

Programación óptima para asignación de recursos en redes celulares con tecnología TDMA

Orlando Rafael Agámez Zambrano

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín, Colombia
2014

Programación óptima para asignación de recursos en redes celulares con tecnología TDMA

Orlando Rafael Agámez Zambrano

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director:
Ph.D. Juan José Jaramillo Jiménez

Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín, Colombia
2014

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

Agradecimientos

A Dios,

A mis padres Orlando y Nelcy,

A mis hijos,

A mis hermanos,

A la Universidad EAFIT,

A Juan José Jaramillo,

A mis profesores,

Por ayudarme a ser una mejor persona.

Resumen

Este estudio se centra en el problema de la congestión de paquetes elásticos e inelásticos en una red celular convergente que transmite bajo la tecnología TDMA (acceso múltiple por división de tiempo), se formula y modela matemáticamente basándose en optimización y procesos estocásticos. Además, para la solución de este problema se adapta a las redes celulares TDMA un algoritmo dinámico desarrollado anteriormente en redes Ad Hoc, el cual asigna una programación óptima de los recursos de red que logre servir de una manera adecuada y oportuna las colas de paquetes elásticos e inelásticos, y así conseguir que la red celular opere satisfactoriamente y le brinde al usuario una calidad de servicio según los parámetros establecidos en el campo de las telecomunicaciones.

Los resultados obtenidos en el estudio se comprueban por medio de simulaciones del algoritmo propuesto realizadas en el software matemático Matlab, en el cuál se establecen valores a los parámetros críticos de diseño de una red celular y se grafican para analizar el comportamiento de ellos, la asignación de recursos de red a través de las programaciones óptimas y evidenciar su impacto en la reducción del tamaño de las colas de paquetes elásticos e inelásticos. A partir de los efectos encontrados en la red celular TDMA al manipular los parámetros, se realizan recomendaciones que favorecen el adecuado funcionamiento de la red y su calidad en el servicio.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Justificación	3
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo general	3
1.3.2. Objetivos específicos	4
1.4. Organización del documento	4
REDES CELULARES	7
2.1. Arquitectura de una red celular	7
2.2. Multiplexación	9
2.3. Tecnologías celulares	10
2.3.1. Acceso múltiple por división de tiempo (TDMA)	11
CONGESTIÓN EN REDES	15
3.1. Calidad de servicio (<i>QoS, quality of service</i>)	16
3.2. Retardos y pérdidas de prestaciones	19
3.2.1. Análisis del retardo	19
3.3. Interferencias y capacidad del sistema	21
FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	25
4.1. Solución usando descomposición dual	29
ALGORITMO DINÁMICO Y ANÁLISIS DE SU CONVERGENCIA	33
5.1. Programador y controlador de la congestión	33

5.2. Resultados de la convergencia	35
SIMULACIONES	77
6.1. Herramienta de simulación	77
6.2. Análisis de resultados	78
CONCLUSIONES	87

INTRODUCCIÓN

Debido al constante cambio que tienen las telecomunicaciones, en parte por su misma naturaleza y competitividad, los últimos avances en este campo han llevado a los operadores a diseñar redes que sean capaces de soportar mas servicios en una misma plataforma, tales como: voz, datos, videoconferencias, entre otras. Esto garantiza que el usuario desde un dispositivo inalámbrico celular pueda obtener mejores beneficios en su vida diaria, lo cual se ha logrado gracias a que el sector de las telecomunicaciones se ha movido hacia las redes convergentes o redes de nueva generación (NGN) que permiten avanzar en esa dirección a partir de una infraestructura adecuada y adaptada para estos cambios.

Según el sector de normalización de la Unión Internacional de Telecomunicaciones (*UIT*) en su recomendación UIT-T Y.2001 [6], una red convergente o NGN se define como: “Red basada en paquetes que permite prestar servicios de telecomunicación y en la que se pueden utilizar múltiples tecnologías de transporte de banda ancha propiciadas por la QoS (*calidad de servicio*), y en la que las funciones relacionadas con los servicios son independientes de las tecnologías subyacentes relacionadas con el transporte. Permite a los usuarios el acceso sin trabas a redes y a proveedores de servicios y/o servicios de su elección. Se soporta movilidad generalizada que permitirá la prestación coherente y ubicua de servicios a los usuarios”.

En la definición anterior se destacan tres aspectos relevantes por su importancia y que de alguna manera son claves para el desarrollo del presente estudio: primero se establece que la red se basa en la transferencia de paquetes, segundo que la red puede trabajar bajo varias tecnologías para transportar los paquetes y por último se hace referencia a la calidad del servicio (*QoS*).

Con respecto al primer aspecto, es de resaltar que un paquete es “la unidad fundamental de transporte de información, donde se ensamblan todos los datos a transmitir en una red” [8]. Los paquetes al ser transmitidos deben contener: una cabecera, un área de datos y una cola. En la cabecera se almacena la dirección necesaria para trasladar el paquete desde el emisor hasta el receptor, además de otra información útil que permite el enrutamiento de éste. El área de datos contiene la información ensamblada a transportar y la cola contiene el código de detección de errores. El diseño de la red debe garantizar una transmisión confiable de los paquetes para que

estos puedan ser transferidos a su destino con calidad de servicio.

En el estudio se consideran paquetes con tráficos elásticos e inelásticos. En general, paquetes transmitidos bajo tráfico elástico son aquellos que toleran variaciones en la velocidad con la cual se transmiten o incluso, que la transmisión se detenga y arranque nuevamente después de un intervalo de tiempo: algunos ejemplos son los correos electrónicos y la transmisión de archivos. Ahora, paquetes bajo tráfico inelástico son aquellos que no toleran variaciones de la velocidad de transmisión, por lo tanto, ésta debe permanecer constante durante todo el tiempo para garantizar un buen servicio. Además, el tráfico inelástico es sensible a los tiempos de retardo de los paquetes para arribar al receptor, a las variaciones en la magnitud de los retardos (*jitter*) y a las pérdidas de paquetes. Algunos ejemplos de tráfico inelástico son las videoconferencias o las señales de televisión en vivo por Internet.

En relación con el segundo aspecto que se refiere a las distintas tecnologías para transportar los paquetes en una red celular, las más importantes y que se utilizan actualmente son: TDMA (acceso múltiple por división de tiempo), CDMA (acceso múltiple por división de código) y FDMA (acceso múltiple por división de frecuencia). En ocasiones se utilizan de manera individual y en otros casos para optimizar la red se realizan combinaciones de algunas de ellas. En el capítulo dos se definirán en detalle cada una y se hará énfasis en TDMA debido a que es la tecnología celular bajo la cual se desarrollará el estudio.

El tercer y último aspecto es la calidad de servicio (*QoS*, *Quality of Service*). La Unión Internacional de Telecomunicaciones en su recomendación UIT-T G.1000 [5] define la calidad de servicio como “el efecto global de la calidad de funcionamiento de un servicio, que determina el grado de satisfacción de los usuarios”. La QoS significa un compromiso con la optimización de las comunicaciones y con el usuario directamente, y puede ser el elemento diferenciador que incline la balanza al momento de seleccionar un operador de telefonía. En el capítulo 3 se profundizará en el estudio de la calidad del servicio y sus particularidades.

1.1. Planteamiento del problema

En la operación de las redes celulares convergentes se presentan congestiones de paquetes debido al gran flujo de información que se desea programar entre los emisores y receptores de los diferentes enlaces que se tienen en un momento dado para comunicar a los usuarios. Esta congestión puede llevar la red al límite de su funcionamiento y como consecuencia no responder adecuadamente a las peticiones que realicen los usuarios en sus diferentes aplicaciones, ocasionando pérdidas de paquetes, retrasos, interrupciones en la comunicación o caídas de llamadas, e impactando directamente la calidad del servicio que se ofrece, además de generar insatisfacción al usuario y sobrecostos para el operador. Los enlaces pueden tener un flujo de paquetes tanto

elásticos como inelásticos, cada uno representado por una cola, donde esperan a ser transmitidos de manera oportuna cuando se le atiende a través del servicio programado para la respectiva cola. Sin embargo al no ser posible, la red debe tener una política de asignación de recursos tal que permita cumplir con este objetivo, controlar la congestión y dar servicio eficientemente de modo que el usuario pueda mantener la comunicación sin percatarse de que tan congestionada está la red en un determinado instante de tiempo. Este estudio se centra en el problema de la congestión de paquetes elásticos e inelásticos en una red celular convergente con tecnología TDMA y se basa en herramientas matemáticas de optimización y procesos estocásticos como la teoría de colas para analizarlo, modelarlo y plantear estrategias o recomendaciones que ayuden a resolverlo garantizando una calidad de servicio para el usuario.

1.2. Justificación

El proyecto se justifica debido a la masificación de las telecomunicaciones, al impacto que tienen las redes celulares convergentes en la vida diaria de las personas y a la tendencia a nivel mundial de estar conectados todo el tiempo a través de los teléfonos celulares. Lo anterior exige cada vez mas redes óptimas que puedan soportar todos los enlaces que se presenten y las diversas aplicaciones. Además, este es un negocio muy competido a nivel mundial y donde uno de los operadores puede ser dominante en el mercado si brinda soluciones, aplicaciones innovadoras y mejor servicio a sus usuarios. Por otro lado, a través de la optimización de las redes celulares convergentes los operadores pueden reducir sus costos por infraestructura y mantenimiento, lo cual revierte en mejores tarifas para sus usuarios o en mejores utilidades para sus empresas, es por esto que un estudio como el que se presenta resulta ser de interés a pesar de los avances logrados en cada generación celular en parámetros como la velocidad y la calidad de servicio. El proyecto también se justifica por ser un caso importante de la matemática aplicada desde el punto de vista del modelamiento, simulación y la combinación de herramientas de optimización y procesos estocásticos para un fin práctico de gran impacto entre las personas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

El presente estudio busca desarrollar una programación óptima que asigne recursos de redes celulares convergentes TDMA adecuadamente y garantice estabilidad en las colas de paquetes elásticos e inelásticos, para obtener de esta manera una buena calidad de servicio en la operación de servicios inalámbricos celulares.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Caracterizar la arquitectura general de una red convergente y las tecnologías que hacen posible transportar los paquetes en los enlaces establecidos entre dispositivos inalámbricos celulares.
2. Analizar en detalle el problema de la congestión de paquetes que se presentan en las redes celulares y su impacto en la calidad de servicio.
3. Utilizar herramientas matemáticas para presentar una solución al problema de la congestión de paquetes, modelándolo a partir de la optimización y los procesos estocásticos.
4. Simular y analizar el comportamiento de una red celular con tecnología TDMA, para comprobar si la programación planteada gestiona eficazmente su operación, complementando y confirmando el estudio teórico hecho.

1.4. Organización del documento

El primer capítulo contiene la introducción del estudio donde se busca ubicar al lector en el problema que se está abordando y precisar algunas definiciones que luego se retomarán en los demás capítulos y secciones. En la sección 1.1 se realiza el planteamiento del problema a tratar durante el desarrollo de la tesis. En la sección 1.2 se plasma la justificación del proyecto enfocada desde el punto de vista técnico, matemático y de costos de operación. La sección 1.3 consta de los objetivos del estudio, tanto general como específicos, que permiten proyectar la tesis hacia unos resultados alcanzables.

El segundo capítulo busca contextualizar al lector mediante la fundamentación técnica de las redes celulares para entender su funcionamiento a través de las generalidades y que pueda formarse una idea de como se transportan los paquetes en los enlaces. La sección 2.1 aborda la arquitectura de una red celular haciendo énfasis en los distintos equipos que intervienen para establecer una comunicación entre dispositivos inalámbricos. La sección 2.2 define la técnica de multiplexación y da claridad al lector para afrontar las diferentes tecnologías celulares existentes que se explican en general en 2.3, y en particular en 2.3.1 la tecnología TDMA que se utilizará en la tesis para transferir los paquetes desde el emisor hasta el receptor. En la operación de las tecnologías celulares planteadas en el segundo capítulo se presentan inconvenientes por la acumulación o congestión de paquetes que no pueden ser servidos adecuadamente, lo cual se presenta en el siguiente capítulo por ser de gran interés en el estudio y en el campo de las telecomunicaciones.

El tercer capítulo muestra el problema particular de la congestión de paquetes en las redes celulares, el cual es un aspecto clave a tener en cuenta durante el desarro-

llo de la tesis debido a que alrededor de este problema se centrará el estudio y se buscarán soluciones para que los enlaces puedan funcionar de manera eficiente. En la sección 3.1 se explican los parámetros a tener en cuenta para prestar un servicio con la calidad exigida por el mercado de las telecomunicaciones. En la sección 3.2 se explican los retardos que presentan los paquetes en una red celular y que pueden tener consecuencias indeseables en la operación de la misma. En la sección 3.3 se abordan las interferencias que se presentan en las redes inalámbricas, las cuales son grandes amenazas porque pueden reducir la eficiencia de la comunicación, impedir o suspender el servicio celular. Una vez tratada la tecnología TDMA y la congestión de paquetes elásticos e inelásticos en una red celular, en los siguientes capítulos se integran las herramientas matemáticas para modelar la situación presentada y resolver el problema de la congestión aplicado a las telecomunicaciones.

El cuarto capítulo contiene la notación a utilizar en el estudio basándose en los aspectos técnicos vistos anteriormente, además la formulación matemática del problema de telecomunicaciones visto como una aplicación de la optimización. A partir de la descomposición dual se trata el problema de optimización determinística y se plantea una intuición de la solución, pero sin dejar de lado que el problema es dinámico y necesita herramientas de procesos estocásticos que se incluirán en el siguiente capítulo.

El quinto capítulo establece el algoritmo dinámico que se va a ejecutar para solucionar el problema de optimización, además se demuestra la convergencia del mismo. En la sección 5.1 de este capítulo se plantea el controlador de congestión que mantendrá las colas de paquetes elásticos estables así como el programador que dará el servicio óptimo a las colas de paquetes elásticos e inelásticos, y en la sección 5.2 se enuncian los lemas y corolarios que demuestran la convergencia del algoritmo a través del cual se realizarán las simulaciones.

El sexto capítulo comprueba y complementa el estudio teórico planteado en el proyecto a partir de las simulaciones realizadas en Matlab. La sección 6.1 detalla la herramienta utilizada como medio para las simulaciones y en la sección 6.2 se analizan los resultados obtenidos a partir de las gráficas que nos arroja el software.

En las conclusiones se evalúa si el modelo matemático desarrollado en la tesis responde adecuadamente a las peticiones de los usuarios y se mantienen estables las colas de paquetes elásticos e inelásticos en la red celular convergente. Por otro lado, si se alcanzaron los objetivos propuestos y si el proyecto responde a las expectativas generadas al inicio.

REDES CELULARES

El presente capítulo contiene un marco técnico sobre las generalidades presentadas en las redes celulares y en su funcionamiento, que permiten establecer una comunicación entre dispositivos inalámbricos y como consecuencia el transporte de paquetes elásticos e inelásticos entre un emisor y un receptor. Estos fundamentos técnicos buscan contextualizar al lector ubicándolo en el campo de aplicación de la tesis para entender luego el problema de la congestión de paquetes que se presenta en el siguiente capítulo, el cuál es el aspecto central a solucionar en el estudio.

El funcionamiento de una red celular es un proceso complejo y tiene como objetivo dar servicio y comunicar a un usuario (*emisor*) ubicado en un punto específico o móvil con su interlocutor (*receptor*) que se encuentra a cierta distancia, quién también puede estar en un lugar determinado o móvil. Para este fin, la red celular cuenta con una arquitectura e infraestructura donde cada etapa cumple una función precisa basada en ciertos equipos electrónicos programados para lograr la comunicación. En la siguiente sección se detalla la arquitectura celular utilizada generalmente por los operadores celulares para enlazar a sus clientes.

2.1. Arquitectura de una red celular

Con el fin de dar servicio a cierta área geográfica, una red celular divide dicha área en celdas o células (*por lo cual se deriva el nombre celular*), con el fin de garantizar cobertura (Véase la Figura 2.1). Cada celda está dotada de una antena transmisora - receptora que se comunica a la vez con el terminal móvil y la estación base (*BTS, Base Transceiver Station*). El diseño de la celda está caracterizado según las potencias de transmisión de la estación base y los dispositivos usados por el usuario, las edificaciones existentes en su área de influencia y la altura de la antena que sirve a esta celda. Cada dispositivo inalámbrico que se encuentre en el área de cobertura de una celda recibirá servicio a través de la estación base respectiva, y ésta a su vez se comunicará con el resto de la red con el fin de ubicar y enlazar al receptor. Cada celda trabaja bajo un rango de frecuencias, el cual debe ser diferente a la celda adyacente para evitar interferencias que puedan afectar la calidad del servicio. Es posible reutilizar estas frecuencias pero en celdas separadas cierta distancia para que

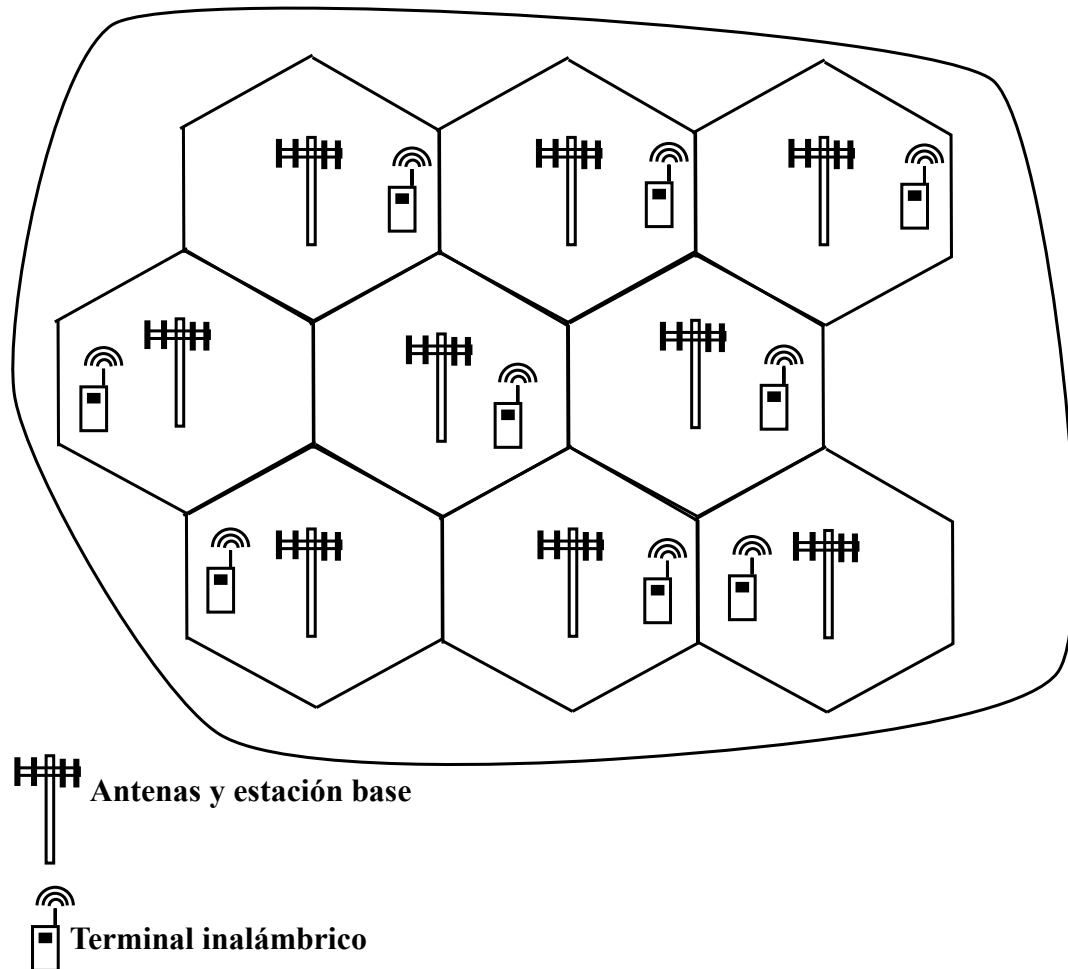


Figura 2.1: Arquitectura de una red celular

las interferencias no perjudiquen el servicio prestado al usuario.

Según [17], la arquitectura de una red celular básicamente se compone de los siguientes elementos para comunicar a los dispositivos inalámbricos: Antena y estación transductora base en cada celda (*BTS*), Controlador de la estación base (*BSC*, *Base Station Controller*), el centro de conmutación móvil (*MSC*, *Mobile Switching Center*) y la red telefónica pública.

Las funciones principales de los controladores de la estación base (*BSC*) son: asignación de los canales de radio que las estaciones base van a utilizar para enlazar a los dispositivos inalámbricos dentro del área de cobertura, ubicación de la celda donde se encuentra el dispositivo inalámbrico que se quiere comunicar y realizar el proceso de transferencia de un usuario inalámbrico que se mueve de una celda a otra. Físicamente el controlador puede estar ubicado junto a la estación base y normalmente un mismo controlador puede dar servicio a varias decenas de estaciones base. Los centros

de conmutación móviles (*MSC*) son claves dentro de la estructura de una red celular porque se encarga de la autorización de usuarios, facturación, inicio y finalización de llamadas, además de las transferencias de las mismas. Un *MSC* tendrá en ocasiones hasta cinco *BSC* a cargo en la operación de la infraestructura de la red.

Las arquitecturas de las redes celulares se han desarrollado a través del tiempo y con ellas sus tecnologías; en sus inicios eran analógicas y con el paso del tiempo se convirtieron en digitales, las cuales soportan mas servicios y usuarios. A las etapas que se han surtido desde que nacieron las redes celulares hasta nuestros días se les han llamado generaciones, es así como desde la primera generación (*1G*, *analógica*) que se diseñó básicamente para el tráfico de voz, pasando por la segunda generación (*2G* y *2.5G*, *digitales*) o *GSM* (*Global System for Mobile communications*) diseñadas para voz y datos, la tercera generación (*3G*) también para voz y datos pero con velocidades superiores, hasta la cuarta generación (*4G*) en nuestros días, se han logrado grandes avances con redes convergentes que son capaces de soportar variados servicios como es el caso de Smartphones con velocidades muy superiores en voz, datos, videos, etc. Es de anotar que a pesar de estos avances los operadores celulares e investigadores, tal como se mencionó en la justificación del proyecto, siguen apostándole a estudios de optimización de las redes celulares para lograr bajar costos de operación y mantenimiento que vuelvan estos negocios cada vez mas rentables y competitivos ya sea mejorando sus ingresos o bajando tarifas para atraer mas clientes.

Muchos de estos avances mostrados se han logrado gracias a la innovación y al desarrollo de técnicas que permiten volver las redes y sus tecnologías mas eficientes. Uno de estos avances ha sido la incorporación de la técnica de la multiplexación al campo de las telecomunicaciones, que permitió incrementar la velocidad de transmisión de la información y atender varios usuarios en un mismo ancho de banda a través de particiones en canales, bajando costos de operación y mantenimiento a pesar de tener mas versatilidad en los servicios prestados. A continuación se precisa la definición de la técnica de multiplexación y se detallan algunos aspectos referentes a ésta.

2.2. Multiplexación

Usualmente en un enlace no se utiliza toda la capacidad de diseño cuando solo tenemos dos terminales o dispositivos inalámbricos conectados, lo cual nos lleva a ineficiencias en la red. Debido a la alta demanda por conectar usuarios todo el tiempo se incorporó a las redes celulares la técnica de multiplexación, la cual permite realizar particiones de los recursos en canales para atender mas usuarios, realizando una combinación del medio de manera sincronizada.

Según [16], la multiplexación es “el procedimiento para conectar varios flujos de información en líneas de transmisión compartidas”. En esta técnica, la información que proviene de distintas fuentes emisoras se muestrea, se envía a su destino de

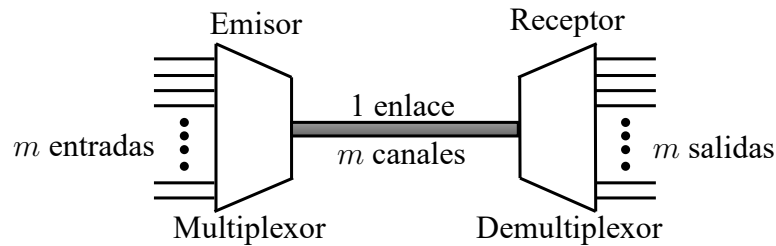


Figura 2.2: Técnica de la multiplexación

manera alternativa, y luego se recompone en el receptor sin que la información sufra ningún cambio. La Figura 2.2 muestra la técnica de la multiplexación.

Del lado del emisor tenemos m entradas, cada una representa un canal por el cual el usuario se va a conectar para llevar a cabo su comunicación. Éstas llegan a un equipo llamado multiplexor que las combina y las envía por un mismo enlace compartido por todos los canales. Al otro extremo, en el receptor, el demultiplexor se encarga de separar nuevamente los canales en m salidas y hacer llegar la información de cada usuario a su destino. Esta técnica nos permite aprovechar mejor la red y sus medios, aumentar velocidad de transmisión y ahorrar costos de operación e infraestructura porque se pueden multiplicar los servicios y tener más usuarios conectados. Todo este procedimiento permite tener agilidad en el servicio sin que el usuario sea consciente de todos los pasos que se ejecutan en la red.

Analizada la multiplexación, se continúa con las tecnologías celulares utilizadas en telecomunicaciones, en las cuales se pondrá en práctica lo explicado en la presente sección. Esto con el fin de conocerlas de manera general y luego hacer énfasis particularmente en la TDMA, tecnología en la cual se desarrollará la tesis.

2.3. Tecnologías celulares

A partir de la técnica de multiplexación se abrió la puerta a varias tecnologías celulares que se empezaron a desarrollar con el fin de mejorar y hacer más eficiente el servicio celular. Estas suelen denominarse control de acceso al medio o método de acceso múltiple, y se destacan: el acceso múltiple por división de frecuencia (*FDMA*), el acceso múltiple por división de código (*CDMA*) y el acceso múltiple por división de tiempo (*TDMA*). En ocasiones se pueden utilizar varias de estas tecnologías al tiempo para lograr mejores resultados.

En *FDMA* se toma el total del espectro de frecuencias asignado para el ancho de banda y se divide en canales, de esta manera a cada canal le corresponde un rango de frecuencias por el cual el usuario se va a comunicar sin interferir con los demás. *FDMA* aparece en los equipos celulares de primera generación y en su momento fue una gran revolución aunque su calidad no era buena principalmente porque eran

sistemas celulares analógicos, limitados solo para el tráfico de voz, bajas velocidades y pocos usuarios.

En la tecnología CDMA para distinguir a los usuarios en lugar de asignar frecuencias se utilizan códigos digitales únicos a partir de protocolos establecidos, los cuales son conocidos tanto por el dispositivo inalámbrico (teléfono celular) como por la estación base. Estos códigos son denominados secuencias de código pseudoaleatorio, los cuales cuando llegan al receptor son decodificados para extraer la información, y que ésta llegue a su destino sin sufrir cambios.

En la tecnología TDMA el ancho de banda total del enlace se destina a un canal por un tiempo específico asignado (*partición o slot*) que puede ser de unos cuantos milisegundos. Transcurrido este tiempo, todo el recurso se destina al canal siguiente y se sigue de manera secuencial. La suma de las particiones de tiempo da origen a una trama (*frame*), al finalizar una trama el procedimiento vuelve a empezar desde el primer canal con una trama nueva. En la subsección siguiente se darán mas detalles de esta tecnología, sobre la cual se desarrollará el presente estudio.

2.3.1. Acceso múltiple por división de tiempo (TDMA)

El acceso múltiple por división de tiempo (*TDMA, Time Division Multiple Access*) es una de las tecnologías digitales mas utilizada en la actualidad. El fin de ésta es compartir la capacidad disponible del medio de transmisión entre los diferentes usuarios que se encuentren enlazados. TDMA toma un periodo de tiempo y lo divide en marcos (*frame*), a su vez cada marco lo subdivide en particiones de tiempo o slots, de esta manera asigna a cada usuario una partición de tiempo o turno durante el cual va a aprovechar de todo el ancho de banda para transmitir a modo de ráfagas los paquetes desde el dispositivo inalámbrico hasta la estación base y ésta, a su vez, al emisor. Cuando al usuario 1 se le termina su turno, entonces TDMA asigna todos sus recursos al siguiente usuario durante su respectiva partición de tiempo, y así sucesivamente hasta el usuario M , como se ilustra en la Figura 2.3. A la sucesión de particiones de tiempo asignadas a un mismo usuario de trama en trama se le denomina canal [13].

TDMA necesita de ciertas memorias temporales (*buffer*) que van a ir almacenando la información de los paquetes que el usuario va a enviar cuando le corresponda su turno, es en éste proceso donde la acumulación de paquetes resulta ser perjudicial si no se da el servicio adecuado para atender las colas de paquetes represados, lo cual impactaría directamente la calidad del servicio. Las memorias temporales se sondean secuencialmente para componer una estructura de datos digitales. El sondeo debe ser lo suficientemente rápido para que cada memoria temporal se desocupe antes de que se reciban nuevos datos.

La multiplexación por división de tiempo o *TDMA* se clasifica en dos tipos según [8]:

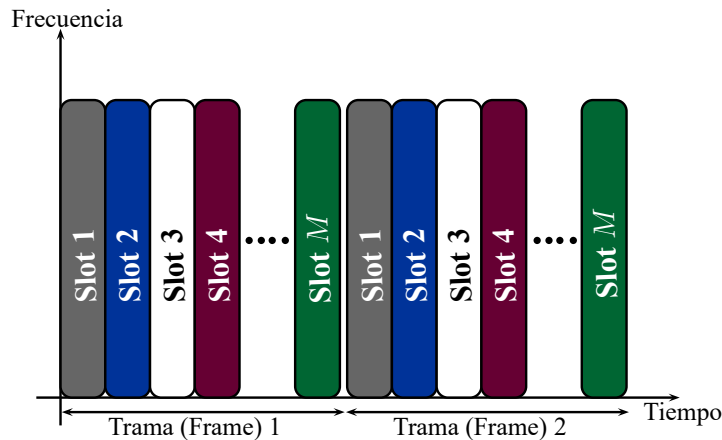


Figura 2.3: Acceso múltiple por división de tiempo

1. Síncrona (o de ciclo fijo): donde cada usuario tiene acceso al canal en intervalos de tiempo definidos de manera precisa (sincronizados). En este caso la trama tiene una longitud fija.
2. Asíncrona (o por demanda): donde cada usuario tiene acceso aleatorio al canal y, al obtener el acceso, se convierte en el único usuario del canal mientras dure la transmisión.

La Figura 2.4 muestra un ejemplo de una aplicación de la tecnología TDMA con 4 canales en el instante en el cual el canal 2 está transmitiendo y tiene asignada toda la capacidad del medio, se puede ver que los interruptores de los canales 1, 3 y 4 se encuentran abiertos en ese instante. Además se muestra la sincronización que debe haber en los tiempos del multiplexor y el demultiplexor para que la ráfaga del usuario que está recibiendo servicios por el canal 2 pueda darse sin inconvenientes. Es muy importante resaltar la importancia de estos tiempos porque ellos son los que van a definir la asignación de recursos una vez se termine el turno del canal 2 y se deba dar servicio al canal siguiente.

Un usuario de TDMA tendrá la sensación de que siempre tiene servicio dado que todo el proceso de alternancia de canales transcurre en espacios de tiempo muy cortos, los cuales son imperceptibles por él. En esto también ayudan mucho las memorias temporales, las cuales intervienen de forma adecuada para que la comunicación fluya sin altibajos.

Según [2], algunas de las principales características de la técnica TDMA son:

- La asignación de turnos a cada usuario debe ser sincronizada rigurosamente para evitar choques de paquetes al momento de transmitir por ráfagas.
- Se tienen espacios de tiempo pequeños de guarda entre los canales para evitar interferencias entre si.

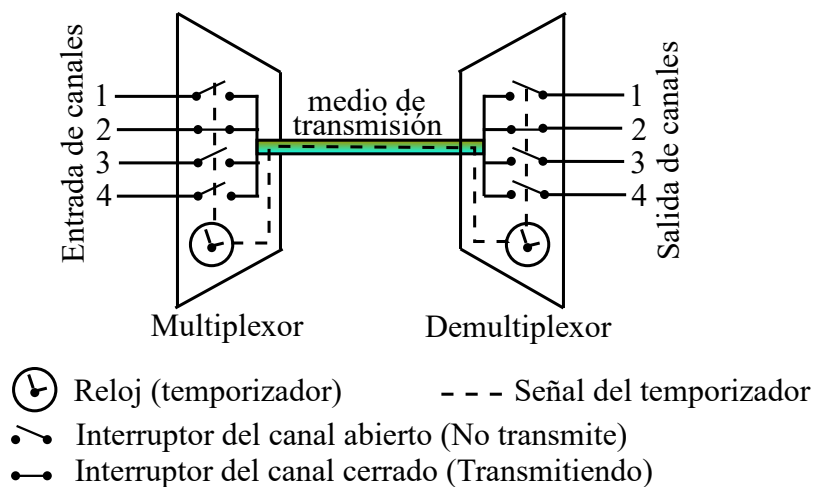


Figura 2.4: Ejemplo TDMA con 4 canales

- La información se transmite a través de señales digitales.
- Es versátil y se logra aumentar el número de usuarios que se comunican en la red celular combinando la técnica TDMA con FDMA.
- Es sencilla la transmisión de señales digitales por un canal.
- Las estaciones base solo necesitan un transmisor y un receptor para comunicarse y dar servicio a los dispositivos móviles, por lo tanto la operación de TDMA resulta ser sencilla en comparación con otras técnicas.
- La duración de las tramas debe tener límites para evitar retardos excesivos que afecten la transmisión de paquetes.
- Se presenta retardo en la comunicación debido al almacenamiento de paquetes que se genera en cada dispositivo móvil mientras espera su turno.
- Se presentan ahorros en el espectro si se trabajan dos tramas temporales: una ascendente con su respectiva frecuencia y otra descendente en una frecuencia diferente, con lo cual se logra una comunicación dúplex que favorece la utilización del medio.
- Se requieren memorias buffer en estos dispositivos como medios de almacenamiento de paquetes a transmitir.

Una vez explicadas las tecnologías celulares, en particular la TDMA, en el siguiente capítulo se analizará la congestión de paquetes que se presenta en las redes celulares y que ocasionan ineficiencias e impactos negativos en la calidad de servicio prestada al usuario. Más adelante, en la solución del problema planteado en la tesis, se integrarán

los conceptos de TDMA y congestión de redes a las herramientas matemáticas para modelar la situación y dar alternativas que lleven la red celular a asignar recursos adecuadamente para resolver el problema y obtener la satisfacción del cliente.

CONGESTIÓN EN REDES

Este capítulo explica el problema central que busca solucionar la tesis y es el problema de la congestión de paquetes en las redes celulares convergentes que trabajan bajo la tecnología TDMA, el cual impide una buena comunicación y una calidad en el servicio. Es por esto que, en este capítulo se mostrarán particularidades y definiciones a tener en cuenta para entender y solucionar el problema de la congestión de paquetes, dando la claridad necesaria para que el lector tenga bases suficientes para su comprensión.

El problema de la congestión en las redes aparece cuando el número de paquetes que transitan por ella se aproximan al límite de su capacidad de diseño y de gestión, es por esto que se debe realizar un control eficiente de la congestión en los nodos con el fin de mantener el número de paquetes que circulan en la red por debajo del nivel en el cual se afecta la comunicación del usuario, y como consecuencia, la calidad del servicio.

La Figura 3.5 muestra la acumulación de paquetes en la memoria temporal (*buffer*) para 4 usuarios que se están comunicando a través de distintos canales bajo la tecnología TDMA. Cada usuario emisor almacena sus paquetes en las memorias temporales a manera de colas mientras los paquetes esperan ser atendidos y direccionados al receptor respectivo, es por esto que una red celular convergente es esencialmente una red de colas. La figura 3.5 presenta el instante de tiempo en el cual le corresponde el turno en la atención al usuario emisor 2 para transmitir sus paquetes hasta su receptor. Si la velocidad de llegada de paquetes al nodo es mayor que la velocidad de transmisión (*servicio*) de los mismos, el tamaño de la cola y el retardo en la comunicación crecen hasta agotar la capacidad de respuesta de la red.

A medida que se reciben los paquetes y se almacenan en la memoria temporal, el nodo los examina y los direcciona hacia la memoria de salida pertinente. Cuando se llega al punto de saturación o congestión de la red, se pueden implementar dos estrategias: descartar paquetes en las colas de entradas cuando no se tenga memoria temporal disponible, lo que trae consigo pérdidas de información, o tener un tipo de control de flujo sobre los nodos vecinos que ayuden a tener un tráfico manejable, teniendo especial cuidado en no propagar el problema al resto de la red.

De lo anterior, podemos ver la dimensión del problema de la congestión en la red

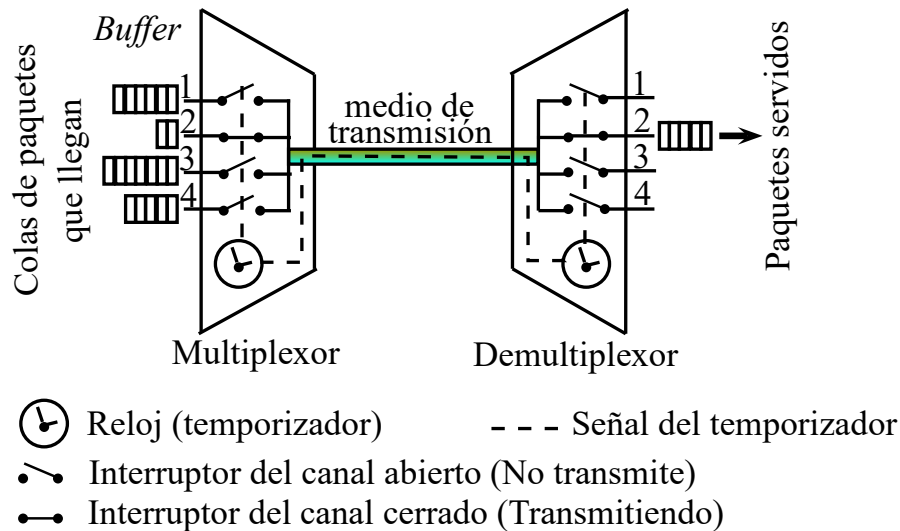


Figura 3.5: Almacenamiento de paquetes para 4 usuarios

para un operador que quiera servirle de manera eficiente a sus usuarios y brindarles la mejor calidad en el servicio bajo algunos parámetros establecidos, los cuales se mencionarán en la siguiente sección.

3.1. Calidad de servicio (*QoS, quality of service*)

Según [1], la calidad de servicio es “la capacidad de una red para asegurar una cantidad de recursos y diferenciar servicios”. Actualmente las redes trabajan bajo un tipo de mecanismo denominado *Best-Effort*, el cual consigue realizar el mejor esfuerzo para entregar los paquetes que circulan en la red, pero ésta no se compromete a garantizar la entrega de dichos datos. El servicio *Best-Effort* trata a todos los paquetes de igual forma, sin niveles de servicio, requerimientos, reservas o garantía. En general, el *Best-Effort* ha funcionado bastante bien y los usuarios pueden tolerar algún retardo y la variabilidad en la velocidad de los datos (*jitter*) para correos electrónicos, la transferencia de archivos o la navegación Web. Para otro tipo de aplicaciones más exigentes en cuanto a recursos de red, como es el caso de las videollamadas donde se deben garantizar recursos de red para su buen funcionamiento, se utilizan mezclas de *best-effort* con tráfico en tiempo real para responder de buena forma a las demandas de los usuarios.

En la actualidad, debido a la demanda creciente de aplicaciones en redes convergentes, se está requiriendo constantemente asignar recursos de forma más confiable, continua y segura, para que servicios como las videollamadas, que utilizan paquetes inelásticos, puedan llevarse a cabo satisfactoriamente con las altas exigencias de red (recursos) que ellas requieren y que son diferentes a otros servicios como el envío

de correos, donde se utilizan paquetes elásticos, los cuales no son tan sensibles a los retardos y pueden no necesitar tantos recursos. Los siguientes parámetros son comúnmente utilizados para describir requisitos de QoS [1]:

- *Ancho de Banda Mínimo*: Es la mínima cantidad del ancho de banda requerida por el flujo de una aplicación. Es necesario especificar el intervalo de tiempo para la medición del ancho de banda ya que diferentes intervalos de medición pueden producir diferentes resultados.
- *Retardo (delay)*: El retardo requerido puede ser especificado como el promedio de los retardos (retardo medio) o por el retardo del peor caso. El retardo que un paquete experimenta tiene tres componentes: retardo de propagación, retardo de transmisión, y retardo de procesamiento. El retardo de propagación es limitado por la velocidad de la luz, y al mismo tiempo es una función de la distancia. El retardo de transmisión es el tiempo que tarda en enviarse un paquete en un enlace y depende de la longitud del paquete y de la velocidad del enlace; finalmente, el retardo de procesamiento es el tiempo de espera que experimenta un paquete en las colas.
- *Variación de Retardo (Delay jitter)*: Este parámetro especifica la máxima diferencia entre el más largo y el más corto retardo que un paquete experimenta. En cualquier caso, la variación de retardo no debería ser más larga que el retardo del peor caso ni tampoco que el retardo de procesamiento.
- *Tasa de Pérdidas (Loss Rate)*: Es el cociente resultante entre los paquetes perdidos y el total de los paquetes transmitidos. La pérdida de paquetes se debe usualmente a la congestión, y tales pérdidas pueden ser prevenidas mediante la asignación de recursos y almacenamiento intermedio (buffers) suficientes para el flujo de tráfico.

De los anteriores parámetros que hacen alusión a la calidad de servicio, el presente estudio se centrará en la siguiente sección en el análisis de los retardos por ser uno de los temas fundamentales a tener en cuenta para la solución del problema planteado en la sección 1.1. Otros aspectos importantes que caracterizan la calidad de servicio en una red y que se les deben garantizar al usuario, se encuentran en la Figura 3.6 [12].

Hemos visto anteriormente algunos inconvenientes que se pueden presentar en el tráfico de los paquetes y que impiden entregarlos a los receptores de una manera adecuada. El tráfico en una red se puede dividir en dos categorías generales: tráfico inelástico y tráfico elástico [13].

El tráfico inelástico no se adapta fácilmente a los cambios en el retardo y el rendimiento a través de un conjunto de redes. El principal ejemplo es el tráfico en tiempo real. Este tipo de tráfico tiene las siguientes necesidades para asegurar QoS: un rendimiento mínimo de la red para poder entregar los datos, retardos mínimos, límite

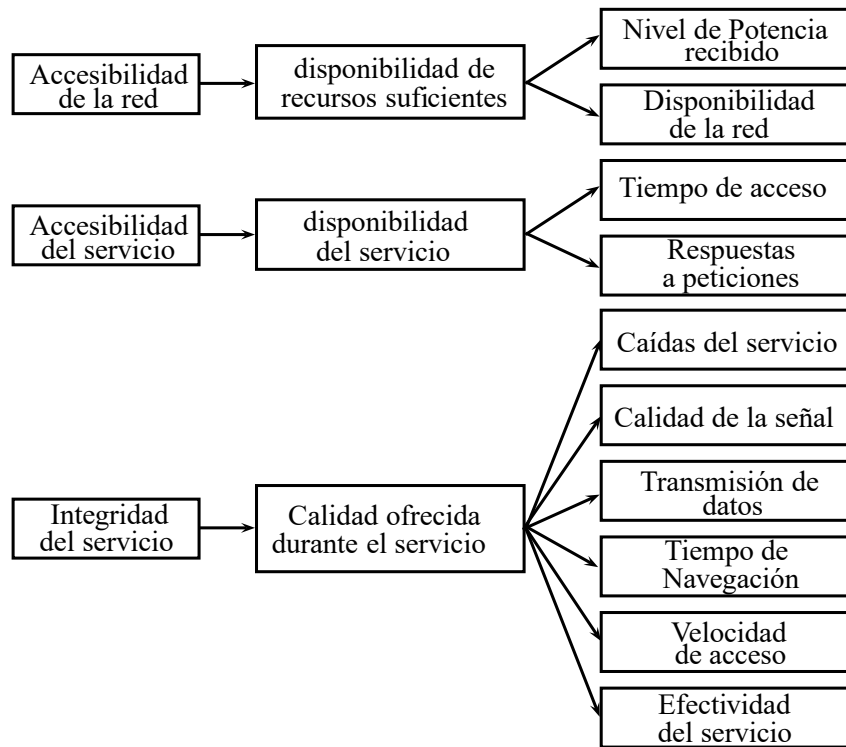


Figura 3.6: Aspectos importantes en QoS

superior en la variación del retardo debido a su criticidad y poca pérdida de paquetes, si es que pueden sufrir pérdidas de paquetes. Estas consideraciones se deben tener en cuenta en la arquitectura y gestión de la red para garantizar estos parámetros.

El tráfico elástico es aquel que se puede ajustar a cambios en el retardo y rendimiento a través de un conjunto de redes y aún así satisfacer las necesidades de sus aplicaciones. Algunos ejemplos de este tipo de tráfico son los correos electrónicos y la transferencia de archivos.

Como se ha visto, la calidad de servicio es un tema extenso dentro de las telecomunicaciones e involucra retos para un operador celular que quiera ser competitivo en el mercado, a pesar de esto el desarrollo de la tesis se enfocará en un aspecto muy preciso de la calidad de servicio como es el problema de los retardos y buscará plantear una solución óptima asignando recursos de red que garanticen la estabilidad y la entrega oportuna de los paquetes. Por lo tanto, en la siguiente sección se ampliará el tema de los retardos en una red celular con tecnología TDMA a partir de un análisis matemático que planteará una expresión que permite ver la relación de éstos retardos en general con la teoría de colas y en particular con la velocidad total de llegadas de paquetes a la red y a los multiplexores, como también con los retardos en los multiplexores.

3.2. Retardos y pérdidas de prestaciones

En esta sección se plantea una expresión que muestra la relación que existe entre el retardo general de paquetes que atraviesan una red celular TDMA y la velocidad total de llegada de paquetes al sistema, la velocidad de llegada de paquetes a cada multiplexor y los retardos individuales que se presentan en cada multiplexor existente en la red. Lo anterior permite medir el impacto de cada parámetro en el diseño y operación de una red celular convergente con el fin de minimizar los retardos y atender satisfactoriamente las colas de paquetes. Además, en esta sección se busca relacionar el problema de los retardos con la arquitectura de la red celular bajo la tecnología TDMA, que transmite a través de la utilización de multiplexores y demultiplexores como se evidenció en la subsección 2.3.1.

3.2.1. Análisis del retardo

Los paquetes van a llegar al sistema de atención o servicio bajo algún patrón, es probable que por dificultades en el sistema algunos paquetes queden bloqueados o salgan del sistema por falta de recursos para atenderlos, los demás ingresarán y serán atendidos y servidos por el sistema. Asumamos que el paquete n ingresará y permanecerá en el sistema un tiempo \mathcal{T}_n , luego después de este tiempo saldrá del sistema. Por lo tanto, definamos los siguientes parámetros que serán de interés [16]:

- Tiempo que permanece en el sistema el paquete n : \mathcal{T}_n
- Cantidad de paquetes en el sistema en el tiempo t : $N(t)$

Ahora, analicemos el sistema que se presenta en la Figura 3.7:

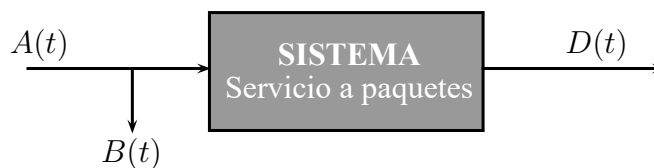


Figura 3.7: Análisis del retardo en un sistema de colas

Donde, para el intervalo de tiempo de 0 a t tenemos que:

$A(t)$ = número acumulado de paquetes que llegan al sistema hasta el instante de tiempo t

$B(t)$ = número acumulado de paquetes perdidos o bloqueados hasta el instante de tiempo t

$D(t)$ = número acumulado de paquetes que salen del sistema hasta el instante de tiempo t

Entonces, el **número de paquetes** en el sistema en un instante t , suponiendo que en el instante $t = 0$ el sistema está vacío, viene dado por la expresión:

$$N(t) = A(t) - D(t) - B(t)$$

A largo plazo, la **velocidad (tasa) de llegada** λ al sistema, está dada por:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t}$$

Con λ en paquetes/unidad de tiempo.

El **rendimiento** (R) del sistema o velocidad de salida a largo plazo, es el número medio de paquetes/unidad de tiempo que pasan a través del sistema y está dado por:

$$R = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t}$$

Con R en paquetes/unidad de tiempo.

El **valor esperado de paquetes en el sistema** ($E[N]$) está dado por:

$$E[N] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N(t') dt'$$

A largo plazo, la **fracción de paquetes que llegan al sistema y se pierden o bloquean** (P_b) está dada por:

$$P_b = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{A(t)}$$

La siguiente expresión denominada **Fórmula de Little** nos ayudará a encontrar más adelante el retardo en el sistema o en la red ($E[\mathcal{T}_n]$), ésta relaciona la velocidad de llegada λ y el tiempo medio pasado en el sistema $E[\mathcal{T}_n]$ con el valor esperado de paquetes en el sistema $E[N]$ de la siguiente forma:

$$E[N] = \lambda E[\mathcal{T}_n]$$

Si consideramos que se pueden perder o bloquear paquetes ($B(t)$) antes de ingresar al sistema para ser atendidos, entonces la velocidad de llegada de paquetes que realmente están entrando al sistema estaría dada por $\lambda(1 - P_b)$, donde P_b es la fracción de llegadas que se pierden o bloquean. Por tanto, la fórmula de Little para sistemas donde se pierden o bloquean paquetes antes de recibir servicio nos queda:

$$E[N] = \lambda(1 - P_b)E[\mathcal{T}_n] \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) nos permite calcular el retardo medio que sufren los paquetes en general para cualquier sistema. Ahora, consideremos que el sistema es una red de conmutación de paquetes, donde un paquete que llega es encaminado instantáneamente y situado en un multiplexor para esperar su transmisión por una línea de salida, se asume que el paquete llega a la red y será servido satisfactoriamente. Sea $N(t)_{red}$ el número total de paquetes en la red en un instante t , $\mathcal{T}_{n,red}$ el tiempo que pasa el paquete n en la red, y λ_{red} la velocidad total de llegadas de paquetes a la red, entonces la fórmula de Little nos queda así:

$$E[N_{red}] = \lambda_{red}E[\mathcal{T}_{n,red}] \quad (3.2)$$

De la ecuación (3.2), se puede ver que el retardo medio de los paquetes al atravesar la red es:

$$E[\mathcal{T}_{n,red}] = \frac{E[N_{red}]}{\lambda_{red}} \quad (3.3)$$

Si consideramos un multiplexor m de la red individualmente y aplicamos la fórmula de Little, nos resulta:

$$E[N_m] = \lambda_m E[\mathcal{T}_{n,m}]$$

Donde λ_m es la llegada de paquetes al multiplexor m y $E[\mathcal{T}_{n,m}]$ es el tiempo medio que ha pasado el paquete n en el multiplexor m . Por lo tanto, el número total de paquetes en la red $N(t)_{red}$ se calcula sumando los paquetes en todos los multiplexores:

$$E[N_{red}] = \sum_m E[N_m] = \sum_m \lambda_m E[\mathcal{T}_{n,m}] \quad (3.4)$$

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) se puede obtener una expresión para el retardo total de paquetes que atraviesan toda la red:

$$E[\mathcal{T}_{n,red}] = \frac{E[N_{red}]}{\lambda_{red}} = \frac{1}{\lambda_{red}} \sum_m \lambda_m E[\mathcal{T}_{n,m}] \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) se puede ver que el retardo de la red depende de la velocidad total de llegada a la red, de la velocidad de llegada a los multiplexores individuales, y del retardo de los paquetes en cada multiplexor. Esta expresión se usa con frecuencia en el diseño y gestión de redes de conmutación de paquetes.

Ahora, en la siguiente sección se complementará el estudio sobre la congestión en redes con el impacto que producen las interferencias sobre la capacidad del sistema, así como las consecuencias que traen consigo en la calidad de servicio.

3.3. Interferencias y capacidad del sistema

Las interferencias producen efectos generalmente negativos en la comunicación entre un emisor y un receptor a través de una red inalámbrica y como consecuencia en

la capacidad de la red para administrar bien los enlaces y evitar impactos en los parámetros de QoS. Estas interferencias pueden ser causadas entre sí por los mismos dispositivos inalámbricos que están en la celda ya sean del mismo operador o de la competencia, por la potencia con la que emite la estación base o por efectos de cualquier otro sistema no celular que inserta energía a la banda de frecuencia de los dispositivos, entre otras. Las interferencias pueden distorsionar o destruir completamente la señal que enlaza los distintos componentes de la red.

Las interferencias pueden presentarse en los canales de voz produciendo un fenómeno llamado “*cross-talk*” [14], en el cual el usuario escucha interferencias de fondo mientras utiliza el servicio. En los canales de control, las interferencias pueden producir errores en la señalización digital y como consecuencia llamadas perdidas, entrecortadas o bloqueadas. En las ciudades se tienen mas interferencias debido al gran número de estaciones base y dispositivos móviles.

Las principales interferencias existentes se pueden agrupar en dos tipos: interferencias co-canal e interferencias entre canales adyacentes. La interferencia co-canal está enfocada hacia la reutilización de frecuencias en celdas (no adyacentes) diferentes y espaciadas geográficamente dentro del área de cobertura. Este tipo de interferencias se pueden minimizar utilizando una potencia adecuada por parte de las antenas de las estaciones base con el fin de que la propagación de las ondas no alcancen a “escucharse” en la celda que también utiliza esta frecuencia a unos kilómetros de distancia. Las interferencias entre canales adyacentes se producen básicamente por ineficiencias en los filtros de los receptores y que permiten a las frecuencias cercanas colarse dentro de la banda respectiva. En este tipo de interferencias se produce un fenómeno denominado “*Efecto near-far*” [14], el cual se refiere a la interferencia que puede realizar un dispositivo inalámbrico sobre otro cuando los dos transmiten a la vez a igual potencia y en su respectiva frecuencia hacia la estación base de su celda, pero a diferentes distancias de ella, por lo que la estación base le dará servicio al dispositivo mas cercano y descuidará al que está mas lejos, trayendo consigo problemas de comunicación para este dispositivo. Este tipo de interferencias se pueden minimizar filtrando adecuadamente y con una correcta asignación de frecuencias.

Es importante resaltar que en algunas tecnologías celulares como FDMA y TDMA hay que considerar intervalos de tiempo guardas con el fin de evitar interferencias entre las particiones realizadas y asignadas a los usuarios, ya sean rangos de frecuencias en FDMA o de tiempo como en TDMA.

En la práctica, cuando se realiza el estudio de las interferencias entre distintos enlaces se suele utilizar una herramienta de carácter visual denominada *Grafo de interferencias*, el cual consta de los nodos o enlaces a programar en la red y líneas que interconectan los distintos nodos adyacentes, significando que si dos nodos adyacentes están unidos por una línea se interpreta que hay interferencias entre ellos y no pueden operar a la vez para evitar inconvenientes en la comunicación. Un ejemplo de un grafo de interferencias para 7 enlaces se muestra en la Figura 3.8:

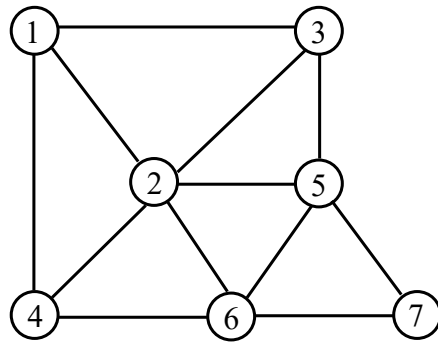


Figura 3.8: Ejemplo de un grafo de interferencias con 7 enlaces

En la Figura 3.8 se observa que si por ejemplo el enlace 3 se programa, entonces los enlaces 1, 2 y 5 no se pueden activar porque existen interferencias entre ellos. Aún si no se activan los enlaces 1, 2 y 5, puede pasar que por otros efectos electromagnéticos el enlace 3 transmita, pero el receptor no reciba correctamente la información. Para modelar estos otros aspectos que afectan la comunicación, modelaremos cada canal como una variable aleatoria binaria que toma valores ON y OFF. Si el canal está en el estado ON y transmitimos, el receptor recibirá exitosamente la información; si el canal está en el estado OFF y transmitimos, el receptor no podrá recibir exitosamente la información.

A partir del marco teórico sobre redes celulares, congestión e interferencias, en el siguiente capítulo vamos a formular matemáticamente el problema a resolver en el presente estudio y establecer la notación a utilizar el resto del proyecto, luego se planteará la solución a través del algoritmo dinámico a implementar, el cual se comprobará en las simulaciones que se analizarán mas adelante.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El problema que se presenta en el estudio consiste en la búsqueda de una programación óptima que maximice el servicio de atención a las colas de paquetes elásticos e inelásticos, a partir de la distribución adecuada de los recursos de red, para que éstos paquetes puedan transmitirse de la mejor manera hasta el receptor en el marco de la tecnología celular TDMA (subsección 2.3.1), la cual busca atender a los usuarios por medio de la asignación de canales que resultan de la división del tiempo en marcos, los cuales a su vez se subdividen en un conjunto de T particiones, plazo en el cual se deben programar los paquetes elásticos e inelásticos que llegan al comienzo del marco para que vayan satisfactoriamente a su destino, de lo contrario se presentarían inconvenientes en la red celular como retrasos y pérdidas de información en el caso de los paquetes inelásticos ya que éstos no toleran demoras en la red y son descartados para el siguiente marco. Para los paquetes elásticos se define una función cóncava de utilidad $U_l(x_{el})$ que depende de la rata media de llegadas elásticas por cada marco x_{el} y que se interpreta como el grado de satisfacción del cliente por el servicio prestado a las colas elásticas luego de la asignación óptima de recursos programada por la red celular. La función se asume cóncava dado que a medida que le damos mas recursos de red al usuario para la atención de colas elásticas, mejor será la calidad de servicio percibida por él y por ende se incrementará su satisfacción, inicialmente de manera significativa con anchos de banda que imprimen buenas velocidades de transmisión pero después de ciertos valores, un incremento en el ancho de banda representará cambios marginales en la satisfacción del cliente ya que sus necesidades básicas ya han sido cubiertas.

El modelo matemático que se va a tratar en la tesis fue desarrollado inicialmente en [9] para redes Ad Hoc, por lo que en el presente estudio se retoma y se adapta para aplicaciones donde intervienen paquetes elásticos e inelásticos a través de redes celulares convergentes bajo la tecnología TDMA. Estas redes presentan diferencias en cuanto a la infraestructura que utilizan para comunicar emisor y receptor, en las aplicaciones que manejan, en las formas como se establecen enlaces, en los grafos de interferencias y el servicio en si que prestan a los usuarios, entre otras.

Iniciaremos la formulación del problema analizándolo como una aplicación de la optimización estática. Basándonos en la teoría de la descomposición y los multiplicadores de Lagrange llegaremos a dos subproblemas, que se desprenden del problema origi-

nal, y que nos permitirán obtener un algoritmo estático para la solución del problema desde un enfoque intuitivo. Luego, se obtendrá una solución dinámica al problema y se probará su estabilidad usando las técnicas estocásticas de Lyapunov.

La comunicación entre emisor y receptor a través de la red celular convergente se representará por un grafo dirigido, el cual está conformado por nodos (terminales inalámbricos) y enlaces direccionales. Un enlace se establece entre dos nodos que transmiten paquetes entre si. El grafo dirigido se denota por $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, donde \mathcal{N} es el conjunto de nodos y \mathcal{L} es el conjunto de enlaces direccionales, enumerados de 1 hasta $|\mathcal{L}|$ y en algunos casos por simplicidad se usará $l \in \mathcal{L}$, lo cual quiere decir que $l \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\}$.

Para lograr nuestro propósito de atención oportuna de colas de paquetes elásticos e inelásticos, es importante conocer la cantidad de paquetes que están llegando a la red celular TDMA en cada marco dado y para cada enlace establecido. Para esto, se definen dos vectores que almacenan esta información: $a_i = (a_{il})_{l \in \mathcal{L}}$ para paquetes inelásticos, donde a_{il} es una variable aleatoria con media x_{il} y varianza σ_{il}^2 ; y el vector $a_e = (a_{el})_{l \in \mathcal{L}}$ para las llegadas de paquetes elásticos. Es de anotar que, en el estudio se asume que las llegadas de paquetes inelásticos entre marco y marco son independientes, y que para garantizar el modelamiento del problema como una cadena de Markov irreducible y aperiódica, las probabilidades de que llegue un paquete inelástico o de que no lleguen paquetes inelásticos son mayores que cero ($Pr(a_{il} = 0) > 0$ y $Pr(a_{il} = 1) > 0$).

En el modelamiento del canal por el cual se van a transmitir los paquetes de la red celular TDMA se pueden presentar dos estados: canal encendido (ON) o canal apagado (OFF), como se explicó en la sección 3.3. En algunos casos (como se asume en el presente estudio) es posible conocer el estado del canal al inicio del marco y previa transmisión de paquetes al receptor, lo que nos permite tener información privilegiada del canal durante ese marco para programar la rata óptima y con la seguridad de que ésta llegará al receptor. Con este fin, se tiene el vector $c = (c_l)_{l \in \mathcal{L}}$ que denota el número de paquetes del enlace l que pueden ser transmitidos satisfactoriamente en una partición de tiempo de un marco dado y se asume que c_l es una variable aleatoria no negativa con media \bar{c}_l y varianza σ_{cl}^2 .

La red celular convergente TDMA debe realizar una programación de los recursos que por diseño de red se tienen para garantizar la calidad de servicio exigida, esta programación deberá realizarse por separado para cada tipo de paquetes (elásticos o inelásticos), cada enlace y cada partición de tiempo. Por lo cual se establece la siguiente notación para una programación factible: $s = (s_{il,t}, s_{el,t})$, donde $s_{il,t}, s_{el,t}$ denota respectivamente el número de paquetes inelásticos y elásticos que pueden ser programados para transmitir en el enlace $l \in \mathcal{L}$ y partición de tiempo $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ para un marco específico. Por diseño de la red celular y limitaciones en la asignación de los recursos, en un marco no se pueden programar mas paquetes inelásticos de los que llegan al inicio. Además, el total de paquetes elásticos e inelásticos programados

en cada enlace y partición no puede exceder la capacidad del canal asignado para cada enlace. Por lo tanto, asumiendo que las llegadas inelásticas y el estado del canal están dados por a_i y c respectivamente, se tienen las siguientes restricciones:

$$\sum_{t=1}^T s_{il,t} \leq a_{il} \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \text{ y} \quad (4.6)$$

$$s_{il,t} + s_{el,t} \leq c_l \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \text{ y } t \in \{1, 2, \dots, T\}. \quad (4.7)$$

El conjunto de todas las programaciones factibles se denota por $\mathcal{S}(a_i, c)$ cuando las llegadas inelásticas son a_i y el estado del canal es c en un marco específico. Las restricciones (4.6) y (4.7) son importantes en el modelamiento y funcionamiento de la red celular TDMA, además tienen implícitas las restricciones de interferencias de la red para poder establecer una comunicación adecuada entre emisor y receptor.

Una vez se realiza la programación factible $s \in \mathcal{S}(a_i, c)$ al comienzo del marco con el fin de establecer el número de paquetes inelásticos que van a ser transmitidos, se plantea una función $Pr(s|a_i, c)$, la cuál es la probabilidad de usar la programación $s \in \mathcal{S}(a_i, c)$ cuando las llegadas inelásticas están dadas por a_i y el estado del canal es c , esto con el fin de encontrar la programación adecuada que optimice la transmisión de este tipo de paquetes. Es de anotar que la función $Pr(s|a_i, c)$ está sujeta a la restricción de que la probabilidad de pérdida en el enlace $l \in \mathcal{L}$ debido al vencimiento del plazo para transmitir no puede exceder p_l . En el caso de los paquetes elásticos, se maximizará la función de utilidad en la red celular a través del vector a_e que se definió anteriormente y se mantendrá la estabilidad en las colas respectivas.

Como parte de la formulación del problema se debe encontrar el servicio de atención adecuado que van a recibir los paquetes (organizados a manera de colas) en la red celular TDMA cuando sea el turno para transmitir hacia el receptor. Por lo tanto, se definen $\mu_i(a_i, c)$ como el número esperado de paquetes inelásticos servidos o atendidos satisfactoriamente por la red celular si el número de paquetes que llegan está dado por a_i y el estado del canal es c , y de igual manera $\mu_e(a_i, c)$ como el número esperado de paquetes elásticos que pueden ser servidos o atendidos satisfactoriamente por la red celular. Por las limitaciones de la red en cuánto a sus recursos a asignar y por la optimización a realizar de la misma, el servicio que se prestará a las colas elásticas e inelásticas para su transmisión no podrá exceder a los paquetes programados en cada partición de tiempo. Por lo tanto, se tienen las siguientes restricciones:

$$\mu_{il}(a_i, c) \leq \sum_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{t=1}^T s_{il,t} Pr(s|a_i, c)$$

$$\mu_{el}(a_i, c) \leq \sum_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{t=1}^T s_{el,t} Pr(s|a_i, c)$$

De lo anterior, definimos el servicio esperado μ_{il} y μ_{el} para cada tráfico en el enlace l como sigue:

$$\begin{aligned}\mu_{il} &\stackrel{def}{=} \sum_{a_i} \sum_c \mu_{il}(a_i, c) Pr(c) Pr(a_i) \\ \mu_{el} &\stackrel{def}{=} \sum_{a_i} \sum_c \mu_{el}(a_i, c) Pr(c) Pr(a_i)\end{aligned}$$

Con el fin de ofrecer calidad de servicio al usuario a través de la atención oportuna de las colas y estabilidad de la red, se requiere que el servicio esperado a las colas elásticas e inelásticas sea mayor o igual que el promedio de paquetes respectivos que están llegando al inicio de cada marco:

$$\mu_{il} \geq x_{il}(1 - p_l) \quad y \quad x_{el} \leq \mu_{el}$$

Por otro lado, se asume que $x_{il}(1 - p_l) > 0$ para todo $l \in \mathcal{L}$.

Ahora se definirá la región de capacidad para valores fijos de llegadas inelásticas a_i y estado del canal c , como el conjunto de los diferentes servicios o atenciones satisfactorias que se le darán a las colas de paquetes inelásticos y elásticos, en cada enlace y marco, entonces:

$$\mathcal{C}(a_i, c) \stackrel{def}{=} \left\{ (\bar{\mu}_{il}, \bar{\mu}_{el})_{l \in \mathcal{L}} : \text{existe } \bar{s} \in \mathcal{S}(a_i, c)_{\mathcal{CH}}, \right. \\ \left. \bar{\mu}_{il} \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \quad y \quad \bar{\mu}_{el} \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\},$$

De lo anterior, se puede ver que $\mu(a_i, c) \stackrel{def}{=} (\mu_{il}(a_i, c), \mu_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$, donde $\mathcal{S}(a_i, c)_{\mathcal{CH}}$ es el casco convexo de $\mathcal{S}(a_i, c)$, el cual garantiza que todas las programaciones que pertenecen a $\mathcal{S}(a_i, c)$ cumplen las características o requisitos del conjunto.

De igual manera, se define la capacidad total de la red para la atención de colas de paquetes, a partir de los valores esperados de los servicios, como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{ll} (\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} : & \text{existe } (\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c) \\ \mathcal{C}(a_i, c) \text{ para todo } a_i, c & y \quad \mu_{il} = E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)], \\ \mu_{el} = E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)] & \text{para todo } l \in \mathcal{L} \end{array} \right\},$$

de donde $\mu \stackrel{def}{=} (\mu_{il}, \mu_{el})_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}$.

Por todo lo descrito anteriormente y dado el vector $w \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}$ que representa los recursos de la red celular, la formulación matemática del problema de optimización estática se plantea como sigue:

$$\max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(x_{el}) + w_l \mu_{il} \quad (4.8)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}\mu_{il} &\geq x_{il} (1 - p_l) \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \\ 0 &\leq x_{el} \leq \mu_{el} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}.\end{aligned}$$

De (4.8) se puede ver que la función objetivo busca maximizar la satisfacción del cliente en cuanto a la congestión de paquetes elásticos, así como el servicio dado a las colas de paquetes inelásticos μ_{il} para que éstos sean atendidos satisfactoriamente, priorizándolos a través de w_l que asigna los recursos de red necesarios, como el ancho de banda, para lograr la transmisión efectiva y a tiempo de los paquetes inelásticos, para poder así dar cumplimiento a los parámetros de QoS. Se asume que los requisitos de las llegadas inelásticas y la probabilidad de pérdida son factibles, por lo tanto, el problema de optimización tiene una solución (μ^*, x_e^*) . En la siguiente sección se explicará el procedimiento que se utilizará en el estudio para desarrollar un algoritmo que nos permita encontrar la solución al problema de maximización planteado en (4.8).

4.1. Solución usando descomposición dual

Luego de formular el problema de optimización en la sección anterior y las restricciones respectivas, nos centraremos en la solución del mismo con el fin de encontrar los valores (μ^*, x_e^*) que maximicen la función objetivo (4.8). Para cumplir con este propósito se utilizará el principio de la descomposición dual, el cual es “un procedimiento sistemático para resolver problemas de gran escala o programas lineales que contienen restricciones de estructura especial” [10]. El principio de la descomposición dual busca simplificar el problema original creando subproblemas que se pueden trabajar por separado, logrando que las iteraciones del algoritmo sean más sencillas y nos lleve a la solución óptima de una manera más ágil. La utilización de la descomposición dual se justifica en el estudio dadas las características complejas del problema original de optimización estocástica que se aborda y que se evidencia en el gran número de variables y procesos aleatorios. Por otro lado, la descomposición permite obtener ahorros significativos en tiempos computacionales al momento de realizar simulaciones del algoritmo que resulta.

Aplicando lo anterior en el problema (4.8), teniendo en cuenta que δ_i, δ_e son los multiplicadores de Lagrange inelástico y elástico respectivamente, y basándonos en la definición de función dual de [11], en la cual se busca simplificar el problema original eliminando las dos restricciones que se tenían por aparte e insertarlas en éste, generando para este caso dos variables nuevas (δ_i, δ_e) , entonces tenemos que:

$$D(\delta_i, \delta_e) = \max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e \in \mathcal{L}} \sum \left\{ \begin{array}{l} U_l(x_{el}) + w_l \mu_{il} - \delta_{el} [x_{el} - \mu_{el}] \\ -\delta_{il} [x_{il} (1 - p_l) - \mu_{il}] \end{array} \right\},$$

sujeto a

$$x_{el} \geq 0 \text{ para todo } l \in \mathcal{L}.$$

Dado que en el procedimiento de descomposición realizado, el problema original se transforma en el problema dual, entonces se deben comparar los óptimos de cada problema y medir el desajuste entre ellos (*duality gap*) para asegurarnos que se está dando la solución al problema original. Para esto, la condición de Slater [4] establece que, dado que la función objetivo es cóncava y las restricciones son funciones afines, el desajuste entre los valores óptimos del problema original y el dual es cero, por lo tanto los óptimos de cada problema coinciden y:

$$D(\delta_i^*, \delta_e^*) = \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*,$$

donde:

$$(\delta_i^*, \delta_e^*) \in \arg \min_{\delta_{il} \geq 0, \delta_{el} \geq 0} D(\delta_i, \delta_e).$$

Nos interesa encontrar la solución óptima del problema (μ^*, x_e^*) , pero no el valor $D(\delta_i^*, \delta_e^*)$, por lo cual se re-escribe la función objetivo en la función dual, así:

$$\max_{\mu \in \mathcal{C}, x_e} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el} + \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l + \delta_{il}) \mu_{il} + \delta_{el} \mu_{el} - \sum_{l \in \mathcal{L}} \delta_{il} x_{il} (1 - p_l) \right\}$$

Ahora, cumpliendo con el objetivo de la descomposición dual, se plantean los siguientes subproblemas:

$$\max_{x_{el} \geq 0} U_l(x_{el}) - \delta_{el} x_{el}$$

y

$$\max_{\mu \in \mathcal{C}} \sum_{l \in \mathcal{L}} (w_l + \delta_{il}) \mu_{il} + \delta_{el} \mu_{el} \quad (4.9)$$

Dado que la solución del problema será para valores no negativos de δ_{il} y δ_{el} , tenemos que los servicios óptimos μ_i^* y μ_e^* serán tan grandes como las restricciones lo permitan, y dado que los límites superiores para $\mu_{il}^*(a_i, c)$ y $\mu_{el}^*(a_i, c)$ están expresados como una combinación convexa, y la función objetivo en (4.9) es lineal, el problema se puede descomponer en los siguientes subproblemas para a_i y c fijos:

$$\max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ (w_l + \delta_{il}) \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \delta_{el} \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}.$$

Se puede ver que (4.9) queda expresada en función de las programaciones inelásticas y elásticas de cada partición y enlace, y serán la solución óptima que encontraremos en cada iteración del algoritmo a plantear a continuación. El algoritmo tiene un paso

indexado k que permitirá ir realizando las iteraciones y evaluando cada subproblema en distintos puntos para quedarnos con el mejor valor de la función respectiva. Se define un parámetro suficientemente grande $X_{max} > 0$, el cual será la cota superior de x_{el} :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{el}^*(k) &\in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) - \delta_{el}(k) x_{el} \\ \tilde{s}^*(a_i, c, k) &\in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ [w_l + \delta_{il}(k)] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \delta_{el}(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\} \\ \tilde{\mu}_{il}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i, c, k) Pr(c) Pr(a_i) \\ \tilde{\mu}_{el}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i, c, k) Pr(c) Pr(a_i). \end{aligned}$$

Los multiplicadores de Lagrange $\delta_i(k)$, $\delta_e(k)$ se deben actualizar en cada paso de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta_{il}(k+1) &= \{\delta_{il}(k) + \epsilon [x_{il}(1-p_l) - \tilde{\mu}_{il}^*(k)]\}^+ \text{ y} \\ \delta_{el}(k+1) &= \{\delta_{el}(k) + \epsilon [\tilde{x}_{el}^*(k) - \tilde{\mu}_{el}^*(k)]\}^+ \end{aligned}$$

donde $\epsilon > 0$ representa un parámetro fijo para el tamaño del paso. Además, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^+ \stackrel{def}{=} \max\{\alpha, 0\}$.

Haciendo el cambio de variables $\hat{d}_l(k) = \delta_l(k)$ y $\hat{q}_l(k) = \delta_e(k)$, tenemos que el algoritmo iterativo se puede re-escribir así:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{el}^*(k) &\in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - \hat{q}_l(k) x_{el} \\ \tilde{s}^*(a_i, c, k) &\in \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i, c)} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + \hat{d}_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + \hat{q}_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\} \\ \tilde{\mu}_{il}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i, c, k) Pr(c) Pr(a_i) \\ \tilde{\mu}_{el}^*(k) &= \sum_{a_i} \sum_c \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i, c, k) Pr(c) Pr(a_i), \end{aligned}$$

con las ecuaciones de actualización:

$$\begin{aligned} \hat{d}_l(k+1) &= \left[\hat{d}_l(k) + x_{il}(1-p_l) - \tilde{\mu}_{il}^*(k) \right]^+ \\ \hat{q}_l(k+1) &= \left[\hat{q}_l(k) + \tilde{x}_{el}^*(k) - \tilde{\mu}_{el}^*(k) \right]^+. \end{aligned}$$

De esta manera se establece el algoritmo estático para la solución del problema de optimización formulado en el contexto de la maximización de una red celular que trabaja bajo la tecnología TDMA, gestionando de manera adecuada sus recursos. Después del cambio de los multiplicadores de Lagrange por $\hat{d}_l(k)$ y $\hat{q}_l(k)$, éstos se pueden interpretar como una cola inelástica que tiene $x_{il}(1 - p_l)$ llegadas y $\tilde{\mu}_{il}^*(k)$ salidas con paso k y una cola de paquetes elásticos respectivamente. La descomposición dual que se aplicó en esta sección solo proporciona una intuición de la solución, pero las redes reales tienen llegadas estocásticas y dinámicas, así como condiciones de estado del canal. En el siguiente capítulo, se presenta una solución más ajustada a la realidad y a las complejidades de las redes celulares TDMA, la cuál tiene en cuenta estos aspectos dinámicos y también la estabilidad de sus propiedades de convergencia basándose en la demostración de lemas, corolarios y teorema que apuntan en esa dirección.

ALGORITMO DINÁMICO Y ANÁLISIS DE SU CONVERGENCIA

El presente capítulo explica y fundamenta el algoritmo dinámico, lemas, corolarios y teorema, desarrollado inicialmente en [9] para redes Ad Hoc y los aplica detalladamente para redes celulares TDMA argumentando matemáticamente cada paso mostrado. El algoritmo dinámico tiene en cuenta las complejidades de las redes celulares TDMA y resulta del análisis al problema de optimización estática planteado en el capítulo anterior, éste permitirá iterar y encontrar las programaciones óptimas que se deben implementar en el marco k con el fin de asegurar que la red celular convergente opere de la mejor forma, sirviendo las colas de paquetes y proporcionando una calidad de servicio al cliente. Luego, se realizan las demostraciones de manera ampliada de los lemas, corolarios y teorema que comprueban la convergencia del algoritmo y su estabilidad, garantizando de esta forma que la solución a la cual llegamos optimiza la red celular TDMA evitando que colapse por el aumento en la congestión.

5.1. Programador y controlador de la congestión

Inicialmente se presentará el controlador de congestión, el cual busca mantener las colas de paquetes elásticos en un nivel adecuado que garantice un buen servicio al cliente, tomando acción en el servicio de atención a las colas elásticas teniendo como referencia la rata de llegadas de paquetes elásticos. Dado que la longitud de la cola en el enlace l está dada por $q_l(k)$, en el estudio se propone el siguiente algoritmo para el control de la congestión en cada marco k :

$$\tilde{x}_{el}^*(k) \in \arg \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - q_l(k) x_{el}. \quad (5.10)$$

Debido a la formulación del problema, su modelación y a la definición de paquetes, es de interés en el estudio que la rata de llegadas elásticas sea un número entero no

negativo. Por lo tanto, se asume que las llegadas elásticas en el enlace l , $\tilde{a}_{el}(k)$, son una variable aleatoria con media $\tilde{x}_{el}^*(k)$ y varianza con cota superior σ_e^2 , y son tales que las probabilidades de que no lleguen paquetes y de que llegue un paquete elástico son mayores a cero respectivamente ($Pr(\tilde{a}_{el}(k) = 0) > 0$ y $Pr(\tilde{a}_{el}(k) = 1) > 0$) para todo $l \in \mathcal{L}$ y todo k . Las dos últimas consideraciones se utilizan para garantizar que la cadena de Markov que se define mas adelante sea irreducible y aperiódica.

Sabiendo que $a_i(k)$ es el número de llegadas inelásticas y $c(k)$ el estado del canal en el marco k , se tiene el siguiente algoritmo dinámico que buscará las programaciones elásticas e inelásticas óptimas en cada marco:

$$\begin{aligned} & \tilde{s}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \in \\ & \arg \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Los vectores $d(k)$ y $q(k)$ son actualizados de marco a marco como sigue:

$$\begin{aligned} d_l(k+1) &= [d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+ \\ q_l(k+1) &= [q_l(k) + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

y $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $1 - p_l$.

En las iteraciones del algoritmo dinámico se van a tener valores fijos para ϵ y w , por lo que el programador óptimo (5.11) será una función de $a_i(k)$, $c(k)$, $d(k)$ y $q(k)$. Ahora, $d_l(k)$ se interpreta como una cola de paquetes inelásticos, la cual muestra el déficit en el servicio para cada enlace l y debe alcanzar una probabilidad de pérdida de paquetes inelásticos por retrasos menor o igual a p_l . Por otro lado, $q_l(k)$ representa el tamaño de la cola para paquetes elásticos en el enlace l y marco k .

En la siguiente sección se demuestra la convergencia del algoritmo dinámico planteado, a partir de teorema, lemas y corolarios desarrollados en [9] y ampliados en el curso del estudio, lo cual nos permite tener la certeza de que el algoritmo nos conlleva a una solución del problema y a la estabilidad de la red celular a través del servicio oportuno de las colas de paquetes.

5.2. Resultados de la convergencia

Ahora se comprobará que el algoritmo planteado en la sección anterior converge a partir de unos valores de programaciones elásticas e inelásticas óptimas que favorecen el buen funcionamiento de la red celular TDMA y su estabilidad. Además, con estas demostraciones detalladas se aporta al análisis de los diferentes parámetros y los efectos que éstos tienen en la red celular al manipularlos en cierto sentido.

Por las condiciones planteadas anteriormente, se puede ver que $(d(k), q(k))$ representa un caso de una cadena de Markov irreducible y aperiódica. Por lo tanto, nos apoyamos en la Proposición 1.7.2 y en el Criterio de estabilidad combinada de Foster-Lyapunov (ambos en [7]) para demostrar los lemas y teorema en esta sección. El Lema 5.2.1 nos muestra que en promedio las colas de paquetes inelásticos y elásticos $(d(k), q(k))$ en la red celular TDMA irán decreciendo a medida que se realicen las iteraciones, con lo cual se garantiza la estabilidad en la región de capacidad. Para esto, se selecciona una función que cumpla con los requisitos de Lyapunov ($V(0, 0) = 0$ y $V(d, q) > 0$), como es:

$$V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2.$$

Lema 5.2.1. *Considere la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algunos $\Delta > 0$ tal que:*

$$\mu_{il}(\Delta) \geq x_{il}(1 - p_i) \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L} \quad (5.14)$$

y

$$\mu_{el}(\Delta) > 0 \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}, \quad (5.15)$$

entonces,

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

para constantes positivas B_1, B_2, B_3 , y cualquier $\epsilon > 0$, donde $\tilde{x}_e^*(k)$ es la solución a (5.10), y $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución de (5.11). \diamond

Antes de probar el Lema 5.2.1 es necesario probar dos lemas auxiliares (5.2.2 para paquetes inelásticos y 5.2.3 para paquetes elásticos), y una Proposición (5.2.1) que van a ser de utilidad para su análisis y comprensión:

Lema 5.2.2. *Dado que en el marco (frame) k tenemos el evento $d(k) = d$ y $q(k) = q$ y si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algún $\Delta > 0$ de tal manera que (5.14) y (5.15) son válidas, entonces:*

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \end{aligned}$$

para alguna constante no negativa B_8 , y donde $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ está dada por la solución a (5.11). \diamond

Demostración. Se sabe que $\alpha^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\alpha, 0\}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo tanto $[\alpha^+]^2 \leq \alpha^2$, entonces:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Sea $B^* = \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$, entonces analicemos el término:

$$[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 = [d_l + B^*]^2 = d_l^2 + 2d_l B^* + B^{*2},$$

ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \{ d_l^2 + 2d_l B^* + B^{*2} \} \right] &= \frac{1}{2} \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + 2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2} \right] \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2}. \end{aligned}$$

Se toma valor esperado sin dejar de lado que en el marco k se tiene el evento $d(k) = d$ y $q(k) = q$, por lo cual:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2} \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2} \right].$$

Reemplazando en la desigualdad (5.16), nos queda:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\
& = \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2} \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} = E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l B^* + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} B^{*2} \right]
\end{aligned}$$

ahora, reemplazando B^* en la expresión anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] \\
& = E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right].
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Analicemos el término:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \\
& = \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) - 2\tilde{a}_{il}(k) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q).
\end{aligned}$$

Tenemos:

i) Dado que $\tilde{a}_{il}(k) \geq 0$ por ser una variable aleatoria binomial que representa las llegadas inelásticas en el enlace l , y $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0$ por ser el servicio de paquetes inelásticos que pueden ser programados, entonces:

$$2\tilde{a}_{il}(k) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) - 2\tilde{a}_{il}(k) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \\
& \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + I_{il}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q).
\end{aligned}$$

ii) Por definición en (5.13):

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q)$$

y por la restricción (4.6):

$$\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) \leq a_{il} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}$$

por transitividad:

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \leq a_{il} \text{ para todo } l \in \mathcal{L}$$

se sigue que:

$$[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \leq [a_{il}]^2 \text{ para todo } l \in \mathcal{L}.$$

De *i)* y *ii)*, reemplazando en (5.17) nos queda:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + a_{il}^2(k) \right]. \end{aligned}$$

Por transitividad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + a_{il}^2(k) \right]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Analicemos el lado derecho de la desigualdad (5.18) y calculemos los valores esperados respectivos:

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + a_{il}^2(k) \right] \\ & = E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] + \frac{1}{2} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) \right] + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} a_{il}^2(k) \right] \right\}. \end{aligned}$$

iii) $E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} E [d_l \tilde{a}_{il}(k)] = \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l E [\tilde{a}_{il}(k)]$; por propiedades de valor esperado condicional [3] y dado que $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con

parámetros $a_{il}(k)$ y $(1 - p_l)$, además $E[a_{il}(k)] = x_{il}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l E[\tilde{a}_{il}(k)] &= \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l E[E[\tilde{a}_{il}(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]] = \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l E[(1 - p_l) a_{il}] \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (1 - p_l) E[a_{il}] = \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iv) \quad & E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ &= E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ &= E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right]. \end{aligned}$$

v) Para encontrar $E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} E[\tilde{a}_{il}^2(k)] = \sum_{l \in \mathcal{L}} E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]]$, se debe tener en cuenta que $Var(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2$; así:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{a}_{il}(k)) &= E[\tilde{a}_{il}^2(k)] - \{E[\tilde{a}_{il}(k)]\}^2 \\ E[\tilde{a}_{il}^2(k)] &= Var(\tilde{a}_{il}(k)) + \{E[\tilde{a}_{il}(k)]\}^2 \end{aligned}$$

dado que $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $(1 - p_l)$, donde $a_{il}(k)$ es una variable aleatoria con media x_{il} . Tenemos por propiedad de valor esperado que $E[\tilde{a}_{il}^2(k)] = E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]]$, entonces:

$$E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]] = E[Var(\tilde{a}_{il}(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}) + \{E[\tilde{a}_{il}(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]\}^2].$$

Se sabe por teoría de la probabilidad que para una variable aleatoria binomial $B(n, p)$, $Var[X] = np(1 - p)$, además de *iii*) que $E[\tilde{a}_{il}(k)] = x_{il}(1 - p_l)$, entonces:

$$\begin{aligned} E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]] &= E[p_l(1 - p_l) a_{il} + \{x_{il}(1 - p_l)\}^2] \\ E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]] &= p_l(1 - p_l) E[a_{il}] + E[x_{il}^2(1 - p_l)^2] \\ E[E[\tilde{a}_{il}^2(k) \mid a_{il}(k) = a_{il}]] &= x_{il} p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2 \\ E[\tilde{a}_{il}^2(k)] &= x_{il} p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2 \end{aligned}$$

sumando todos los enlaces, obtenemos:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l(1 - p_l) + x_{il}^2(1 - p_l)^2.$$

vi) $E[a_{il}^2(k)] = Var(a_{il}(k)) + \{E[a_{il}(k)]\}^2$. Por definición en la formulación del problema encontramos que $Var(a_{il}(k)) = \sigma_{il}^2$ y $E[a_{il}(k)] = x_{il}$, por tanto:

$$E\left[\sum_{l \in \mathcal{L}} a_{il}^2(k)\right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_{il}^2 + x_{il}^2.$$

Ahora, reemplazando *iii*), *iv*), *v*) y *vi*) en (5.18) nos queda:

$$\begin{aligned} & E\left[\frac{1}{2}\sum_{l \in \mathcal{L}} \{[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+\}^2\right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq E\left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \tilde{a}_{il}(k) - d_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2}\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{il}^2(k) + a_{il}^2(k)\right] \\ & = \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) - E\left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l\right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)\right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l (1 - p_l) + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + \sigma_{il}^2 + x_{il}^2 \right\} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) - E\left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l\right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)\right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l (1 - p_l) + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + \sigma_{il}^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2 (1 - p_l)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Por transitividad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & E\left[\frac{1}{2}\sum_{l \in \mathcal{L}} \{[d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+\}^2\right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) - E\left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l\right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)\right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l (1 - p_l) + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + \sigma_{il}^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2 (1 - p_l)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} B_8 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il} p_l (1 - p_l) + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + \sigma_{il}^2 + x_{il}^2 + \sigma_{il}^2 (1 - p_l)^2 \right\} \\ B_8 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} x_{il}^2 + \sigma_{il}^2 + x_{il}^2 (1 - p_l)^2 + \sigma_{il}^2 (1 - p_l)^2 + x_{il} p_l (1 - p_l) \right\} \end{aligned}$$

$$B_8 = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (x_{il}^2 + \sigma_{il}^2) + (x_{il}^2 + \sigma_{il}^2) (1 - p_l)^2 + x_{il} p_l (1 - p_l)$$

$$B_8 = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (x_{il}^2 + \sigma_{il}^2) [1 + (1 - p_l)^2] + x_{il} p_l (1 - p_l)$$

entonces, reemplazando B_8 en la desigualdad anterior:

$$E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l)$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right]$$

ahora, de (5.14), se sabe que $\mu_{il}(\Delta) \geq x_{il}(1 - p_l)$ para todo $l \in \mathcal{L}$, por tanto:

$$E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l)$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right]$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta)$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right]$$

de lo anterior y por transitividad, se concluye que:

$$E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2}$$

$$\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta)$$

$$- E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right].$$

□

Lema 5.2.3. *Dado que en el marco (frame) k tenemos el evento $d(k) = d$ y $q(k) = q$ y si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algunos $\Delta > 0$ de tal manera que (5.14) y (5.15) son válidas, entonces:*

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{ E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta) \} \end{aligned}$$

para alguna constante $B_9 > 0$, donde x_e^* y $\tilde{x}^*(k)$ son las soluciones a (4.8) y (5.10) respectivamente. \diamond

Demostración. Se sabe que $\alpha^+ \stackrel{def}{=} \max\{\alpha, 0\}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo tanto $[\alpha^+]^2 \leq \alpha^2$, entonces:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2}. \end{aligned}$$

Sea $B^{\star} = \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$, entonces analicemos el siguiente término, sin dejar de lado que en el marco k se tiene el evento $d(k) = d$ y $q(k) = q$:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} (q_l + B^{\star})^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} &= E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [q_l^2 + 2q_l B^{\star} + (B^{\star})^2] \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &= E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} + q_l B^{\star} + \frac{(B^{\star})^2}{2} \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l B^{\star} + \frac{(B^{\star})^2}{2} \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &= E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l B^{\star} + \frac{(B^{\star})^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Reemplazando $B^{\star} = \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ en la desigualdad anterior y dado que $\tilde{a}_{el}(k) \geq 0$ por ser una variable aleatoria que representa las llegadas elásticas en el enlace l , además $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0$ por ser el servicio de paquetes elásticos que pueden ser programados, entonces:

$$2\tilde{a}_{el}(k) I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0$$

y nos queda que:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l [\tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \right] \\
& = E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) - 2\tilde{a}_{el}(k) I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right. \\
& \quad \left. + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right]
\end{aligned}$$

por transitividad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right].
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ahora, se realiza el siguiente análisis y luego se reemplazará su resultado en la desigualdad (5.19). Por definición de paquetes elásticos transmitidos exitosamente en el marco (en todas las particiones desde $t = 1$ hasta T) y de (5.13), tenemos que:

$$I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) \\
& \leq \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

dado que $\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) \geq 0$ por ser paquetes inelásticos a programar durante el marco.

Por la restricción (4.7), tenemos que:

$$s_{il,t} + s_{el,t} \leq c_l \text{ para todo } l \in \mathcal{L} \text{ y } t \in \{1, 2, \dots, T\}$$

realizando la sumatoria para un marco dado, nos queda:

$$\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) \leq \sum_{t=1}^T c_l$$

de (5.20) y de la expresión anterior, se sabe que:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) \\ &\leq \sum_{t=1}^T c_l \end{aligned}$$

por transitividad:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq \sum_{t=1}^T c_l \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq \sum_{t=1}^T c_l = c_l T \\ I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) &\leq c_l T \end{aligned}$$

en consecuencia:

$$[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^2 \leq [c_l T]^2 = c_l^2 T^2.$$

Por tanto, reemplazando este resultado en (5.19), tenemos:

$$\begin{aligned} &E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &\leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + I_{el}^{*2}(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ &\leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + c_l^2 T^2 \right]. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) - q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) + c_l^2 T^2 \right] \\
& = E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) \right] + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 T^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Analicemos cada término de la expresión anterior y calculemos los valores esperados respectivos:

vii) $E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} E [q_l \tilde{a}_{el}(k)] = \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [\tilde{a}_{el}(k)] = \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{x}_{el}^*(k)$ por definición de $\tilde{a}_{el}(k)$.

A continuación se justifica la propiedad del valor esperado utilizada en el paso anterior.

Demostrar que:

$$E \left[\sum_{i=1}^n C_i X_i \right] = \sum_{i=1}^n C_i E [X_i],$$

donde $n \in \mathbb{N}$; $C_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$; X_i es variable aleatoria para todo $i = 1, \dots, n$. \diamond

Demostración:

Por expansión de la sumatoria del lado izquierdo, tenemos:

$$E \left[\sum_{i=1}^n C_i X_i \right] = E [C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n]. \tag{5.22}$$

Dado que el valor esperado es un operador lineal, se satisface que:

- a) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- b) $E(aX) = aE(X)$ donde X, Y son variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$.

De a), b) resulta:

c) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Por la propiedad *a)* y volviendo a (5.22) tenemos:

$$E [C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n] = E [C_1X_1] + E [C_2X_2] + \dots + E [C_nX_n].$$

Por la propiedad *b)*, nos queda:

$$\begin{aligned} E [C_1X_1] + E [C_2X_2] + \dots + E [C_nX_n] &= C_1E [X_1] + C_2E [X_2] + \dots + C_nE [X_n] \\ E [C_1X_1] + E [C_2X_2] + \dots + E [C_nX_n] &= \sum_{i=1}^n C_iE [X_i], \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{N}$; $C_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$; X_i es variable aleatoria para todo $i = 1, \dots, n$.

Por lo tanto, se prueba la propiedad de valor esperado utilizada en *vii)* y se continúa con la demostración del Lema 5.2.3.

viii) Por la propiedad de valor esperado probada en *vii)*, se tiene que:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q)]$$

ix) Se sabe que:

$$\begin{aligned} Var [\tilde{a}_{el}(k)] &= E [\tilde{a}_{el}^2(k)] - \{E [\tilde{a}_{el}(k)]\}^2 \\ E [\tilde{a}_{el}^2(k)] &= Var [\tilde{a}_{el}(k)] + \{E [\tilde{a}_{el}(k)]\}^2 \\ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) \right] &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_e^2 + \tilde{x}_{el}^{*2}(k), \end{aligned}$$

por definición de $\tilde{a}_{el}(k)$ como variable aleatoria con media $\tilde{x}_{el}^*(k)$ y una varianza con cota superior dada por σ_e^2 .

$$x) E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 T^2 \right] = T^2 E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 \right]$$

pero:

$$\begin{aligned} E [c_l^2] &= Var [c_l] + \{E [c_l]\}^2 = \sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2; \text{ por definición de } c_l. \\ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 \right] &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2 \\ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 T^2 \right] &= T^2 \sum_{l \in \mathcal{L}} (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2). \end{aligned}$$

Reemplazando *vii*), *viii*), *ix*) y *x*) en (5.21) nos queda:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
& \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{a}_{el}(k) \right] - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} \left\{ E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \tilde{a}_{el}^2(k) \right] + E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} c_l^2 T^2 \right] \right\} \\
& \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \tilde{x}_{el}^*(k) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] + \frac{1}{2} \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \sigma_e^2 + \tilde{x}_{el}^{*2}(k) + T^2 (\sigma_{cl}^2 + \bar{c}_l^2) \right) \\
& \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\
& = \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{x}_{el}^{*2}(k) + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\
& \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{x}_{el}^{*2}(k) + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2].
\end{aligned}$$

De (5.10), se sabe que $\tilde{x}_{el}^*(k) \in 0 \leq x_{el} \leq X_{max}$ y que es la rata media óptima de llegadas elásticas en la iteración k , donde $X_{max} > 0$ es un parámetro suficientemente grande en el algoritmo para garantizar que $\tilde{x}_{el}^*(k) \leq X_{max}$, entonces:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [\tilde{x}_{el}^{*2}(k) + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2] \\
& \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [X_{max}^2 + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2].$$

Por transitividad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [X_{max}^2 + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2]. \end{aligned}$$

Sea $B_9 = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} [X_{max}^2 + \sigma_e^2 + (\bar{c}_l^2 + \sigma_{cl}^2) T^2]$, entonces:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

De (5.10), se sabe que $\tilde{x}_{el}^*(k) \in 0 \leq x_{el} \leq X_{max}$, de (5.15) sabemos que $\mu_{el}(\Delta) > 0$ para todo $l \in \mathcal{L}$, por tanto $0 < \mu_{el}(\Delta) \leq X_{max}$, donde $X_{max} > 0$ es un parámetro suficientemente grande. De lo anterior se puede ver que:

$$\frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) - q_l \mu_{el}(\Delta) \leq \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k).$$

Por lo anterior, nos queda:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & \leq B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) - q_l \mu_{el}(\Delta) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & = B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[-\frac{1}{\epsilon} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} [q_l \mu_{el}(\Delta) - q_l E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]] \\ & = B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{ E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta) \}, \end{aligned}$$

de lo anterior y por transitividad, se concluye que:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{ E [I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] - \mu_{el}(\Delta) \}. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.2.1. *La optimización en (5.11) puede ser realizada sobre $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}$, el casco convexo de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$; esto es:*

$$\begin{aligned} & \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \\ & = \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}. \end{aligned}$$

La razón de esto viene del hecho de que la función objetivo es lineal y por lo tanto debe tener un punto óptimo $s^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$. ◊

Demostración. Tenemos la función $Z = \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}$.

Además, se sabe que:

$$s = (s_{il,t}, s_{el,t}) = \begin{pmatrix} s_{i1,1} & s_{i1,2} & \cdots & s_{i1,T} & s_{e1,1} & s_{e1,2} & \cdots & s_{e1,T} \\ s_{i2,1} & s_{i2,2} & \cdots & s_{i2,T} & s_{e2,1} & s_{e2,2} & \cdots & s_{e2,T} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_{i\mathcal{L},1} & s_{i\mathcal{L},2} & \cdots & s_{i\mathcal{L},T} & s_{e\mathcal{L},1} & s_{e\mathcal{L},2} & \cdots & s_{e\mathcal{L},T} \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea: $m = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, donde:

$$\begin{aligned} m_1 & = \left(\frac{1}{\epsilon} w_1 + d_1(k), \frac{1}{\epsilon} w_2 + d_2(k), \dots, \frac{1}{\epsilon} w_{\mathcal{L}} + d_{\mathcal{L}}(k) \right) \\ m_2 & = \left(q_1(k), q_2(k), \dots, q_{\mathcal{L}}(k) \right) \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T s_{i1,t} \\ \sum_{t=1}^T s_{i2,t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T s_{i\mathcal{L},t} \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T s_{e1,t} \\ \sum_{t=1}^T s_{e2,t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T s_{e\mathcal{L},t} \end{pmatrix}. X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{|\mathcal{L}|},$$

entonces: $Z = mX = m_1X_1 + m_2X_2$. Por lo tanto, nuestro objetivo es:

$$\max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} Z = mX ; \text{ con } m_1, m_2 \text{ constantes, } s \in \mathbb{R}^{|\mathcal{L}| \times 2T}.$$

A continuación se probará que el punto óptimo de la función anterior sobre el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ coincide con el punto óptimo de la función sobre el casco convexo del conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$. Entonces:

Supóngase que $\tilde{s}^* = (\tilde{s}_{il,t}^*, \tilde{s}_{el,t}^*)$ es un punto óptimo del conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, donde:

$$\tilde{s}^* = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{i_1,1}^* & \tilde{s}_{i_1,2}^* & \cdots & \tilde{s}_{i_1,T}^* & \tilde{s}_{e_1,1}^* & \tilde{s}_{e_1,2}^* & \cdots & \tilde{s}_{e_1,T}^* \\ \tilde{s}_{i_2,1}^* & \tilde{s}_{i_2,2}^* & \cdots & \tilde{s}_{i_2,T}^* & \tilde{s}_{e_2,1}^* & \tilde{s}_{e_2,2}^* & \cdots & \tilde{s}_{e_2,T}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{s}_{i_{\mathcal{L}},1}^* & \tilde{s}_{i_{\mathcal{L}},2}^* & \cdots & \tilde{s}_{i_{\mathcal{L}},T}^* & \tilde{s}_{e_{\mathcal{L}},1}^* & \tilde{s}_{e_{\mathcal{L}},2}^* & \cdots & \tilde{s}_{e_{\mathcal{L}},T}^* \end{pmatrix};$$

$$\tilde{X}^* = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^* \\ \tilde{X}_2^* \end{pmatrix}; \quad \tilde{X}_1^* = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{i_1,t}^* \\ \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{i_2,t}^* \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{i_{\mathcal{L}},t}^* \end{pmatrix}; \quad \tilde{X}_2^* = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{e_1,t}^* \\ \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{e_2,t}^* \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{e_{\mathcal{L}},t}^* \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

$$\tilde{Z}^* = m\tilde{X}^* = \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} mX.$$

Supóngase otro punto s' que no pertenezca al conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, tal que:

$$Z' = mX' > m\tilde{X}^* = \tilde{Z}^*.$$

Además de lo anterior, se supone que s' está dentro del casco convexo de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, por lo cual puede escribirse como una combinación convexa de los puntos de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ (Teorema B.12 de [15]). Se sigue:

$$X' = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$$

donde:

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1,$$

entonces: $Z' = mX' = m \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$.

La suma anterior no disminuye si se sustituye cada punto $s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ por el mejor punto (óptimo) \tilde{s}^* del conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$. Por lo cual:

$$Z' = mX' = m \sum_{i=1}^n \mu_i X_i \leq m \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{X}^* = m \tilde{X}^* \sum_{i=1}^n \mu_i = m \tilde{X}^* = \tilde{Z}^*.$$

De lo anterior se concluye que:

$$Z' = mX' \leq m \tilde{X}^* = \tilde{Z}^*, \text{ lo que contradice el supuesto: } mX' > m \tilde{X}^*.$$

Y por lo tanto, el óptimo de la función sobre el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$ coincide con el óptimo de la función sobre el conjunto $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}$. Así, se concluye que:

$$\begin{aligned} & \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t} \\ &= \max_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l(k) \right] \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l(k) \sum_{t=1}^T s_{el,t}. \end{aligned}$$

□

A partir de las demostraciones anteriores y sus resultados, además teniendo en cuenta las consideraciones planteadas anteriormente se sigue la prueba del Lema 5.2.1:

Demostración. De la definición de \mathcal{C} en la formulación del problema, sabemos que $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1+\Delta)$ significa que existe $(\bar{\mu}_{il}(a_i, c), \bar{\mu}_{el}(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$ para todo a_i, c y $(1+\Delta)\mu_{il}(\Delta) = E[\bar{\mu}_{il}(a_i, c)]$, $(1+\Delta)\mu_{el}(\Delta) = E[\bar{\mu}_{el}(a_i, c)]$ para todo $l \in \mathcal{L}$. Para el resto de la prueba definiremos $\bar{\mu}_{il}(a_i, c)$, $\bar{\mu}_{el}(a_i, c)$ como cada conjunto de valores asociados a $\mu(\Delta)$.

Teniendo en cuenta la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$, de (5.12) y de los lemas (5.2.2) y (5.2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &= E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \quad + E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ &\leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
& + B_9 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \{E [I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q) - \mu_{el}(\Delta)]\}.
\end{aligned}$$

Sea $B_1 = B_8 + B_9$, entonces:

$$\begin{aligned}
& E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
& \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
& - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q) \right] \quad (5.23) \\
& + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q)].
\end{aligned}$$

Ahora, analicemos el siguiente término:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q) \right]. \quad (5.24)$$

De (5.13) se sabe que:

$$\begin{aligned}
I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* (a_i(k), c(k), d, q) \\
I_{el}^* (a_i(k), c(k), d, q) &= \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* (a_i(k), c(k), d, q)
\end{aligned}$$

entonces, reemplazando en (5.24) nos queda:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* (a_i(k), c(k), d, q) + q_l \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* (a_i(k), c(k), d, q) \right].$$

Tenemos que $\tilde{s}^* = (\tilde{s}_{il,t}^*, \tilde{s}_{el,t}^*)$ y de (5.11) se sabe que:

$$\tilde{s}^* (a_i(k), c(k), d, q) \in \operatorname{argmax}_{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}$$

de la Proposición 5.2.1, la optimización en (5.11) puede ser desarrollada sobre $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}$, el casco convexo de $\mathcal{S}(a_i(k), c(k))$, entonces:

$$\tilde{s}^*(a_i(k), c(k), d, q) \in \underset{s \in \mathcal{S}(a_i(k), c(k))_{\mathcal{CH}}}{\operatorname{argmax}} \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T s_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T s_{el,t} \right\}.$$

Ahora, de la definición de $\mathcal{C}(a_i, c)$ en la formulación del problema, se sabe que existe $\bar{s} = (\bar{s}_{il,t}, \bar{s}_{el,t}) \in \mathcal{S}(a_i, c)_{\mathcal{CH}}$, tal que:

$$\bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} \quad \text{y} \quad \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t}. \quad (5.25)$$

Dado que $\tilde{s}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ es el óptimo en el casco convexo $\mathcal{S}(a_i, c)_{\mathcal{CH}}$, al evaluar estos puntos en la función debido a que es una maximización nos queda:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\} \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* + q_l \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{el,t}^* \right\}$$

Teniendo en cuenta la definición de $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ y $I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right\}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De (5.25) tenemos que $\bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t}$ y $\bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \leq \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t}$, multiplicando por los términos $\left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \geq 0$ y $q_l \geq 0$ respectivamente a ambos lados de cada desigualdad, se sigue:

$$xi) \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) \leq \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t}$$

$$xii) q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \leq q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t}$$

sumando $xi)$ y $xii)$ nos queda:

$$\left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) + q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \leq \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t}$$

sumando todos los enlaces, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) + q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \right\} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \sum_{t=1}^T \bar{s}_{il,t} + q_l \sum_{t=1}^T \bar{s}_{el,t} \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

De (5.26), (5.27) y por transitividad, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) + q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \right\} \\ & \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right\} \end{aligned}$$

tomando valor esperado en la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) + q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \right\} \right] \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

reemplazando lo anterior en (5.23) y por transitividad nos queda:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k)) + q_l \bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k)) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

De la definición de \mathcal{C} en la formulación del problema, tenemos que:

$(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) = E[\bar{\mu}_{il}(a_i(k), c(k))]$, $(1 + \Delta) \mu_{el}(\Delta) = E[\bar{\mu}_{el}(a_i(k), c(k))]$ para todo $l \in \mathcal{L}$ y reemplazando en la expresión anterior nos queda,

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (1 + \Delta) \mu_{el}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & = B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l \mu_{il}(\Delta) + d_l \mu_{il}(\Delta) + \frac{1}{\epsilon} w_l \Delta \mu_{il}(\Delta) + d_l \Delta \mu_{il}(\Delta) \right) \\ & \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} (q_l \mu_{el}(\Delta) + q_l \Delta \mu_{el}(\Delta)) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q)] \\
= & B_1 - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) \\
& - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q)],
\end{aligned}$$

se factoriza el término $\frac{1}{\epsilon}$ y reemplazando en la desigualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
\leq & B_1 - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
& - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E [I_{il}^* (a_i(k), c(k), d, q)]\}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

- Analicemos el término $\Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta)$, para esto partimos de:

$$\mu_{il}(\Delta) \geq \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\}$$

dado que $\Delta > 0$, entonces:

$$\Delta \mu_{il}(\Delta) \geq \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\}.$$

Sea $B_2 = \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\}$, nos queda:

$$\Delta \mu_{il}(\Delta) \geq B_2$$

ahora, multiplicando por d_l a ambos lados de la desigualdad, donde $d_l \geq 0$ para todo l , tenemos:

$$\begin{aligned}
& \Delta d_l \mu_{il}(\Delta) \geq B_2 d_l \\
\Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) & \geq B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l.
\end{aligned}$$

- Analicemos el término $\Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta)$, para esto partimos de:

$$\mu_{el}(\Delta) \geq \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\}$$

dado que $\Delta > 0$, entonces:

$$\Delta \mu_{el}(\Delta) \geq \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\}.$$

Sea $B_3 = \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\}$, nos queda:

$$\Delta \mu_{el}(\Delta) \geq B_3$$

ahora, multiplicando por q_l a ambos lados de la desigualdad, donde $q_l \geq 0$ para todo l , tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta q_l \mu_{el}(\Delta) &\geq B_3 q_l \\ \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) &\geq B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l. \end{aligned}$$

De lo anterior y volviendo a (5.29), tenemos que:

$$\begin{aligned} &E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &\leq B_1 - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}(\Delta) - \Delta \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}(\Delta) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \\ &\leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}, \end{aligned}$$

así, por transitividad se concluye que:

$$\begin{aligned} &E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &\leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} B_2 &= \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{il}(\Delta)\} \text{ y} \\ B_3 &= \Delta \min_{l \in \mathcal{L}} \{\mu_{el}(\Delta)\}. \end{aligned}$$

□

A continuación se presenta un corolario que acota superiormente el valor esperado de las colas elásticas e inelásticas, además muestra que la relación entre el parámetro ϵ y las colas de paquetes es inversamente proporcional. Por lo cual, si queremos colas pequeñas se deben tener valores grandes para ϵ , pero esta medida no favorece la búsqueda del óptimo a través del algoritmo. Entonces, se deben mediar estas situaciones para conseguir la mejor solución al problema:

Corolario 5.2.1. *Si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1+\Delta)$ para algún $\Delta > 0$ tal que (5.14) y (5.15) son ciertas, entonces el déficit total del servicio esperado y la longitud de la cola en la red están acotados superiormente por:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \leq B_4 + \frac{1}{\epsilon} B_5,$$

donde:

$$B_4 = \frac{B_1}{\min\{B_2, B_3\}} \quad y \quad B_5 \leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2|U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min\{B_2, B_3\}} \quad \diamond$$

Demostración. Del lema 5.2.1, se sabe que:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1+\Delta)\mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}. \end{aligned}$$

Se define:

$$V_1 = E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q), \quad (5.30)$$

entonces,

$$\begin{aligned} V_1 & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(\mu_{el}(\Delta)) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l(1+\Delta)\mu_{il}(\Delta) - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]\} \\ V_1 & \leq B_1 - B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l(1+\Delta)\mu_{il}(\Delta) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 + B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l &\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]
\end{aligned}$$

tomando valor esperado a ambos lados de la desigualdad anterior y dado que $\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) \geq 0$, se sigue:

$$\begin{aligned}
&E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\
&\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l (1 + \Delta) \mu_{il}(\Delta) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \\
&\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]
\end{aligned}$$

ahora, por transitividad nos queda:

$$\begin{aligned}
&E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\
&\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))].
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Analicemos el término:

$$E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] = \sum_{l \in \mathcal{L}} E [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))]$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
E [U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] &= \int_0^{X_{max}} U_l(x) f_{\tilde{x}_{el}^*(k)}(\tilde{x}_{el}^*(k) = x) dx \\
&\leq \int_0^{X_{max}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) f_{\tilde{x}_{el}^*(k)}(\tilde{x}_{el}^*(k) = x) dx \\
&= \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) \int_0^{X_{max}} f_{\tilde{x}_{el}^*(k)}(\tilde{x}_{el}^*(k) = x) dx,
\end{aligned}$$

además que: $\int_0^{X_{max}} f_{\tilde{x}_{el}^*(k)}(\tilde{x}_{el}^*(k) = x) dx = 1$, por ser $f_{\tilde{x}_{el}^*(k)}(\tilde{x}_{el}^*(k) = x)$ la función de densidad de la variable aleatoria continua $\tilde{x}_{el}^*(k)$. Entonces:

$$E[U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el})$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} E[U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}).$$

Teniendo en cuenta lo anterior en (5.31), nos queda:

$$E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right]$$

$$\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \right] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]$$

$$\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]$$

por transitividad:

$$E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right]$$

$$\leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) \quad (5.32)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))].$$

Analicemos el término $\sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]$. Por la desigualdad (4.6), tenemos:

$$\sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^* \leq a_{il} \text{ para todo } l \in \mathcal{L},$$

por otro lado, $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$, entonces:

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \leq a_{il}(k) \text{ para todo } l \in \mathcal{L}$$

tomando valor esperado a ambos lados de la desigualdad anterior, resulta:

$$E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq E[a_{il}(k)] \text{ para todo } l \in \mathcal{L}$$

de la formulación del problema, se sabe que $E[a_{il}(k)] = x_{il}$, entonces:

$$E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq x_{il}$$

multiplicamos a ambos lados de la desigualdad anterior por $w_l > 0$:

$$w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq w_l x_{il}$$

sumando para todos los enlaces:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il}$$

teniendo en cuenta la desigualdad anterior en (5.32), nos queda:

$$\begin{aligned} & E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))] \\ & \leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \end{aligned}$$

de lo anterior y por transitividad, tenemos:

$$\begin{aligned} & E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il}. \end{aligned}$$

Ahora, factorizando $\frac{1}{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} & E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} U_l(x_{el}) - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l(\mu_{el}(\Delta)) + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \right\} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
& E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\
& \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \{U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))\} \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

A partir de lo anterior, analicemos lo siguiente teniendo en cuenta que para una función $g(x)$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
g(x) & \leq |g(x)| \\
\text{máx } g(x) & \leq \text{máx } |g(x)|.
\end{aligned}$$

Entonces, sea $g(x) = U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))$, con $U_l(\mu_{el}(\Delta))$ un valor fijo, nos queda:

$$\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \{U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))\} \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))| \tag{5.34}$$

por desigualdad triangular, se sigue:

$$\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))| \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \tag{5.35}$$

por transitividad en (5.34) y (5.35), tenemos:

$$\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \{U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))\} \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))|$$

sumando para todos los enlaces, obtenemos:

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \{U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))\} \right] \leq \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right]$$

teniendo en cuenta la desigualdad anterior en (5.33), tenemos que:

$$\begin{aligned}
& E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\
& \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} \{U_l(x_{el}) - U_l(\mu_{el}(\Delta))\} \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \right\} \\
& \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \right\}
\end{aligned}$$

por transitividad:

$$\begin{aligned} & E[V_1] + E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l x_{il} \right\}, \end{aligned}$$

tomando $\lim sup$ a ambos lados de la desigualdad anterior cuando $k \rightarrow \infty$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} E[V_1] + \limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Analicemos el primer término del lado izquierdo de la desigualdad (5.36), y de la definición de V_1 en (5.30) tenemos que:

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} E[V_1] \\ & = \limsup_{k \rightarrow \infty} E[E[V(d(k+1), q(k+1)) | d(k) = d, q(k) = q] - V(d(k), q(k))] \\ & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \{E[E[V(d(k+1), q(k+1)) | d(k) = d, q(k) = q]] - E[V(d(k), q(k))]\} \\ & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \{E[V(d(k+1), q(k+1))] - E[V(d(k), q(k))]\} \\ & = \limsup_{k \rightarrow \infty} E[V(d(k+1), q(k+1))] - \limsup_{k \rightarrow \infty} E[V(d(k), q(k))]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Calculemos cada límite en (5.37) por separado:

xiii) Por definición de valor esperado y linealidad del límite, se tiene que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} E[V(d(k), q(k))] & = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{(d,q)} \Pi_{(d,q)}(k) V(d, q) \\ & = \sum_{(d,q)} V(d, q) \limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)}(k), \end{aligned}$$

donde $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)}(k)$ es la distribución de estado estable de la cadena de Markov.

Dado que $(d(k), q(k))$ es una cadena de Markov irreducible, aperiódica, positiva recurrente, y por la proposición 1.7.2 de [7], tenemos que: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)}(k) = \Pi_{(d,q)}$, donde $\Pi_{(d,q)}$ es la distribución de equilibrio de la cadena de Markov. Por lo tanto:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E [V (d (k), q (k))] = \sum_{(d,q)} V (d, q) \Pi_{(d,q)}.$$

xiv) Por definición de valor esperado y linealidad del límite, se tiene que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V (d (k + 1), q (k + 1))] &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{(d,q)} \Pi_{(d,q)} (k + 1) V (d, q) \\ &= \sum_{(d,q)} V (d, q) \limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)} (k + 1), \end{aligned}$$

donde $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)} (k + 1)$ es la distribución de estado estable de la cadena de Markov.

Dado que $(d (k), q (k))$ es una cadena de Markov irreducible, aperiódica, positiva recurrente, y por la proposición 1.7.2 de [7], tenemos: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Pi_{(d,q)} (k + 1) = \Pi_{(d,q)}$, donde $\Pi_{(d,q)}$ es la distribución de equilibrio de la cadena de Markov, la cual se va a mantener constante para cualquier k . Por lo tanto:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E [V (d (k + 1), q (k + 1))] = \sum_{(d,q)} V (d, q) \Pi_{(d,q)}.$$

Reemplazando *xiii)* y *xiv)* en (5.37), tenemos que:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V_1] &= \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V (d (k + 1), q (k + 1))] - \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V (d (k), q (k))] \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V_1] &= \sum_{(d,q)} V (d, q) \Pi_{(d,q)} - \sum_{(d,q)} V (d, q) \Pi_{(d,q)} \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E [V_1] &= 0. \end{aligned}$$

Reemplazando el resultado anterior en la desigualdad (5.36), nos queda:

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (k) \right] \\ &\leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l (x_{el})| + |U_l (\mu_{el} (\Delta))| + w_l x_{il} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Dado que $B_2, B_3, d_l (k), q_l (k) \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$\begin{aligned} B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (k) &\geq \min \{B_2, B_3\} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (k) + \min \{B_2, B_3\} \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (k) \\ B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (k) &\geq \min \{B_2, B_3\} \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (k) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (k) \right] \end{aligned}$$

tomando valor esperado a ambos lados de la desigualdad anterior:

$$E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \geq E \left\{ \min \{B_2, B_3\} \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \right\}$$

$$E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \geq \min \{B_2, B_3\} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right]$$

ahora, tomando $\lim sup$ cuando $k \rightarrow \infty$ a ambos lados, tenemos:

$$\lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \geq \min \{B_2, B_3\} \lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right]$$

teniendo en cuenta la desigualdad anterior en (5.38), nos queda:

$$\begin{aligned} & \min \{B_2, B_3\} \lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq \lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[B_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + B_3 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il} \right] \right\} \end{aligned}$$

por transitividad, se sigue que:

$$\begin{aligned} & \min \{B_2, B_3\} \lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il} \right] \right\} \end{aligned}$$

despejando:

$$\begin{aligned} & \lim sup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \\ & \leq \frac{B_1}{\min \{B_2, B_3\}} + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il} \right]}{\min \{B_2, B_3\}} \right\}. \end{aligned}$$

Sea:

$$B_4 = \frac{B_1}{\min \{B_2, B_3\}} \text{ y,}$$

$$B_5 = \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \left[\max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il} \right]}{\min \{B_2, B_3\}},$$

entonces, se concluye que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} d_l(k) + q_l(k) \right] \leq B_4 + \frac{1}{\epsilon} B_5.$$

Pero, analicemos lo siguiente:

$$B_5 = \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il}}{\min \{B_2, B_3\}}$$

y se sabe que:

$$|U_l(\mu_{el}(\Delta))| \leq \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})|$$

por lo tanto, de B_5 se concluye que:

$$B_5 = \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + |U_l(\mu_{el}(\Delta))| + w_l x_{il}}{\min \{B_2, B_3\}}$$

$$\leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min \{B_2, B_3\}}$$

$$B_5 \leq \frac{\sum_{l \in \mathcal{L}} \max_{0 \leq x_{el} \leq X_{max}} 2 |U_l(x_{el})| + w_l x_{il}}{\min \{B_2, B_3\}}.$$

□

El siguiente corolario muestra que en la red celular el promedio del servicio inelástico óptimo es mayor o igual a las llegadas de paquetes inelásticos para mantener la estabilidad deseada y evitar pérdidas de paquetes inelásticos:

Corolario 5.2.2. *Si existe un punto $\mu(\Delta) \in \mathcal{C}/(1 + \Delta)$ para algunos $\Delta > 0$ tal que (5.14) y (5.15) son ciertas, entonces el algoritmo en línea cumple todas las restricciones inelásticas. Esto es:*

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \geq x_{il}(1 - p_l) \text{ para todo } l \in \mathcal{L}. \quad \diamond$$

Demostración. Se sabe de la sección 4.1, que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$. De lo anterior se deduce que $\alpha \leq \alpha^+$. Entonces, sean:

$$\begin{aligned} \alpha &= d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \\ \alpha^+ &= d_l(k+1) = [d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))]^+ \end{aligned}$$

se tiene que:

$$d_l(k) + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \leq d_l(k+1)$$

organizando términos:

$$d_l(k) - d_l(k+1) + \tilde{a}_{il}(k) \leq I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$$

sumando los términos para $k = \{1, \dots, K\}$, tenemos:

$$\sum_{k=1}^K [d_l(k) - d_l(k+1)] + \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)). \quad (5.39)$$

Analicemos el siguiente término:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K [d_l(k) - d_l(k+1)] &= d_l(1) - d_l(2) + d_l(2) - d_l(3) + \dots + d_l(K-1) - d_l(K) \\ &\quad + d_l(K) - d_l(K+1) \\ \sum_{k=1}^K [d_l(k) - d_l(k+1)] &= d_l(1) - d_l(K+1) \end{aligned}$$

reemplazando el resultado anterior en (5.39):

$$d_l(1) - d_l(K+1) + \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$$

ahora, dividiendo cada término de la desigualdad anterior entre K :

$$\frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{a}_{il}(k) \leq \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$$

tomamos valor esperado a ambos lados de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned} & \frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E[\tilde{a}_{il}(k)] \\ & \leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Se sabe de la prueba del Lema 5.2.2 y de la formulación del problema que $\tilde{a}_{il}(k)$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $a_{il}(k)$ y $(1-p_l)$, además que $E[a_{il}(k)] = x_{il}$. Por tanto:

$$E[\tilde{a}_{il}(k)] = E[E[\tilde{a}_{il}(k) | a_{il}(k) = a_{il}]] = E[(1-p_l)a_{il}] = (1-p_l)E[a_{il}] = x_{il}(1-p_l)$$

reemplazando el resultado anterior en (5.40), se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{il}(1-p_l) & \leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ \frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + \frac{1}{K} K x_{il}(1-p_l) & \leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ \frac{d_l(1)}{K} - \frac{d_l(K+1)}{K} + x_{il}(1-p_l) & \leq E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \end{aligned}$$

tomamos \liminf a ambos lados de la desigualdad anterior cuando $K \rightarrow \infty$, nos queda:

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(1)}{K} - \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(K+1)}{K} + x_{il}(1-p_l) \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right]$$

de lo anterior, y asumiendo $d_l(1) < \infty$, $d_l(K+1) < \infty$, tenemos que:

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(1)}{K} = 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{d_l(K+1)}{K} = 0.$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \geq x_{il}(1-p_l) \quad \text{para todo } l \in \mathcal{L}.$$

□

Ahora, el siguiente lema presenta una generalidad del lema 5.2.1 en cuanto a la estabilidad de la red en la frontera del conjunto \mathcal{C} :

Lema 5.2.4. *Considere la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$. Entonces:*

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

para algunas constantes no negativas $B_1 > 0$, B_6, B_7 , cualquier $\epsilon > 0$, donde (μ^*, x_e^*) es la solución de (4.8), $\tilde{x}_e^*(k)$ es la solución a (5.10), y $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)$ se obtiene de la solución de (5.11). \diamond

Demostración. Teniendo en cuenta la función de Lyapunov $V(d, q) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l^2 + q_l^2$, de (5.12) y de los Lemas (5.2.2) y (5.2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & = E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [d_l + \tilde{a}_{il}(k) - I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{d_l^2}{2} \\ & \quad + E \left[\frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{ [q_l + \tilde{a}_{el}(k) - I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]^+ \}^2 \right] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{q_l^2}{2} \\ & \leq B_8 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + B_9 + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

Sea $B_1 = B_8 + B_9$, entonces:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Definamos μ_i tal que se cumple que:

$$\text{a) } \mu_i \leq \mu_i^* \quad (5.42)$$

b) Por (4.8): $\mu_{il} \geq x_{il}(1 - p_l)$ para todo $l \in \mathcal{L}$

c) $\mu_{il} \in \mathcal{C}$

multiplicando ambos lados de la desigualdad b) por $d_l \geq 0$, nos queda:

$$d_l \mu_{il} \geq d_l x_{il} (1 - p_l)$$

teniendo en cuenta lo anterior en (5.41), se sigue:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l x_{il} (1 - p_l) \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

Por transitividad, obtenemos:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) \\ & \quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Se tiene el parámetro $X_{max} > 0$ suficientemente grande, lo cual nos garantiza que $0 \leq x_{el}^* \leq X_{max}$. Ahora, de (5.10) el óptimo $\tilde{x}_{el}^*(k) \in \underset{0 \leq x_{el} \leq X_{max}}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - q_l(k) x_{el}$, entonces:

$$\frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}^*) - q_l x_{el}^* \leq \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - q_l \tilde{x}_{el}^*(k).$$

Teniendo en cuenta lo anterior en (5.43) y por transitividad, se sigue:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} - \left[\frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}^*) - q_l x_{el}^* \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l E[I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q)], \end{aligned}$$

reorganizando términos en el lado derecho de la desigualdad anterior, nos queda:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \quad (5.44) \\ & \quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]. \end{aligned}$$

De la definición de la capacidad total \mathcal{C} en la formulación del problema, tenemos que $\mu^* = (\mu_{il}^*, \mu_{el}^*) \in \mathcal{C}$, tal que existe $(\bar{\mu}_{il}^*(a_i, c), \bar{\mu}_{el}^*(a_i, c))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{C}(a_i, c)$ para todo a_i, c y $\mu_{il}^* = E[\bar{\mu}_{il}^*(a_i, c)]$, $\mu_{el}^* = E[\bar{\mu}_{el}^*(a_i, c)]$ para todo $l \in \mathcal{L}$. También de (5.28) tenemos que:

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}^*(a_i, c) + q_l \bar{\mu}_{el}^*(a_i, c) \right\} \right] \\ & \leq E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right\} \right] \end{aligned}$$

teniendo en cuenta lo anterior en (5.44), nos queda:

$$E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q)$$

$$\begin{aligned}
&\leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q) + q_l I_{el}^*(a_i(k), c(k), d, q) \right] \\
&\quad + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
&\leq B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \bar{\mu}_{il}^*(a_i, c) + q_l \bar{\mu}_{el}^*(a_i, c) \right] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
&= B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left(\frac{1}{\epsilon} w_l + d_l \right) \mu_{il}^* - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
&= B_1 + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - \sum_{l \in \mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{\epsilon} w_l \mu_{il}^* + d_l \mu_{il}^* \right\} - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{\epsilon} w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)] \\
&= B_1 - \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \mu_{il} - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \mu_{el}^* + \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l x_{el}^* - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}.
\end{aligned}$$

Entonces, factorizando en la expresión anterior y por transitividad, nos queda:

$$\begin{aligned}
&E [V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\
&\leq B_1 - \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (\mu_{il}^* - \mu_{il}) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (\mu_{el}^* - x_{el}^*) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\
&\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E [I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Analicemos los siguientes términos:

$$xv) (\mu_{il}^* - \mu_{il}) \geq \min_{l \in \mathcal{L}} \{(\mu_{il}^* - \mu_{il})\}.$$

Sea $B_6 = \min_{l \in \mathcal{L}} \{(\mu_{il}^* - \mu_{il})\}$, donde $B_6 \geq 0$ por (5.42), entonces:

$$(\mu_{il}^* - \mu_{il}) \geq B_6$$

multiplicando por $d_l \geq 0$ para todo l en ambos lados de la desigualdad resulta:

$$\begin{aligned} d_l (\mu_{il}^* - \mu_{il}) &\geq d_l B_6 \\ \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (\mu_{il}^* - \mu_{il}) &\geq B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l \\ - \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (\mu_{il}^* - \mu_{il}) &\leq -B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l. \end{aligned}$$

$$xvi) (\mu_{el}^* - x_{el}^*) \geq \min_{l \in \mathcal{L}} \{(\mu_{el}^* - x_{el}^*)\}.$$

Sea $B_7 = \min_{l \in \mathcal{L}} \{(\mu_{el}^* - x_{el}^*)\}$, donde $B_7 \geq 0$ por restricción en (4.8), entonces:

$$(\mu_{el}^* - x_{el}^*) \geq B_7$$

multiplicando por $q_l \geq 0$ para todo l en ambos lados de la desigualdad resulta:

$$\begin{aligned} q_l (\mu_{el}^* - x_{el}^*) &\geq q_l B_7 \\ \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (\mu_{el}^* - x_{el}^*) &\geq B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \\ - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (\mu_{el}^* - x_{el}^*) &\leq -B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior en (5.45), se sigue:

$$\begin{aligned} &E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &\leq B_1 - \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l (\mu_{il}^* - \mu_{il}) - \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l (\mu_{el}^* - x_{el}^*) - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \\ &\leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}. \end{aligned}$$

Ahora, de lo anterior y por transitividad se concluye que:

$$\begin{aligned} &E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ &\leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema se fundamenta en el Lema 5.2.4 expuesto anteriormente, lo cual garantiza que aplica incluso en la frontera del conjunto \mathcal{C} . Además, en el teorema se puede ver que la optimalidad de la función objetivo es proporcional al parámetro ϵ :

Teorema 5.2.1. *Para cualquier $\epsilon > 0$, y asumiendo que $U_l(\cdot)$ es una función cóncava, tenemos que:*

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \leq B\epsilon$$

para algún $B > 0$, donde (μ^*, x_e^*) es la solución a (4.8), $\tilde{x}^*(k)$ es la solución a (5.10), y $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ se obtiene de la solución de (5.11). \diamond

Demostración. De la prueba del Lema 5.2.4 se sabe que:

$$\begin{aligned} & E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] - V(d, q) \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] \\ & \quad - \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \end{aligned}$$

entonces, organizando los términos de la desigualdad anterior, nos queda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q], \end{aligned}$$

ahora, dado que $B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l + B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l \geq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\} \\ & \leq B_1 - B_6 \sum_{l \in \mathcal{L}} d_l - B_7 \sum_{l \in \mathcal{L}} q_l + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] \\ & \leq B_1 + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q] \end{aligned}$$

de lo anterior y por transitividad tenemos:

$$\frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \frac{1}{\epsilon} \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l E[I_{il}^*(a_i(k), c(k), d, q)]\}$$

$$\leq B_1 + V(d, q) - E[V(d(k+1), q(k+1)) \mid d(k) = d, q(k) = q]$$

se toma valor esperado a la desigualdad anterior y factorizando nos queda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) - U_l(\tilde{x}_{el}^*(k))] + \sum_{l \in \mathcal{L}} \{w_l \mu_{il}^* - w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right] \\ & \leq B_1 - E[V(d(k+1), q(k+1))] + E[V(d(k), q(k))] \end{aligned}$$

sumando los términos para $k = \{1, \dots, K\}$, agrupando términos y dividiendo por K conseguimos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right] \\ & \leq B_1 - \frac{E[V(d(K+1), q(K+1))]}{K} + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \end{aligned}$$

dado que la función de Lyapunov $V(d, q)$ es no negativa, entonces:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right] \\ & \leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

De [4] se sabe que, sean I un intervalo en \mathbb{R} y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava, $x_1, \dots, x_m \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Entonces la desigualdad:

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k)$$

se conoce con el nombre de la desigualdad de Jensen.

Usando la desigualdad de Jensen en (5.46), tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k)\right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \{U_l(\tilde{x}_{el}^*(k)) + w_l I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))\} \right] \\ & \leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \end{aligned}$$

ahora, por transitividad:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq B_1 + \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \end{aligned}$$

tomando $\lim sup$ a ambos lados de la desigualdad cuando $K \rightarrow \infty$, nos queda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \lim sup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \\ & \leq B_1 + \lim sup_{K \rightarrow \infty} \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} \end{aligned}$$

asumiendo que $E[V(d(1), q(1))] < \infty$, nos queda que $\lim sup_{K \rightarrow \infty} \frac{E[V(d(1), q(1))]}{K} = 0$, entonces se concluye que:

$$\begin{aligned} & \lim sup_{K \rightarrow \infty} E \left[\sum_{l \in \mathcal{L}} [U_l(x_{el}^*) + w_l \mu_{il}^*] - \sum_{l \in \mathcal{L}} U_l \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{el}^*(k) \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{l \in \mathcal{L}} w_l \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) \right] \leq B\epsilon \end{aligned}$$

donde $B = B_1$. □

Después de realizar las demostraciones detalladas de la convergencia de los resultados del algoritmo dinámico utilizado en el estudio con el fin de optimizar la asignación de recursos en una red celular TDMA, se sigue la simulación en Matlab del algoritmo planteado para comprobar y complementar lo visto hasta ahora desde un punto de vista práctico y acorde con la realidad de estas tecnologías.

SIMULACIONES

Una vez formulado el problema de optimización y presentado el algoritmo dinámico que encontrará la programación óptima para asignar adecuadamente recursos de red que permitan mantener la estabilidad de las colas de paquetes elásticos e inelásticos bajo la tecnología celular TDMA, comprobaremos y complementaremos lo expuesto hasta ahora con unas simulaciones en Matlab donde podremos manipular los diferentes parámetros del algoritmo e ir monitoreando el comportamiento de las colas de paquetes. Con esto, llegaremos a conclusiones sobre la implementación del algoritmo en redes celulares TDMA, además nos permitirá realizar análisis a partir de las gráficas resultantes de la programación en Matlab y variaciones que surjan del mismo. Inicialmente, en la primera sección del presente capítulo se explica la herramienta utilizada y los parámetros que se tuvieron en cuenta para las simulaciones. Luego, en la segunda sección se muestran las principales gráficas obtenidas, se realiza un análisis de los resultados de cada una de ellas y los impactos que se obtuvieron en la red celular al manipular un parámetro.

6.1. Herramienta de simulación

En la herramienta de Matlab utilizada se encuentra programado el algoritmo dinámico que se presentó en la sección 5.1 a partir de las restricciones de interferencias y las programaciones factibles realizadas para redes celulares de 3, 4, 5, 6, 8 y 10 enlaces, teniendo en cuenta sus grafos de interferencias según la teoría de la tecnología TDMA explicada en la sección 3.3.

Es de resaltar que bajo la tecnología celular TDMA y para un marco dado, solo un usuario podrá transmitir paquetes por cada partición de tiempo mientras los demás esperan su turno, esto se evidencia en cada grafo que se presentará a continuación donde se puede ver que cuando un enlace está programado los demás enlaces de la red no pueden transmitir, lo mismo se tiene en cuenta en las restricciones de interferencias y las programaciones factibles que se introducen en las simulaciones.

Algunos de los grafos de interferencias de las redes simuladas en Matlab durante el estudio y que se utilizaron para realizar las restricciones de interferencias que se ingresaron al algoritmo, se presentan a continuación:

- Grafo de interferencias para una red celular TDMA con tres enlaces:

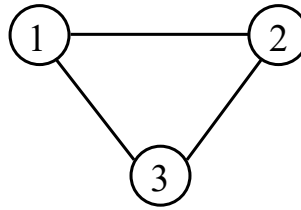


Figura 6.9: Grafo de interferencias para $\mathcal{L} = 3$

- Grafo de interferencias para una red celular TDMA con seis enlaces:

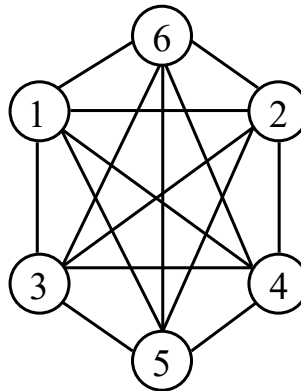


Figura 6.10: Grafo de interferencias para $\mathcal{L} = 6$

De los grafos de interferencias anteriores se deducen las restricciones de interferencias tenidas en cuenta en la herramienta de simulación.

Con la información de las restricciones, el algoritmo puede iniciar a realizar las iteraciones en Matlab, de las cuales se tendrán las programaciones óptimas, resultados, gráficas y los efectos en las colas de paquetes, lo cual se mostrará en la siguiente sección.

6.2. Análisis de resultados

Los resultados que se mostrarán y analizarán a continuación son producto de las simulaciones realizadas en Matlab a partir del algoritmo expuesto en la sección 5.1 y comprueban la estabilidad y tendencias de las colas elásticas e inelásticas en las redes celulares TDMA modeladas. Inicialmente se cambian los valores de los parámetros más importantes encontrados en el algoritmo para conocer sus efectos y finalmente se dan recomendaciones a partir de lo anterior para operar satisfactoriamente una

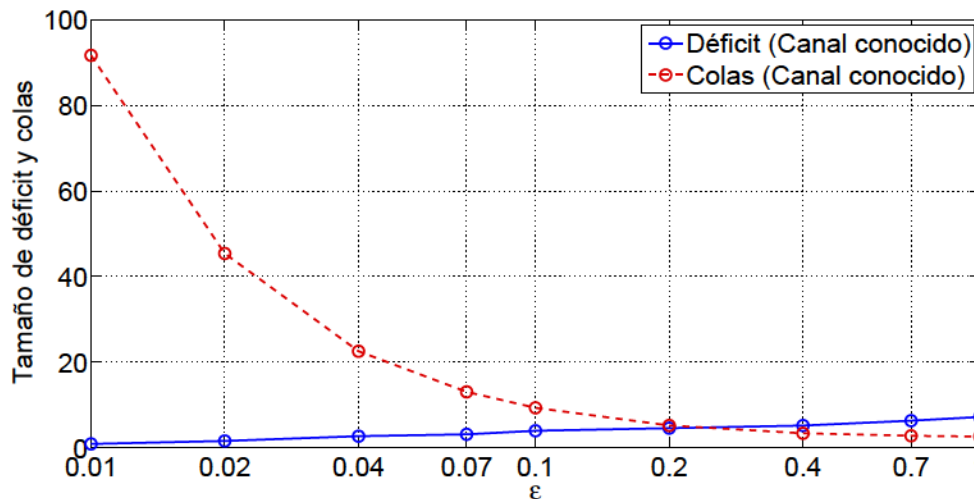
red celular TDMA con las características específicas presentadas en el marco del estudio. Se debe tener en cuenta que $w \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{L}|}$ y sus componentes tomarán valores iguales para todo enlace $l \in \mathcal{L}$ en una simulación, por lo que en este capítulo nos referiremos a un elemento genérico w_l para especificar el valor que tomarán todas las componentes del vector w .

- *Efecto de aumentar ϵ manteniendo w_l , T (particiones de tiempo) y nodos (enlaces) constantes.*

En estas simulaciones se utilizaron los siguientes valores para los parámetros:

T (particiones de tiempo)	w_l	ϵ (tamaño del paso)	Nodos
5	1	[0.01 0.02 0.04 0.07 0.1 0.2 0.4 0.7 1]	3

La gráfica resultante después de simular la red celular TDMA con los parámetros descritos es:



Efectos en la red:

- Dado que w_l es constante durante una simulación, $\frac{1}{\epsilon}w_l$ disminuye a medida que crece ϵ , por tanto, el déficit (o colas de paquetes inelásticos) $d_l(k)$ crece al perder la protección que ofrece el término $\frac{1}{\epsilon}w_l$ en (5.11).
- ϵ pequeños garantizan buenas aproximaciones al valor óptimo de la función objetivo pero involucra mayores tiempos de convergencia del algoritmo.
- ϵ grandes no garantizan exactitud en el cálculo del óptimo pero si tiempos pequeños de convergencia del algoritmo. Por tanto, se recomienda un valor de ϵ intermedio para equilibrar los dos parámetros (tiempos de convergencia y exactitud).

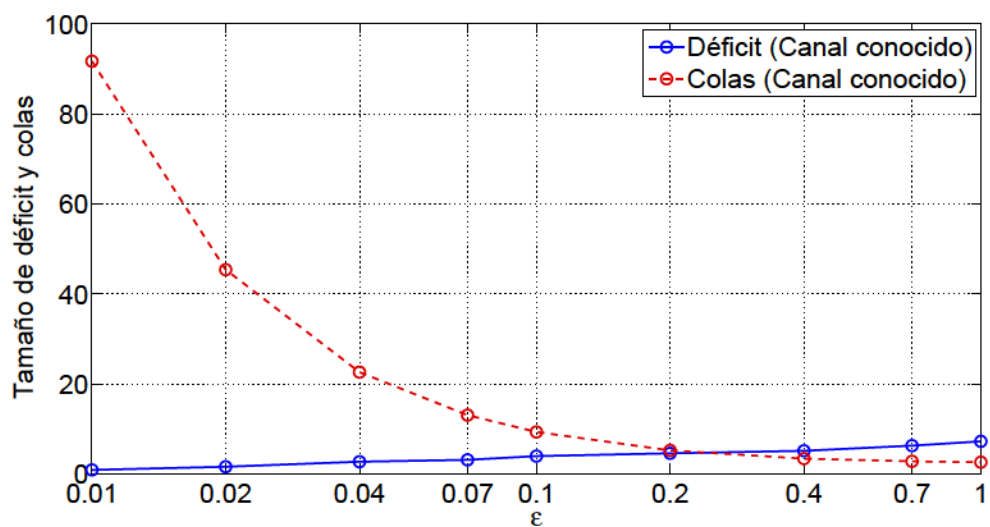
- *Efecto de variar nodos (escalabilidad) con T y w_l constantes.*

En estas simulaciones se utilizaron los siguientes valores para los parámetros:

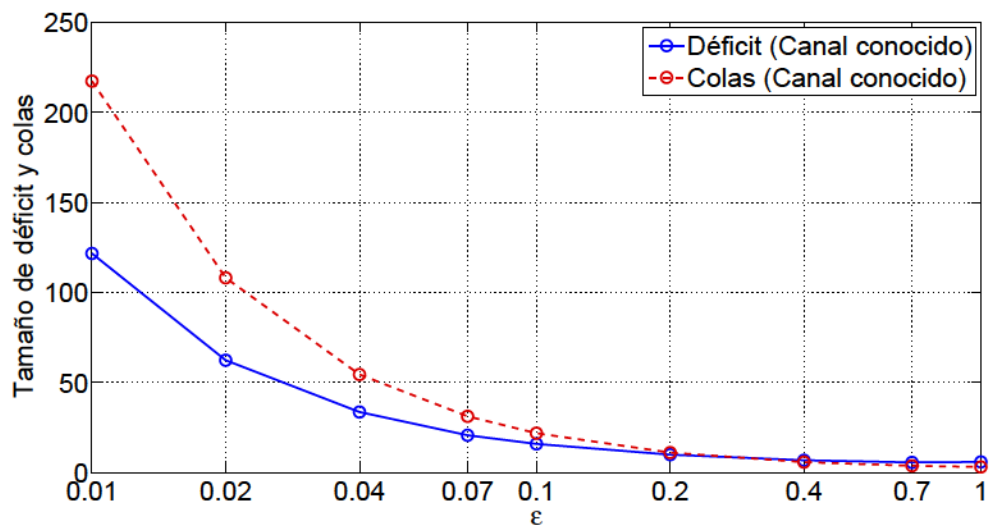
T	w_l	ϵ	Nodos
5	1	[0.01 0.02 0.04 0.07 0.1 0.2 0.4 0.7 1]	3-4-5-6-8-10

Algunas gráficas que muestran la simulación de la red celular TDMA con los parámetros descritos son:

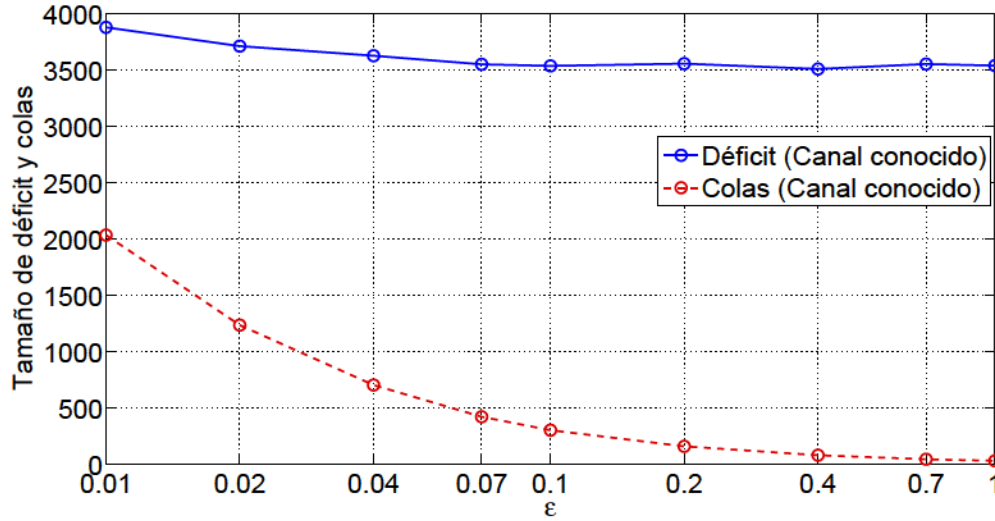
- Tres nodos



- Cinco nodos



- Diez nodos



Efectos en la red:

A medida que aumenta el número de nodos el déficit crece a niveles insostenibles afectando la calidad de servicio. Cuando $T < \text{nodos}$ el término:

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)),$$

resulta ser pequeño en comparación a las sumas de los déficit en todos los nodos y llegadas inelásticas en la iteración k , al restarlo en el vector de actualización $d_l(k+1)$ en (5.12) provocará que estas colas inelásticas cada vez crezcan más. En el caso contrario, cuando $T > \text{nodos}$, los déficit están en niveles bajos debido a que el término $I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k))$ será grande y podrá descontar en cada iteración el vector de actualización $d_l(k+1)$. Por otro lado, debido al controlador de congestión (5.10), las colas tenderán a permanecer estables y con valores aceptables a pesar de que el déficit crezca insosteniblemente. Si analizamos la expresión $\frac{1}{\epsilon} U_l(x_{el}) - q_l(k) x_{el}$ en (5.10) se puede ver que para $q_l(k)$ grandes, entonces $\tilde{x}_{el}^*(k) \rightarrow 0$ con el fin de optimizar la función de utilidad (cóncava) y que $q_l(k)$ decrezca por efecto del servicio prestado. Cuando $q_l(k)$ es pequeña (tiende a cero), entonces $\tilde{x}_{el}^*(k) \rightarrow X_{max}$ y la cola $q_l(k)$ empezará a crecer. De esta manera la cola tendrá un comportamiento estable y dentro de límites aceptables sin importar que los nodos se incrementen.

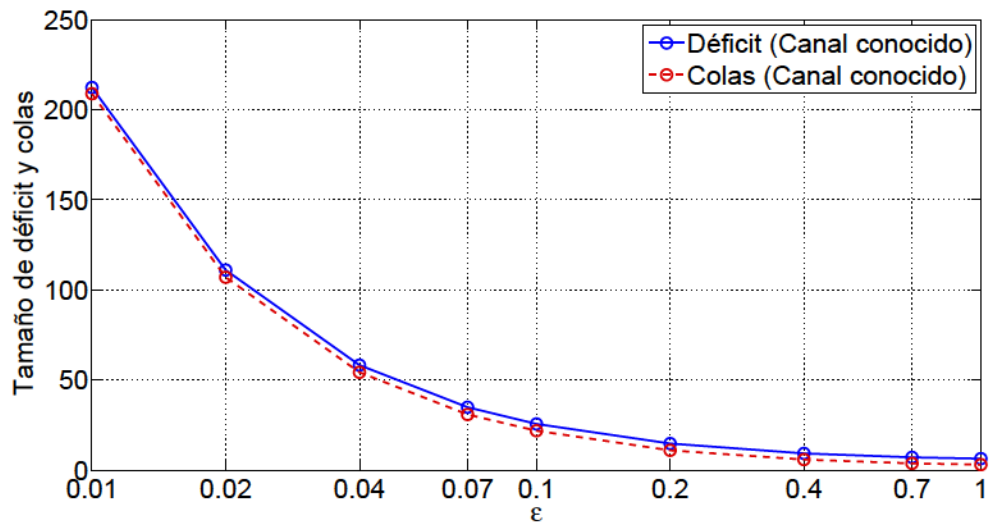
- *Efecto de variar w_l con T y nodos constantes.*

En estas simulaciones se utilizaron los siguientes valores para los parámetros:

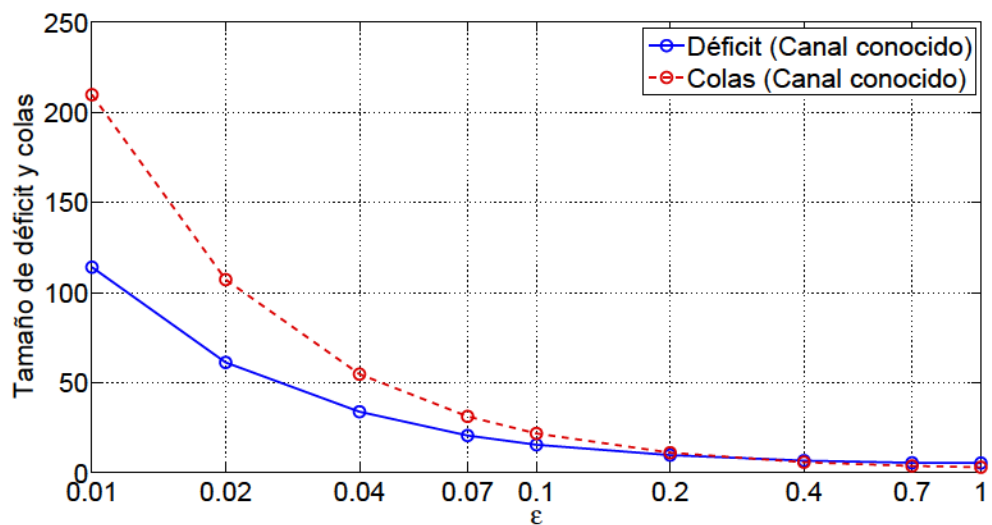
T	w_l	ϵ	Nodos
4	0-1-3-6	[0.01 0.02 0.04 0.07 0.1 0.2 0.4 0.7 1]	4

Las gráficas que muestran la simulación de la red celular TDMA con los parámetros descritos son:

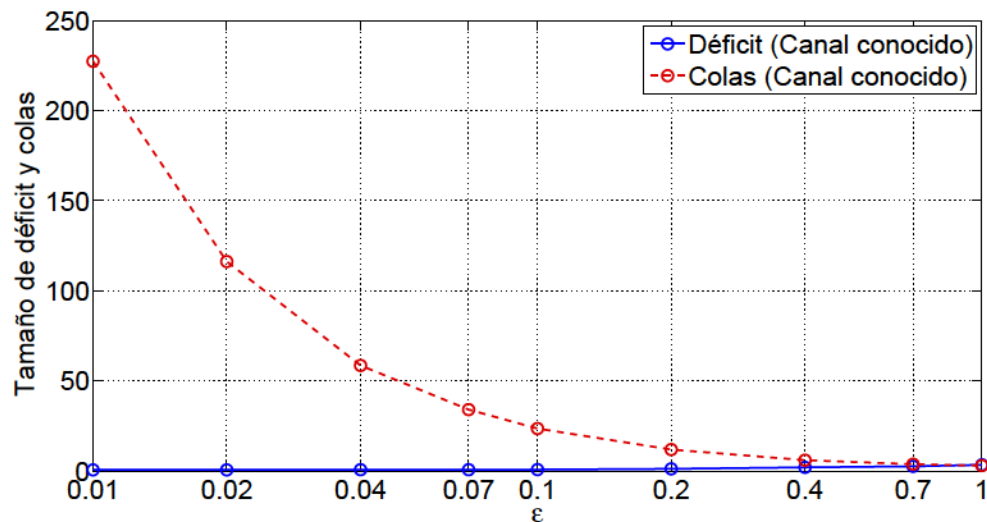
- $w_l = 0$



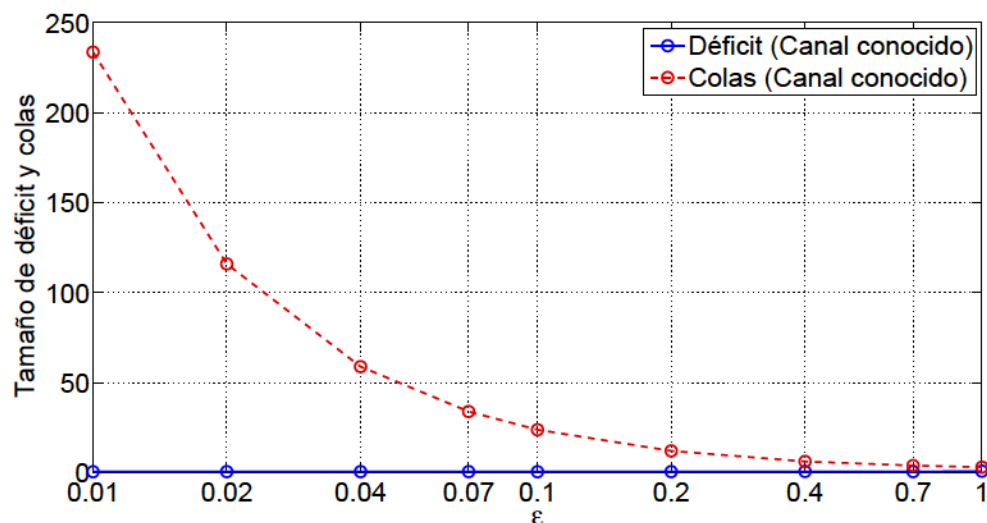
- $w_l = 1$



- $w_l = 3$



- $w_l = 6$



Efectos en la red:

- Si $w_l = 0$ se registra un comportamiento similar en el tratamiento de colas y déficit, ya que el término $\frac{1}{\epsilon}w_l$ en (5.11) se anula, por tanto la atención de ambos parámetros tendrá la misma prioridad en el algoritmo.

- A medida que aumenta el valor de w_l se prioriza la atención del déficit y éste disminuye a niveles mínimos. El factor $\frac{1}{\epsilon}w_l$ en (5.11) aumenta sirviendo como una protección del déficit en perjuicio de las colas.

- Se recomienda valores de w_l grandes para garantizar calidad de servicio en la atención del déficit.

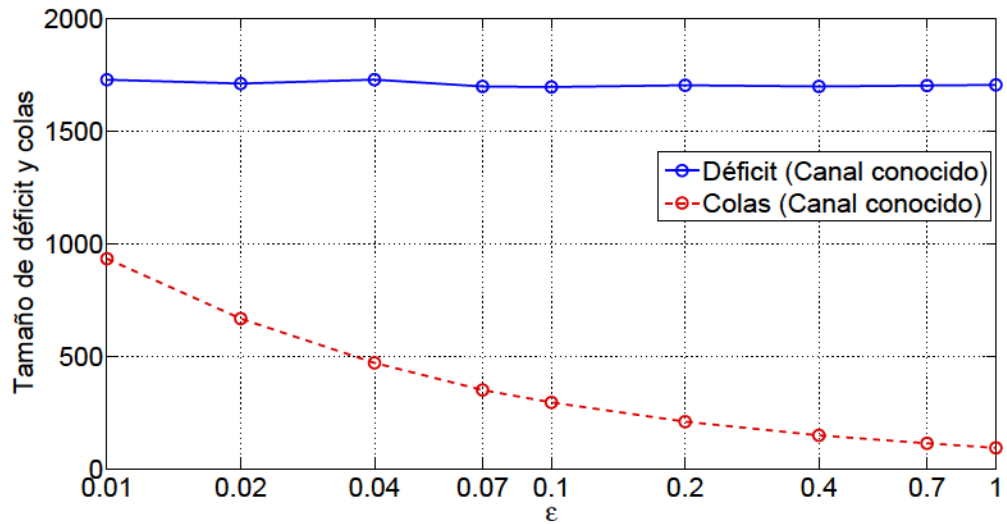
- *Efecto de variar T (particiones de tiempo) con w_l y nodos constantes.*

En estas simulaciones se utilizaron los siguientes valores para los parámetros:

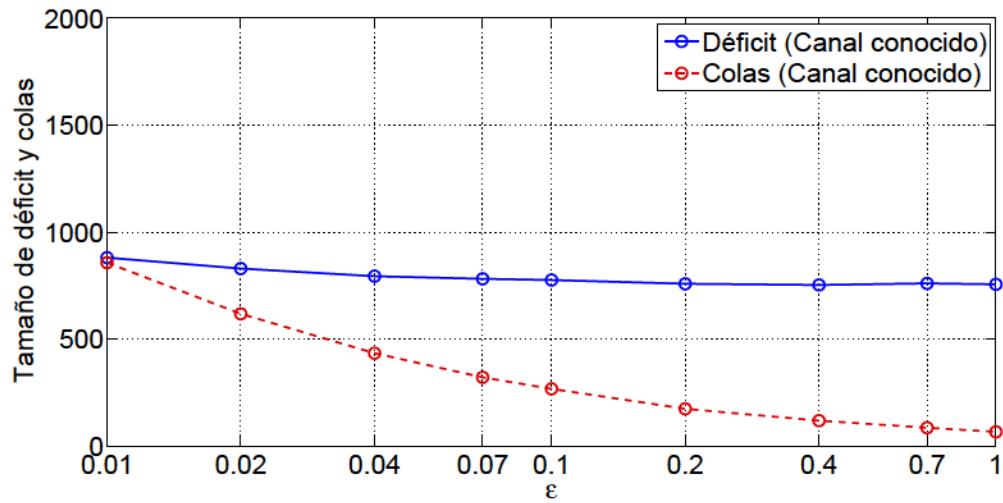
T	w_l	ϵ	Nodos
2-3-4-8-10-20-40	1	[0.01 0.02 0.04 0.07 0.1 0.2 0.4 0.7 1]	10

Algunas gráficas que muestran la simulación de la red celular TDMA con los parámetros descritos son:

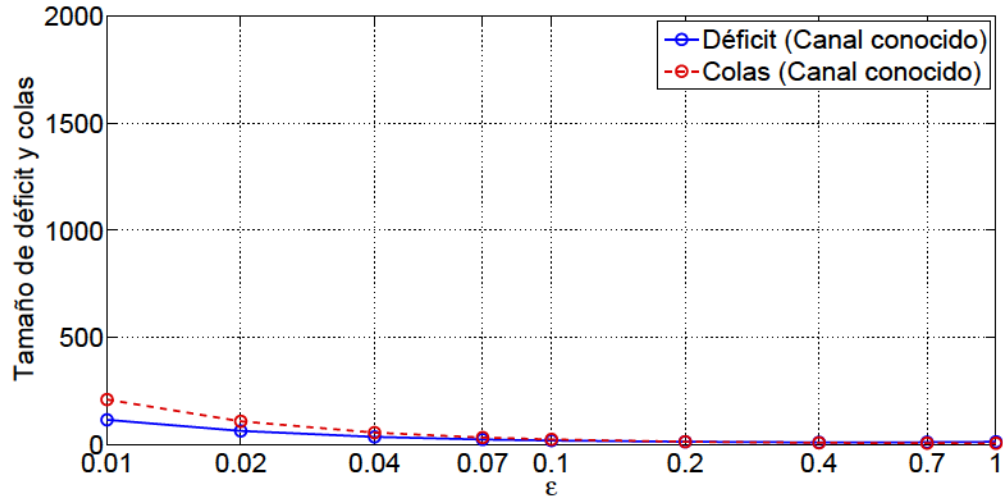
- $T = 2$



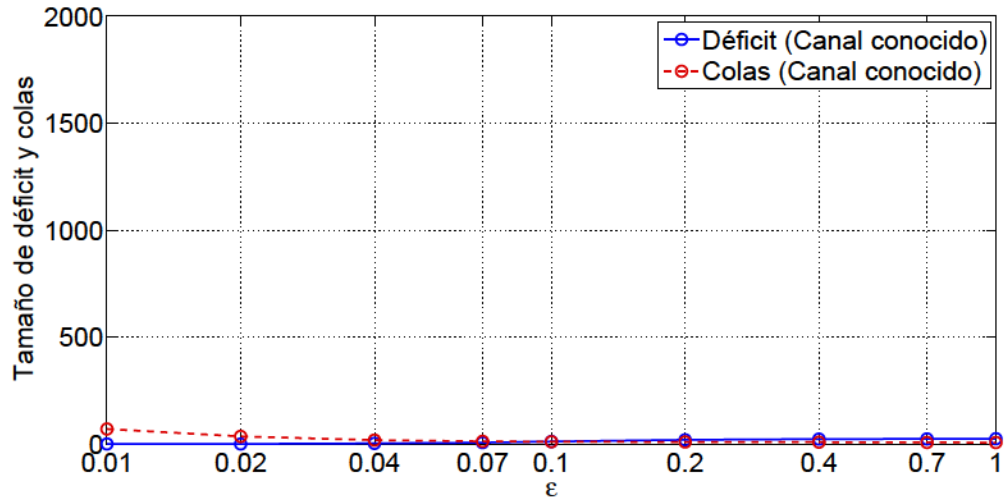
- $T = 4$



- $T = 10$



- $T = 20$



Efectos en la red:

A medida que aumenta el valor de T y se empieza a acercar al número de nodos, el comportamiento del déficit y las colas van mejorando. Se recomienda valores de $T \geq \text{nodos}$ para garantizar atención oportuna y adecuada del déficit y colas. Esto se explica por el impacto del término:

$$I_{il}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)) = \sum_{t=1}^T \tilde{s}_{il,t}^*(a_i(k), c(k), d(k), q(k)),$$

en el vector de actualización $d_l(k+1)$ en (5.12) como se mencionó anteriormente.

De esta manera, se analizan los efectos presentados en una red celular TDMA luego de manipular los diferentes parámetros del algoritmo adaptado en el estudio, y así tener fundamentos teóricos y técnicos que permitan que la red celular TDMA opere de manera satisfactoria, sirviendo oportunamente las colas de paquetes elásticos e inelásticos y asegurando una estabilidad que beneficie la calidad del servicio prestado al usuario de telefonía celular. Estos criterios analizados en el estudio junto con aspectos económicos y de mercado, son importantes para los operadores celulares en la toma de decisiones que aporten valor agregado a sus procesos y utilidades a sus empresas. A partir de los resultados obtenidos durante el desarrollo del estudio, a continuación se presentan las conclusiones del mismo, analizadas teniendo en cuenta los objetivos propuestos en la fase inicial del proyecto.

CONCLUSIONES

El algoritmo aplicado en el estudio resuelve el problema de optimización planteado para una red celular convergente, asignando los recursos de red necesarios y de manera adecuada para que la atención de las colas de paquetes elásticos e inelásticos sea oportuna y garantice una calidad de servicio al comunicar emisor con receptor, teniendo en cuenta las características particulares de la tecnología celular TDMA.

El estudio presenta la arquitectura general de una red celular convergente, explica diferentes tecnologías celulares utilizadas a lo largo del tiempo, así como las diferentes generaciones existentes, y detalla la forma de operar y enlazar usuarios de la tecnología TDMA para transmitir paquetes elásticos e inelásticos.

Por otro lado, se analiza el problema de la congestión de paquetes desde un punto de vista teórico y práctico, además se relaciona con los parámetros de calidad de servicio que se deben garantizar a un usuario de una red celular convergente para que ésta logre establecer una comunicación adecuada y oportuna. Se dan a conocer los aspectos relevantes de la congestión de paquetes que más adelante van a ser de utilidad para modelar y entender el problema de optimización.

El estudio representa una aplicación de las herramientas matemáticas, entre otras: optimización y procesos estocásticos, en el modelamiento y solución de un problema de telecomunicaciones de gran impacto en la vida de las personas y que se presenta dentro de un campo muy competitivo e innovador. En este sentido, las demostraciones matemáticas detalladas que se explican en la sección 5.2 para redes celulares TDMA prueban la estabilidad del algoritmo y la tendencia en promedio a disminuir las colas de paquetes, garantizando de esta manera la calidad del servicio y una satisfacción del usuario.

A partir de las simulaciones realizadas en Matlab, se comprueba la estabilidad y tendencias de las colas de paquetes luego de implementar el algoritmo, además se complementa el estudio teórico presentado, lo cual hace que se diseñe una red celular con parámetros bien definidos y se tengan análisis que permitan entender los comportamientos de la red celular, así como generar propuestas para su mejoramiento.

Bibliografía

- [1] Jhon Jairo Padilla Aguilar, *Contribución al soporte de calidad del servicio en redes móviles*, Ph.D. thesis, Universidad Politécnica de Cataluña: Programa de Doctorado de Ingeniería Telemática, 2007.
- [2] Felix Amado, *Técnicas de acceso múltiple y algoritmos de detección de múltiples usuarios en telefonía celular: Análisis comparativo*, Tech. report, Universidad de Costa Rica: Escuela de Ingeniería Eléctrica, 2008.
- [3] Liliana Blanco, *Probabilidad*, 1^a ed., Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2004.
- [4] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, *Convex optimization*, 1st ed., Cambridge University Press, New York, NY, March 2004.
- [5] Sector de normalización de las telecomunicaciones de la UIT Serie G, *Recomendación UIT-T G.1000: Calidad de servicio en las comunicaciones, Marco y definiciones*, Tech. report, Unión Internacional de Telecomunicaciones, 2001.
- [6] Sector de normalización de las telecomunicaciones de la UIT Serie Y, *Recomendación UIT-T Y.2001: Visión general de las redes de próxima generación*, Tech. report, Unión Internacional de Telecomunicaciones, 2004.
- [7] Bruce Hajek, *Communication network analysis*, 2006.
- [8] Fred Halsall, *Comunicación de datos, redes de computadores y sistemas abiertos*, 4^a ed., PEARSON, México, 1998.
- [9] Juan José Jaramillo and R. Srikant, *Optimal scheduling for fair resource allocation in ad hoc networks with elastic and inelastic traffic*, IEEE/ACM Transactions on Networking **19** (2011), no. 4, 1125–1136.
- [10] Mokhtar S. Bazaraa. John J. Jarvis, *Programación lineal y flujo en redes*, 2^a ed., Limusa, México.
- [11] David G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2003.

- [12] Mónica Andrea Rico Martínez, *Tesis de maestría: Protocolo de especificaciones de gestión de calidad en redes de telefonía móvil en Colombia*, Tech. report, Universidad Industrial de Santander: Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Bucaramanga, 2008.
- [13] William Stallings, *Comunicaciones y redes de computadores*, 6ª ed., Prentice Hall, España, 2000.
- [14] Rafael Casañas Ávila, *Estudio y simulación con Matlab de la interfaz de radio de GSM*, Tech. report, Universidad de Granada: Departamento de Electrónica y Tecnología de computadores, España.
- [15] Juan Prawda W., *Métodos y modelos de investigación de operaciones. Vol. 1 modelos determinísticos*, Limusa, México, 1976.
- [16] Alberto León-García y Indra Widjaja, *Redes de comunicación, conceptos fundamentales y arquitecturas básicas*, 1ª ed., Mc Graw Hill, España, 2002.
- [17] James F. Kurose y Keith W. Ross, *Redes de computadoras: Un enfoque descendente*, 5ª ed., PEARSON, España, 2010.