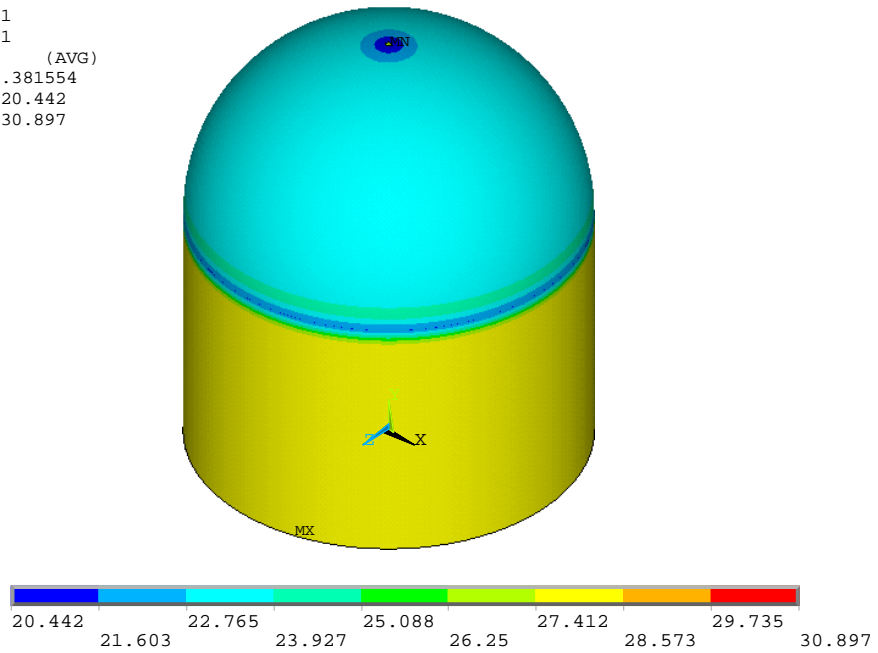
Tabla 17. Resultados de alargamiento máximo y esfuerzos de von Mises máximo y mínimo de la combinación de configuraciones en las secciones del recipiente

Configuración		Alargamiento máximo (mm)	Esfuerzo de von Mises	
Sección esférica	Sección cilíndrica		Mínimo (MPa)	Máximo (MPa)
$[45^\circ]_6$	$[0^\circ]_6$	0.717951	5.806	30.897
$[45^\circ/0^\circ]_2S$	$[0^\circ]_6$	0.465966	14.703	32.835
$[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_S$	$[0^\circ]_6$	0.385528	18.305	30.897
$[45^\circ/-45^\circ]_3$	$[0^\circ]_6$	0.381554	20.442	30.897

Figura 35. Distribución de los esfuerzos de von Mises con las fibras orientadas a $[0^\circ]_6$ en la sección cilíndrica y $[45^\circ/-45^\circ]_3$ en la sección esférica, en el recipiente simulado

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
DMX =.381554
SMN =20.442
SMX =30.897

ANSYS



5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

Para el diseño del recipiente modelado se elige para sección esférica una orientación de $[45^\circ/-45^\circ]_3$ y en la sección cilíndrica a $[0^\circ]_6$, véase resultados de la tabla 17 y figura 35, donde se observó que la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo es el menor valor encontrado de todas las configuraciones estudiadas, esto significa que la distribución de los esfuerzos es más uniforme con estas orientaciones de las fibras en las secciones del recipiente que en las otras estudiadas. Con esta combinación de orientaciones el alargamiento máximo del recipiente es de 0.38 mm, lo que representa el valor más pequeño de alargamiento máximo encontrado en la tabla 17, donde se analizan diferentes configuraciones para las secciones cilíndrica y esférica del recipiente. Aunque este valor de alargamiento máximo es bajo no representa una diferencia significativa con el resto de las configuraciones estudiadas, ya que para este parámetro de diseño se tenía un valor máximo de 1mm de tolerancia.

La principal desventaja con éstas configuraciones, sección esférica $[45^\circ/-45^\circ]_3$ y sección cilíndrica $[0^\circ]_6$, con respecto al resto de las configuraciones estudiadas, radica en el aumento de los costos de fabricación (por aumento en el tiempo de fabricación y su manufactura más complicada), ya que ambas secciones cilíndrica y esférica tienen diferentes orientaciones, y en la sección esférica se varía la orientación de las fibras en cada capa, de 45° a -45° y así sucesivamente en todo el laminado para las seis capas. La principal ventaja de utilizar estas orientaciones en el recipiente en relación a los demás estudiados, es que a esta orientación el recipiente se comporta más como un isotensoide lo que le permitiría soportar mayores cargas.

Al evaluarse solo la sección cilíndrica del recipiente con una orientación de las fibras de 0° , se obtuvo el menor valor de la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo, véase la tabla 16, lo que indica que para esta orientación la distribución de los esfuerzos se acerca a un modelo isotensoide, donde los esfuerzos tienden a ser iguales en las diferentes partes de la sección cilíndrica. El resultado del alargamiento para esta orientación, es también el más bajo, lo que indicó que el recipiente tiende a deformarse en mayor proporción en la dirección tangencial, que en la dirección axial, como se indica en el numeral 1.4.2., y al orientar las fibras en 0° se impide que la estructura se deforme en la dirección tangencial en esa proporción.

Las otras configuraciones estudiadas a lo largo del trabajo, tablas 11, 12, 13 y 15, sirvieron de apoyo para tomar la decisión, de que configuraciones utilizar en el diseño final, que fueron específicamente útiles como de apoyo para elegir que configuraciones analizar en la sección esférica del recipiente. En el análisis final, en la combinación de orientaciones para cada sección, se utilizó para la sección esférica las configuraciones que en las tablas 11, 12, 13 y 15 resultaron tener el menor valor en la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo entre las configuraciones similares a éstas, que resultaron ser la siguientes, $[45^\circ/0^\circ_2]_S$, $[45^\circ]_6$, $[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_S$ y $[45^\circ/-45^\circ]_3$; al combinarlas con la configuración de $[0^\circ]_6$ en la sección cilíndrica, los esfuerzos de von Mises máximo resultaron ser muy similares entre sí (valores de y 32.835 para la configuración $[45^\circ/0^\circ_2]_S$, y 30.897 para el resto de ellas) cambiando solo entre ellas el esfuerzo mínimo, el cual es más alto para la configuración seleccionada para la sección esférica que como se mencionó anteriormente es $[45^\circ/-45^\circ]_3$ cuyo valor fue de 20.442, dando que la diferencia entre los esfuerzos de von Mises máximo y mínimo fuera el menor encontrado, ver tabla 17.

Las normas consultadas BS4994 y ASTM D3299, de los tanques fabricados con materiales compuestos permiten desarrollar y diseñar los laminados utilizados en

la manufactura de recipientes sometidos a presión interna, a partir de esto el diseñador puede determinar el número de capas, espesor, y dimensiones, para el cual el diseñador debe conocer de antemano, el uso y el ambiente al que el recipiente estará sometido.

El método de fabricación del filamento bobinado permite fabricar recipientes que poseen mejores propiedades de resistencia y rigidez que los fabricados con múltiples capas (numerales 1.4.1 y 1.4.2), ya que las fibras se pueden desplazar más fácil y regularmente en toda la estructura fabricada, su único inconveniente es la dificultad para fabricar cierta clase de geometrías por el movimiento que realiza la maquina, además las fibras solo pueden ser puestas en cierto rango de ángulos, por el mismo modo en que se realiza el bobinado, no se puede orientar las fibras en ángulos demasiado altos.

Las diferentes propiedades elásticas de un mismo material resultan ser diferentes y dependen principalmente del fabricante de tal material (comparar tabla 9 con el numeral 3.3.2), ya sea por el tipo de fibra que se utiliza y su método de fabricación, así como los componentes químicos que hacen parte de la resina los cuales dependen de la formulación y procesamiento que realiza cada casa química fabricante de las resinas, así como el método utilizado para la unión de cada una de las fibras con su resina respectiva, también estas propiedades dependen del método de ensayo o prueba que se utiliza para determinar las propiedades ya que la orientación de las fibras varían de un ensayo en otro.

En el estudio y análisis de los materiales compuestos, ortotrópicos se necesitan al menos tener nueve propiedades elásticas, ecuación (31), del cual generalmente se obtienen por medios de ensayo experimental, cuatro o cinco de éstas, por esta razón es necesario suponer para esta clase de materiales, que son transversalmente isotrópico, ecuación (32), en los dos ejes diferentes al cual está ubicadas las fibras, esto permite por relaciones teóricas conocer el resto de las

propiedades elásticas necesarias para el estudio, en la mayoría de las ocasiones se deberá suponer una de las propiedades, como uno de los coeficientes de Poisson el cual no es dado o conocido, para este el porcentaje de diferencia entre un valor supuesto y el verdadero (no conocido) puede ser de de 2 al 5% de diferencia entre los resultados de los esfuerzos (véase el numeral 3.2).

La orientación de las fibras en las diferentes capas del laminado determinan o no la aparición de acoples, en los cuales la aparición de un esfuerzo o deformación ya sea cortante, de torsión, flexión y extensión puede estar ligado con otra deformación anterior, todo ello se debe a los valores que al final toman los coeficientes de la matriz de rigidez, el cual determina los esfuerzos y deformaciones que se producen en cada resultante de fuerzas y momentos, en el caso de los recipientes sometidos a presión pueden aparecer distintos acoples que dependen de la orientación de la fibras en el laminado (numeral 2.5).

5.2. RECOMENDACIONES

En el análisis de recipientes sometidos a presión interna fabricados con materiales compuestos, que pueden ser utilizados en condiciones y aplicaciones reales, es útil modelar el recipiente con todos los elementos que hacen parte de la estructura, ya sea aberturas, válvulas, bases, etc..., y simular todas las variables a las que el modelo esta sometido, (tales como presión, fuerzas externas, temperaturas, orientación de las fibras, manufactura ,etc.); además el diseñador puede utilizar diferentes métodos de optimización que le permiten obtener resultados que conlleven a una toma de decisiones, en la cual el diseñador pueda definir cual es el mejor modelo dependiendo de sus necesidades.

Es aconsejable no solo utilizar como variable principal de diseño la orientación de las fibras en las diferentes secciones del recipiente, sino también cambiar el espesor

del laminado en las diferentes secciones, como variable; en aquellas secciones donde el esfuerzo sea el mínimo puede disminuirse el espesor del laminado, de tal manera que se pueda obtener una distribución de los esfuerzos con mayor uniformidad en la estructura, disminuyendo además los costos de fabricación, al utilizar menor cantidad de material, otra de las variables que pueden ser modificadas para obtener un buen diseño es variar la geometría de las tapas del recipiente, dándoles otras formas tales como toriesférica o semielipsoidal, mejorando también la distribución de esfuerzos y consiguiendo estructuras isotensoides. Todo esto siempre y cuanto sea posible de acuerdo a las normas mencionadas en este trabajo, ver numerales 1.2.4; 1.3.4; y 1.3.5.

BIBLIOGRAFIA

AITEX, Manual de uso de fibras de uso técnico [pdf]. Octubre 2005. [online].
Disponible en: [http:// www.textil.org/extranet/inf/Revista18/pag19.pdf](http://www.textil.org/extranet/inf/Revista18/pag19.pdf)

ANSYS 10.0 Documentation. [CD_ROM]: ANSYS version 10.0. Estados Unidos.
2005. UP20060105.

ASTM, Standard specification for Filament – wound glass – fiber – reinforced
thermosets resin corrosion – resistant tanks. D 3299. 2000.

ASHBY, M. F. Technology in the 1990s: Advance materials and predictive design.
Philosophical transactions of the Royal Society of London. A322. 1987. pp393-497.

BRITISH STANDARD INSTITUTION. Design and construction of vessels and tanks
in refoirced plastics. BS 4997:1987. Section one. General. Section three. Design.
Londrés, Inglaterra, 1987.

HARVEY, John F. Theory and design of pressure vessels. Segunda edición.
Editorial Van Nostrand Reinhold. 1999. Nueva York. Estados Unidos. 615p. ISBN 0
442 00644 6.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TECNICAS. Compendio de tesis y otros
trabajos de grado. Quinta actualización. Bogotá. ICONTEC, 2007. 126p.

JONES, Robert M. Mechanics of Composite Materials. Aen Arbor, Estados Unidos:
Editorial Taylor and Francis, 1999. 270p. ISBN 1-56032-712-X

MALLICK, P. K. Composites engineering handbook. Ed. Marcel Dekker, Inc. New York. Estados Unidos. 1997. ISBN 0-8247-9304-8.

MIL-17. The Composite Material Handbook. Materials Science Corporation. 2000. Vol 3. Materials, usage, design and analysis. Technomic Publishing Co, inc. Lancaster, Pennsylvania. Estados Unidos. ISBN 1-56676-828-4.