

RECUPERACIÓN DE IMÁGENES TOMOGRÁFICAS
CON RUIDO APLICANDO WAVELETS

Jaime Burgos D

Manuel Higuera A

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Universidad EAFIT

Medellín

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar el título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director

Jairo Villegas G

Agradecimientos

A todas las personas que directa o indirectamente colaboraron en la realización de este proyecto, especialmente al profesor Jairo Villegas por su paciencia, orientación y dedicación.

RESUMEN

En este proyecto se exponen los conceptos teóricos en los que se basa la Tomografía Computarizada, aplicando el proceso conocido como suma de retroproyecciones filtradas, y se realiza una simulación del mismo teniendo en cuenta el ruido introducido en las mediciones (como ocurre en el proceso real). En la recuperación de las imágenes se aplican, con el fin de compararlos, dos métodos de filtrado, cada uno basado en un concepto matemático diferente; la Transformada Discreta de Fourier y las Wavelets. Para las pruebas, se utilizan dos imágenes que representan una aplicación médica y una industrial. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con cada método, para diferentes niveles de ruido y diferente número de proyecciones.

ABSTRACT

Theoretical mathematical concepts related to the filtered back-projections process are explained and their use in Computed Tomography is presented. A simulation of that process was done, taking into account incidental noise which is inherently part of the tomographic process. In order to reduce noise's effects on recovered images, two filtering methods were applied; one of them is based upon the Discrete Fourier Transform and the other on the Wavelets. Two test images that represent a medical and an industrial application were used in the simulation; both simulations used varying noise levels and a number of projections. Final results were compared.

Introducción

La Tomografía Computarizada es un proceso que ha revolucionado el diagnóstico médico e industrial, ya que permite obtener una imagen de la sección transversal de un cuerpo de manera no invasiva. Este proceso está basado en la Transformada de Radon y la imagen se obtiene midiendo la atenuación de la intensidad de los Rayos-X que pasan a través del cuerpo, los cuales que son emitidos desde muchas direcciones.

Cuando se realizan dichas mediciones, es inevitable la introducción de ruido que deteriora la calidad de la imagen obtenida, con el fin de disminuir ese deterioro se realiza un proceso adicional de filtrado, que tradicionalmente se ha fundamentado en la Transformada Discreta de Fourier. En el presente proyecto se propone la utilización un método alternativo basado en las Wavelets, y se comparan los resultados

obtenidos al aplicar separadamente los dos métodos. Los resultados se obtuvieron por medio una simulación hecha con el programa MATLAB.

En el capítulo 1 se exponen los conceptos matemáticos más importantes aplicados en el proyecto, como son la Transformada de Radon, su inversa, la Transformada de Fourier, y la Transformada Discreta de Fourier; en el capítulo 2 se exponen los conceptos básicos de Wavelets, entre ellos, la Transformada Wavelet Continua, Análisis Multiresolución (AMR) y la Transformada Wavelet Discreta; en el capítulo 3 se explica el proceso mediante el cual se obtienen las imágenes tomográficas, denominado, suma de retroproyecciones filtradas, así como los dos procesos de filtrado; finalmente, en el capítulo 4 se muestran algunos resultados y se dan las conclusiones obtenidas después de su análisis.

Índice general

1. Elementos de análisis funcional	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Introducción a la teoría de distribuciones	5
1.3. Transformada de Fourier	11
1.3.1. Serie de Fourier	13
1.4. Transformada discreta de Fourier (DFT)	14
1.4.1. Transformada Rápida de Fourier (FFT)	16
1.5. La transformada de Radon	18
2. Introducción a las wavelets	25
2.1. Introducción	25

2.2.	Transformadas wavelets	27
2.2.1.	Transformada wavelet continua	27
2.2.2.	Transformada wavelet discreta	32
2.3.	Análisis Multirresolución	34
2.4.	Ecuación de escala	40
2.5.	Construcción de la función de escala	42
2.6.	Descomposición y reconstrucción	45
2.6.1.	Algoritmo de descomposición	45
2.6.2.	Algoritmo de reconstrucción	48
3.	Recuperación de imágenes tomográficas	51
3.1.	Tomografía Computarizada de Rayos X	52
3.1.1.	Transformada de Radon en \mathbb{R}^2	52
3.1.2.	Ley de Beer-Lambert	53
3.1.3.	Imágenes como representación de funciones	55
3.1.4.	Ecuación Polar de una recta	56
3.1.5.	Proyecciones	57
3.1.6.	Retroproyecciones	61
3.2.	Filtros	64
3.2.1.	Filtros análogos	64
3.2.2.	Filtros digitales	65
3.3.	Suma de retroproyecciones filtradas	69

3.4. Aplicación	71
3.4.1. Ruido	71
3.4.2. Reducción del ruido	74
4. Análisis de resultados	91
4.1. Para la imagen de prueba 1	92
4.2. Para la imagen de prueba 2	94
4.3. Conclusiones	99

CAPÍTULO 1

Elementos de análisis funcional

1.1. Preliminares

En este capítulo se presentará alguna terminología necesaria para la lectura de esta monografía. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis funcional tales como nociones sobre operadores lineales, teoría de distribuciones, transformadas de Fourier y de Radon. Las pruebas de los teoremas relacionados con estos temas serán omitidas, pero se pueden encontrar en algunos de los siguientes textos [2], [15], [22], [24], [51], [52].

Recuerde que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene $L_2(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones cuadrado-integrables, cuya norma es

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio se dota con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones (clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, acá

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$.

El espacio de las funciones localmente integrables, $L_{loc}^1(\Omega)$ se define por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in L_1(K), \forall K \text{ compacto de } \Omega\}.$$

La función característica del conjunto A , χ_A , se define por

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A; \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

También se utilizará la notación $I\{A\}$ para denotar esta función y la llaman función indicadora.

La expresión $f(x) = O(g(x))$ significa que existe una constante positiva M tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, siempre que $x \rightarrow x_0$. En otras palabras, si $g(x) \neq 0$ entonces $|\frac{f(x)}{g(x)}| \rightarrow M$, cuando $x \rightarrow x_0$. Se dice que f es de orden g cerca de $x = x_0$.

De manera análoga, la expresión $f(x) = o(g(x))$ significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

El soporte de una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, denotado $\text{sop}f$, se define como el conjunto $\text{sop}f = \overline{\{x \in D : f(x) \neq 0\}}$.

El espacio Euclídeo n -dimensional se denota por \mathbb{R}^n , y un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, se escribe como $x = (x_1, \dots, x_n)$; con el producto interno usual denotado por $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La esfera unitaria $(n-1)$ -dimensional se denota por S^{n-1} y $\omega \in S^{n-1}$ si $\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = 1$, con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. La ecuación $x \cdot \omega = p$, representa un hiperplano en el espacio \mathbb{R}^n . Si $x = (x_1, x_2)$, $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ y $p \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$x \cdot \omega = (x_1, x_2) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = p$$

representa la recta en forma normal en \mathbb{R}^2 .

Sea $F = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , X y Y espacios normados. Un operador lineal es una función $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, para cada $a, b \in F$ y cada $u, v \in X$. El operador T es continuo en u_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\|u - u_0\|_X < \delta \quad \text{entonces} \quad \|Tu - Tu_0\|_Y < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Si (1.1.1) se cumple para cada $u_0 \in X$ se dice que T es continuo en X . Si δ no depende del punto u_0 se dice que T es uniformemente continuo en X .

El operador T es acotado si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tu\|_Y \leq c\|u\|_X$ para cada $u \in X$.

Proposición 1.1.1. *El operador $T : X \rightarrow Y$ es continuo si y sólo si T es acotado.*

Demostración. Ver por ejemplo, [33, Th 2.7-9, p. 97]. □

Sean X y Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal, T es compacto si el conjunto $\{Tu : \|u\|_X \leq 1\}$ tiene clausura compacta en Y . Claramente, todo operador acotado de rango finito ($\mathcal{R}(T)$ es finito dimensional) es compacto.

$\mathcal{L}(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales y continuos (o acotados) de X en Y . $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma definida por

$$\|T\| := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|, \quad \text{para cada } u \in X, T \in \mathcal{L}(X, Y),$$

$aT + bS$ se define por $(aT + bS)u := aTu + bSu$, para cada $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $u \in X$ y cada $a, b \in F$.

Si $Y = F$ entonces $\mathcal{L}(X, F)$ se llama el dual topológico de X y se denota por X' , es decir, $X' = \mathcal{L}(X, F)$ sus elementos se llaman funcionales lineales continuos o formas lineales continuas sobre X . En consecuencia, $f \in X' \Leftrightarrow f : X \rightarrow F$ es una aplicación lineal y continua, es decir, $\|f(u)\| = |f(u)| \leq c\|u\|_X$, para cada $u \in X$ y $c > 0$. Es costumbre escribir $\langle f, u \rangle$ (o $\langle u, f \rangle$) en lugar de $f(u)$.

$$\|f\|_{X'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_X}.$$

Ejemplo 1.1.1. Sea $X = C[a, b]$, $f : X \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx$ para cada $g \in L_1([a, b])$, entonces $\langle f, \varphi \rangle$ define un funcional lineal y continuo sobre X .

En efecto,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \int_a^b |g(x)||\varphi(x)|dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \int_a^b |g(x)|dx = c\|\varphi\|_\infty.$$

No todos los funcionales lineales y continuos son de la forma

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

Por ejemplo, la “función” δ de Dirac definida en \mathbb{R} con las siguientes propiedades:

1. $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.
3. Para cada $\varphi \in C(\mathbb{R})$ se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Desde el punto de vista del “rigor” matemático esto carece de sentido. No es posible construir una función en el sentido ordinario que tenga esas propiedades. Sin embargo, Dirac observó que δ actuaba como un operador en las funciones continuas φ . Es decir, δ se puede definir de manera apropiada como un funcional lineal y continuo en el espacio de las funciones continuas $C(-a, a)$, esto es,

$$\delta : C(-a, a) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \mapsto \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Por tanto, δ actúa sobre funciones continuas de tal manera que produce un valor de la función en cero. El acotamiento de δ es inmediato,

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \sup_{-a < x < a} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_{\infty}.$$

1.2. Introducción a la teoría de distribuciones

En esta sección recogemos algunos resultados básicos sobre distribuciones. La teoría de distribuciones libera al cálculo diferencial de ciertas dificultades que provienen

de la no diferenciabilidad de ciertas funciones. Este hecho extiende el cálculo a una clase de objetos que se llaman distribuciones o funciones generalizadas.

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , el espacio de las funciones C^∞ y de soporte compacto contenido en Ω , lo denotaremos como $C_0^\infty(\Omega)$, esto es,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \text{ es un compacto contenido en } \Omega\},$$

donde $\text{sop } \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. Es usual denotar este espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ y se llama el espacio de las funciones de prueba. Si K es un compacto contenido en Ω entonces $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \subset K\}$.

Ejemplo 1.2.1. Una función típica de $\mathcal{D}(\Omega)$ es

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ k \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, la constante k se escoge de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$; $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y su soporte es la bola unitaria en \mathbb{R}^n , es decir, $\text{sop } \varphi = B_1(0)$.

Un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una n -tupla de enteros no negativos $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ es el orden del multi-índice; $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Además, si β es un multi-índice, $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ y $\alpha \geq \beta$ si y sólo si $\alpha_i \geq \beta_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, entonces definimos

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ y

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

Por ejemplo, si $\alpha = (1, 0, 3)$, $|\alpha| = 4$, $u = u(x, y, z)$ entonces

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^4 u}{\partial x^1 \partial y^0 \partial z^3} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3}.$$

CONVERGENCIA EN $\mathcal{D}(\Omega)$: Sea $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cuando $j \rightarrow \infty$ si

- a) existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que para cada j , $\text{sop} \varphi_j \subset K$
- b) $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ converge uniformemente en K , para cada α multi-índice.

La convergencia uniforme en K de la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j=1}^\infty$ significa que

$$\sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

Como todos las φ_j y φ se anulan fuera de K , entonces $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0$.

Una aplicación f es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$, si para cada sucesión $(\varphi_j)_1^\infty$ con límite φ , se tiene $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, cuando $j \rightarrow \infty$.

Definición 1.2.1. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . Una distribución es un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

En otras palabras, la aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ es una distribución si T es lineal y, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe una constante $C_K > 0$ y un entero no negativo m (depende de K) tal que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y para cada multi-índice α .

El espacio de todas las distribuciones se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$, el dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{C})$.

Si el entero m se puede escoger independiente del compacto K , la distribución se llama de orden finito en Ω y al menor entero m se le llama el orden de la distribución.

Ejemplo 1.2.2. Sea f una función localmente integrable en Ω , es decir, f es medible Lebesgue y en todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene $\int_K |f(x)|dx < \infty$. Le asociamos a f una aplicación $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. T_f está bien definida, pues para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$\int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)|dx = \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx \leq M \int_K |f(x)|dx < \infty,$$

donde $M = \max_{x \in K} |\varphi(x)|$. T_f es una distribución de orden cero. En efecto,

a) T_f es claramente lineal.

b) Si K es un compacto de Ω y $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &\leq \int_{\Omega} |f(x)||\varphi(x)|dx \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx \\ &= C_K \max_{x \in K} |\varphi(x)|, \end{aligned}$$

donde $C_K = \int_K |f(x)|dx$. Acá $m = 0$ (independiente de K), luego $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y es de orden cero.

T_f se dice que es una distribución que se representa por f . Cuando una distribución se representa por una función localmente integrable, se llama una distribución regular. En caso contrario, se llama una distribución singular.

Ejemplo 1.2.3. La aplicación $\delta_x : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y cada $x \in \mathbb{R}^n$, es una distribución singular de orden cero. En efecto, la linealidad es obvia, puesto que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\langle \delta_x, a\varphi + b\psi \rangle = (a\varphi + b\psi)(x) = a\varphi(x) + b\psi(x) = a\langle \delta_x, \varphi \rangle + b\langle \delta_x, \psi \rangle$. Si K es un compacto de \mathbb{R}^n y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces $|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)|$, acá $C_K = 1$ y $m = 0$.

Presentamos tres importantes propiedades de las distribuciones, multiplicación de una función por una distribución, derivación y convolución.

1. Multiplicación de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ por una distribución T : Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se define uT por $\langle uT, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle$, uT está bien definida ya que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $u \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
2. Derivada de una distribución: Si α es un multi-índice y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la derivada de T para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ por $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

Ejemplo 1.2.4. La función escalón unitario o de Heaviside $H(x)$ definida en \mathbb{R} por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

es una distribución regular representada por $T_H = H$ que satisface

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Su derivada en el sentido de las distribuciones es: $H' = \delta$.

En efecto,

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

3. Convolución de una función y una distribución: Primero recordemos la convolución de funciones. Sean f, g funciones continuas en \mathbb{R}^n y una de ellas tiene soporte compacto, su convolución $h = f * g$ se define por

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \tilde{f})(y)g(y)dy,$$

donde $(\tau_x f)(y) = f(y-x)$ y $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

En consecuencia, se justifica definir la convolución $T * \varphi$ de una distribución T y una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ como la función dada por $(T * \varphi)(x) := \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle$.

Se puede probar que $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nótese que $(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle = (\tau_x \tilde{\varphi})(0) = \varphi(x)$. Luego $\delta * \varphi = \varphi$.

Con el propósito de extender la transformada de Fourier a las distribuciones, definamos primero las funciones de decrecimiento rápido.

Definición 1.2.2. Una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es de decrecimiento rápido si para cada α y β multi-índices, existe una constante positiva M tal que $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq M$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

El conjunto de todas las funciones de decrecimiento rápido forma un espacio vectorial real (o complejo) y lo denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

CONVERGENCIA EN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: Una sucesión (φ_j) converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x) \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{R}^n cuando $j \rightarrow \infty$.

El dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ se llama espacio de las distribuciones temperadas.

El funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo si para cada sucesión $(\varphi_j)_j^\infty$ tal que $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.3. Transformada de Fourier

En esta sección se recordará la definición y algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Definición 1.3.1. Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\omega \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f en ω se define por $\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$.

Como $\int_{\mathbb{R}} |f(t)||e^{-it\omega}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$ se tiene que la transformada de Fourier está bien definida. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier y se denota por \mathcal{F} ($\mathcal{F}(f) = \hat{f}$). La función \hat{f} es continua y tiende a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue). Es claro que $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

En general \hat{f} no es una función integrable, por ejemplo, sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-it\omega} dt = \left[\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right] = \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} \notin L_1(\mathbb{R}).$$

Si $\hat{f}(\omega)$ es integrable, entonces existe una versión continua de f y se puede obtener la fórmula de inversión de Fourier

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.3.1)$$

La siguiente proposición recoge algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Proposición 1.3.1. Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces

$$1. \widehat{(T_x f)}(\omega) = e^{-i\omega x} \hat{f}(\omega), \text{ donde } (T_a f)(t) = f(t - a).$$

$$2. (T_x \hat{f})(\omega) = \widehat{(e^{ix(\cdot)} f)}(\omega)$$

$$3. \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

$$4. \text{ Si } \epsilon > 0 \text{ y } g_\epsilon(t) = g(\epsilon t) \text{ entonces } \hat{g}_\epsilon(\omega) = \epsilon^{-1} \hat{g}(\omega/\epsilon).$$

Demostración. Véase por ejemplo, [22] o [51] □

Otro resultado útil es el siguiente: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{fórmula de Plancherel}) \quad (1.3.2)$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \quad (\text{fórmula de Parseval}). \quad (1.3.3)$$

Por extensión, la transformada de Fourier se puede definir para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$. En virtud a que el espacio $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$. Luego, por isometría (excepto por el factor $1/2\pi$) se define \hat{f} para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, y las fórmulas (1.3.2) y (1.3.3) permanecen válidas para todo $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

Si f es tal que $\int_{\mathbb{R}} |t|^k |f(t)| dt < \infty$, para algún entero $k \geq 1$, entonces

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (1.3.4)$$

Recíprocamente, si $\int_{\mathbb{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < \infty$, entonces

$$(i\omega)^k \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f^{(k)})(\omega). \quad (1.3.5)$$

1.3.1. Serie de Fourier

Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} . Se escribirá $f \in L_p(0, 2\pi)$ si $f(t)\chi_{[0, 2\pi]}(t) \in L_p(0, 2\pi)$, con $p \geq 1$. Cualquier función f , 2π -periódica en \mathbb{R} , tal que $f \in L_2(0, 2\pi)$, se puede representar por una serie de Fourier convergente, $f(t) = \sum_n c_n e^{int}$ en $L_2(0, 2\pi)$, donde los coeficientes de Fourier son dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Se puede verificar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la serie, fórmula de sumación de Poisson,

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad (1.3.6)$$

converge casi para todo t y pertenece a $L_1(0, 2\pi)$. Además, los coeficientes de Fourier de $S(t)$ están dados por $c_k = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-k)$. En efecto, para ver la expresión

(1.3.6), basta probar que

$$\int_0^{2\pi} \sum_k |f(t + 2k\pi)| dt < \infty.$$

Para la segunda parte se calculan los coeficientes de Fourier de $S(t)$, que son los valores de la transformada de Fourier de f en los enteros. Esto es, sea

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi),$$

entonces h es 2π -periódica y además, sus coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) \right] e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(z) e^{-in(z-2k\pi)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-inz} dz = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Como consecuencia de la fórmula de sumación de Poisson tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (1.3.7)$$

donde f es una función tal que $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, continua, y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente.

1.4. Transformada discreta de Fourier (DFT)

Sea \mathcal{S}_N el conjunto de sucesiones periódicas de números complejos, con período fundamental N , cada elemento $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ en \mathcal{S}_N puede ser considerado como

una señal periódica $x[n] = x_n$ definida para valores discretos de tiempo, donde $x[n]$ es el valor de la señal en el momento $t = t_n$. Una sucesión x_n es periódica con período fundamental N , si $x_{n+N} = x_n$ para todo entero n .

Si $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ y $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ definimos la suma de x y y como $x+y$ y el producto por escalar como cx , en donde $(x+y)_n = x_n + y_n$ y $(cx)_n = cx_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{C}$. El conjunto \mathcal{S}_N forma un espacio vectorial bajo estas operaciones.

Sea $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$, la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de x es la sucesión $(\mathcal{F}_N \{x\})_k = \hat{x}_k$ donde

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

Si consideramos a x como la señal $x[n] = x_n$, la DFT de $x[n]$ se representa $x(k) = \mathcal{F}[x[n]]$. Hay que resaltar que la DFT de x también es periódica con período fundamental N , por lo tanto $\hat{x}_k \in \mathcal{S}_N$, y \mathcal{F}_N es un operador lineal de \mathcal{S}_N en \mathcal{S}_N .

Sea $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathcal{S}_N$ y $\mathcal{F}_N(x) = \hat{x}$ donde

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

entonces $x = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x})$ se denomina la Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT) y está definida por

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$$

La Transformada Discreta de Fourier cumple las siguientes propiedades:

- **Traslaciones:** Si $x \in \mathcal{S}_N$ y $z_n = x_{n-j}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{F}_N \{z\}_k = e^{-\frac{i2\pi jk}{N}} \mathcal{F}_N \{x\}_k$.
- **Convolución:** Si $x \in \mathcal{S}_N$ y $h \in \mathcal{S}_N$ la sucesión $y = (x * h)_n = \sum_{j=0}^{N-1} x_j h_{n-j}$ también pertenece a \mathcal{S}_N , se denomina la “convolución” de las sucesiones x y h y $\mathcal{F}_N \{x * h\}_k = \mathcal{F}_N \{x\}_k \mathcal{F}_N \{h\}_k$.

1.4.1. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Utilizando la notación de señales y de acuerdo con la definición de la DFT, podemos descomponer la suma de la siguiente manera, si N es una potencia de 2.

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} = \sum_{n \text{ pares}} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} + \sum_{n \text{ impares}} x[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] e^{-\frac{i2\pi k(2r)}{N}} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] e^{-\frac{i2\pi k(2r+1)}{N}}$$

si hacemos $g[n] = x[2n]$ y $h[n] = x[2n+1]$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] e^{-\frac{i2\pi k(2n)}{N}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{-\frac{i2\pi k(2n+1)}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{\frac{N}{2}}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] e^{-\frac{i2\pi kn}{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{i2\pi k}{N}}$$

y haciendo $W_N = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$ tendremos que $x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$

y

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn} W_N^k$$

sean $g(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$ y $h(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] W_{\frac{N}{2}}^{kn}$ entonces

$$x(k) = g(k) + h(k) W_N^k$$

donde $g(k)$ y $h(k)$ son periódicas con período fundamental $\frac{N}{2}$ y son las DFT de $g[n]$ y $h[n]$, que también son periódicas con período fundamental $\frac{N}{2}$. Por lo tanto para $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ podemos escribir $x(k) = g(k) + h(k) W_N^k$ y para los valores de k tales que $\frac{N}{2} \leq k \leq N - 1$ éstos se pueden expresar como $k = m + \frac{N}{2}$ con $0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$ entonces $x(m + \frac{N}{2}) = g(m + \frac{N}{2}) + h(m + \frac{N}{2}) W_N^{m + \frac{N}{2}} = g(m) + h(m) W_N^{m + \frac{N}{2}}$.

De manera similar $g(k)$ y $h(k)$ se pueden expresar como

$$g(k) = p(k) + q(k) W_{\frac{N}{2}}^k \quad \text{y} \quad h(k) = r(k) + s(k) W_{\frac{N}{2}}^k$$

donde $p(k)$, $q(k)$, $r(k)$ y $s(k)$, son las DFT con período fundamental $\frac{N}{4}$ de las señales $p[n]$, $q[n]$, $r[n]$ y $s[n]$ con el mismo período, y tales que $p[n] = g[2n] = x[4n]$, $q[n] = g[2n + 1] = x[4n + 2]$, $r[n] = h[2n] = x[4n + 1]$ y $s[n] = h[2n + 1] = x[4n + 3]$.

Si N es una potencia de 2, siguiendo este procedimiento podemos hallar los valores de $x(k)$ a partir de los de $x[n]$, como en la definición, pero realizando menos operaciones, lo que hace este método más eficiente desde del punto de vista computacional. De acuerdo con Bogges [7], si $N = 2^L$, para hallar $x(k) = \mathcal{F}[x[n]]$ aplicando la definición se requieren N^2 multiplicaciones, mientras que aplicando la FFT se quie-

ren aproximadamente $L 2^{L-1}$. Para $N = 2^3$, aplicando la definición se requieren 64 multiplicaciones mientras que aplicando la FFT se requieren 12.

1.5. La transformada de Radon

Para propósitos de este trabajo definiremos la transformada de Radon para funciones en \mathbb{R}^2 , con la natural extensión a funciones de \mathbb{R}^n , pero en algunos casos consideraremos funciones definidas en otros espacios, como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, véase por ejemplo, Helgason [24] o Natterer [42].

Sea f una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. La aplicación definida por la integral de línea de f a lo largo de todas las rectas L en el plano, se llama la *transformada de Radon* de f , siempre que la integral exista. De manera más concreta,

$$\mathcal{R}f(\omega, p) := \int_{x \cdot \omega = p} f(x_1, x_2) ds,$$

donde ds es la longitud de arco Euclídea. También denotaremos la transformada de Radon por $\mathcal{R}_\omega f(p)$. Si ahora introducimos un nuevo sistema de coordenadas por

una rotación de ejes por el ángulo θ , esto es, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ t \end{bmatrix}$ tenemos que $x_1 = p \cos \theta - t \text{sen } \theta$ y $x_2 = p \text{sen } \theta + t \cos \theta$, considerando a t como parámetro

real se tiene

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(-\text{sen } \theta)^2 + (\cos \theta)^2} dt = dt.$$

Por tanto,

$$\mathcal{R}f(\omega, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \theta - t \operatorname{sen} \theta, p \operatorname{sen} \theta + t \cos \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\omega + t\omega^\perp) dt,$$

donde $\omega^\perp = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$.

La aplicación $f \mapsto \mathcal{R}f$ se llama la transformación de Radon. Claramente $\mathcal{R}f$ es una función definida en $S^1 \times \mathbb{R}$, es decir, la familia de todas las rectas en \mathbb{R}^2 , con la obvia condición de compatibilidad $\mathcal{R}f(-\omega, -p) = \mathcal{R}f(\omega, p)$. Acá S^1 es la esfera unitaria en \mathbb{R}^2 , es decir, el círculo unitario.

Si consideramos la distribución δ de Dirac, $\delta(p - x \cdot \omega)$, que tiene su soporte en la recta $x \cdot \omega = p$, con el abuso usual del lenguaje, tenemos la extensión a todo \mathbb{R}^2

$$\mathcal{R}f(\omega, p) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(p - x \cdot \omega) dx = \langle \delta(p - x \cdot \omega), f(x) \rangle.$$

Para simplificar, escribiremos en varias ocasiones $\int f(x) \delta(p - x \cdot \omega) dx$, en lugar de $\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(p - x \cdot \omega) dx$.

Como la distribución δ es homogénea de grado -1 , entonces la transformada de Radon también lo es. En efecto, para $t \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(t\xi, tp) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(tp - tx \cdot \xi) dx \\ &= |t|^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta(p - x \cdot \xi) dx = |t|^{-1} \mathcal{R}f(\xi, p). \end{aligned}$$

Observe que si $t = -1$, se tiene $\mathcal{R}f(-\xi, -p) = \mathcal{R}f(\xi, p)$. También tenemos que si $\lambda = t\xi$ y $|\lambda| = t > 0$, entonces

$$\mathcal{R}f(\lambda, p) = \mathcal{R}f(t\xi, p) = |t|^{-1} \mathcal{R}f(\xi, p/t) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{R}f\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}, \frac{p}{|\lambda|}\right).$$

Calculemos la derivada de la transformada de Radon. Si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{R}f(\xi, p) = \int f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta(p - x \cdot \xi) dx, \quad j = 1, 2$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \delta(p - x \cdot \xi) = -x_j \delta'(p - x \cdot \xi) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - x \cdot \xi) = \delta'(p - x \cdot \xi).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{R}f(\xi, p) &= - \int f(x) x_j \delta'(p - x \cdot \xi) dx = - \frac{\partial}{\partial p} \int f(x) x_j \delta(p - x \cdot \xi) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial p} [\mathcal{R}(x_j f)](\xi, p). \end{aligned}$$

De otro lado, la transformada de Radon de la derivada se puede obtener así,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) (p) &= \int \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \delta(p - x \cdot \xi) dx = \xi_j \int f(x) \delta'(p - x \cdot \xi) dx \\ &= \xi_j \frac{\partial}{\partial p} (\mathcal{R}_\xi f)(p). \end{aligned}$$

Aplicando estos hechos al Laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ tenemos

$$\mathcal{R}_\xi(\Delta f)(p) = (\xi_1^2 + \xi_2^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} (\mathcal{R}_\xi f)(p).$$

Cuando ξ se restringe a un elemento $\omega \in S^1$, entonces

$$(\mathcal{R}\Delta f)(\omega, p) = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{R}f(\omega, p).$$

Esto significa que \mathcal{R} relaciona a Δ y $\frac{\partial^2}{\partial p^2}$ cuando los argumentos están restringidos a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Recordemos que τ_a denota la translación por a , es decir, $\tau_a f(x) = f(x - a)$, luego

$$\mathcal{R}(\tau_a f)(\omega, p) = \mathcal{R}[f(x - a)](\omega, p) = \mathcal{R}_\omega f(p - \omega \cdot a) = \tau_{\omega \cdot a} \mathcal{R}f(p).$$

Una propiedad útil e interesante en esta teoría, es la transformada de Radon de la convolución de las funciones f y g . Esto es, $\mathcal{R}_\omega(f * g) = \mathcal{R}_\omega f * \mathcal{R}_\omega g$, es decir, la transformada de Radon de la convolución, es la convolución de las transformadas de Radon. En efecto, sean f y g funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\omega(f * g)(p) &= \int (f * g)(x) \delta(p - x \cdot \omega) dx \\ &= \int \left[\int f(z) g(x - z) dz \right] \delta(p - x \cdot \omega) dx.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y = x - z$ y aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\omega(f * g)(p) &= \int f(z) dz \int g(y) \delta((p - z \cdot \omega) - y \cdot \omega) dy \\ &= \int f(z) \mathcal{R}g(\omega, p - z \cdot \omega) dz \\ &= \int f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}g(\omega, p - v) \delta(v - z \cdot \omega) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}g(\omega, p - v) dv \int f(z) \delta(v - z \cdot \omega) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\omega g(p - v) \mathcal{R}_\omega f(v) dv = (\mathcal{R}_\omega f * \mathcal{R}_\omega g)(p)\end{aligned}$$

luego $\mathcal{R}_\omega(f * g) = \mathcal{R}_\omega f * \mathcal{R}_\omega g$.

Nótese la diferencia con la transformada de Fourier, en donde la transformada de Fourier de la convolución, es el producto de las transformadas de Fourier.

La transformada inversa de Radon no sólo es de interés para desarrollar algoritmos de reconstrucción, sino que también es útil en el estudio local de la dependencia de los datos. Existen varios métodos para obtener la inversa de Radon, véase por ejemplo, Deans [15], Natterer [42] o Ramm y Katsevich [47]. Por motivos de completitud, haremos una corta descripción sobre la inversa siguiendo el trabajo de

Natterer.

El operador lineal potencial de Riesz, I^α , es importante en la obtención de la transformada inversa de Radon. Este operador se define por la expresión

$$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi), \quad \text{para } \alpha < n.$$

La transformada inversa de Radon para una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, está dada por

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# I^{\alpha-n+1} g, \quad \alpha < n$$

donde $g = \mathcal{R}f$ y $\mathcal{R}^\# h(x) = \int_{S^{n-1}} h(\omega, x \cdot \omega) dx$.

En efecto, al aplicar la transformada inversa de Fourier tenemos

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Al introducir coordenadas polares hiperesféricas $\xi = r\omega$ obtenemos

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1-\alpha} \hat{f}(r\omega) dr d\omega. \quad (1.5.1)$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}(r\omega) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, r)$ (véase [42, Theorem 1.1]).

Sustituyendo $\hat{f}(r\omega)$ en (1.5.1) se obtiene

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n+1/2} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, r) dr d\omega.$$

Al remplazar ω por $-\omega$ y r por $-r$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{R}f(\omega, r) = \mathcal{R}f(-\omega, -r)$, se obtiene la misma expresión con intervalo de integración $(-\infty, 0)$, en lugar de $(0, \infty)$,

$$I^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n+1/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^0 e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, r) dr d\omega.$$

Al sumar miembro a miembro estas fórmulas se obtiene

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1/2} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1-\alpha} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, r) dr d\omega.$$

Esta expresión se puede escribir como

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1} \int_{S^{n-1}} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irx \cdot \omega} |r|^{-(\alpha+1-n)} \widehat{\mathcal{R}f}(\omega, r) dr d\omega.$$

Observe que la integral interna se puede expresar en términos del potencial de Riesz

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1} \int_{S^{n-1}} I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}f(\omega, x \cdot \omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-n+1} \mathcal{R}^\# I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}f(x) \end{aligned}$$

al aplicar $I^{-\alpha}$ se obtiene $f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} \mathcal{R}^\# I^{\alpha+1-n} \mathcal{R}f$.

Nota 1.5.1. En \mathbb{R}^n con $n > 3$, las coordenadas polares hiperesféricas $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$ se definen por

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} &= r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \varphi \\ x_n &= r \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \dots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

donde $r \geq 0$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

El elemento de superficie sobre la esfera unitaria es

$$d\omega = (\text{sen } \theta_1)^{n-2} (\text{sen } \theta_2)^{n-3} \dots (\text{sen } \theta_{n-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi.$$

CAPÍTULO 2

Introducción a las wavelets

2.1. Introducción

El origen de la descomposición de una señal en wavelets está en la necesidad de conocer las características y particularidades de la señal en diferentes instantes de tiempo. La principal virtud de las wavelets es que permite modelar procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene porqué ser suave [1], [10], [13], [25], [40], [58], [59]. Una de las ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia

pero no en tiempo, esto es, el análisis en frecuencia obtenido del análisis de Fourier es insensible a perturbaciones que supongan variaciones instantáneas y puntuales de la señal como picos debidos a conmutaciones o variaciones muy lentas como tendencias. En otras palabras, si f es una señal (f es una función definida en todo \mathbb{R} y tiene energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$). La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ proporciona la información global de la señal en el tiempo localizada en frecuencia. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

y la integración es sobre todo tiempo (véase p.e. [7], [21], [44]). Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto [13], [39], [40], [57].

En este capítulo se presenta una introducción a la teoría wavelets, en particular se estudiará la transformada wavelet y el análisis multirresolución en $L_2(\mathbb{R})$. Con este concepto se ilustra como construir otras bases wavelets, y además, permite analizar funciones (señales) en $L_2(\mathbb{R})$ en varias escalas (niveles de resolución) [8], [10], [13], [56]. Para ello, se utiliza versiones escaladas de un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$. Para tal descomposición de una función $f \in L_2(\mathbb{R})$, sólo se necesitan los coeficientes de la expansión de f en dicho conjunto ortonormal.

2.2. Transformadas wavelets

El análisis wavelets es un método de descomposición de una función o señal usando funciones especiales, las wavelets. La descomposición es similar a la de la transformada de Fourier, donde una señal $f(t)$ se descompone en una suma infinita de armónicos $e^{i\omega t}$ de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$, cuyas amplitudes son los valores de la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

El análisis de Fourier tiene el defecto de la no localidad: el comportamiento de una función en un conjunto abierto, no importa cuán pequeño, influye en el comportamiento global de la transformada de Fourier. No se captan los aspectos locales de la señal tales como cambios bruscos, saltos o picos, que se han de determinar a partir de su reconstrucción.

2.2.1. Transformada wavelet continua

La teoría wavelets se basa en la representación de una función en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función fija ψ , que se llama la wavelet madre, en general no es senoidal. Esto es,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente. También se tiene de modo alterno un desarrollo en serie $f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ en donde se

suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

Definición 2.2.1. *Una wavelet ψ es una función cuadrado integrable tal que la siguiente condición de admisibilidad se tiene*

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2.2.1)$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de ψ .

Observación 2.2.1. Si además $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la condición (2.2.1) implica que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. En efecto, por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver p.e., [44]), $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ y la transformada de Fourier es continua, lo cual implica que $0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt$.

Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. La función dilatada y trasladada se define por

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Esta función se obtiene a partir de ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego, por traslación en b . Es claro que $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.

Definición 2.2.2. *Para $f, \psi \in L_2(\mathbb{R})$, la expresión*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2.2.2)$$

se llama la transformada wavelet de f .

Por la desigualdad de Cauchy, se ve que $\mathcal{W}_\psi f$ es una función acotada con $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$. Note también que $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$.

La transformada wavelet $\mathcal{W}_\psi f$ de f puede ser descrita en términos del producto de convolución. Recordemos que la convolución de dos funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ se define por $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz$. Observe que esta fórmula está definida para al menos todo $t \in \mathbb{R}$, pero $f * g$ no necesariamente está en $L_2(\mathbb{R})$. Usando la notación $\tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(-t)}$, se tiene $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = (f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)$. Note también que $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|}\tilde{\psi}(a\omega)e^{-i\omega b}$. Estos hechos se aplicarán en la prueba de la siguiente proposición, la cual establece la fórmula de Plancherel para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.1. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, las siguientes relaciones se tienen*

1. *Isometría:* $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}$
2. *Fórmula de inversión* $f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b)\psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$

Demostración. 1. Es fácil verificar que $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\tilde{\psi}(a\omega)\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)|^2 db \frac{da}{a^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a| |\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot)\tilde{\psi}(a\cdot))(\omega)|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\
&= C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = C_\psi \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Observe que se utilizó el teorema de Fubini y la fórmula de Plancherel para la transformada de Fourier.

2. Para simplificar los cálculos en la fórmula de inversión, suponga que $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1} \left(\hat{f}(\cdot) \tilde{\psi}(a \cdot) \right) (\omega) \psi_{a,b}(t) d\omega \\ &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega) \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

donde $g(b) := \psi_{a,b}(t)$. Ahora, la transformada inversa de Fourier de g es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(b) e^{i\omega b} db = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-ia\omega z} e^{i\omega t} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo e integrando respecto a $a^{-2} da$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = C_\psi f(t). \end{aligned}$$

□

Otro resultado de interés que se presentará en la siguiente proposición, es la fórmula de Parseval para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.2. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, se tienen*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} \frac{dad b}{a^2}$$

Demostración. Como $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)\}$ o de manera equivalente, $\mathcal{F}(f * \tilde{\psi}_{a,0})(\omega) = \sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a\omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db = |a| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega,$$

ahora, integrando respecto a $a^{-2} da$ se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\ &= C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) d\omega = C_{\psi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= C_{\psi} \langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

Nótese que se aplicó el teorema de Fubini y la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier.

En la siguiente proposición se listan algunas propiedades.

Proposición 2.2.3. *Sean ψ y φ wavelets y $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Entonces*

1. $\mathcal{W}_{\psi}(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \beta \mathcal{W}_{\psi} g(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{W}_{\alpha\psi + \beta\varphi} f(a, b) = \bar{\alpha} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \bar{\beta} \mathcal{W}_{\varphi} f(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{W}_{\psi}(T_c f)(a, b) = \mathcal{W}_{\psi} f(a, b - c)$, donde T_c es el operador traslación definido por $T_c f(t) = f(t - c)$.
4. $\mathcal{W}_{\psi}(D_c f)(a, b) = \sqrt{c} \mathcal{W}_{\psi} f(ca, cb)$, donde D_c es el operador dilatación definido por $D_c f(t) = \sqrt{c} f(ct)$.

2.2.2. Transformada wavelet discreta

La transformada wavelet continua introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $\mathcal{W}_\psi f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia de wavelets será ahora dada por

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Se utilizará la notación ψ_{jk} para denotar la wavelet ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, observe que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre si. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [8, 9, 10].

Definición 2.2.3. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver

[13] y [25] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (2.2.4)$$

en virtud de (2.2.3) y teniendo en cuenta que $f(t) = \sum_{j,k} d_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, donde $d_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Por lo tanto, para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ los coeficientes $d_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$ se llama la *transformada wavelet discreta* de f . En consecuencia, la expresión (2.2.4) se puede escribir en forma alterna como $f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t)$. Esta serie se llama representación wavelet de f .

Un ejemplo clásico es la wavelet de Haar, la cual se define por

$$\psi(t) = \chi_{[0, \frac{1}{2})} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

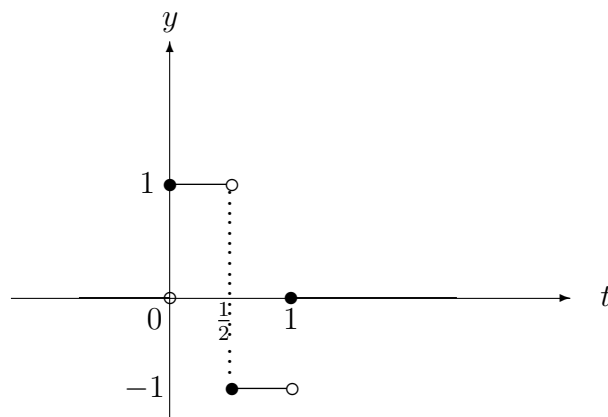


Figura 2.2.1

Observación 2.2.2. 1) $\psi_{jk}(t)$ es más apropiada para representar detalles finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $d_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuación sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .

2) Las wavelets gozan de la “propiedad zoom,” esto hace que las bases wavelet sean excelentes detectores de singularidades, en otras palabras, las singularidades producen coeficientes wavelet grandes.

3) La propiedad zoom es común en todos los sistemas wavelet, constituye la mayor diferencia con los sistemas de Fourier para la detección de singularidades. En problemas de teoría de señales, las singularidades llevan información esencial como la presencia de esquinas en las imágenes. Esto hace de las bases wavelet una herramienta muy útil para el procesamiento de imágenes, en detrimento del análisis de Fourier [8, 9, 39, 57].

4) Es interesante notar que $d_{j,k} = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre ψ .

2.3. Análisis Multirresolución

El sistema de Haar no es muy apropiado para aproximar funciones suaves. De hecho, cualquier aproximación de Haar es una función discontinua [13], [25]. Se puede probar que si f es una función muy suave, los coeficientes de Haar decrecerán muy

lentamente. Por tanto se pretende construir wavelets que tengan mejor propiedades de aproximación, y una forma de hacerlo es a través del análisis multirresolución (AMR) [13], [36], [37], [39], [40].

Sea $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, la familia de trasladadas de φ , $\{\varphi_{0k}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi_{0k}(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal (con el producto interno de $L_2(\mathbb{R})$). Acá y en lo que sigue $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) = D_{2^j}T_k\varphi(t)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $D_a f(t) = a^{1/2}f(at)$ y $T_a f(t) = f(t - a)$ son los operadores dilatación y traslación, respectivamente.

Se definen los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k) : \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}, \\ V_1 &= \left\{ h(t) = f(2t) : f \in V_0 \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ h(t) = f(2^j t) : f \in V_0 \right\}, j \in \mathbb{Z} \\ &= \text{gen}\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Note que φ genera la sucesión de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$. Suponga que la función φ se escoge de tal forma que los espacios estén encajados $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, y $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$, estos dos hechos fundamentales hacen parte de la definición de análisis multirresolución.

Definición 2.3.1. *Un análisis multirresolución (AMR) en $L_2(\mathbb{R})$ es una sucesión creciente de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, en $L_2(\mathbb{R})$,*

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \quad \text{tales que}$$

1. $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$,
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$,
4. $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t - k) \in V_0$, $j \in \mathbb{Z}$,
5. Existe una función $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de funciones $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_0 .

La función φ se llama función de escala. En el espacio V_{j+1} las funciones (señales) se describen con más detalle que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio “más grande”. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución [10], [39]. Es usual reunir estos “sintonizadores finos” en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$. Sin embargo, la elección de estos subespacios no es única. Pero se puede escoger a W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Es decir, $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$, $j \in \mathbb{Z}$, o de manera equivalente

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

Informalmente, esto quiere decir que si se tiene una función (señal) f a resolución 2^{j+1} y se proyecta a resolución inferior 2^j entonces

$$f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

acá P_j representa la proyección ortogonal en el espacio V_j donde se recoge la versión “suavizada” de f y la diferencia $f - P_j f$ representa el “detalle” de f , que está en

W_j y se expresa como $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$. Recuerde que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, W_j contiene los detalles en V_{j+1} que no se representan en V_j , y cada función (señal) en W_j es ortogonal a toda función en V_j (ver p.e., [7, 25, 56]).

El conjunto de funciones linealmente independientes φ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son las wavelets.

Por definición, el subespacio W_j es cerrado. Note también que si $f \in V_0$, entonces por 5 de la definición anterior se tiene $f(t) = \sum_k \langle f, T_k \varphi \rangle T_k \varphi(t)$. Además, por la ortogonalidad de $\{T_k \varphi(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\sum_k |\langle f, T_k \varphi \rangle|^2 = \|f\|_2^2$.

Observe que al aplicar la descomposición (2.3.1) en cada V_j se obtiene

$$\begin{aligned} V_N &= V_{N-1} \oplus W_{N-1} = V_{N-2} \oplus W_{N-2} \oplus W_{N-1} \\ &= \dots = V_{-N} \oplus \left(\bigoplus_{j=-N}^{N-1} W_j \right), \end{aligned}$$

y cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \oplus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j.$$

Usando las condiciones 1 y 2 de la definición de AMR se obtiene $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L_2(\mathbb{R})$.

Por definición, también los subespacios W_j satisfacen las condiciones 3 y 4 de la definición de AMR o de manera directa como se prueba en el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR y $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$. Entonces*

i) $f \in W_j \Leftrightarrow Tf \in W_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

ii) $f \in W_j \Leftrightarrow Df \in W_{j+1}$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f \in W_j$, esto significa que $f \in V_{j+1}$ y $\langle f, D_{2^j}T_k\varphi \rangle = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Por la condición 3 y 4 de AMR, la primera relación es equivalente a $Tf \in V_{j+1}$ y $Df \in V_{j+2}$. Además de la relación $TD_2 = D_2T_2$, se sigue inmediatamente, que la segunda relación es equivalente a $\langle Tf, TD_{2^j}T_k\varphi \rangle = \langle Tf, D_{2^j}T_{k+2^j} \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Por tanto $Tf \in V_{j+1} \cap V_{j+1}^\perp$, y así, $Tf \in W_j$.

La segunda relación también es equivalente con $\langle Df, D_{2^{j+1}}T_k\varphi \rangle$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, de lo cual se sigue que $Df \in V_{j+1}^\perp$ que junto con $Df \in V_{j+2}$ se obtiene $Df \in W_{j+1}$. \square

La siguiente proposición justifica los comentarios hechos arriba y es útil en futuros resultados.

Proposición 2.3.1. *Sea $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ un AMR con función de escala φ . Entonces para cada $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto de funciones $\{\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_j .*

Demostración. Para probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ genera a V_j , se debe ver que toda $f(t) \in V_j$ se puede escribir como combinación lineal de funciones de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. La propiedad 3 de la definición de AMR, implica que la función $f(2^{-j}t)$ pertenece a V_0 y por tanto $f(2^{-j}t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Haciendo la transformación $t \mapsto 2^j t$, se tiene que $f(t)$ es combinación lineal de $\{\varphi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Resta probar que $\{\varphi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Para ello se

debe ver que

$$\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jm} \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}$$

o equivalentemente, $2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \delta_{km}$. Para establecer esta igualdad, basta hacer el cambio de variable $z = 2^j t$, para obtener

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - k) \overline{\varphi(2^j t - m)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - k) \overline{\varphi(z - m)} dz = \delta_{km},$$

en virtud de la propiedad 5 de la definición de AMR. \square

Los siguientes resultados se utilizan en la existencia de los sistemas AMR, bajo hipótesis apropiadas. Para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$,

- a) $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$, donde P_j es la proyección ortogonal sobre el espacio V_j .
- b) $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$.

En efecto, puesto que $\|P_j\| = 1$, basta probar el resultado para funciones en $L_2(\mathbb{R})$ con soporte compacto. Si f tiene soporte en $[-a, a]$, entonces al aplicar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski se tiene

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \right\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{jk} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-a}^a f(t) 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) dx \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \right) 2^{j/2} \left(\int_{-a}^a |\varphi(2^j t - k)| dt \right)^2 \\ &= \|f\|_2^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-2^j a - k}^{2^j a - k} |\varphi(z)| dz \right)^2. \end{aligned}$$

Si $2^j a < 1/2$, entonces estas integrales están definidas sobre intervalos ajenos cuya unión se escribe $\Omega_j = \cup_{k \in \mathbb{Z}} (-2^j a - k, 2^j a - k)$, con $\cap_j \Omega_j = \mathbb{Z}$, el cual tiene medida cero. Por tanto, $\|P_j f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_{\Omega_j} |\varphi(z)|^2 dz \rightarrow 0$, $j \rightarrow -\infty$, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

2.4. Ecuación de escala

Puesto que el conjunto $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal de V_0 entonces cada $f \in V_0$ se puede expresar como $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi_{0n}$, $\varphi_{0n}(x) = \varphi(x - n)$. Ahora, como $\varphi \in V_0$, y $V_0 \subset V_1$, se tiene entonces $\varphi \in V_1$. Pero la propiedad de dilatación implica que $\varphi(2^{-1}\cdot) \in V_0$. En consecuencia, se puede expandir

$$\varphi(2^{-1}t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(t - n), \quad t \in \mathbb{R},$$

para algunos coeficientes $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. O de manera equivalente,

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2t - n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4.1)$$

en donde las constantes de estructura (los (g_n)) satisfacen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 < \infty$. La relación (2.4.1) se llama ecuación de escala. Los coeficientes g_n constituyen un filtro $\mathbf{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ asociado a la función de escala.

Ejemplo 2.4.1. Si $\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$, entonces claramente $\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1)$ es la ecuación de escala, con las constantes de estructura $g_0 = 1$, $g_1 = 1$ y $g_n = 0$, en otro caso.

A continuación se dan algunas propiedades de las constantes de estructura.

Proposición 2.4.1. *Los coeficientes de la ecuación de escala satisfacen las siguientes propiedades:*

$$g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - n)} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.4.2)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_{2n+k} = 2\delta_{0n} \quad (\text{delta de Kronecker}). \quad (2.4.3)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 = 2 \quad (2.4.4)$$

Si también $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi \neq 0$ y la ecuación (2.4.1) converge en $L_1(\mathbb{R})$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2. \quad (2.4.5)$$

Demostración. Puesto que $g_n/\sqrt{2}$ son los coeficientes de Fourier de $\varphi \in V_1$ con respecto a la base ortonormal $\sqrt{2}\varphi(2t - n)$, se tiene

$$\frac{g_n}{\sqrt{2}} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sqrt{2} \overline{\varphi(2t - n)} dt,$$

o lo que es lo mismo, $g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - n)} dt$. De la propiedad 5 de la definición de AMR se tiene $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t - n) \overline{\varphi(t)} dt = \delta_{0n}$. Al sustituir (2.4.1) y aplicar la identidad de Parseval y la ortogonalidad se tiene

$$\delta_{0n} = \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_m \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t - 2n - k) \overline{\varphi(2t - m)} dt = \frac{1}{2} \sum_{2n+k=m} g_k \bar{g}_m,$$

lo cual es lo mismo que (2.4.3). En particular, si se toma $n = 0$ en la última expresión, se obtiene $\sum_{k=m} g_k \bar{g}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 2$. Si, además, se tiene $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$

con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$, entonces al integrar (2.4.1) término a término se llega

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t - n) dt = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt,$$

al dividir por $\int_{\mathbb{R}} \varphi$ se obtiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2$. □

2.5. Construcción de la función de escala

Para construir la función de escala, es necesario encontrar los coeficientes g_n . Una forma de hacerlo es vía la transformada de Fourier, puesto que de manera directa es difícil (ver p. e., [13], [25]). En consecuencia, al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (2.4.1) se obtiene

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) P(e^{-i\omega/2}) \quad (2.5.1)$$

donde el polinomio P es dado por $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$.

Al iterar (2.5.1) se tiene $\hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = P(e^{-i\omega/2^2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^2}\right), \quad \hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) P(e^{-i\omega/2^2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^2}\right).$$

Continuando de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= P(e^{-i\omega/2}) \dots P(e^{-i\omega/2^n}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^n P(e^{-i\omega/2^j}) \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Para una función de escala dada φ , la ecuación precedente se tiene para cada n . En el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, la última ecuación se transforma

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}) \right) \hat{\varphi}(0).$$

Si φ satisface la condición de normalización $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, entonces $\hat{\varphi}(0) = 1$ y así,

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}). \quad (2.5.2)$$

Por tanto, si el producto $\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j})$ converge, entonces la función de escala queda determinada salvo un factor no nulo $\hat{\varphi}(0)$, que es su media. En consecuencia, la única función de escala asociada al filtro \mathbf{g} está dada por (2.5.2). Es decir, si la función P asociada al filtro \mathbf{g} cumple cierta propiedad de convergencia, entonces se tiene $\hat{\varphi}$ y, antitransformando, se obtiene φ . En resumen, se tiene

Proposición 2.5.1. *Sea \mathbf{g} un filtro y P el polinomio dado por $P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$.*

Si la función Φ definida por $\Phi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(e^{-i\omega/2^j})$ está en $L_2(\mathbb{R})$ y verifica $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = 0$. Entonces existe una función de escala φ asociada al filtro \mathbf{g} y determinada por $\hat{\varphi} = \Phi$ con $\int \varphi = 1$.

La condición sobre la ortonormalidad de la base $\{\varphi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, se puede expresar en términos de los coeficientes g_k . En otras palabras, el sistema $\{\varphi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si la transformada de Fourier de φ satisface $2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$. En efecto, como $\varphi(t - k)$ forma una base ortonormal en V_0 , entonces al aplicar el teorema de Plancherel (ver p.e., [44]) se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{0m} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(t - m)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\omega) \overline{\hat{\varphi}(\omega) e^{-im\omega}} d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{im\omega} d\omega \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{im\omega} d\omega = \int_0^{2\pi} e^{im\omega} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 \right) d\omega. \end{aligned}$$

Sea $F(\omega) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\omega} F(\omega) d\omega = \delta_{0m} \quad (*)$$

La función F es 2π -periódica ya que

$$F(\omega + 2\pi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi(k+1))|^2 = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi j)|^2 = F(\omega).$$

Como F es periódica, su serie de Fourier, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt}$, donde los coeficientes de Fourier son dados por $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) e^{-im\omega} d\omega$. Por tanto, la condición de orthonormalidad (*), es equivalente a $c_{-m} = \delta_{m0}$, lo cual a su vez es equivalente a $F(\omega) = 1$.

Como consecuencia de este resultado se tiene la siguiente condición necesaria sobre el polinomio $P(z)$ para la existencia de un AMR.

Corolario 2.5.1. *El polinomio $P(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n z^n$ satisface*

$$|P(e^{-it})|^2 + |P(e^{-i(t+\pi)})|^2 = 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.5.3)$$

Demostración. De los resultados anteriores se tiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ y $\hat{\varphi}(\omega) = P(e^{-i\omega/2}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \sum_{n \text{ par}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 + \sum_{n \text{ impar}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + (2k)2\pi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + (2k+1)2\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(|P(e^{-i(\frac{\omega}{2} + 2k\pi)})|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + |P(e^{-i(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi)})|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + (2k+1)\pi\right) \right|^2 \right) \\ &= |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) + 2k\pi\right) \right|^2 \\ &= |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi} + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $1 = |P(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 + |P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2$. □

Observe que (2.5.3) en términos de los coeficientes g_n está dado por

$$\frac{1}{4} \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_k e^{-i(n-k)t} + \frac{1}{4} \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_k (-1)^{n-k} e^{-i(n-k)t} = 1,$$

los términos impares se cancelan y por lo tanto se tiene

$$\sum_{n-k \text{ par}} g_n \bar{g}_k e^{-i(n-k)t} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{-2ij t} = 2$$

donde $c_j = \sum_{n-k=2j} g_n \bar{g}_k$, pero esto es válido para todo t , luego $c_j = 2\delta_j$. Por tanto,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \bar{g}_{n-2j} = 2\delta_j \text{ o equivalentemente } \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \bar{g}_{n-2m} = 2\delta_{k-m,0}.$$

2.6. Descomposición y reconstrucción

En esta sección se describirán algoritmos de descomposición y reconstrucción asociados a un AMR. Estos algoritmos se utilizarán junto con el análisis multirresolución en la descomposición y reconstrucción de señales en donde tanto la función de escala como la wavelet son funciones continuas.

2.6.1. Algoritmo de descomposición

Sean $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ los coeficientes de la función de escala φ y de la wavelet ψ , respectivamente, para $j, k \in \mathbb{Z}$, definidos por

$$c_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_{jk}(t) dt \tag{2.6.1}$$

$$d_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{jk}(t) dt, \tag{2.6.2}$$

donde $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$ y $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ son respectivamente, la función de escala y la wavelet madre.

Ahora bien, como $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$, entonces existe h_m tal que

$$\begin{aligned}\varphi_{jk}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{j/2} \varphi_{1m}(2^j t - k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi_{j+1, m+2k}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1, m}(t).\end{aligned}\quad (2.6.3)$$

Reemplazando este valor en (2.6.1), se obtiene

$$\begin{aligned}c_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1, m}(t) dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_{j+1, m}(t) dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} c_{j+1, m}.\end{aligned}\quad (2.6.4)$$

Como $V_0 \subset V_1$, para cada $\varphi \in V_0$ también se satisface $\varphi \in V_1$. Además, $\{\varphi_{1k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_1 , entonces existe una sucesión $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1k}(t), \quad (2.6.5)$$

por tanto, los elementos de la sucesión se puede escribir como $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1k} \rangle$ y $(h_k) \in \ell_2$. La ecuación (2.6.5) relaciona funciones con diferentes factores de escala.

Se conoce también como ecuación de dilatación. Por ejemplo, para la base de Haar se tiene

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si φ es la función de escala de un AMR, entonces la wavelet madre ψ se relaciona con φ por medio de la ecuación

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \varphi_{1k}(t). \quad (2.6.6)$$

Al sustituir (2.6.6) en (2.6.2) se obtiene

$$d_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p h_{1-p+2k} c_{j+1,p}. \quad (2.6.7)$$

Si los coeficientes de escala en cualquier nivel j son dados, entonces todos los coeficientes de la función escala de nivel inferior para $J < j$, se pueden calcular recursivamente usando la ecuación (2.6.4), mientras que todos los coeficientes wavelet de nivel inferior ($J < j$) se calculan aplicando (2.6.7).

Si $c_{j,\cdot}$ y $d_{j,\cdot}$ representan los coeficientes de la función de escala y wavelet en el nivel j , respectivamente, la Figura 2.6.1 representa el algoritmo de descomposición en forma esquemática. Por ejemplo, la flecha que relaciona los coeficientes c_{j-1} y c_{j-2} , indica que c_{j-2} se calcula sólo usando c_{j-1} .

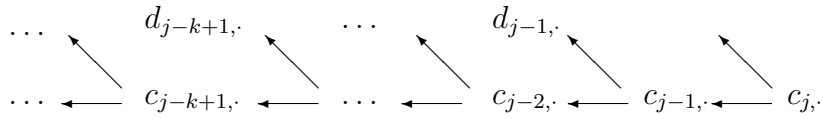


Figura 2.6.1

Observe que las fórmulas (2.6.4) y (2.6.7) comparten un hecho interesante, esto es, en cada ecuación, si el índice de dilatación k se incrementa en uno, todos los índices de (h_m) se desplazan en dos unidades; lo cual significa que si existe solamente un número finito de términos no nulos en la sucesión (h_m) , entonces aplicando el algoritmo de descomposición a un conjunto de coeficientes de escala no nulos en el nivel $j + 1$, se obtendrá sólo la mitad de coeficientes no nulos en el nivel j . Este proceso en teoría de señales se conoce como *downsampling*. Un resultado análogo se tiene para los coeficientes wavelet.

Para expresar lo anterior en la terminología de filtros, recuerde que la convolución de dos sucesiones en $\ell_2(\mathbb{Z})$ $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ y $y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$ se define por $(x * y)_m := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{m-k}$. En consecuencia, (2.6.4) se puede expresar como

$$c_{j-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2k-m} c_{j,m} = (\tilde{h} * c_j)_{2k}, \quad (2.6.8)$$

note que se reemplazó j por $j-1$ y para simplificar se utilizó la notación $\tilde{y}_m = y_{-m}$. Si se define el operador downsampling para la sucesión x como $((\downarrow 2)x)_k := x_{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces (2.6.8) se puede escribir $c_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{h} * c_j)$. De un procedimiento similar se obtiene, con $g_m = (-1)^m h_{1-m}$, $d_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{g} * c_j)$. Al algoritmo de descomposición, Mallat lo llamó *algoritmo piramidal* [36], mientras que Daubechies lo llamó *algoritmo de cascada* [13].

2.6.2. Algoritmo de reconstrucción

Recuerde que dado un AMR, el conjunto de funciones linealmente independientes φ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son las wavelets. En otras palabras, $\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son generadas, respectivamente, por φ y ψ , esto es, $\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ y $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ forman las bases ortonormales para V_j y W_j , respectivamente. Definiendo $a_{2k} = \langle \varphi_{10}, \varphi_{0k} \rangle$, $a_{2k-1} = \langle \varphi_{11}, \varphi_{0k} \rangle$,

$b_{2k} = \langle \varphi_{10}, \psi_{0k} \rangle$ y $b_{2k-1} = \langle \varphi_{11}, \psi_{0k} \rangle$, donde $a_k = h_{-k}$ y $b_k = (-1)^k h_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m-k} c_{j-1,m} + b_{2m-k} d_{j-1,m} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} c_{j-1,m} + (-1)^k h_{2m-k+1} d_{j-1,m}. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Observe que esta última expresión es casi la suma de dos convoluciones. La diferencia está en que el índice para la convolución es $k - m$ mientras acá aparece $k - 2m$. En otras palabras, (2.6.9) es una convolución pero sin los términos impares (falta $h_{k-(2m-1)}$). Para que (2.6.9) sea una convolución, se altera la sucesión original intercalando ceros entre sus componentes y obteniendo una nueva sucesión que contiene ceros en todas sus entradas impares. Este procedimiento se llama *upsampling*, denotado por $(\uparrow 2)$. Más explícitamente, si $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, entonces $((\uparrow 2)x)_k = (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$ o de manera equivalente,

$$((\uparrow 2)x)_k = \begin{cases} x_{k/2}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, $c_{j,k} = (((\uparrow 2)c_{j-1}) * h)_k + (((\uparrow 2)d_{j-1}) * g)_k$. La Figura 2.6.2 representa el algoritmo de reconstrucción en forma esquemática.

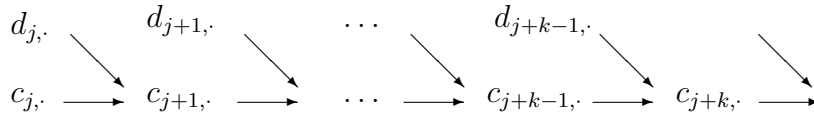


Figura 2.6.2

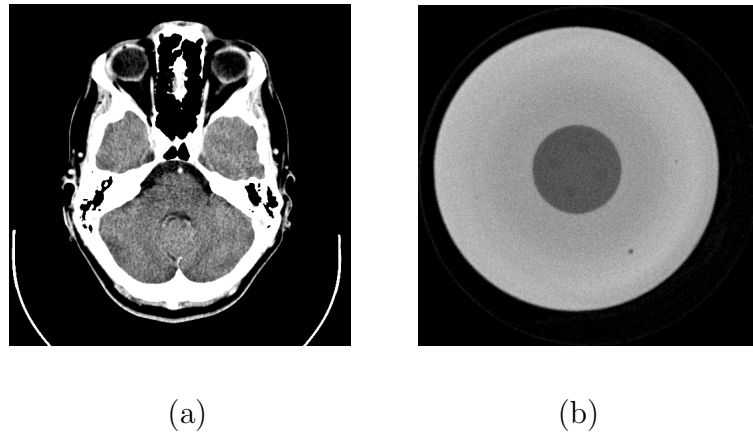
CAPÍTULO 3

Recuperación de imágenes tomográficas

En este capítulo se describe el proceso mediante el cual se obtienen imágenes tomográficas y los dos procesos de filtrado aplicados; el tradicional que aplica la Transformada Discreta de Fourier y el que utiliza Wavelets. Se utilizan dos imágenes de prueba con las que se comparará, en cada caso, la imagen recuperada. Cada una representa una aplicación diferente de la Tomografía computarizada; en medicina para detectar anomalías en los órganos internos, y en la industria para detectar fallas en piezas mecánicas.

3.1. Tomografía Computarizada de Rayos X

Es una imagen de la sección transversal de un objeto, obtenida a partir de las mediciones de la intensidad de los rayos X que pasan a través de él y que son emitidos desde muchas direcciones diferentes. Si $f(x, y)$ representa la densidad del cuerpo en cada punto (x, y) de una sección transversal del mismo. En la parte (a) de la siguiente Figura, se muestra la Tomografía de una sección de la cabeza [28], y en la parte (b), la de una pieza mecánica [29].



3.1.1. Transformada de Radon en \mathbb{R}^2

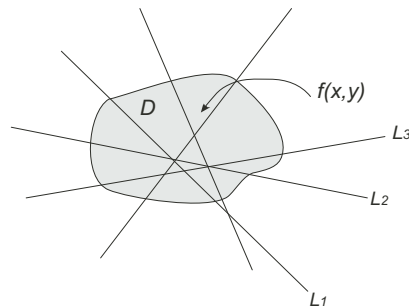


Figura 3.1:

Teniendo en cuenta la definición dada en 1.5, sea f una función definida sobre un dominio D de \mathbb{R}^2 , si L es cualquier recta en el plano, como se muestra en la Figura 3.1, la función que asigna a cada recta L la integral de f a lo largo de L , es la Transformada Bidimensional de Radon de f y se representa $\check{f} = \mathcal{R}f$, es decir

$$\check{f} = \mathcal{R}f = g(L) = \int_L f(x, y) ds$$

donde ds es un incremento a lo largo de L .

3.1.2. Ley de Beer-Lambert

Si un haz de rayos atraviesa un cuerpo cuyo coeficiente de absorción es μ , la intensidad del rayo disminuye en forma proporcional al coeficiente de absorción y a la distancia recorrida.

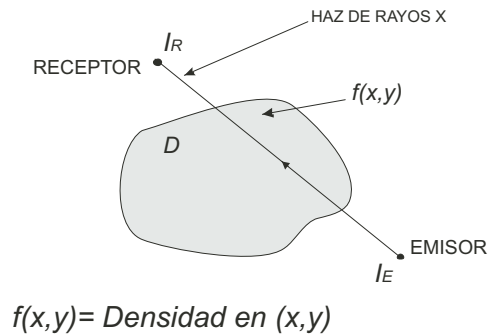


Figura 3.2:

Sea D un dominio finito bimimensional que representa un objeto capaz de absorber radiación, cuyo coeficiente de absorción varía de punto a punto en D y es nulo fuera

de D , si un haz de Rayos X atraviesa dicho objeto viajando sobre una línea recta L desde el emisor hasta el detector, como se muestra en la Figura 3.2, los rayos son atenuados por el material del objeto. De acuerdo con la Ley de Beer-Lambert, dicha atenuación es proporcional a la distancia recorrida a través del mismo y la constante de proporcionalidad es el coeficiente de atenuación, el cual se puede asumir como la densidad del material, si los Rayos X son monocromáticos (tienen solo una longitud de onda).

Representando la densidad como $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y la intensidad del haz de Rayos X como I , cuando dicho haz atraviere un pequeño segmento de longitud Δs , I disminuirá una cantidad ΔI , lo que se representa

$$\Delta I = -f(x, y) \cdot I \cdot \Delta s$$

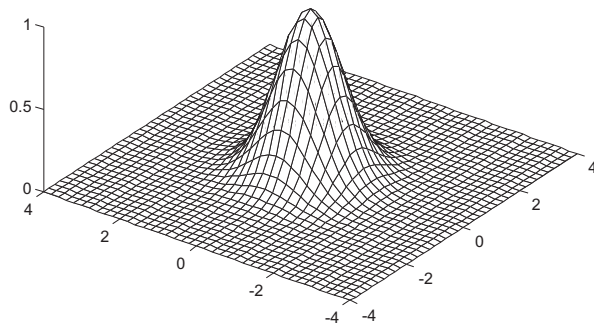
de donde

$$\ln \left[\frac{I_{(emisor)}}{I_{(detector)}} \right] = \int_L f(x, y) ds$$

que es una integral de línea sobre el segmento de recta comprendido entre el emisor y el detector. Esta integral es la Transformada de Radon de f sobre la recta L , y como los valores de I en el emisor y el detector son medidos, el valor de la integral es conocido. A partir de ellos podemos hallar los de $f(x, y)$ aplicando la Transformada Inversa de Radon.

3.1.3. Imágenes como representación de funciones

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional $f(x, y)$ donde x y y son las coordenadas en el plano y el valor de f para cualquier par (x, y) , es la intensidad o nivel de gris en ese punto. Si $f(x, y)$ representa la densidad de un cuerpo en el punto (x, y) , la imagen obtenida a partir de los valores de $f(x, y)$, representa la estructura interna de una sección de dicho cuerpo. En la parte (a) de la siguiente figura, se muestra la gráfica correspondiente a la función $z = f(x, y)$ con $z = e^{-x^2-y^2}$, y en la parte (b), la representación de la misma como una imagen.



(a)



(b)

Matemáticamente el objetivo de la Tomografía Computarizada es recuperar $f(x, y)$ a partir de dichas mediciones, aplicando la Transformada Inversa de Radon, para luego representarla como una imagen.

3.1.4. Ecuación Polar de una recta

La recta cuya distancia al origen es r y cuya perpendicular forma un ángulo θ con la horizontal se puede definir como

$$L(r, \theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta\}$$

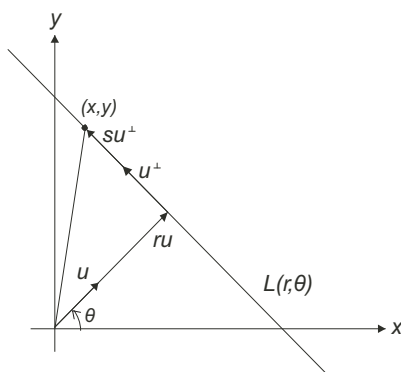


Figura 3.3:

Si definimos u como el vector unitario con dirección θ y u^\perp como el vector unitario perpendicular a u , como se muestra en la Figura 3.3, la recta $L(r, \theta)$ se puede expresar en forma paramétrica como

$$L(r, \theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = r u + s u^\perp\} \text{ para } s \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

ya que $u = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ y $u^\perp = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ la recta $L(r, \theta)$ se puede expresar como

$$L(r, \theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (r \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta)\} \quad (3.1.2)$$

para $s \in \mathbb{R}$. Para $\theta \in [0, 2\pi]$, el vector $u = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ describe una circunferencia unitaria, por lo tanto, podemos identificar el intervalo $[0, 2\pi]$ con la esfera unitaria S^1 .

3.1.5. Proyecciones

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) la Transformada de Radon de $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ se puede definir como

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r u + s u^\perp) ds$$

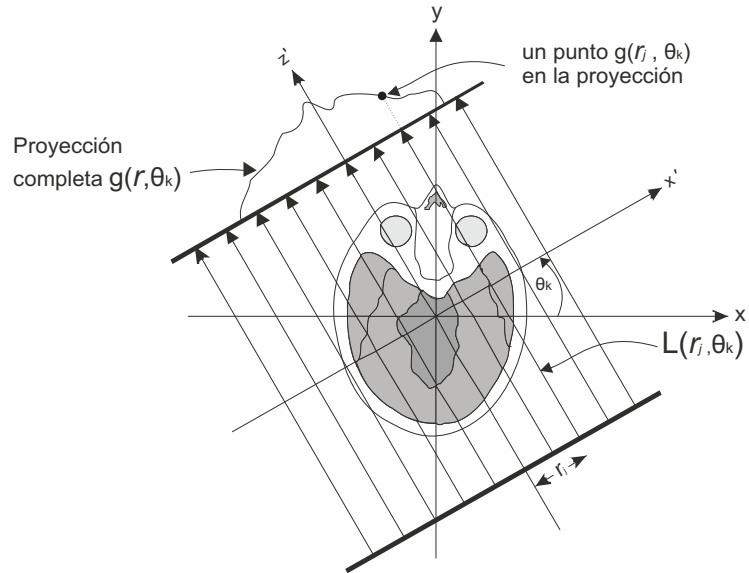
$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta) ds$$

Y de acuerdo con esta definición observamos que $\mathcal{R}f = g(r, \theta) = g(-r, \theta + \pi)$.

Para $r \in \mathbb{R}$ y un ángulo fijo θ_k , $g(r, \theta_k)$ se denomina la *proyección* de $f(x, y)$ para el ángulo θ_k . Si $f(x, y)$ representa la densidad en cada punto (x, y) de una sección transversal de dicho cuerpo, la proyección de $f(x, y)$ para el ángulo θ_k , representa la atenuación de los rayos que viajan sobre las trayectorias $L(r, \theta_k)$ para cada valor de r .

En la práctica, cuando hacemos pasar un haz de Rayos X paralelos a través de un cuerpo, y medimos su atenuación, los valores obtenidos representan dicha proyección

tal como se muestra en la siguiente figura



Proyección para un ángulo fijo

Teorema 3.1.1. *Teorema de la “Rebanada” de Fourier (Fourier Slice)*

Si $g(r, \theta_k)$ es la proyección de $f(x, y)$ para un ángulo fijo θ_k , la Transformada de Fourier unidimensional de $g(r, \theta_k)$ es

$$G(\omega, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r, \theta_k) e^{-i2\pi\omega r} dr$$

y la Transformada de Fourier bidimensional de $f(x, y)$ es

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Entonces

$$G(\omega, \theta_k) = F(u, v) \Big|_{u=\omega \cos \theta_k, v=\omega \sin \theta_k} = F(\omega \cos \theta_k, \omega \sin \theta_k)$$

Es decir que la Transformada unidimensional de Fourier de $g(r, \theta_k)$ es igual a la Transformada bidimensional de Fourier de $f(x, y)$ ($F(u, v)$), evaluada sobre la recta del plano $u-v$ que pasa por el origen con ángulo de inclinación θ_k . La demostración de este teorema se puede ver en [46].

De acuerdo con el Teorema 3.1.1, si conocemos $G(\omega, \theta_k)$ para todos los valores de θ_k con $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, también conocemos $F(u, v)$ para todas las rectas del plano $u-v$ que pasan por el origen, es decir para todos los puntos este plano, y a partir de $F(u, v)$ podemos recuperar $f(x, y)$ aplicando la Transformada Inversa Bidimensional de Fourier de $F(u, v)$, es decir

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} dudv$$

Si expresamos las variables u y v en Coordenadas Polares como $u = \omega \cos \theta$ y $v = \omega \sin \theta$ entonces $dudv = \omega d\omega d\theta$ y tenemos que

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta$$

y aplicando el Teorema de la Rebanada de Fourier

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta \quad (3.1.3)$$

donde $G(\omega, \theta)$ es la Transformada de Fourier unidimensional de la proyección $g(r, \theta)$.

De la ecuación (3.1.3) se tiene que

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta$$

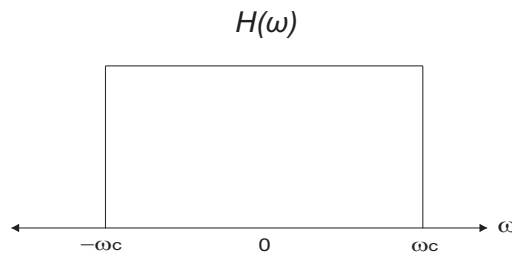
y haciendo $x \cos \theta + y \sin \theta = r$ tendremos que

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega r} d\omega \right] d\theta \quad (3.1.4)$$

nótese que la expresión entre corchetes es la Transformada Inversa unidimensional de Fourier de la función $\bar{G}(\omega) = |\omega| G(\omega, \theta) = \bar{G}(\omega, \theta)$.

$\bar{G}(\omega)$ se puede interpretar como la Transformada Unidimensional de Fourier de de una proyección $\bar{g}(r, \theta) = \mathcal{F}_1^{-1} [\bar{G}(\omega, \theta)]$ con el inconveniente que $|\omega| \rightarrow \infty$ cuando $\omega \rightarrow \infty$ y su Transformada inversa de Fourier estaría indefinida. En la práctica $|\omega|$ se aproxima tomando el producto de ella misma con otra función $H(\omega)$ que se anule fuera de un intervalo finito. A este tipo de funciones se les llama *funciones ventana* y la más elemental es la *ventana rectangular* definida como

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



Ventana rectangular

reemplazando $|\omega|G(\omega, \theta)$ por $H(\omega)|\omega|G(\omega, \theta) = Y(\omega, \theta)$ en la ecuación (3.1.4)

tendremos que

$$f(x, y) \cong \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega r} d\omega \right] d\theta$$

y como

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega, \theta) e^{i2\pi\omega r} d\omega = \mathcal{F}_1^{-1} [Y(\omega, \theta)] \quad \text{con } \theta \text{ constante}$$

si $y(r, \theta) = \mathcal{F}_1^{-1} [Y(\omega, \theta)]$ entonces

$$f(x, y) \cong \int_0^{\pi} y(r, \theta) d\theta \quad (3.1.5)$$

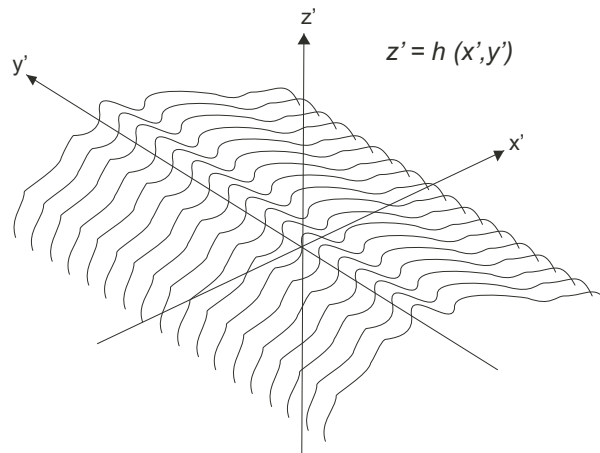
3.1.6. Retroproyecciones

Si se tiene una proyección $g(r, \theta_k)$ como se muestra en la Figura de la sección 3.1.5, el plano $x'-y'$ se obtiene rotando el plano $x-y$ un ángulo θ_k , y los planos $x'-y'$ y $x'-z'$ son perpendiculares. Se tiene que $g(r, \theta_k)$ está definida sobre el plano $x'-z'$ de tal manera que $x' = r$ y $z' = g(r, \theta_k) = g(x')$ (θ_k constante).

La función bidimensional $z' = h(x', y')$ definida sobre el plano $x'-y'$ que se obtiene copiando $z' = g(x')$ para todos los valores de y' , es decir,

$$h(x', y') = g(x') = g(r) = g(r, \theta_k) \quad \text{para todo } y'$$

se muestra en la siguiente Figura.



Como $r = x'$ y $r = x \cos \theta_k + y \sin \theta_k$, entonces con θ_k constante, $h(x', y')$ genera una función en el plano x - y que se denomina la *retroproyección* de $f(x, y)$ para el ángulo θ_k y que se representa $f_{\theta_k}(x, y)$, es decir

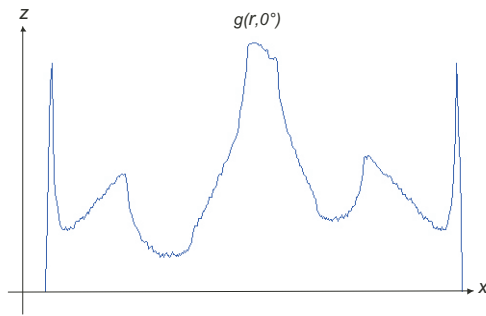
$$f_{\theta_k}(x, y) = g(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k, \theta_k)$$

para cada θ_k , la retroproyección correspondiente se puede representar como una imagen y para ilustrarlo utilizaremos una imagen de prueba denominada “Shepp-Logan Phantom”, que es una representación artificial de una sección transversal de la cabeza humana, se usa ampliamente para probar algoritmos de reconstrucción de imágenes tomográficas y se muestra en la siguiente figura.



Shepp-Logan Phantom

Si expresamos esa imagen como $f(x, y)$ y aplicamos la Transformada de Radon a todas las rectas cuya perpendicular forma un ángulo $\theta = 0^\circ$ con el eje horizontal, obtendremos la proyección de $f(x, y)$ para $\theta = 0^\circ$, es decir $g(r, 0^\circ)$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura parte (a), así como la imagen correspondiente a su retroproyección en la parte (b).

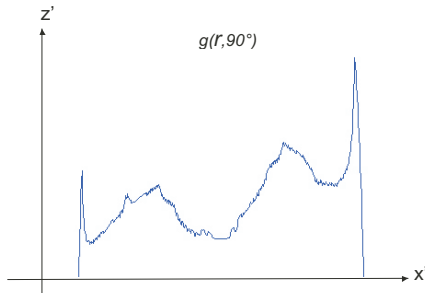


a-Proyección para $\theta = 0^\circ$

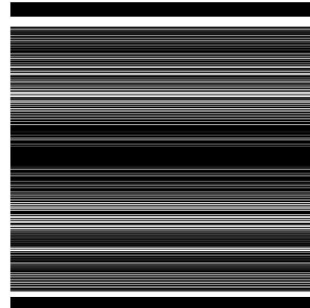


b-Imagen Retroproyección $\theta = 0^\circ$

Si aplicamos la Transformada de Radon a todas las rectas cuya perpendicular forma un ángulo $\theta = 90^\circ$ con el eje horizontal, obtendremos la proyección de $f(x, y)$ para dicho ángulo, es decir $g(r, 90^\circ)$. Su gráfica así como la imagen correspondiente a su retroproyección se muestran en la siguiente figura, partes (a) y (b).



a-Proyección para $\theta = 90^\circ$



b-Imagen Retroproyección $\theta = 90^\circ$

3.2. Filtros

De acuerdo con [7], un filtro se puede considerar como “una caja negra” o Sistema que recibe una señal de entrada, la procesa, y entrega una señal de salida, diferente de alguna manera. El proceso de “filtrado” consiste en separar la parte útil de la señal de la parte no deseada que es considerada como “ruido”.

3.2.1. Filtros análogos

Desde el punto de vista matemático, una señal análoga es una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ generalmente suave a trozos, y un filtro análogo es una transformación “ L ” que asigna a una señal de entrada (función de variable real) $x(t)$, la señal de salida $L[x(t)] = y(t)$. La variable “ t ” generalmente representa el tiempo.

Propiedades

Linealidad: Para que el filtro sea *lineal* debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $L[x(t) + h(t)] = L[x(t)] + L[h(t)]$
2. $L[c \cdot x(t)] = c \cdot L[x(t)]$ donde c es una constante.
3. para $x(t) = 0$, $L[x(t)] = 0$

Invarianza en el tiempo: Se dice que un filtro es *invariante en el tiempo* cuando para cualquier $x(t)$ y $a \in \mathbb{R}$ se cumple que si $y(t) = L[x(t)]$ entonces $L[x(t - a)] = y(t - a)$.

Si $h(t)$ es la respuesta de un filtro lineal e invariante en el tiempo a la señal (distribución) $\delta(t)$, entonces la respuesta del filtro a cualquier señal de entrada $x(t)$, es la convolución de las señales $x(t)$ y $h(t)$, es decir

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Si $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ y $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ representan la Transformada de Fourier de $x(t)$, $h(t)$ y $y(t)$ respectivamente, y además $y(t) = x(t) * h(t)$, entonces de acuerdo con la *propiedad de convolución* de la Transformada de Fourier, enunciada en 1.3.1 numeral 3, se tiene que $Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$. Como $y(t)$ es la señal de salida del filtro, $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ representa la Transformada de Fourier de la *señal filtrada*. Es por eso que un producto de dos funciones $X(\omega) H(\omega)$ se puede considerar como la Transformada de Fourier de una señal filtrada, la cual se puede expresar como $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega) H(\omega)]$.

3.2.2. Filtros digitales

De manera similar a como fueron considerados los filtros análogos en la sección 3.2.1, desde el punto de vista matemático, una señal digital es una sucesión, y un filtro digital es una transformación “ H ” que asigna a una señal de entrada $x[n]$, la señal de salida $H[x[n]] = y[n]$. La variable “ n ” generalmente representa valores discretos de tiempo.

En la práctica una señal digital (sucesión) $x[n]$, se obtiene tomando muestras de una

señal análoga (función de variable real) $x(t)$, en valores de tiempo equidistantes. El intervalo de tiempo entre dos muestras consecutivas se denomina período de muestreo y se representa T_s , también se define la frecuencia de muestreo, que indica el número de muestras que se toman cada segundo, y se representa f_s , por lo tanto $f_s = \frac{1}{T_s}$ y $x[n] = x(nT_s)$.

Consideremos que la señal $x[n]$ tiene duración finita, como ocurre en la mayoría de fenómenos reales, se puede suponer que $x[n] = 0$ para $n \geq N$ y $n < 0$, y para hallar la DFT de $x[n]$ se construye una señal periódica $\tilde{x}[n]$ tal que $\tilde{x}[n] = x[n]$ para $0 \leq n < N$ y $\tilde{x}[n + N] = \tilde{x}[n]$, donde N es el período fundamental. Si $\tilde{x}(k)$ representa la DFT de $\tilde{x}[n]$ entonces podemos obtener $\tilde{x}[n]$ a partir de $\tilde{x}(k)$, ya que $\tilde{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{x}(k)]$, y a partir de $\tilde{x}[n]$ podemos obtener $x[n]$.

Propiedades

Linealidad: Para que el filtro sea lineal debe satisfacer las siguientes condiciones:

1. $H[x[n] + h[n]] = H[x[n]] + H[h[n]]$
2. $H[c \cdot x[n]] = c \cdot H[x[n]]$ donde c es una constante.
3. Para $x[n] = 0$, $H[x[n]] = 0$

Invarianza en el tiempo: Se dice que un filtro es invariante en el tiempo cuando para cualquier $x[n]$ y $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que si $y[n] = H[x[n]]$ entonces $H[x[n - a]] = y[n - a]$.

Una señal digital, importante en la Teoría de Señales, es la denominada *impulso unitario*, ya que tiene propiedades similares a la distribución *delta* de Dirac y se define

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Si $h[n]$ es la respuesta de un filtro digital lineal e invariante en el tiempo, a la señal $\delta[n]$, entonces la respuesta del filtro a cualquier señal de entrada $x[n]$, está dada por

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

que es la convolución de las señales $x[n]$ y $h[n]$. Como en la práctica las señales toman siempre valores finitos y son de duración finita, la convergencia de las sumas está garantizada.

Si $x(k) = \mathcal{F}[x[n]]$, $h(k) = \mathcal{F}[h[n]]$ y $y(k) = \mathcal{F}[y[n]]$ representan la Transformada discreta de Fourier (DFT) de $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$ respectivamente, y además $y[n] = x[n] * h[n]$, entonces de acuerdo con la propiedad de convolución de la DFT, se tiene que $y(k) = x(k)h(k)$. Como $y[n]$ es la señal de salida del filtro, $y(k) = \mathcal{F}[y[n]]$ representa la DFT de la señal filtrada. Es por eso que un producto de dos sucesiones $x(k)h(k)$ se puede considerar como la DFT de una señal digital filtrada, y será equivalente a $y[n] = \mathcal{F}^{-1}[x(k)] * \mathcal{F}^{-1}[h(k)] = x[n] * h[n]$.

Espectro de Amplitud de una señal

Si $x[n]$ es una señal de duración finita y $\tilde{x}[n]$ la señal periódica construida a partir de $x[n]$, sabemos que si $\tilde{x}(k)$ es la DFT de $\tilde{x}[n]$ entonces

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}}$$

Además, teniendo en cuenta que tanto $\tilde{x}[n]$ como $\tilde{x}(k)$ son periódicas con período fundamental N , podemos obtener los N valores diferentes de $\tilde{x}[n]$, es decir, la señal $x[n]$, a partir de los N valores diferentes de $\tilde{x}(k)$ de la siguiente manera:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad \text{para } 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.2.1)$$

A partir de esta expresión podemos decir que $x[n] = x_n$ está escrita como combinación lineal de la base $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ donde $a_n = \left(e^{\frac{i2\pi k}{N}}\right)^n$ para $0 \leq k \leq N-1$ y los valores de $\frac{x(k)}{N}$ son los coeficientes de dicha combinación lineal respecto a esa base.

En teoría de señales; los elementos de la suma (3.2.1) se denominan armónicos de la señal $x[n]$, el valor $\left|\frac{x(k)}{N}\right|$ se denomina la magnitud, y el valor $\Omega_k = \frac{2k\pi}{N}$, la frecuencia angular del respectivo armónico. La gráfica que representa la magnitud de los armónicos en función de la frecuencia angular se denomina espectro de amplitud de $x[n]$, y los valores de frecuencia angular cercanos a $\pm\pi$ corresponden a frecuencias altas mientras que los cercanos a cero, corresponden a las bajas [43]. El espectro de amplitud siempre se considera entre $-\pi$ y π , lo que corresponde a valores de k entre $-\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2}$.

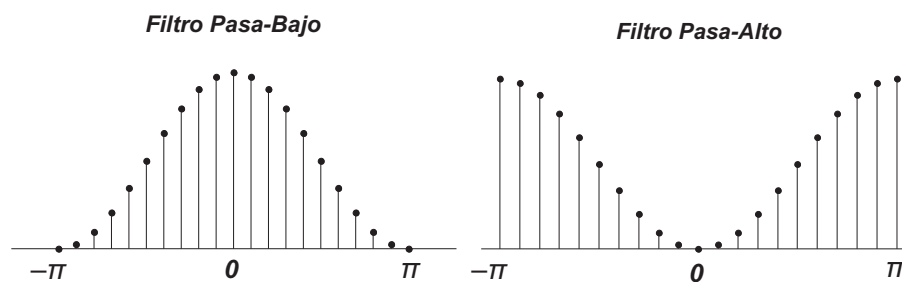


Figura 3.4: Espectro de Amplitud de los Filtros Pasa-Bajo y Pasa-Alto

Para un filtro H , si $h[n]$ representa la respuesta del filtro a la señal $\delta[n]$, es decir $h[n] = H[\delta[n]]$, el espectro de amplitud de $h[n]$ nos indica cómo el filtro modifica los armónicos de la señal que está filtrando. En la Figura 3.4 se muestra el espectro de amplitud de un filtro *pasa-bajo*, que atenúa la magnitud de los armónicos con frecuencias altas, y el espectro de amplitud de un filtro *pasa-alto*, que atenúa la magnitud de los armónicos con frecuencias bajas.

3.3. Suma de retroproyecciones filtradas

De la ecuación (3.1.5) y teniendo en cuenta que

$$y(r, \theta) = \mathcal{F}_1^{-1}[Y(\omega, \theta)] \quad \text{donde} \quad Y(\omega, \theta) = H(\omega) |\omega| G(\omega, \theta)$$

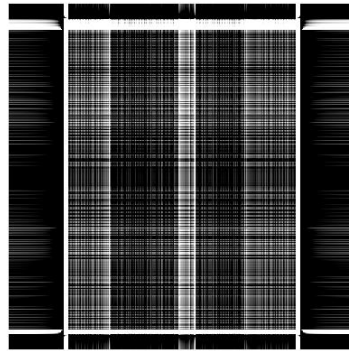
$y(r, \theta)$ se puede asumir como una proyección filtrada y tomando valores discretos de θ , la imagen recuperada se puede aproximar como

$$f(x, y) \cong \sum_{\theta_k=0}^{\pi} y(r, \theta_k)$$

y si $f_{\theta_k}(x, y)$ es la retroproyeccion correspondiente a $y(r, \theta_k)$ entonces

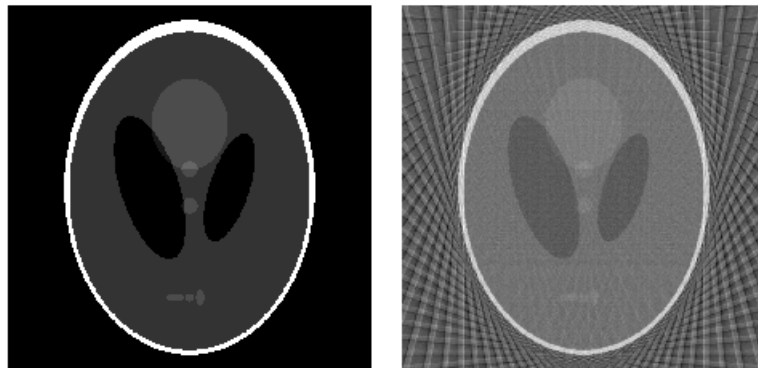
$$f(x, y) \cong \sum_{\theta_k=0}^{\pi} f_{\theta_k}(x, y)$$

Para ilustrar la suma de retroproyecciones filtradas, mostramos en la siguiente Figura la imagen obtenida al sumar las retroproyecciones para 0° y 90° de la imagen de prueba “Shepp-Logan Phantom”.



Suma de dos retroproyecciones

Si hallamos retroproyecciones para $0^\circ \leq \theta_k < 180^\circ$, tomando incrementos de 5° y luego las sumamos, la imagen obtenida aparece la siguiente figura, junto con la original



Imágenes original y reconstruida

3.4. Aplicación

En este proyecto se simula el proceso real mediante el cual se obtienen imágenes tomográficas, considerando tanto la aplicación médica como la industrial. Para este fin se implementaron rutinas con el programa MATLAB versión 2009 y en la realización de las pruebas se utilizaron las imágenes que se muestran a continuación.



Imagen de Prueba 1
Tomada de [28]

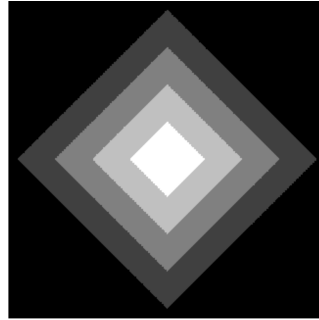


Imagen de Prueba 2

3.4.1. Ruido

En el análisis de un fenómeno físico, la diferencia entre el valor real y el valor medido se considera ruido, por lo tanto éste se puede considerar como una señal indeseada que se suma a la señal que tiene la información útil. Para un valor fijo θ_k la proyección con ruido se puede representar como

$$R_{\eta}f(r, \theta_k) = Rf(r, \theta_k) + \eta(r, \theta_k)$$

En tomografía existen varios factores que generan ruido en las imágenes. La reconstrucción de éstas está basada en la estimación de las integrales de línea con que se halla cada proyección, dicha estimación se determina midiendo la cantidad de

fotones que llegan a un dispositivo denominado receptor. Dependiendo de las condiciones del generador de Rayos-X, del receptor, de la sincronización del proceso y la digitalización de las mediciones, el ruido agregado a cada proyección alterará la imagen reconstruida en mayor o menor grado. Para conocer más acerca de este tema ver [23].

Como el ruido es introducido en cada proyección, vamos a simular este hecho sumando una señal aleatoria unidimensional a cada una de ellas. Dicha señal es conocida como ruido blanco, tiene media cero y una potencia que depende de su desviación estandar [31].

Densidad espectral del Ruido Blanco

De acuerdo con [32] el ruido blanco se puede representar como una sucesión $x[k]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ de valores aleatorios no correlacionados, con media cero y varianza σ^2 , es decir

$$E[x[k]] = 0$$

y

$$E[x[j]x[k]] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

tal sucesión es un proceso débilmente estacionario con función de autocovarianza

$$C[k] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

que satisface la condición $C[k] \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Tal sucesión tiene un espectro continuo y su densidad espectral está dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} C[k] = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad |\lambda| \leq \pi$$

es decir que la densidad espectral de tal sucesión tiene el mismo valor para todas las frecuencias, por lo tanto la señal de ruido afecta a todos los armónicos de la misma manera. Como la luz blanca se considera compuesta por una mezcla uniforme de todos los colores, una sucesión con densidad espectral constante es llamada *ruido blanco*.

Relación Señal a Ruido (SNR)

Potencia de una señal: Para una señal de tiempo discreto (sucesión) $x[n]$, la potencia promedio de dicha señal en el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$ está dada por

$$\frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

La razón entre la potencia de una señal y la potencia de la señal de ruido se denomina Relación Señal a Ruido y se representa SNR (signal to noise ratio), es decir, si P_x y P_r son la potencias de la señal $x[n]$ y de la señal de ruido $r[n]$ respectivamente

$$SNR = \frac{P_x}{P_r}$$

también es común expresar esta relación en decibelios

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_r} \right) dB$$

Para imágenes, si $f(x_m, y_n)$ representa la imagen original y $\tilde{f}(x_m, y_n)$ la imagen con ruido

$$SNR = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |f(x_m, y_n)|^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |f(x_m, y_n) - \tilde{f}(x_m, y_n)|^2} \quad (3.4.1)$$

en este caso las dos imágenes se toman como matrices de tamaño $M \times N$ y $SNR_{dB} = (10 \log_{10} SNR) \text{ dB}$, mediante este valor se cuantifica la calidad de la imagen tomográfica.

En nuestra simulación se trata de mejorar dicha calidad filtrando las proyecciones antes de obtener las retroproyecciones y la suma de éstas. El método de filtrado utilizado hasta ahora se basa en la aplicación de la Transformada Discreta de Fourier, en este proyecto se aplicará además otro método basado en la utilización de Wavelets, y se compararán los resultados obtenidos después de aplicar dichos métodos bajo algunas condiciones específicas.

3.4.2. Reducción del ruido

Se debe tener en cuenta que para poder procesar las imágenes en un computador, se debe trabajar con valores discretos de las proyecciones. Sea $g(r_j, \theta_k) = Rf(r_j, \theta_k)$ la señal de variable discreta que se obtiene tomando muestras de la proyección de la imagen $f(x, y)$ para θ_k , a continuación se expondrá cómo se realiza la reducción de ruido (filtrado).

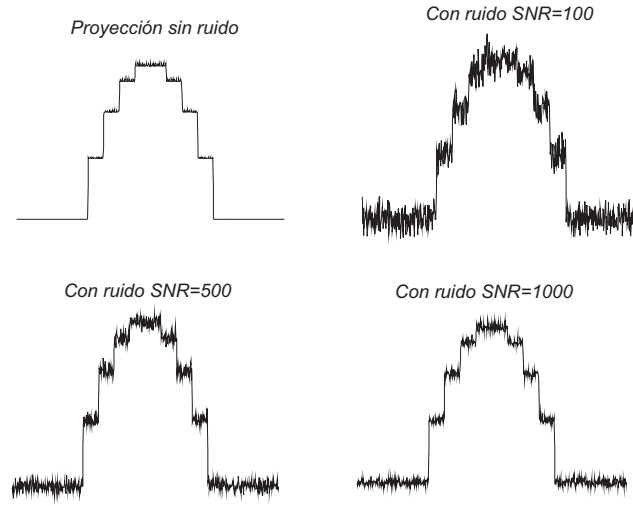


Figura 3.5: Proyección con diferentes SNR

Aplicando la Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La teoría completa del proceso de filtrado de una señal de variable discreta aplicando la DFT se puede consultar en [45] (Cap 5, 6, 7 y 8), aquí esbozaremos brevemente el procedimiento utilizado. A partir de la ecuación (3.1.4) la imagen se puede aproximar como

$$f(x, y) \cong f(x_m, y_n) = \sum_{\theta_k=0}^{\pi} IDFT \left\{ \tilde{Y}(l, \theta_k) \right\}$$

donde $\tilde{Y}(l, \theta_k) = |l| \tilde{G}(l, \theta_k)$, siendo $\tilde{G}(l, \theta_k)$ la DFT unidimensional de $\tilde{g}(r_j, \theta_k) = g(r_j, \theta_k) + \eta(r_j, \theta_k)$ respecto a r_j , y $\eta(r_j, \theta_k)$ la señal de ruido blanco unidimensional introducido en esa proyección para un valor fijo de θ_k . En la Figura 3.5 se muestra una proyección de la imagen de prueba 2 y a continuación la misma proyección con ruido blanco para diferentes valores de SNR.

En el producto $|l| \tilde{G}(l, \theta_k)$, $|l|$ representa un filtro denominado *Filtro Rampa*, en

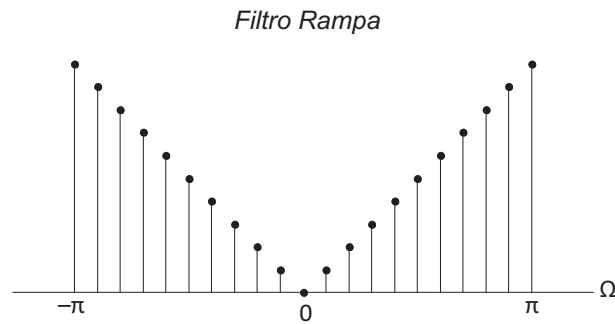


Figura 3.6: Ciclo Filtro Rampa

este caso de variable discreta, cuyo espectro se muestra en la Figura 3.6. Este filtro acentúa los armónicos correspondientes a frecuencias altas, y para compensar este efecto, se utiliza otro cuyo espectro se obtiene a partir de una función ventana. Para este propósito MATLAB nos ofrece las opciones que definimos a continuación.

Filtro Shepp-Logan

$$H(l) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi l}{2L}\right)}{\frac{\pi l}{2L}}$$

Filtro Coseno

$$H(l) = \cos\left(\frac{\pi l}{2L}\right)$$

Filtro Hamming

$$H(l) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

Filtro Hanning

$$H(l) = 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi l}{L}\right)$$

para $-L < l \leq L$.

En la Figura 3.7 se muestra el espectro de amplitud de dichos filtros.

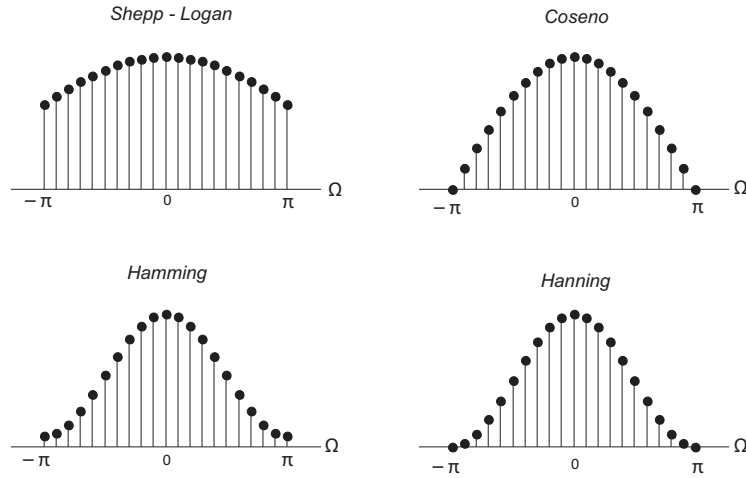


Figura 3.7: Filtros

Si $f_{\theta_k}(x_m, y_n)$ representa la retroproyección filtrada obtenida a partir de $IDFT \left\{ H(l) \tilde{Y}(l, \theta_k) \right\}$, la imagen obtenida a partir de la suma de retroproyecciones filtradas se representa

$$\tilde{f}(x_m, y_n) = \sum_{\theta_k=0}^{\pi} f_{\theta_k}(x_m, y_n)$$

El procedimiento se puede resumir en los siguientes pasos

1. Se halla la DFT de la proyección a filtrar $g(r_j, \theta_k)$, aplicando un procedimiento eficiente (FFT).
2. Se multiplica la DFT hallada por el filtro rampa y el filtro adicional escogido.
3. Se halla la IDFT (IFFT) del producto obtenido en el paso anterior, obteniendo la proyección filtrada, y con la cual se halla la retroproyección correspondiente.
4. Se suman todas las retroproyecciones para obtener la imagen recuperada.

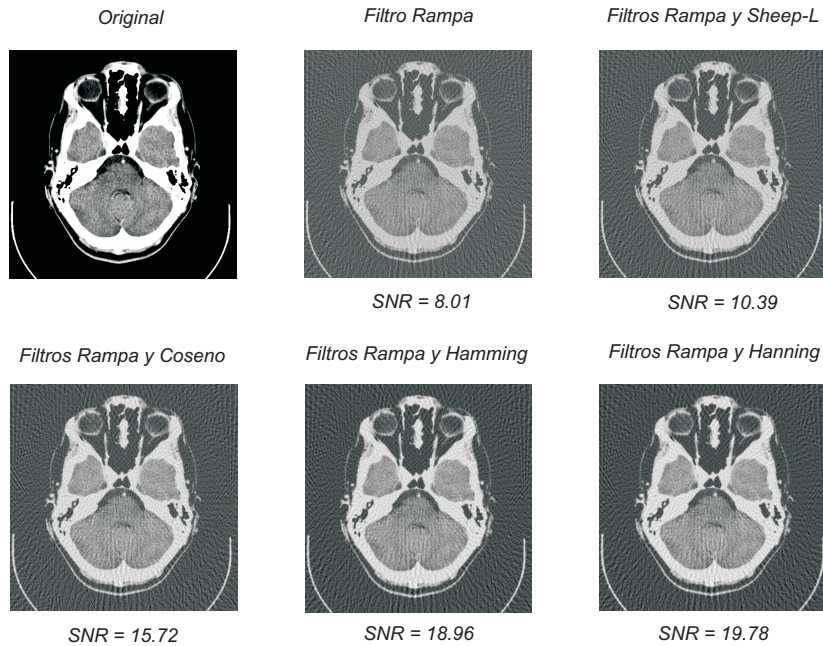


Figura 3.8: Imagen de prueba 1 e imágenes recuperadas

En la Figura 3.8 se muestra la imagen de prueba 1 y la imagen recuperada con 90 proyecciones y diferentes filtros, a las cuales se les sumó una señal de ruido blanco con $SNR=5000$, en la Figura 3.9, la imagen de prueba 2 y la imagen recuperada también con 90 proyecciones y diferentes filtros, a las cuales se les sumó una señal de ruido blanco con $SNR=1000$. Inicialmente se aplicó solo el filtro rampa, luego un filtro adicional.

En nuestra simulación las imágenes de prueba se representan como una matriz $f(x_m, y_n)$ de tamaño $M \times N$, con $M = N = 512$, y para compararlas con las imágenes recuperadas se calculó el valor de SNR aplicando la ecuación (3.4.1) en cada caso. Los valores obtenidos para diferentes niveles de ruido y los diferentes filtros utilizados se relacionan en el Capítulo 4.

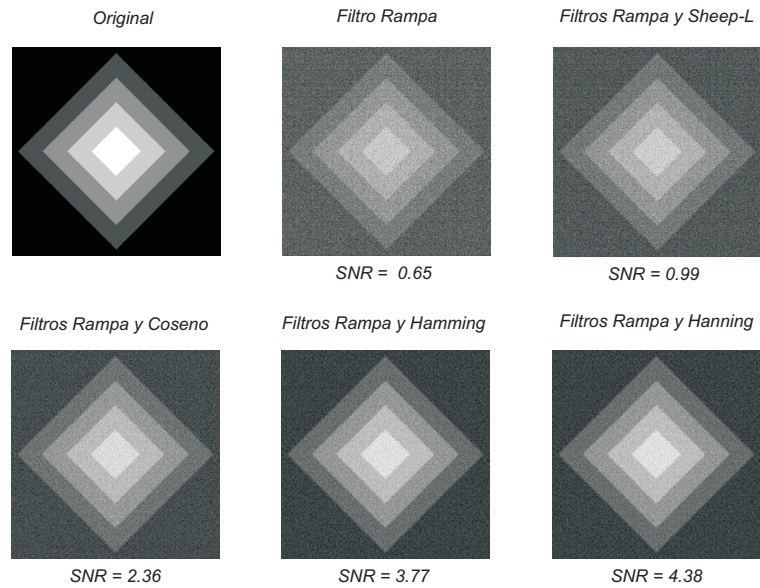


Figura 3.9: Imagen de prueba 2 e imágenes recuperadas

Aplicando Wavelets

Además de la Wavelet Haar expuesta en la sección 2.2.2, existen otras funciones que satisfacen las condiciones de la definición 2.3.1 y son utilizadas para descomponer funciones con el fin de procesarlas. En nuestra simulación utilizaremos además de la Wavelet Haar, otras cuatro cuyas gráficas se muestran en la Figura 3.10. El procedimiento mediante el cual se obtienen estas funciones se puede consultar en [56].

De acuerdo con [41] el proceso general consta de tres pasos

1. Descomposición: Si N representa el valor del nivel de descomposición, se escoge el tipo de wavelet, el valor de N y se descompone la señal a dicho nivel, con el tipo de wavelet escogido.

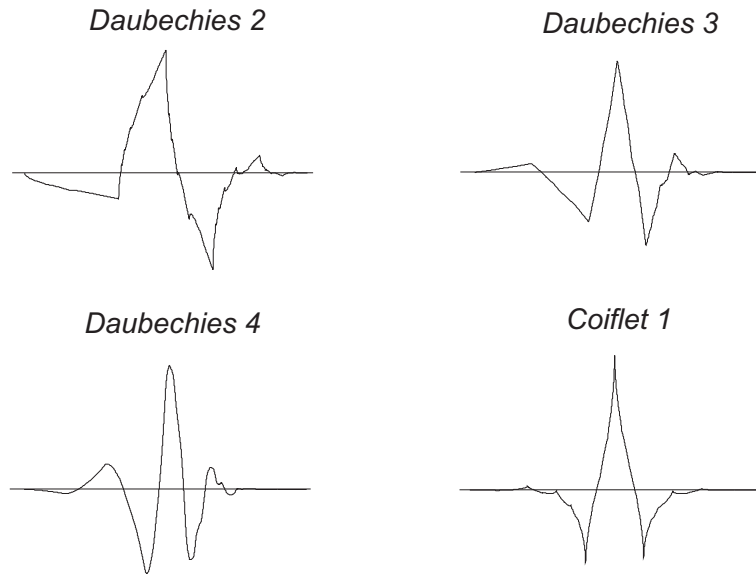


Figura 3.10: Wavelets utilizadas

2. Comparación con el umbral: Para cada nivel de descomposición, desde el 1 hasta el N se escoge un umbral y se hace la comparación de los coeficientes de detalle.
3. Reconstrucción: Se reconstruye la señal utilizando los coeficientes de aproximación del último nivel y los coeficientes de detalle modificados de todos los niveles.

Descomposición: Si W_{j-1} es el complemento ortogonal de V_{j-1} en V_j entonces

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

por lo tanto, si una función $f \in V_j$, se puede expresar como $f = f_{j-1} + w_{j-1}$, donde $f_{j-1} \in V_{j-1}$ y $w_{j-1} \in W_{j-1}$, las cuales se denominan respectivamente componente de aproximación y componente de detalle para f , en su primer nivel de descomposición.

Si queremos obtener un segundo nivel de descomposición y sabemos que W_{j-2} es el complemento ortogonal de V_{j-2} en V_{j-1} entonces $V_{j-1} = V_{j-2} \oplus W_{j-2}$, y como la función $f_{j-1} \in V_{j-1}$, entonces se puede expresar como $f_{j-1} = f_{j-2} + w_{j-2}$, donde $f_{j-2} \in V_{j-2}$ y $w_{j-2} \in W_{j-2}$, por lo tanto

$$f = f_{j-2} + w_{j-2} + w_{j-1}$$

y para un nivel de descomposición N tendremos que

$$f = f_{j-N} + w_{j-N} + w_{j-(N-1)} + w_{j-(N-2)} + \cdots + w_{j-1}$$

Sea $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ un A.M.R. con función de escala $\varphi(x)$ y wavelet asociada $\psi(x)$, si $f \in V_j$ entonces

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}$$

donde $a_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$ son los coeficientes de aproximación de f y de acuerdo con [7], representan las muestras de la función. Sabemos que $\{\varphi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_{j-1} y $\{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para W_{j-1} , por lo tanto

$$f = f_{j-1} + w_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k}$$

y se puede expresar como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}$$

donde $a_{j-1,k} = \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle$ y $d_{j-1,k} = \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$ son respectivamente los coeficientes de aproximación y los coeficientes de detalle del primer nivel de descomposición.

Para el segundo nivel de descomposición expresamos $f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \varphi_{j,k}$ como

$$f_{j-1} = f_{j-2} + w_{j-2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-2,k} \varphi_{j-2,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-2,k} \psi_{j-2,k}$$

donde $a_{j-2,k} = \langle f, \varphi_{j-2,k} \rangle$ y $d_{j-2,k} = \langle f, \psi_{j-2,k} \rangle$ son respectivamente los coeficientes de aproximación y los coeficientes de detalle del segundo nivel de descomposición. Por lo tanto para el nivel N de descomposición

$$f_{j-(N-1)} = f_{j-N} + w_{j-N} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-N,k} \varphi_{j-N,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-N,k} \psi_{j-N,k}$$

y conociendo los coeficientes de aproximación y de detalle desde el nivel 1 hasta el N , podemos reconstruir la función f como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-N,k} \varphi_{j-N,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-N,k} \psi_{j-N,k} + \cdots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}$$

Teniendo la función (señal) en esta forma, podemos hacer cambios en los coeficientes para obtener ciertos efectos en la función (señal) reconstruida, lo que equivale a procesarla. Los cambios más comunes en la práctica están relacionados con la compresión, para que ocupe menos espacio en la memoria de un computador, y con la reducción de ruido, para mejorar la calidad de la información.

Matlab asume los coeficientes de aproximación $a_{j,k}$, los valores del filtro de escala y los del filtro wavelet como vectores [41], sean A , H y G tales vectores, los valores de los coeficientes de aproximación y de detalle del primer nivel de descomposición, que se representarán como los vectores $A1$ y $D1$, se obtienen haciendo la convolución de A con H y G seguida de un submuestreo, por lo tanto, si A tiene L elementos,

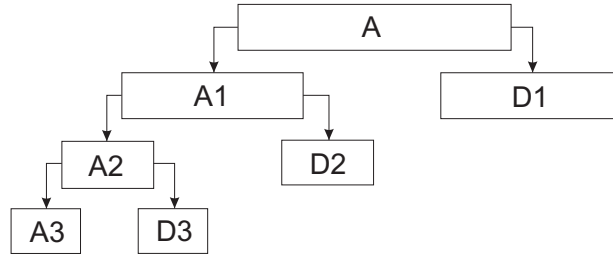


Figura 3.11: Estructura de los vectores de coeficientes

y H y G tienen, M elementos cada uno, el número de elementos de $A1$ y $D1$ será el mayor entero menor o igual que $\frac{L+M-1}{2}$, generalmente $L \gg M$, por lo tanto el número de elementos de $A1$ y $D1$ será aproximadamente $\frac{L}{2}$. Si continuamos haciendo descomposiciones a partir de los valores de $A1$, obtendremos los vectores $A2$ y $D2$ correspondientes a los coeficientes de aproximación y de detalle para el segundo nivel de descomposición, y el número de elementos de esos vectores será $\frac{L}{4}$. El máximo nivel de descomposición N_{max} depende de L y se tendrá cuando el número de elementos del vector de detalle $DN_{max} = 1$, es decir

$$\frac{L}{2^{N_{max}}} = 1$$

por lo tanto $N_{max} = \log_2 L$, como este valor debe ser entero positivo, se escoge el mayor entero menor o igual que $\log_2 L$. La estructura de esta descomposición se muestra en la Figura 3.11. En la práctica los máximos niveles de descomposición son 4 o 5 [41], lo cual generalmente es menor que el máximo posible.

Cada proyección más la señal de ruido $g = g(r_j, \theta_k) + \eta(r_j, \theta_k)$, puede se puede suponer como el vector de coeficientes A , y calculando los vectores $A1$ y $D1$ podemos

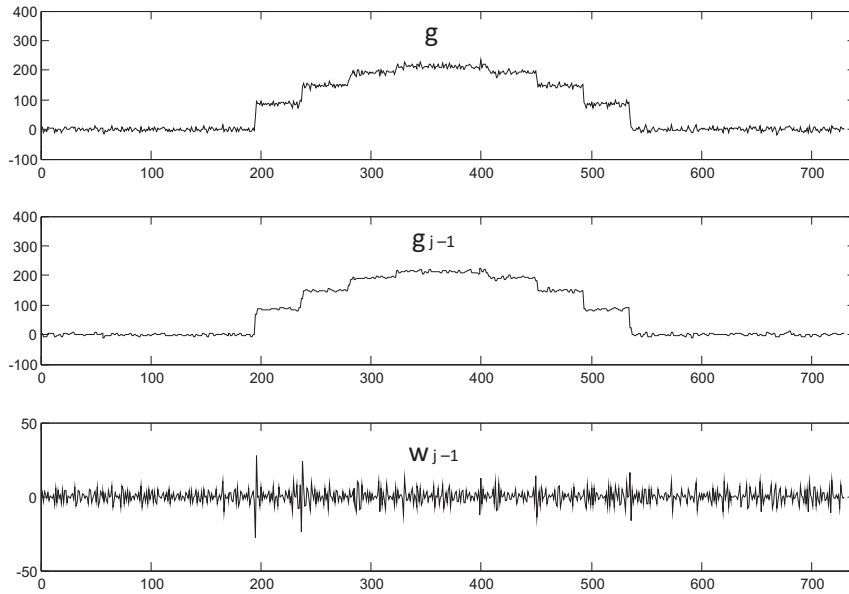


Figura 3.12: Primer nivel de descomposición de g

reconstruir $g = g_{j-1} + w_{j-1}$ utilizando uno de los diferentes tipos de wavelet. En la Figura 3.12 se muestra el primer nivel de descomposición de g , donde g_{j-1} y w_{j-1} se reconstruyeron combinando los elementos de dichos vectores con la función de escala y la Wavelet Daubechies 4.

Para el segundo nivel de descomposición $g = g_{j-2} + w_{j-2} + w_{j-1}$ podemos hacer algo similar utilizando los vectores $A2$, $D2$ y $D1$. En la Figura 3.13 se muestra el segundo nivel de descomposición de g , que es la suma de una proyección y una señal de ruido blanco con SNR=400, y donde g_{j-2} , w_{j-2} y w_{j-1} se reconstruyeron combinando los elementos de los vectores mencionados, con la función de escala y la Wavelet Haar.

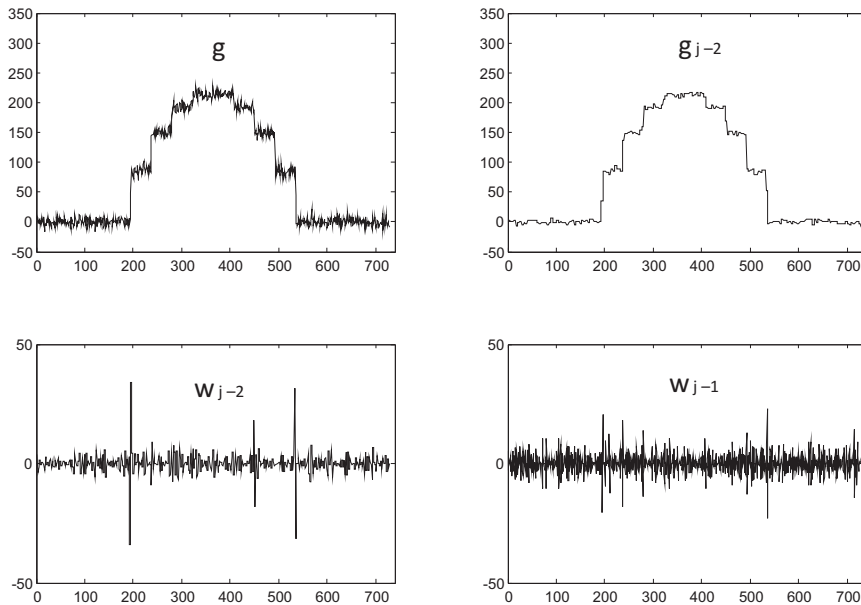


Figura 3.13: Segundo nivel de descomposición de g

Comparación con el umbral: El umbral es el valor estimado del nivel de ruido, los valores mayores que el umbral son considerados como señal y los menores como ruido. Además cuando la señal de ruido se descompone utilizando una base, el estimador de ruido puede ser aplicado porque el ruido blanco permanece como tal en todas las bases [34]. Lo que implica que la señal de ruido aparece en todos los niveles de descomposición.

De acuerdo con [38] el proceso de comparación con el umbral se puede definir como un operador de estimación de la siguiente manera; en una base ortogonal $\mathcal{B} = \{g_m\}_{0 \leq m \leq N}$ el estimador de f a partir de $X = f + W$ puede ser escrito como

$$\tilde{F} = DX = \sum_{m=0}^{N-1} \rho_T(X_{\mathcal{B}}[m]) g_m$$

donde $X_{\mathcal{B}}[m] = \langle X, g_m \rangle$. Aquí se supone que W es un ruido blanco con varianza

σ^2 , y ρ_T es la función de comparación con el umbral. Hay dos maneras de comparar los valores de una señal con el umbral, denominadas comparación rígida (hard) y comparación flexible (soft)

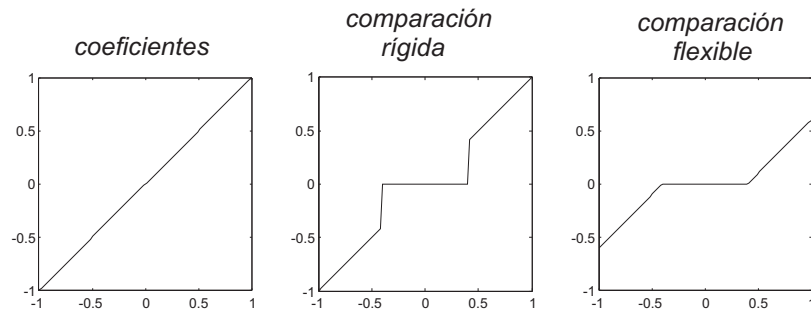
Comparación Rígida

$$\rho_T(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases}$$

Comparación Flexible

$$\rho_T(x) = \begin{cases} x - T & \text{si } x \geq T \\ x + T & \text{si } x \leq -T \\ 0 & \text{si } x < |T| \end{cases}$$

En la siguiente Figura se puede apreciar la forma en que cada función de comparación opera los coeficientes.



Estimación del umbral: Existen varios procedimientos para estimar el umbral, basados en conceptos de Estadística y Procesos Estocásticos, por lo tanto haremos una breve descripción de algunos de ellos. Para mayor información ver [38]

Umbral Minimax: De acuerdo con [41], en esta estimación se aplica el principio minimax, utilizado en estadística para diseñar estimadores. La reducción de ruido en una señal se puede considerar como el estimador de la regresión de una función desconocida, el estimador minimax es el que minimiza el máximo error cuadrático medio obtenido para una función de un conjunto dado.

Umbral Universal: Fue propuesto por Donoho y Johnstone [17] y está dado por

$$T = \sigma \sqrt{2 \log N}$$

donde N y σ son respectivamente la longitud y la varianza de la señal de ruido.

Umbral SURE (Stein's Unbiased Risk Estimate): El riesgo de un estimador D se define como

$$r(D, f) = E \{ \|f - DX\|^2 \}$$

y el riesgo del umbral como

$$r(f, T) = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi (|(X_{\mathcal{B}}[m])|^2)$$

donde

$$\Phi(u) = \begin{cases} u - \sigma^2 & \text{si } u \leq T^2 \\ \sigma^2 + T^2 & \text{si } u > T^2 \end{cases}$$

y σ^2 es la varianza de la señal de ruido, así, el valor de T se optimiza minimizando el riesgo. MATLAB nos da la posibilidad de aplicar la comparación tanto rígida como flexible con estos tres umbrales. Una vez escogido el umbral se hace la comparación

de los coeficientes de detalle en cada nivel de descomposición y se obtienen los coeficientes de detalle modificados.

Reconstrucción: Teniendo en cuenta que

$$g = g_{j-N} + w_{j-N} + w_{j-(N-1)} + w_{j-(N-2)} + \cdots + w_{j-1}$$

donde g_{j-N} es la componente de aproximación para el nivel N de descomposición y $w_{j-N}, w_{j-(N-1)}, \dots, w_{j-1}$ son las componentes de detalle para los N niveles de descomposición. Si $\tilde{w}_{j-N}, \tilde{w}_{j-(N-1)}, \dots, \tilde{w}_{j-1}$ son las componentes de detalle reconstruidas con los coeficientes de detalle modificados, entonces la proyección con reducción de ruido será

$$\tilde{g} = g_{j-N} + \tilde{w}_{j-N} + \tilde{w}_{j-(N-1)} + \cdots + \tilde{w}_{j-1}$$

En la Figura 3.14 se muestra una proyección con ruido blanco tal que $SNR = 400$, y luego la misma proyección, obtenida después de descomponerla al nivel 3 y hacer comparación flexible con el umbral universal en cada nivel.

Con las proyecciones reconstruidas se obtienen las retroproyecciones que finalmente se suman para obtener la imagen recuperada. En la Figura 3.15 se muestra la imagen de prueba 1 y en la Figura 3.16 la imagen de prueba 2, para las dos Figuras se aplicó el Filtro Rampa y además reducción de ruido por comparación con el umbral, ambas se recuperaron con 90 proyecciones, para la primera $SNR=8000$ en cada proyección, y para la segunda $SNR=2000$ en cada una.

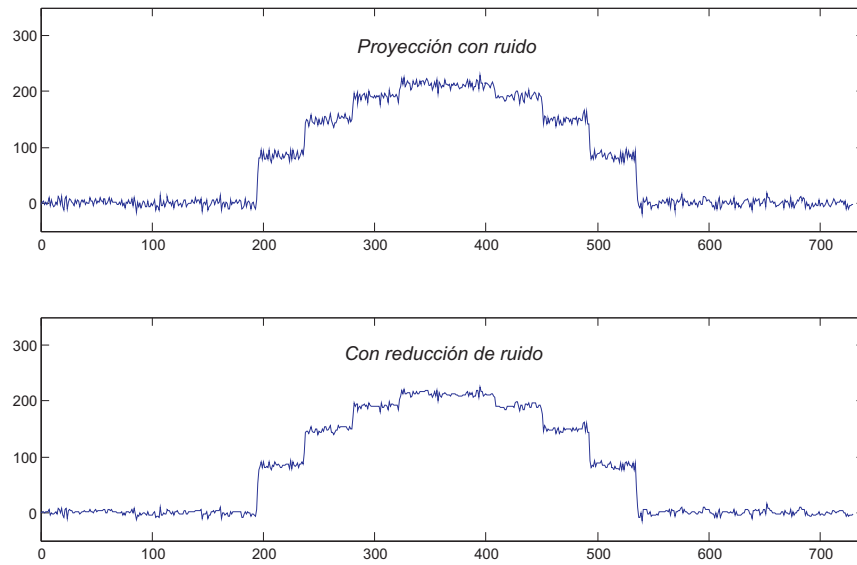


Figura 3.14: Reducción de ruido por comparación con el umbral

En la imagen de prueba 1 la reducción de ruido se hizo utilizando la Wavelet Daubechies 4, comparación flexible y umbral universal, y en la imagen de prueba 2 la Wavelet Daubechies 4, comparación flexible y umbral minimax.

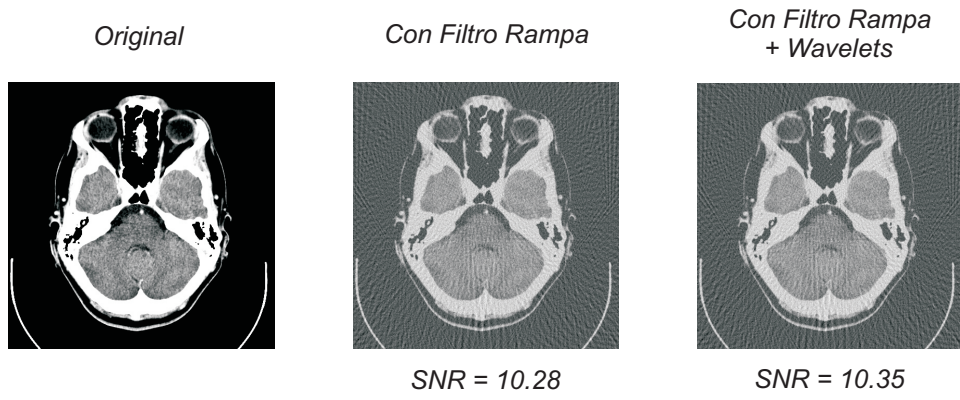


Figura 3.15: Imagen de prueba 1 y sus reconstrucciones

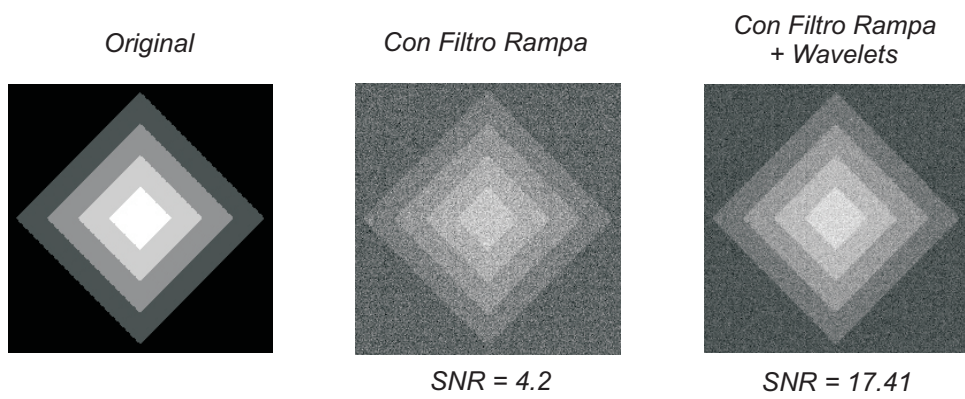


Figura 3.16: Imagen de prueba 2 y sus reconstrucciones

CAPÍTULO 4

Análisis de resultados

En este capítulo se resumen y analizan los valores de Relación Señal a Ruido (SNR) de las imágenes recuperadas, después de simular el proceso aplicado en la Tomografía Computarizada con dos imágenes de prueba. Se consideró que cada proyección es afectada por ruido blanco (como ocurre en el proceso real) y se filtró cada una de éstas aplicando dos procedimientos diferentes, uno basado en la Transformada Discreta de Fourier y el otro en las Wavelets. Para los dos métodos se calculó el valor de SNR de las imágenes variando el número de proyecciones y el valor de SNR en cada proyección, en el primer método se varió el tipo de filtro aplicado (Rampa, Shepp-Logan, Coseno, Hamming y Hanning) y en el segundo, el tipo de

Wavelet utilizada (Haar, Daubechies 2, Daubechies 3, Daubechies 4 y Coiflet 1), el tipo comparación (Rígido y Flexible), el criterio de selección de umbral (Universal, SURE y Minimax) y el nivel de descomposición (1, 2, o 3).

4.1. Para la imagen de prueba 1

Los valores más altos de SNR en la imagen recuperada se obtuvieron bajo las siguientes condiciones; utilizando el método que aplica la Transformada de Fourier, con el filtro Hanning, aunque con el filtro Hamming los valores fueron muy similares, y utilizando el método con Wavelets, los resultados fueron muy similares para los cinco tipos de wavelet utilizados, sin importar el tipo de comparación, el criterio de selección del umbral, ni el nivel de descomposición.

En las siguientes tablas se muestran los valores de SNR en la imagen de prueba 1 recuperada, obtenidos con el filtro Hanning y con la Wavelet Daubechies 4, variando el número de proyecciones y el valor de SNR en las proyecciones.

Si el valor de SNR en cada proyección es 500

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	2.24	2.97	4.37	7.22	15.44
Wavelet Daubechies 4	0.48	0.64	0.84	1.31	2.78

Si el valor de SNR en cada proyección es 2000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	3.80	5.43	8.23	15.40	35.91
Wavelet Daubechies 4	1.38	1.86	2.61	4.34	10.03

Si el valor de SNR en cada proyección es 5000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	4.43	6.40	10.08	19.91	49.12
Wavelet Daubechies 4	2.20	3.10	4.52	8.13	20.76

Si el valor de SNR en cada proyección es 8000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	4.64	6.78	10.65	21.42	54.08
Wavelet Daubechies 4	2.59	3.68	5.50	10.31	28.68

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	4.72	6.87	10.86	22.08	55.99
Wavelet Daubechies 4	2.80	3.98	5.84	11.38	32.98

De acuerdo con los valores contenidos en las tablas anteriores podemos afirmar que se puede obtener un valor mayor de SNR en las imágenes recuperadas, cuando se filtran las proyecciones utilizando el método que aplica la Transformada Discreta de Fourier.

4.2. Para la imagen de prueba 2

Los valores más altos de SNR en la imagen recuperada se obtuvieron bajo las siguientes condiciones; utilizando el método de filtrado que aplica la Transformada de Fourier, con el filtro Hanning, y utilizando el método con Wavelets, con la Wavelet Daubechies 4, comparación flexible, criterio universal y nivel de descomposición 3, por lo tanto, con el fin de comparar estos dos casos con más detalle, en las siguientes tablas se muestran los los valores de SNR en la imagen de prueba 2 recuperada, obtenidos variando el número de proyecciones y el valor de SNR en las proyecciones.

Si el valor de SNR en cada proyección es 500

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	2.82	3.72	4.81	7.34	14.82
Wavelet Daubechies 4	1.34	1.83	2.37	3.61	7.41

Si el valor de SNR en cada proyección es 1000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	5.28	7.17	9.53	14.43	28.75
Wavelet Daubechies 4	4.50	6.39	8.30	12.74	26.29

Si el valor de SNR en cada proyección es 3000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	12.82	18.93	25.52	38.97	78.31
Wavelet Daubechies 4	24.01	54.06	61.33	108.29	207.95

Si el valor de SNR en cada proyección es 5000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	17.97	27.74	37.99	59.27	118.78
Wavelet Daubechies 4	32.62	91.61	100.67	183.05	331.67

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Fourier - Filtro Hanning	26.50	44.48	61.97	96.53	194.68
Wavelet Daubechies 4	34.86	105.73	113.59	213.89	381.21

Como podemos observar en las tablas anteriores, para valores de SNR en las proyecciones, superiores a 1000, con las Wavelets se obtienen mejores resultados, aunque es importante destacar que hay condiciones en las que aplicando la Transformada de Fourier se obtienen mejores resultados que utilizando Wavelets.

Considerando ahora los resultados obtenidos con la Wavelet Daubechies 4, vamos a compararlos cambiando algunas condiciones. En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos con los dos tipos de comparación; rígido y flexible y con los tres criterios de selección del umbral, para la Wavelet Daubechies 4 y nivel de descomposición 3.

Si el valor de SNR en cada proyección es 500 y criterio Universal

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	0.43	0.57	0.75	1.14	2.28
Comparación Flexible	1.34	1.83	2.37	3.61	7.41

Si el valor de SNR en cada proyección es 500 y criterio SURE

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	0.40	0.52	0.69	1.03	2.14
Comparación Flexible	0.42	0.54	0.72	1.10	2.26

Si el valor de SNR en cada proyección es 500 y criterio Minimax

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	0.40	0.53	0.70	1.05	2.15
Comparación Flexible	0.80	1.06	1.34	2.16	4.34

Si el valor de SNR en cada proyección es 3000 y criterio Universal

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	4.62	7.67	9.26	15.47	30.40
Comparación Flexible	24.01	54.06	61.33	108.29	207.95

Si el valor de SNR en cada proyección es 3000 y criterio SURE

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	2.20	3.11	3.99	6.18	12.55
Comparación Flexible	3.04	4.28	5.58	8.66	17.83

Si el valor de SNR en cada proyección es 3000 y criterio Minimax

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	2.68	3.85	4.82	7.71	15.67
Comparación Flexible	10.84	18.71	21.96	36.04	72.57

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000 y criterio Universal

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	21.83	71.52	64.25	159.14	345.37
Comparación Flexible	34.86	105.73	113.59	213.89	381.21

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000 y criterio SURE

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	8.11	16.59	19.19	31.80	66.49
Comparación Flexible	18.75	51.40	54.64	108.29	237.40

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000 y criterio Minimax

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Comparación Rígida	11.58	22.95	27.23	48.61	101.08
Comparación Flexible	27.29	85.81	91.09	187.64	372.50

De acuerdo con los valores contenidos en las tablas anteriores podemos afirmar que la relación SNR de las imágenes recuperadas siempre es mayor cuando se hace la comparación flexible, se aplica el criterio universal de estimación del umbral y se aumenta el número de proyecciones.

Si comparamos los resultados para la Wavelets Daubechies 4, comparación flexible y umbral universal, variando el nivel de descomposición, el número de proyecciones y el valor de SNR en las mismas tendremos

Si el valor de SNR en cada proyección es 500

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Nivel de descomposición 1	0.91	1.15	1.55	2.38	4.84
Nivel de descomposición 2	1.26	1.69	2.22	3.31	7.03
Nivel de descomposición 3	1.34	1.83	2.37	3.61	7.41

Si el valor de SNR en cada proyección es 3000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Nivel de descomposición 1	7.49	11.62	14.13	23.27	48.28
Nivel de descomposición 2	18.33	35.69	42.18	74.53	154.96
Nivel de descomposición 3	24.01	54.06	61.33	108.29	207.95

Si el valor de SNR en cada proyección es 10000

Número de proyecciones	36	45	60	90	180
Nivel de descomposición 1	16.03	30.88	38.07	67.57	142.39
Nivel de descomposición 2	29.15	76.10	92.61	169.05	369.109
Nivel de descomposición 3	34.86	105.732	113.59	213.89	381.21

De acuerdo con los valores contenidos en las últimas tres tablas podemos observar que al aumentar el nivel de descomposición, aumenta el valor de SNR en la imagen recuperada, pero el incremento del nivel 1 al 2 es mayor que el incremento del nivel 2 al 3, lo que permite suponer que para niveles de descomposición mayores que 3, los incrementos en el valor de SNR en la imagen recuperada no serán muy significativos.

4.3. Conclusiones

1. Los valores de SNR en las imágenes recuperadas, de acuerdo con del método de filtrado utilizado, son mayores dependiendo del tipo de imagen a recuperar. Para imágenes irregulares, como las que se requieren en medicina, los mejores resultados se obtuvieron utilizando el método que aplica la Transformada Discreta de Fourier, mientras que para imágenes regulares como las que se requieren en la industria, los mejores resultados se obtuvieron utilizando el método que aplica las Wavelets.

Para imágenes regulares y utilizando el método que aplica Wavelets,

2. Se obtienen mejores resultados aplicando la comparación flexible.
3. Se obtienen mejores resultados con el criterio universal de estimación del umbral.
4. El aumento en el nivel de descomposición mejora los resultados, sin embargo, el incremento de un nivel a otro en el valor de SNR en la imagen recuperada, disminuye a medida que se aumenta dicho nivel.

Bibliografía

- [1] Aldroubi, A. The wavelet transform: A surfing guide, pp 3-36 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida 1996.

- [2] Atkinson, K., and Han, W. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. Second Edition. Tex. Appl. Math. 39 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2005.

- [3] Berenstein, C. Technical Research Report: Radon Transforms, Wavelets, and Applications. ISR Sponsored by the National Science Foundation Engineering Research Center program, the University of Maryland, Harvard University, and Industry.

- [4] Berenstein, C.A., Ebenfelt, P.F., Gindikin, S.G., Helgason, S., Tumanov, A.E. *Integral Geometry, Radon Transforms and Complex Analysis*, E. Casadio Tarabusi, M.A. Picardello, G. Zampieri (eds.), Venice 1996. Fondazione C.I.M.E. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Alemania. 1998.
- [5] Berenstein, C.A., Walnut, D. Local inversion of the Radon Transform in even dimensions using wavelets. *In 75 Years of Radon Transform*, S. Gindikin and P. Michor, (eds.) 45-69. International Press, Cambridge, MA, 1994.
- [6] Berenstein, C.A., Walnut, D. Wavelets and Local Tomography, pp 231-261 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, Boca Raton, Florida 1996.
- [7] Boggess, A., Narcowich, F. J. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [8] Burrus, C. S., Gopinath, R. A., Guo, H. *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms A Primer*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [9] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, Boston, 1992.
- [10] Chui, C. K. *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis*. SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, Philadelphia, 1997.
- [11] Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J. C. Biorthogonal basis of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* 45 (1992), 485-560.

- [12] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 (1988), 909-996.
- [13] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
- [14] Daubechies, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36 (1990), 961-1005.
- [15] Deans, S. R. *The Radon Transform and Some of its Applications*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2007.
- [16] Donoho, D. *Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noisy Data*. "Different Perspectives on Wavelets", Proceedings of Symposia in Pure Math., AMS., I Daubechies, Edt., 47, 173-205, 1993.
- [17] Donoho, D., Johnstone I. *Wavelet methods for the inversion of ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases*. Stanford University, Department of Statistics, Technical report 461, Stanford, 1994.
- [18] Faridani, A., Ritman, E., Smith, K. Local Tomography. *SIAM J. Appl. Math.* 52(2), (1992) 459-484.
- [19] Faridani, A., Ritman, E., Smith, K. Examples of Local Tomography. *SIAM J. Appl. Math.* 52(4), (1992) 1193-1198.

- [20] Faridani, A., Finch, D., Ritman, E., Smith, K. Local Tomography II. *SIAM J. Appl. Math.* 57(4), (1997) 1095-1127.
- [21] Folland, G. B. *Real Analysis*, 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.
- [22] Friedlander, G. & Joshi, M. *Introduction to the Theory of Distributions*, 2nd edition. Cambridge University Press, United Kingdom, 1998.
- [23] Gabor T. H. *Fundamentals of computerized tomography : image reconstruction from projections*, Springer, New York, 2009.
- [24] Helgason, S. *The Radon Transform*. Second Edition. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [25] Hernández, E. Weiss, G. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [26] Hong, D., Wang, J., and Gardner, R. *Real Analysis with an Introduction to Wavelets and Applications*. Elsevier Academic Press, Burlington, MA, 2005.
- [27] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1983.
- [28] [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_\(7\).png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_(7).png)
- [29] <http://hci.iwr.uni-heidelberg.de/MIP/Research/ct/Pore.jpg>

- [30] Jaffard, S., Meyer, Y., Ryan, R. D. *Wavelets: Tools for Science & Technology*. Second edition. SIAM: Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 2001.
- [31] Kak A. C., Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Electronic copy, IEEE Press, New York, 1999.
- [32] Koopmans L. H. *The spectral analysis of time series*. Academic Press, San Diego, 1995.
- [33] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. New York, 1978.
- [34] Luo G., Zhang D. *Book Chapter: "Wavelet Denoising", in the book, Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering, Physics and Technology*". edited by Dumitru Baleanu, ISBN 978-953-51-0494-0, InTech, April 4, 2012
- [35] Maass, P. The Interior Radon Transform. *SIAM J. Appl Math.* 52(3): (1992), 710-724.
- [36] Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbb{R}^d)$, *Trans. of Amer. Math. Soc.* 315, (1989), 69-87.
- [37] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, (1989), 674-693.

- [38] Mallat, S. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, 2009.
- [39] Mallat, S. *A Wavelets Tour of Signal Processing*. Academic Press, New York, 1998.
- [40] Meyer, Y. *Ondelettes et opérateurs, I: Ondelettes*. Herman, Paris, 1990.
- [41] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J. M. *Wavelet Toolbox For Use with MATLAB, User Guide*. Version 2, MathWorks, Natick, 2002.
- [42] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [43] Oppenheim A. V., Willsky A. S., Nawab S. H. *Señales y Sistemas*. Segunda Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1998.
- [44] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*. Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [45] Proakis J. G., Manolakis D. G. *Tratamiento Digital de Señales*. Tercera Edición, Prentice-Hall, Madrid, 1998.
- [46] Quinto E. T., *An Introduction to X-ray tomography and Radon Transforms*. American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 2005.

- [47] Ramm, A. G., Katsevich, A. I. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996.
- [48] Ramm, A. G. New methods for finding discontinuities of functions from local tomographic data. *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 5(2), (1997) 165-175.
- [49] Reddy, B. D. *Introductory Functional Analysis*. Tex. Appl. Math. 27 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1998.
- [50] Reddy, J. N. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [51] Rudin, W., *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1973.
- [52] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1966.
- [53] Strang, G. and Nguyen, T. *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996.
- [54] Unser, M. and Aldroubi, A. B-spline processing I: Theory and II: Efficient design and application, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol 41 (1993), 821-848.
- [55] Unser, M. A practical guide to implementation of the wavelet transform, pp 37-76 in *Wavelets in Medicine and Biology*, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, New York 1996.
- [56] Walnut, D. *An Introduction to Wavelets Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2002.

- [57] Walter, G. G., Shen, X. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [58] Wickerhauser, M. V. *Adapted Wavelets Analysis from Theory to Software*. IEEE PRESSS, New York, 1994.
- [59] Wojtaszczyk, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, New York, 1997.