Universidad Eafit
Departamento de Ciencias Básicas

Sobre las condiciones suficientes para los tiempos de reposición en un modelo de inventario determinístico con tasa de demanda no constante

Memoria presentada por

Jamer Robinson Carmona López
para optar al grado de

Master en Matemáticas Aplicadas

Asesor
Henry Laniado Rodas

Departamento de Estadística y Matemáticas

Facultad de Ciencias Económicas

Universidad de Antioquia

Medellín

Agradecimientos

A todas aquellas personas que de alguna manera contribuyeron para que este sueño se hiciera realidad; en especial a toda mi familia.

ÍNDICE GENERAL

Contiene el índice general.

Introducción

Desde el inicio de las primeras sociedades el hombre ha sentido la necesidad de tener conocimiento de sus pertenencias y tener control de los recursos que posee, con el objetivo de resolver problemas que pueden suceder en cuanto a escasez o agotamiento, los cuales traen consigo consecuencias que serán perjudiciales para su supervivencia en una de tales sociedades. También asociado a la supervivencia el interés de los individuos radica en aumentar su riqueza. He allí la importancia de hacer un control organizado de los recursos que se tienen y es cuando la necesidad de estudiar sistemas de inventarios surge. Pero hubo que esperar hasta el siglo XX para abordar el problema con técnicas analíticas. El primer modelo matemático surgió en 1915 (ver Silver [3]). Después de la segunda guerra mundial, cuando la ciencia retornó, surgió la investigación de operaciones, su atención fue enfocada a la naturaleza estocástica de problemas de inventarios; antes de esto, se trataban de forma determinísticos.

Posteriormente, una versión estocástica del modelo del tamaño del lote económico fue desarrollada por (ver Whitin [15]) cuyo resultado se publicó en 1955. En este trabajo se trató con detalle modelos de inventario que contemplaban variables aleatorias. El interés original fue usar técnicas analíticas para resolver problemas de inventario aplicados en la industria, donde los ingenieros estaban intentando dar soluciones a los problemas prácticos.

En años recientes economistas y matemáticos han mostrado interés en el estudio de modelos de inventarios. Ellos se han involucrado especialmente con las aplicaciones prácticas inmediatas; y han estado interesados en dichos modelos como un buen escenario para la investigación, la aplicación y sustentar interpretaciones económicas. En la actualidad, se están realizando muchos trabajos orientados a dar solución a problemas de inventarios haciendo uso de la valiosa ayuda que brinda la tecnología, la cual permite

simular modelos que son imposibles de resolver de forma analítica.
En esta propuesta de investigación se pretende hacer un estudio formal de algunos modelos de inventario, en principio los modelos clásicos a manera de ambientación de la teoría, entre estos se examinará tanto modelos determinísticos como modelos estocásticos. En cada modelo elegido se ilustrará los supuestos, se construirá la función de costos y se intentará minimizar con el objetivo de conseguir una norma operacional óptima que maximice beneficios.

Teniendo una visión general de la literatura y habiendo examinado algunas propuestas de investigación relacionadas con el tema de inventarios (ver Silver, Whitin, Naddor, Laniado, entre otros) la idea central de la investigación es insistir en los modelos de inventarios probabilísticos con tasa de demanda lineal, y hacer extensiones a los modelos de producción. En dichos modelos se presentarán resultados de la optimización de la función de costos bajo el supuesto de no conocimiento de la distribución de la demanda en cuyo caso es necesario hacer uso de técnicas no paramétricas. Mediante este mismo procedimiento es posible determinar el tamaño óptimo del lote económico cuándo de la demanda se conocen únicamente los momentos de primero y segundo orden, aquí haremos uso de la técnica presentada en Gallego G, Moon I [8]; además se obtienen resultados analíticos para los casos especiales donde la demanda es de la forma $r(t) = \lambda t$ y $r(t) = \lambda t + \beta$. El problema que se resuelve allí consiste en la obtención de condiciones necesarias para los instantes óptimos de reposición T_j con $j = 1, 2, 3, ..., m - 1$ que minimizan la función de costo total en el horizonte de planificación. Por último se presentan aplicaciones de los órdenes estocásticos en la obtención de la cantidad óptima de pedido y también en los tiempos óptimos de reposición. En el apéndice se proponen algoritmos programados en Matlab y Visual Basic para la solución del problema aproximado planteado en Naddor [2] y la solución encontrada en éste trabajo.

CAPÍTULO 1

Generalidades

1.1. Introducción

La teoría de inventarios describe los procedimientos óptimos que determinan la existencia de artículos para satisfacer una demanda futura, es decir, un sistema de inventarios consiste en hacer y recibir pedidos de un producto repetidas veces a escala de tiempos determinados.
Por tal razón el control y mantenimiento de los inventarios ha sido un problema común en todas las empresas, éstas deben almacenar inventarios de materia prima, productos perecederos, productos parcialmente terminados, entre otros; según sea su característica.
Una de las razones por la cuales las empresas deben mantener inventarios de sus productos es que físicamente será imposible y económicamente costoso hacer que la mercancía llegue justamente a un sistema dado cuando ésta por efectos de la demanda se requiera. Otra razón para la tenencia de inventarios, es que el precio de alguna materia prima usada por un fabricante puede mostrar fluctuación temporales considerables de precios, es decir, cuando el precio es bajo, se puede aprovechar para guardar una cantidad suficiente de material, que dure a través de la estación de precios altos y usarla cuando se necesite en la producción.
En este capítulo se presentará algunos conceptos y terminología que será necesaria para el desarrollo de los modelos ya estudiados en la literatura de inventarios y también para los modelos objeto de la presente propuesta de investigación. Se comenzará por definir el concepto de inventario, cuáles son los costos de mayor relevancia cuando se quiere analizar un modelo de inventario, posteriormente se ilustrará aspectos generales de la naturaleza

de la demanda.

1.2. Inventario

Por inventario se entiende un conjunto de recursos útilies que se encuentran osciosos en algún momento, en espera de ser utilizados.
Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancias con el propósito de satisfacer una demanda sobre un horizonte de tiempo llamado horizonte de planificación (Ver Taha [16]).

Para el buen funcionamineto de las organizaciones, sin importar sus características, se hace necesario mantener inventario de determinados artículos, por ejemplo, las factoriás deben mantener inventarios de los productos terminados, también existencias de materia prima y existencias de los productos parcialmente terminados denominados inventario en proceso. De manera similar la empresa de servicios debe de conservar un inventario de los artículos necesarios para prestar un buen servicio, como es el caso de un taller de reparación debe de mantener existencias de repuestos o piezas de cambio, un restaurante debe de mantener suficientes alimentos para satisfacer las diversas necesidades de los clientes; en este sentido se puede afirmar que el control o la administración del inventario es un problema al que frecuentemente se enfrenta cada empresa. Para mejores detalles ver [1],[4],[6].

1.3. Costos

El objetivo en un problema de inventario radica en determinar valores en las variables de control contempladas en una función de costos o de utilidad, que debe de ser optimizada sujeta a restricciones de cumplimiento de demandas, las cuales permitirán tener conocimiento de normas operacionales convenientes. Como ya se mencionó en la sección (1.1), un sistema de inventarios consiste en hacer y recibir pedidos de productos repetidas veces a escala de tiempos determinados, en este sentido la teoría de inventarios surge inicialmente para dar respuesta a las preguntas, ¿cuándo abastecer el inventario? ¿cuánto pedir para abastecer el inventario? Sin embargo las nuevas metodologías se han preocupado también por el aumento en el nivel de servicio y en mantener a los clientes satisfechos. Este trabajo se enmarca a dar respuesta a las dos primera preguntas cuya solución se obtiene al minimizar la función de costos asociada al modelo en estudio; que involucra algunos costos, entre los mas relevantes están

a) ***Costo de compra, de pedido y preparación.*** El costo de compra está asociado con el costo por unidad del artículo y se genera cuando se hace un pedido a un distribuidor externo. El costo de pedido es un costo asociado a una reposición y puede ser independiente del volumen, para estimar el costo de pedido es necesario considerar varios aspectos, por ejemplo, los impuestos, el costo de transporte, el costo del manejo físico, comunicaciones y facturación, entre otros. El costo de preparación es el costo que se origina por autoabastecimiento si el producto se fabrica internamente, el costo de preparación se estimaría médiante la mano de obra y tiempo en que la producción de la empresa esta en receso (la maquinaria se encuentra inhabilitada).

b) ***Costo de almacenamiento.*** Representa el costo de mantener unidades almacenadas en el inventario, generalmente tiene un costo asociado al inventario promedio, a los impuestos sobre existencias, al deterioro, al robo y al costo de oportunidad debido al capital invertido.

c) ***Costo por agotamiento o escasez.*** El costo de no tener inventario se llama costo por agotamiento o escasez; este costo representa una evaluación del costo por la pérdida de la buena voluntad, los costos de manejo adicionales y el costo del ingreso recibido con retraso. Este costo tiene dos variantes que dependen de la reacción del cliente potencial, si el cliente acepta una entrega posterior sin importar el retrazo, a este caso se le llama pedido de entrega diferida y no se perderá la venta. El otro caso sucede cuando la venta se pierde por el déficit de existencias, obviamente debe considerarse que esto produce un costo de perdidad de la buena voluntad del cliente o pérdida de clientes potenciales [costo subjetivo y en diversas situaciones es complejo cuantificarlo.] Para mayores detalles acerca de los diferentes y posibles costos asociados ver por ejemplo [1, 2, 4]

1.4. Demanda

Como ya se dijo, un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo llamado horizonte de planificación. Si la demanda requerida sólo puede ser predicha de manera probable, ésta debe considerarse como una variable aleatoria; por otra parte si es posible hacer un pronóstico de la misma con certidumbre, se enfrentará un problema con demanda determinística el cual está asociado al modelo que se examinará.

Bajo estas características la demanda puede satisfacerse almacenando todas las unidades de una vez según el horizonte de tiempo o almacenando separadamente a determinados intervalos de tiempo durante el horizonte. Los dos casos extremos que se pueden considerar son sobrealmacenamiento (con respecto a una unidad de tiempo, figura 1.1) o subalmacenamiento (con respecto al horizonte completo, figura 1.2).

Un sobrealmacenamiento requerirá un capital invertido superior por unidad de tiempo, pero generalmente con menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Ahora un subalmacenamiento, disminuirá el capital invertido por unidad de tiempo pero aumentará la frecuencia de los pedidos, así como el tiempo de estar sin mercancías. Los dos extremos son costosos y por consiguiente, las decisiones considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordenan, pueden estar basadas en la minimización de una función de costos total apropiada tal como se mencionó en la sección (1.3).

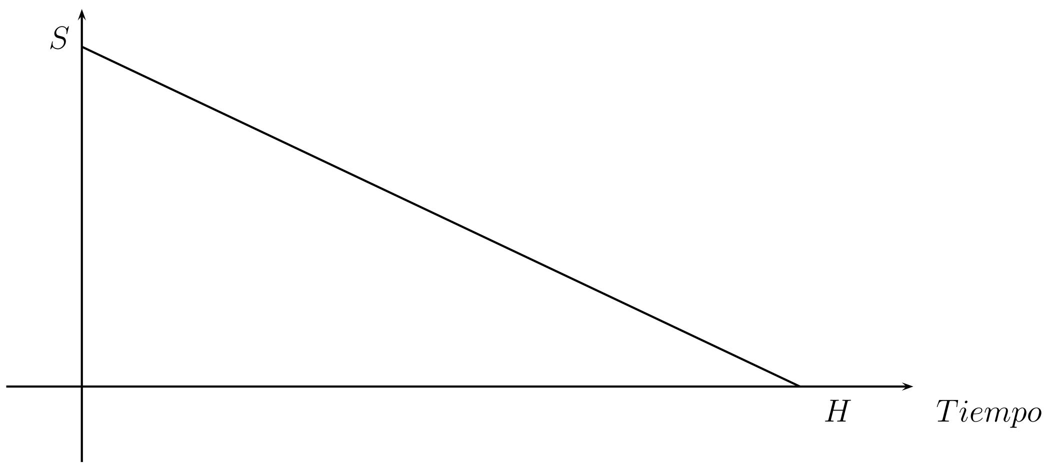

Figura 1.1: Sobre-almacenamiento

Es importante reconocer la diferencia entre demanda y venta; se presentará una demanda cada vez que se hace el intento de compra del artículo, mientras que la venta se produce solo cuando se concluye la compra del mismo por parte del cliente por ejemplo, cuando un cliente pide un artículo se produjo una demanda así el artículo no esté en inventario, si el artículo está en inventario y no está comprometido en pedidos atrasados, se podrá suministrar al cliente y en tal situación se ha producido una venta y también una demanda.

1.5. Tiempo de espera

En la literatura de los modelos de inventario es común llamar al tiempo de espera *Lead-Time.* En modelos de inventario usualmente se llama tiempo de espera, el tiempo que transcurre entre la solicitud de un pedido y la recepción del mismo. El tiempo de espera

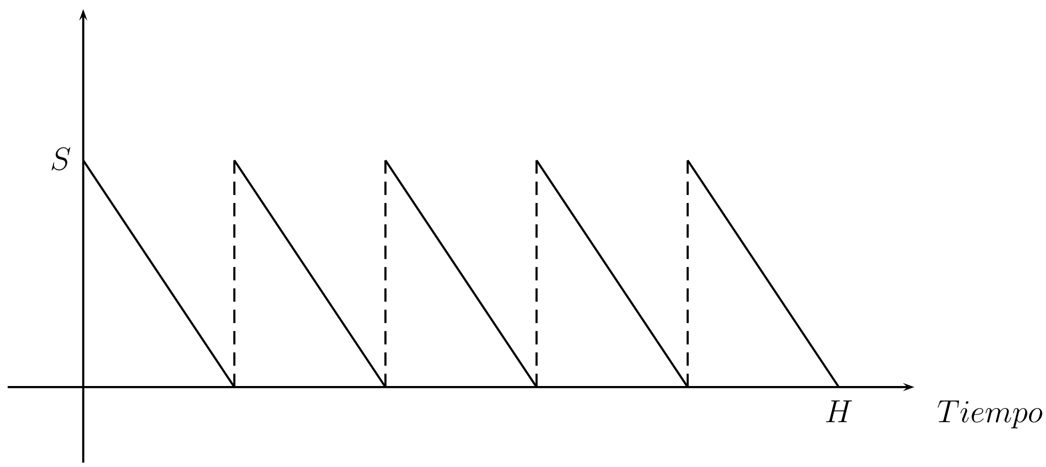

Figura 1.2: Sub-almacenamiento

ejerce una influencia significativa en los instantes que se debe de hacer una reposición sobre todo cuando éste no conserva homogeneidad es decir, que tenga un comportamiento variable. En modelos de producción-inventario, este tiempo de espera será el comprendido entre el instante en que la unidad termina de producir y descansa hasta una nueva ejecución. El tiempo de espera puede ser constante o puede ser considerado como una variable aleatoria.

1.6. Normas operacionales

Se indicó que un modelo de inventario debe proporcionar medios para determinar cuándo y en qué cantidad deberán hacerse los pedidos. La forma de las políticas y sistemas de inventario ayudaran a responder estos interrogantes, se describirán los más comunes (ver Silver [3]).

- ***Sistema de pedido - cantidad (r,Q), (posición de inventario):*** se trata de un sistema de revisión continua. Una cantidad fija Q se ordena cada vez que la posición de inventario alcanza el punto de reorden. Es decir, se reduce hasta el punto r o menos. Esto es, la posición de inventario y no el neto de existencias, se utilizan para activar un pedido.

- ***Sistema de pedido hasta el nivel (r, S):*** este sistema asume una revisión continua, y, al igual que la política (r, Q) una reposición se realiza siempre que la posición de inventario se reduce hasta el punto de reorden r ó a un punto más bajo. Sin embargo, en contraste con el sistema (r, Q) la cantidad a ordenar, es lo suficientemente grande como para elevar la posición de inventario hasta el nivel máximo S y así tratar de no sufrir agotamientos .

- ***Revisión periódica, sistema de pedido hasta (R,S):*** este sistema, también conocido como un sistema de reposición, es de uso común, en particular en empresas que no utilizan el control por computador. También con frecuencia es visto cuando se piden artículos del mismo proveedor, o estos exigen que haya una distribución de los recursos. El procedimiento de control es que se piden R unidades en cada instante de revisión, bastante grande como para elevar la posición de inventario al nivel S.

- ***Sistema (R,r,S):*** este es una combinación de los sistemas (r, S) y (R, S). La idea es que por cada R unidades de tiempo se revisa la posición del inventario. Sí está en ó debajo de r, se pide lo suficiente como para elevarlo a S. si la posición es superior a r, no se hace nada, hasta la próxima revisión.

1.7. Modelo de inventario

Dos clases de modelos de inventarios se van a considerar en este trabajo, los referidos a modelos determinísticos y modelos estocásticos.

- Modelo determinísticos: Es aquel en el cual se conoce con certeza la demanda y también el tiempo de espera en cualquier periodo, es decir una función del tiempo.

- Modelo estocástico: Es aquel donde la demanda o el tiempo de espera se comporta como una variable aleatoria.

Si la diferencia entre los dos tipos de modelos está solo en la naturaleza de la demanda y bajo el supuesto que la tasa promedio de demanda por unidad de tiempo es la misma en ambos casos, entonces el nivel de inventario promedio será mas alto con una demanda estocástica que lo que sucedería con una demanda determinística; la razón es que bajo demanda estocástica es necesario tener un número de artículos de seguridad para posibles comportamientos atípicos de la demanda.

En las secciones anteriores se ha mencionado los elementos pertinentes para el desarrollo de un modelo eficaz de inventario. Lo que queda por hacer es reunir esos elementos de un modo que dé como resultado el modelo deseado. Esto se logrará mediante el desarrollo de una representación matemática del modelo de inventario en estudio. El modelo matemático proporcionará un medio para medir la efectividad del sistema desarrollado. Si el modelo matemático es confiable se podrá predecir para cualquier norma operacional determinada, el costo promedio de manejo de inventario durante el periodo para el que se desarrolló el modelo y para cualquier combinación dada de costos, distribución de la demanda, distribución del tiempo de espera, entre otros. Algunas de las variables incluidas en el modelo estarán bajo el control del diseñador. Se trata casi siempre de las variables que determinan la norma operacional, tamaño del pedido, el instante de reposición y el tiempo entre reposiciones sucesivas. Al optimizar el modelo matemático con respecto a esas variables, se puede obtener la norma operacional que minimice el costo, o que maximice los beneficios correspondientes. Por lo general el analista elabora modelos matemáticos para diversos sistemas alternativos, determina la norma operacional óptima para cada uno de ellos, compara los beneficios o los costos óptimos resultantes y escoge el sistema más económico para su aplicación.

CAPÍTULO 2

Modelos clásicos de inventario

2.1. Modelos determinísticos

2.1.1. Introducción

Se iniciará con un estudio detallado de modelos de inventario con demanda constantes donde se considera un solo producto en un solo periodo. El tiempo y la demanda son continuos y constantes. El proceso del suministro también se considera constante. La demanda para los artículos ocurre a una tasa constante conocida continua en el tiempo y, el suministro ocurre en lotes discretos o porciones, debido a la economía de cada lote. No importa qué tan pequeño sea el pedido, siempre se incurre en un costo fijo. También, el proceso del suministro sólo responde a las órdenes de abastecimiento después de llevar un tiempo fijo. Se empezará con un modelo básico, el modelo de cantidad de orden económica (EOQ.) El supuesto importante en el modelo es que la demanda debe abastecerse inmediatamente, se prohíben agotamientos.

2.1.2. Modelo de cantidad de orden económica (EOQ)

Descripción del modelo

Este es un modelo determinístico donde se maneja un solo producto. La demanda ocurre continuamente a una tasa constante, es decir,

$$\lambda = \text{tasa de demanda (cantidad / unidad de tiempo)}$$

Se comienza el ciclo con un número de unidades iniciales en inventario, luego por efectos de la demanda éste inventario disminuye a una tasa constante λ. Dado que el inventario es utilizado para abastecer la demanda, es necesario que en algún punto en el tiempo este sea renovado, para ello se envía una orden al proveedor, el cual a su vez entrega la cantidad pedida después de un tiempo constante que se denotará por

$$L = \text{tiempo de espera}$$

L no depende del punto en el tiempo en el cual se solicita el pedido y tampoco depende del volumen del pedido. Se supondrá que el proveedor tiene cantidades ilimitadas disponibles. Claramente los pedidos futuros agotarán el inventario, por lo tanto será necesario tener continuamente un proceso de colocación y recepción de pedidos.

La figura 2.1 representa el efecto neto de oferta y demanda del inventario. El inventario disminuye linealmente con pendiente λ negativa. Cuando se hace un pedido, nada pasa hasta después de un tiempo L cuando el lote correspondiente llega. En este punto, el inventario se completa por la cantidad recibida.

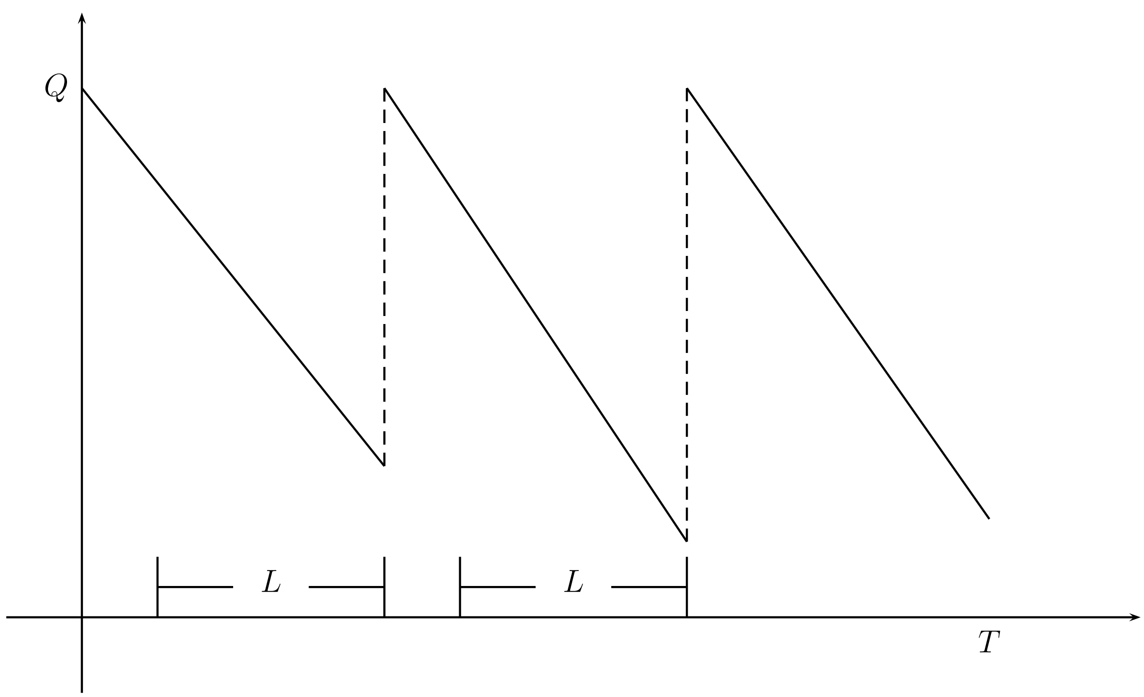

Figura 2.1: Modelo EOQ

En este modelo no se permitirán faltantes, luego en cada solicitud se pedirá la cantidad suficiente para que el inventario pueda encontrarse disponible en todo momento; esto es posible debido a que por la característica de la demanda se podrá tener conocimiento de ella en cualquier punto sobre el horizonte de planificación. Bajo esta situación, se puede dar respuesta a los siguientes interrogantes: ¿cuándo debe hacerse un pedido? ¿cuánto debe pedirse?
Para el desarrollo del modelo matemático se hará uso de la siguiente notación.

- $I(t)$ = Inventario disponible en un tiempo t
- $IO(t)$ = Cantidad ordenada antes de t, pero todavía no recibido en t
- $IP(t)$ = Posición del inventario en un tiempo t $[I(t) + IO(t)]$

Por conveniencia se supondrá estas funciones continuas a la derecha. Por ejemplo, si una orden llega en un tiempo t, $I(t)$ es el inventario después de la llegada del pedido. Para indicar el inventario justo antes de la llegada, se denota por $I(t^-)$.
También, se denotará por:

$$D = \lambda L = \text{demanda durante el tiempo de espera}$$

Sabiendo que L es el tiempo de espera, es posible obtener el inventario en el tiempo $t+L$ a partir del inventario en el tiempo t, la cantidad ordenada antes del tiempo t y la demanda durante el tiempo de espera L. En la figura 2.2 se puede observar que el inventario en el instante $t + L$ se expresa:

$$I(t + L) = I(t) + IO(t) - D = IP(t) - D \tag{2.1.1}$$

Esta relación entre $I(t)$ y $I(t + L)$ es una ley de conservación de flujo. Tales leyes son características importantes de muchos sistemas de inventarios. Así, la posición del inventario $IP(t)$ resume la información sobre el inventario actual, a saber $I(t)$ y $IO(t)$ ayudan a predecir el inventario futuro. En particular, la regla del inventario cero puede expresarse como :

Supervise la posición del inventario $IP(t)$ constantemente.

Cuando $IP(t^-) = D$, hacer un nuevo pedido. [ver Zipkin [4] página 33]

El objetivo es hallar el valor óptimo de pedido $q*$ el cual minimiza una función de costos.

$$q = \text{orden o tamaño del lote}$$

Se desarrollará un modelo y se analizará para determinar el mejor valor de q.

Criterio de ejecución

Hay dos criterios importantes que se deben de tener en cuenta en la ejecución del sistema, que se pueden resumir en pedidos con poca frecuencia de tamaños grandes y pedidos con mayor frecuencia con tamaños pequeños. Para el cálculo de los costos asociados a mantenimiento de inventario será necesario calcular el inventario promedio sobre el horizonte de tiempo. Si se considera horizonte de planificación infinito, el inventario promedio sobre el horizonte estará dado por

$$\bar{I} = \text{inventario promedio} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt$$

$$\overline{F} = \text{ frecuencia de la orden} = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T}\right)(\text{ numero de órdenes en [0,T)})$$

Observe que en la figura 2.2 $IP(t)$ y $I(t)$ son periódicos. Se podrá determinar a lo largo del horizonte el promedio $\bar{I}$ y $\overline{F}$ examinando lo que pasa durante un ciclo (el intervalo de tiempo entre los ingresos de dos órdenes sucesivas). La longitud de cada ciclo es $\frac{q}{\lambda}$, y hay una orden por ciclo. Por consiguiente

$$\overline{F} = \frac{1}{\frac{q}{\lambda}} = \frac{\lambda}{q}$$

También durante un ciclo, $I(t)$ disminuye linealmente desde q hasta 0 y asi el inventario promedio durante el ciclo es $\frac{q}{2}$.

$$\bar{I} = \frac{q}{2}$$

Note que $\bar{I}$ aumenta en q, mientras que $\overline{F}$ disminuye. Estos dos criterios están en conflicto directo; se puede escoger un q grande, pero esto conduce a un inventario promedio grande.

El inventario promedio no pueden exceder un límite superior prescrito. Un límite superior en $\bar{I}$ implica un límite superior en q. Para minimizar $\overline{F}$ se fija q tan grande como sea posible, precisamente en su límite superior. Igualmente, dado un límite en $\overline{F}$ se fija q para que choque precisamente con el límite.

Sin tales restricciones los límites sobran. Se determinan los costos incluidos en el modelo para formar la función de costo total, se establece el tamaño del pedido para el cual los costos totales son mínimos .

- k= costo fijo de pedido

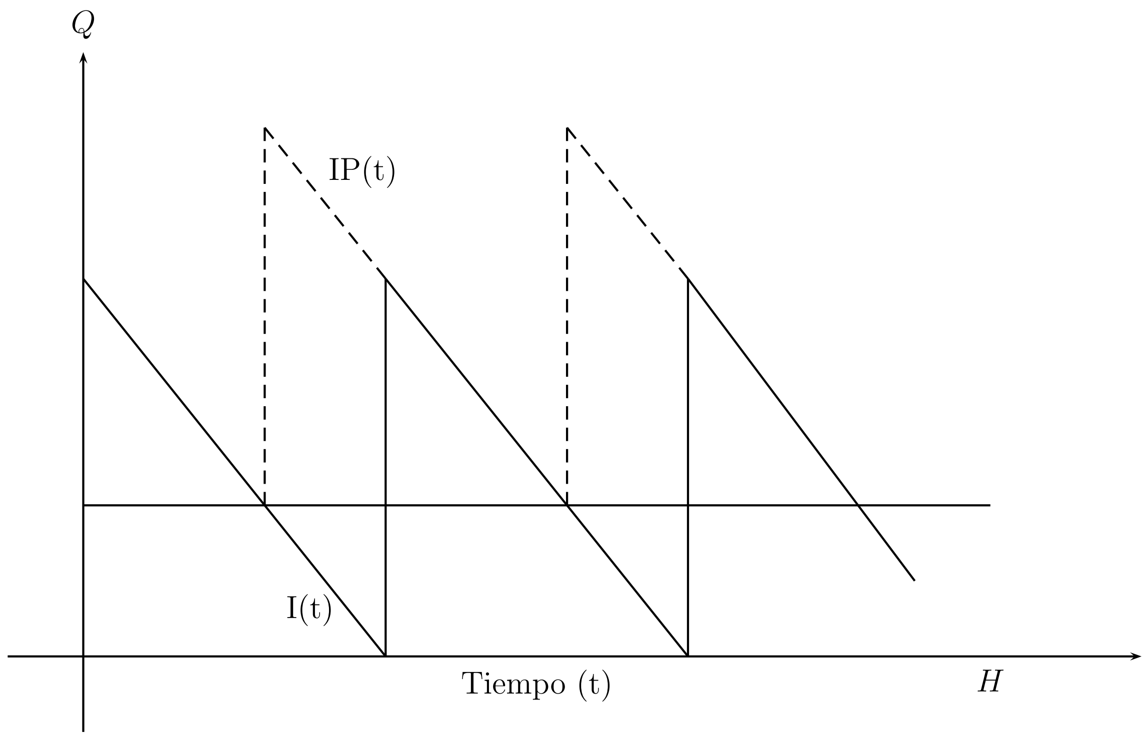

Figura 2.2: Inventario y posición del Inventario

- c= costo por unidad del producto
- h = costo por almacenamiento de una unidad de inventario por unidad de tiempo

En efecto para un tiempo t un inventario $I(t)$ causa un costo de almacenamiento acumulativo de inventario a una tasa $hI(t)$.

Considerando $q > 0$, los costos de pedido, de almacenamiento y los costo por unidad del producto, la función de costo total asociada al modelo en cuestión se expresa.

$$C(q) = (k + cq)\overline{F} + h\bar{I} = (k + cq)\frac{\lambda}{q} + h\frac{q}{2} \tag{2.1.2}$$

En la figura 2.3 se muestra la grafica de la función 2.1.2, esta función es continuamente diferenciable en $(0, \infty)$ y estrictamente convexa garantía de un unico óptimo dado por la solución de la ecuación $C'(q) = 0$

$$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \tag{2.1.3}$$

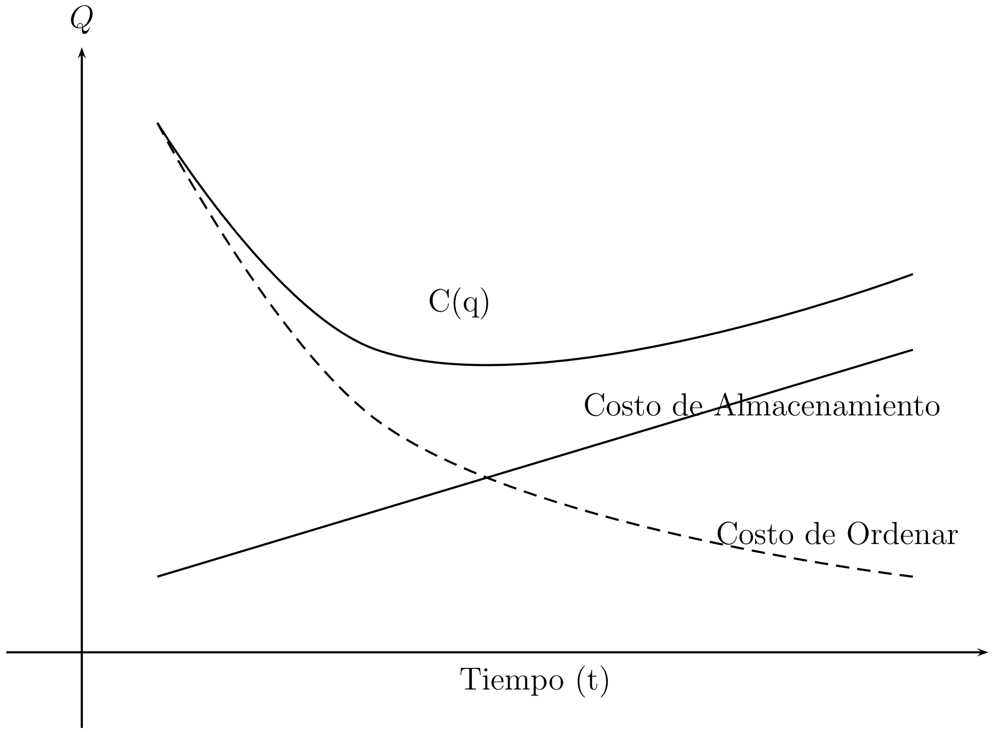

Figura 2.3: Costos

Este valor de q obtenido en la expresión 2.1.3 es llamado (EOQ) por las siglas en inglés *Economic-Order-Quantity*

Ejemplo 2.1.1. Usted es responsable del suministro de papelería en una oficina de copiado de tamaño medio. La cantidad de papel usado es de 8 cajas por semana. El costo de cada caja es de \$25. El costo de solicitar cada orden, independiente del tamaño es de \$50, y recepcionar una orden toma alrededor de 1 hora de su tiempo, lo cual cuesta \$80 a la compañía. Cada orden se tarda una semana en llegar. La compañía cubre el 15 % de los costos de mantenimiento por año. Si el costo por mantener cada caja es de \$1,10 por semana. Actualmente, con cada orden se suple la demanda durante dos semanas. Cual es el costo total de esta política? Será esta la mejor política?

Los datos conocidos son: $\lambda = 8$, $c = 25$, $k = 50 + 80 = 130$,

$\alpha = \frac{0{,}15}{52} = 0{,}0029$, $h = 1{,}10 + (0{,}0029)(25) = 1{,}173$, $q = (2)(8) = 16$.

Con base en estos datos la función de costos 2.1.2 toma el valor.

$$C(q) = (25)(8) + \frac{(130)(8)}{16} + \frac{1}{2}(1{,}173)(16) \approx \$274$$

El valor anterior es el costo total de la política actual. Para dar respuesta a la segunda pregunta, se debe de comparar este costo, con el costo que genera un pedido de las unidades dadas por la expresión 2.1.3, es decir,

$$q^* = \sqrt{\frac{2(130)(8)}{1{,}73}} \approx 42$$

Al relevar este valor la función de costos 2.1.2 ésta toma el valor:

$$C^*(q^*) = (25)(8) + \frac{(130)(8)}{42} + \frac{1}{2}(1{,}173)(42) \approx \$249$$

Es claro que el costo total con un pedido de 42 unidades es menor al costo que se tiene con pedidos de tamaño 16. Luego la política óptima es hacer pedidos de tamaño 42.

Análisis de Sensibilidad

La forma simple de la fórmula EOQ (2.1.3) permite hacer directamente la pregunta. ¿cuál seria el efecto en q^* cuando hay un cambio en la tasa de la demanda. Por ejemplo de λ a $\lambda^{'}$?
Al desarrolar un modelo de análisis de sensibilidad, es deseable expresar el efecto de los errores o de cambios en las variables en forma de razón. Esta razón sería la cantidad económica de pedido real dividida entre la cantidad óptima estimada del pedido. Por tanto, se denota el nuevo valor de q^* por $q^{'*}$. Entonces,

$$\frac{q^{'*}}{q^*} = \sqrt{\frac{\lambda^{'}}{\lambda}}$$

De la fórmula se infiere que:

- El cambio en el tamaño óptimo de la orden es en la misma dirección que la tasa de la demanda.
- El cambio relativo en el tamaño óptimo de la orden es más pequeño que la tasa de la demanda (es decir $\frac{q^{'*}}{q^*}$ esta más cerca a 1 que $\frac{\lambda^{'}}{\lambda}$).

En otras palabras q^* es grande con relación a los cambios en λ. Ésta es una propiedad crítica en la práctica. En el mundo real, ninguna suposición se cumplirá estrictamente.

Se debería estimar λ y la estimación casi seguro contiene algún error. No obstante, con tal de que el error relativo no sea demasiado grande, el calculo de q^* con el λ estimado esta más cerca del verdadero valor. Es probable que λ cambie con el tiempo, con tal de que el cambio relativo sea pequeño, el q^* calculado en (2.1.3) seguirá siendo el mejor.

2.1.3. Pedidos pendientes atrasados

Considere el sistema EOQ pero con el requisito de que toda la demanda del inventario esta disponible. Es decir, todas las demandas están finalmente satisfechas, aunque sea después de un retraso, las demandas no satisfechas inmediatamente son dejadas pendientes para el próximo pedido. Los clientes están dispuestos a esperar, y confían en que sus demandas serán resueltas. Los pedidos pendientes se acumulan solamente cuando el inventario se agota completamente.
Lo mejor seria operar el sistema sin pedidos pendientes siguiendo la política descrita para el modelo EOQ. La autorización de pedidos pendientes aumenta las políticas del sistema de funcionamiento. Muchos negocios operan con atrasos esenciales. Por ejemplo, en las firmas de capital de mercancías y las industrias de servicios, donde los productos son costosos o (en el caso de servicios) imposibles de almacenar.

Políticas de nuevo pedido-punto (r,q)

Aquí se hará uso de las siguiente notación algunas ya usadas en la sección 2.1.2:

- I(t)= inventario en un tiempo t
- B(t)= pedidos pendientes en el tiempo t
- IN(t)= inventario neto en el tiempo $t = I(t) - B(t)$
- IO(t)= cantidad ordenada pero no recibida antes del tiempo t
- IP(t)= posición del inventario en un tiempo $t = IN(t) + IO(t)$

Las nuevas funciones $B(t)$, $IN(t)$, $IO(t)$ tienen un nuevo significado. El inventario neto $IN(t)$ captura la información en $I(t)$ y $B(t)$ en cualquier momento dado, por lo menos alguna de estas dos funciones es cero puesto que se utiliza cualquier inventario disponible para llenar la demanda. Por tanto

$$IN(t) = \begin{cases} I(T) & \text{cuándo } IN(t) \geq 0 \\ -B(t) & \text{cuándo } IN(t) \leq 0 \end{cases}$$

La definición de $IN(t)$ trata pedidos pendientes como inventarios negativos y funcionan de la siguiente manera; los arribos de las órdenes $IN(t)$ disminuye a una tasa constante λ, sin tener en cuenta si $IN(t)$ es positivo o negativo. Cuando llega un pedido, el inventario $IN(t)$ pasa exactamenten a ser q unidades, ya que algo del lote se utiliza para satisfacer los pedidos pendientes y el resto se agrega al inventario. Así, $IN(t)$ se comporta de forma similar a $I(t)$ como en el modelo de inventario cuando se prohibieron los pedidos pendientes, pero ahora $I(t)$ es más complejo.
Vea la figura 2.4 ($IN(t)$ agunas veces es llamado el nivel de inventario.)
También

$$IN(t+L) = IN(t) + IO(t) - D = IP(t) - D \tag{2.1.4}$$

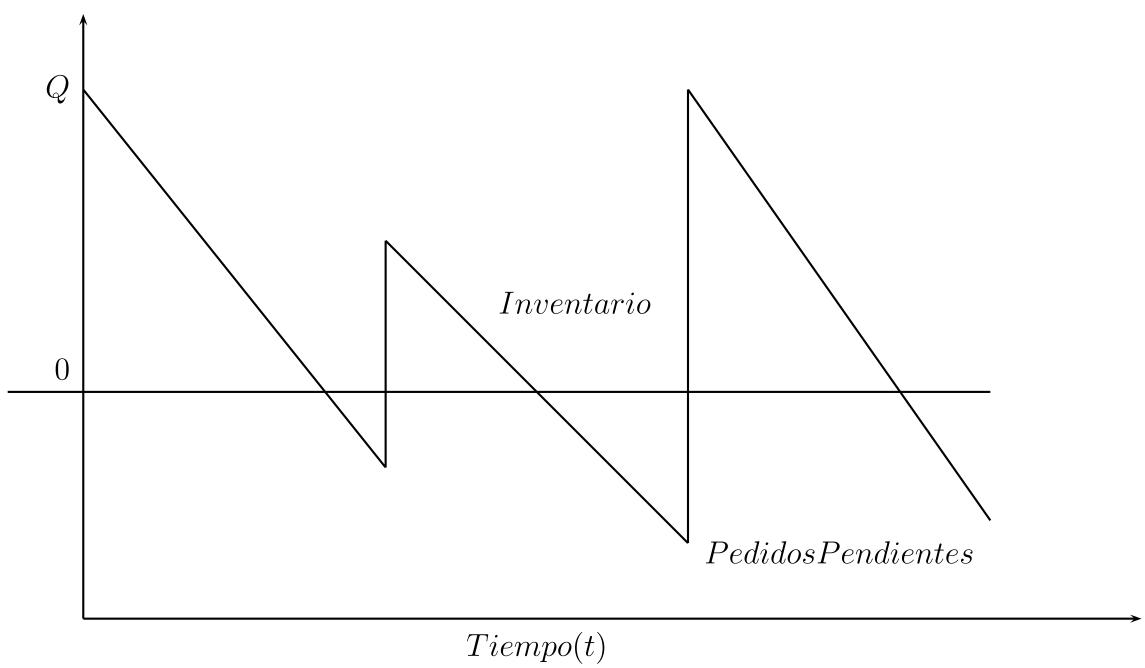

Figura 2.4: Inventario Neto

Esta relación es análoga a la ecuación (2.1.1) sustituyendo $IN(t)$ por $I(t)$ la cual es una ley de conservación para este sistema entre t y $t + L$, $IO(t)$ y D se agregan al inventario neto. Así $IP(t)$ resume la información necesaria para predecir el inventario neto en un plazo futuro.

Como en el modelo EOQ, se asume que todas las órdenes son del mismo tamaño $q > 0$, el problema de cuándo pedir es ahora más complejo. Se necesita una segunda variable para la política además de q.

$$r = \text{punto de nuevo pedido (cantidad-unidad)}$$

Esta variable puede asumir algún valor real positivo o negativo. Considere la siguiente política:
Revise la posición del inventario $IP(t)$ constantemente, cuando $IP(t^{-}) = r$ ponga una nueva orden de tamaño q en un tiempo t (la política del modelo EOQ es un caso especial cuando $r = D$.) En honor a las dos variables, una política de este tipo se conoce como un *pedido-punto* en la política (r, q). La figura 2.5 ilustra el comportamiento de $IN(t)$ y $IP(t)$ bajo tal política. Note la similaridad de las figuras 2.2 y 2.5. El grafico conserva las misma lineas punteadas verticalmente, pero pueden cambiar dependiendo de como se escoje a r.

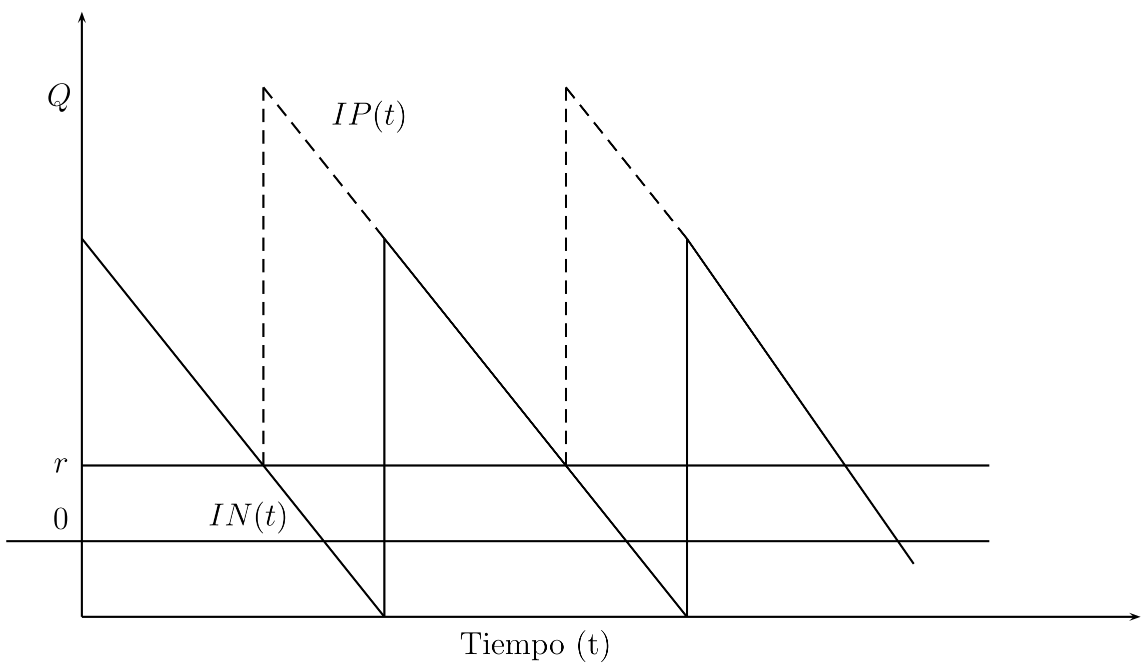

Figura 2.5: IP(t) y IN(t) bajo una política (r, q)

Criterio de ejecución

Los criterios relevantes incluyen $\bar{I}$ y $\overline{F}$ pero se necesita algo más, si el modelo permite pedidos pendientes se debe procurar que la espera no sea demasiado larga, ya que estas no son agradables. A los clientes no les gusta esperar, entonces se debe medir y controlar los pedidos pendientes.
La primera medida relacionada con esta política es.

$$\overline{B} = \text{promedio de pedidos pendientes} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T B(t)dt$$

Este límite es análogo al definido para $\overline{I}$. Hay otro criterio que desempeña un papel secundario pero importante.

$$\overline{A} = \text{frecuencia de pedidos pendientes} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$$

Claramente, $\overline{A}$ mide la fracción de las demandas dejadas pendiente en un pedido. Así, el número promedio de las demandas dejadas pendiente en un pedido por unidad de tiempo es $\lambda\overline{A}$, y la tasa de la demanda satisfecha en el inventario es $1-\overline{A}$ (ojo, $\overline{B}$ representa los pedidos pendientes, porque $\overline{A}$ mide la frecuencia de pedidos pendientes.)
Ahora analicemos la política como función de las variables q y r. Es conveniente sustituir r por la variable equivalente ν.

$$\nu = \text{inventario de seguridad=r-D}$$

(La frase inventario de seguridad sugiere una cantidad positiva, pero ν puede ser negativa. No obstante, esta definición es consistente con el uso estándar en los modelo de la demanda estocástica. Allí el inventario es positivo.) También se define un tiempo equivalente a ν.

$$y = \text{tiempo de seguridad}=\tfrac{\nu}{\lambda}$$

Tanto ν, como y pueden ser negativos.
Para cualquier q dado solamente ciertos valores de ν tienen sentido, la ecuación (2.1.4) implica que el inventario neto $IN(t^-)$ en el extremo de un ciclo es justamente ν, de modo que $IN(t) = \nu + q$ al principio de un ciclo. Por lo tanto,

1. **si** $\nu > 0$, entonces para todo t
   $I(t) > \nu > 0$ y $B(t) = 0$

2. **si** $\nu < -q$, entonces para todo t
   $I(t) = 0$, y $0 < -(\nu + q) < B(t)$

Ninguna de las dos conclusiones es atractiva: En el caso uno se tiene más inventario del que realmente se necesita y en el caso dos nunca se satisface todos los pedidos pendientes. Así pues, se puede restringir la atención al rango $-q \leq \nu \leq 0$ es decir ν es negativo al igual que y y cada orden que llega satisface todos los pedidos pendientes actuales.
Por lo tanto, un ciclo consiste en dos partes, uno de longitud $\mu + y = \frac{(q+\nu)}{\lambda}$ durante el cual se ejecuta el inventario y una segunda parte de longitud $-y = \frac{-\nu}{\lambda}$ cuando los pedidos pendientes se acumulan. (Véase la figura 2.6.) Estos intervalos corresponden a las fracciones $\frac{(q+\nu)}{\lambda}$ y $\frac{-\nu}{q}$ respectivamente del ciclo completo. En particular

$$\overline{A} = \frac{-\nu}{q}$$

El inventario promedio es simplemente $\frac{(q+\nu)}{2}$ durante la primera parte y cero durante la segunda. El promedio sobre un ciclo completo es justo el promedio de estas cantidades:

$$\overline{A} = (\frac{q+\nu}{q})(\frac{q+\nu}{2}) + (\frac{-\nu}{q}) * 0 = \frac{(q+\nu)^2}{2q}$$

Igualmente, el promedio de pedidos pendientes en la primera parte del ciclo es cero, y $\frac{-\nu}{2}$ en la segunda parte, para que

$$\overline{B} = (\frac{q+\nu}{q}) * 0 + (\frac{-\nu}{2})(\frac{-\nu}{q}) = \frac{\nu^2}{2q}$$

Finalmente, la longitud del ciclo es $\mu = \frac{q}{\lambda}$, así

$$\overline{F} = \frac{\lambda}{q}$$

Utilizando los factores de costo k, c y h definidos anteriormente y también estimando un factor para los pedidos pendientes.

$$b = \text{costo por unidad de dejar un pedido pendiente}$$

Este parámetro resume todas las desventajas de los pedidos pendientes mencionados antes. El costo total promedio entonces se convierte

$$C(\nu, q) = (k + cq)\overline{F} + h\overline{I} + b\overline{B} = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{h(q+\nu)^2}{2q} + \frac{b\nu^2}{2q} \qquad (2.1.5)$$

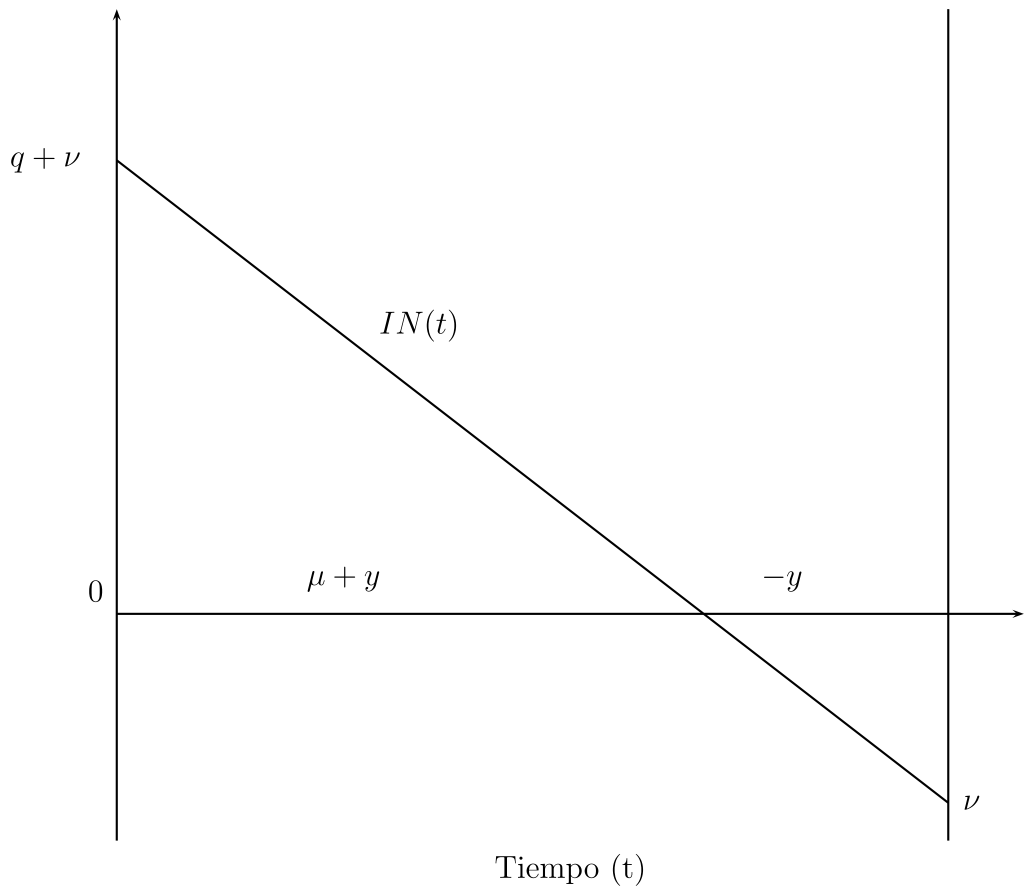

Figura 2.6: Las dos partes de un ciclo

La política óptima

El costo $C(\nu, q)$ es ahora una función de dos variables. Para minimizarlo, se igualan sus derivadas parciales a cero (C es continuamente diferenciable y estrictamente convexa en su dominio.) Es decir,

$$\frac{\partial C}{\partial \nu} = h(\frac{q+\nu}{q}) + \frac{b\nu}{q} = 0$$
$$\frac{\partial C}{\partial q} = -\frac{k\lambda}{q^2} + h(\frac{q^2-\nu^2}{2q^2}) - \frac{b\nu^2}{2q^2} = 0$$

Definiendo la proporción del costo como

$$\omega = \frac{b}{b+h}$$

La solución a estas ecuaciones es

$$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h\omega}} \qquad \nu^* = -(1-\omega)q^* \tag{2.1.6}$$

El punto óptimo del nuevo pedido es $r^* = D + \nu^*$. El tiempo óptimo del ciclo y tiempo de seguridad estan dados por

$$\mu^* = \sqrt{\frac{2k}{h\lambda\omega}} \qquad y^* = -(1-\omega)\mu^*$$

Por sustitución directa de (2.1.6) los rendimientos para $C(\nu, q)$

$$C^* = C(\nu^* + q^*) = c\lambda + \sqrt{2kh\lambda\omega} \tag{2.1.7}$$

Estos resultados son notablemente similares a los del modelo EOQ. La expresión para C^* incluye la variable del costo promedio $c\lambda$ y el mismo término de la raíz cuadrada, como el modelo EOQ, pero multiplicado por el factor $\sqrt{\omega}$, con ω que se encuentra entre 0 y 1. Así, el costo total óptimo es menor que el dado en el modelo EOQ.
También q^* es similar a la fórmula de EOQ. El término de la raíz cuadrada en (2.1.6) es dividido por $\sqrt{\omega}$, así que el tamaño óptimo de la orden es más grande que en el modelo de EOQ. La razón es un poco sutil, para cualquier q dado el costo de la orden es fijo, pero la variable ν proporciona algun grado de libertad para ajustar la combinacion entre los costos de tenencia y los costos de pedidos pendientes.

Puede ser sorprendente que ν^* es siempre negativo, cada sistema debe funcionar con algunos pedidos pendientes. Pero comenzando con $\nu = 0$, una reducción pequeña en ν causa una cantidad pequeña de pedidos pendientes, y solamente por un periodo corto al final de un ciclo. Este cambio reduce el inventario en una cantidad pequeña, pero durante casi el ciclo entero. Incluso para un costo de b grande, el costo total disminuirá.
Por otro lado como $b \to \infty$ cuando h es fijo, entonces $\omega \to 1$. Así, $\nu \to 0$ y q^* y C^* se acercan a los valores correspondientes en el modelo EOQ. Se puede pensar en el modelo EOQ como un caso limite con $b = \infty$.
Sorprendentemente $\overline{A}$ asume una forma notablemente simple en la solución óptima.

$$\overline{A} = \frac{-\nu^*}{q^*} = (1-\omega) \tag{2.1.8}$$

Aunque el modelo no restringe o penaliza $\overline{A}$, la política óptima lo controla de cualquiera manera.

Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad para este modelo es similar al del modelo EOQ. Otra vez q^* y C^* son fuertes con respecto a los cambios en λ y k. También, piense en ω como un costo relativo independiente de h. Viendo este parámetro de esta manera, el análisis se hace fuerte con respecto a ω y h. Suponga que se establece un seguro óptimo de inventario para $\nu = -(1-\omega)q$, y sea $C(q)$ el costo de esta solución, excluyendo el termino $c\lambda$, se puede demostrar que.

$$C(q) = \frac{k\lambda}{q} + \frac{hq\omega}{2} \tag{2.1.9}$$

$C(q)$ es precisamente como en el modelo EOQ, exepto por el ajuste del costo del inventario. La razon $\frac{C(q)}{C^*}$ se reduce a $\frac{q}{q^*}$.

Espacio y tiempo

Las cantidades $\overline{A}$ y $\overline{B}$ se relacionan con el servicio prestado a los clientes, pero es recomendado considerar una medida más directa:

$$\overline{BW} = \text{tiempo de espera promedio del pedido pendiente del cliente}$$

Una vez más se asume que $-q \leq \nu \leq 0$. Si observa la figura 2.6 se dará cuenta que no hay ninguna espera en la primera parte de un ciclo, mientras que en la segunda parte después de que se termine el inventario la espera promedio es $\frac{-y}{2} = \frac{-\nu}{2\lambda}$. Así, el promedio total es

$$\overline{BW} = (\tfrac{q+\nu}{q}) * 0 + (\tfrac{-\nu}{q})(\tfrac{-\nu}{2\lambda}) = (\tfrac{1}{\lambda})(\tfrac{\nu^2}{2q}) = (\tfrac{1}{\lambda})\overline{B}$$

Por tanto, el tiempo de espera promedio para una demanda de un cliente es un promedio proporcional a los pedidos pendientes, con la constante de proporcionalidad $\frac{1}{\lambda}$ que es el recíproco de la tasa de la demanda. Ésta es una razón por la que la medida $\overline{B}$ es tan importante.

2.1.4. Modelo de producción-inventario sin faltantes

El siguiente modelo describe un sistema de producción en el que las unidades se fabrican para el inventario a razón de P unidades por unidad de tiempo. Las unidades fabricadas van directamente al inventario. En este modelo se considerará que la tasa de producción P es mayor que la tasa de demanda λ luego la demanda será satisfecha en todo el horizonte. Sin embargo la producción continua no resultará conveniente, puesto que se producirá mas de lo que se puede vender. Por lo tanto el problema consiste en

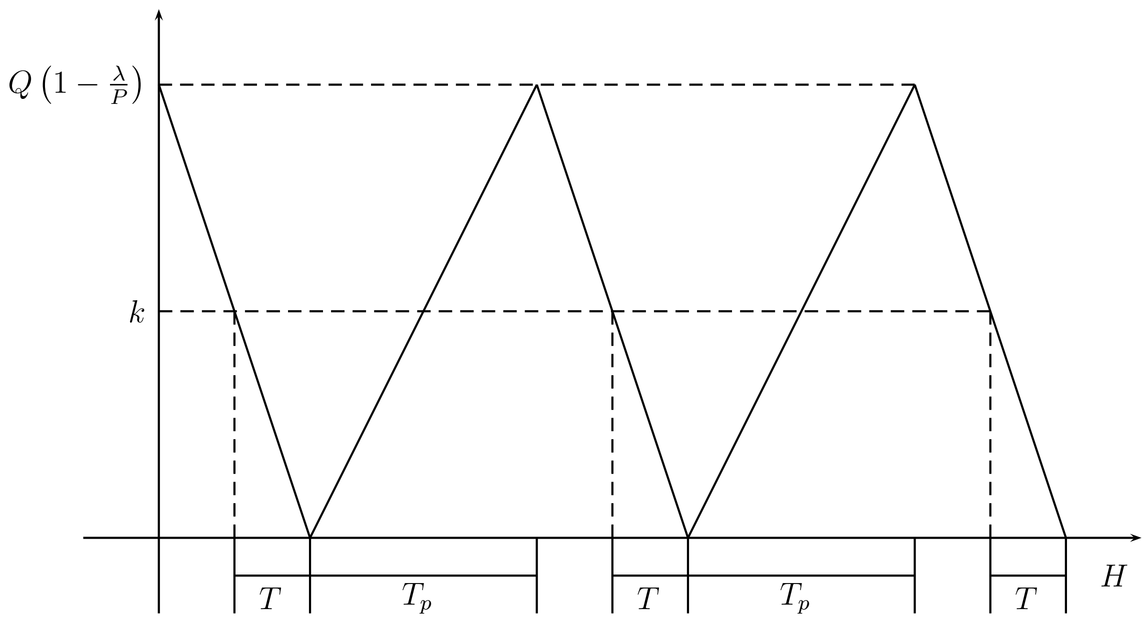

Figura 2.7: Modelo de producción - inventario

determinar con que frecuencia se deben ajustar los periodos de producción y que cantidad de unidades se deben producir durante cada uno de esos periodos (Ver Laniado [7]).

Sea T el tiempo que transcurre entre la orden del pedido y el inicio de la producción del mismo (ver figura 2.7); c_2 el costo por ciclo de funcionamiento de la unidad de producción, este costo es independiente del volumen de la producción. Una vez iniciado el periodo de producción, el nivel de inventario se incrementa a una tasa de $P-\lambda$ hasta que la producción termina. En cuanto cocluye la producción, el nivel de inventario disminuye a razón de λ unidades por unidad de tiempo. Supóngase que se fabrican Q unidades durante cada ciclo de producción, luego el tiempo necesario para producir Q unidades es $T_p = \frac{Q}{P}$. Por consiguiente, la demanda durante el tiempo de producción es $\frac{Q}{P}\lambda$ lo que da como resultado un nivel máximo de inventario de $Q\left[1-\frac{\lambda}{P}\right]$ al final del periodo de producción.

El tiempo necesario para que el nivel de inventario disminuya del valor máximo $Q\left(1-\frac{\lambda}{P}\right)$ a cero es $\left(\frac{Q}{\lambda}\right)\left[1-\frac{\lambda}{P}\right]$, entonces el nivel de inventario se puede expresar por medio de:

$$Q(t) = \begin{cases} (P-\lambda)t, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{Q}{P} \\ Q-\lambda t, & \text{si } \frac{Q}{P} < t \leq \frac{Q}{\lambda} \end{cases}$$

donde $t=0$ es el instante en que se inicia la producción del lote. Por tanto el costo de mantenimiento de inventario por ciclo esta dado por

$$c_1\left[\int_0^{\frac{Q}{P}}(P-\lambda t)tdt+\int_{\frac{Q}{P}}^{\frac{Q}{\lambda}}(Q-\lambda t)dt\right]=c_1\frac{Q^2(P-\lambda)}{2P\lambda},$$

donde c_1 es el costo de mantenimiento de inventario por unidad por unidad de tiempo. Puesto que el número de ciclos es de $\frac{\lambda H}{Q}$, el costo de mantenimiento de inventario para el horizonte completo H se expresa

$$c_1\frac{QH}{2}\left(1-\frac{\lambda}{P}\right).$$

El costo total de funcionamiento de la unidad de producción se expresa $c_2\frac{\lambda H}{Q}$.

La función que representa el costo total en todo el horizonte de planificación es

$$C_T(Q)=c_2\frac{\lambda}{Q}+c_1\frac{QH}{2}\left(1-\frac{\lambda}{P}\right),$$

de donde se obtiene que el valor óptimo para Q esta dado por:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2\lambda Pc_2}{c_1(P-\lambda)}}$$

Para determinar el nivel de inventario k, para el cual se debe preparar la unidad para un nuevo ciclo de producción, se considerará $T<\frac{Q}{\lambda}\left[1-\frac{\lambda}{P}\right]$, claramente $k=\lambda T$. Luego la norma operacional consiste en producir

$$\sqrt{\frac{2\lambda Pc_2}{c_1(P-\lambda)}}$$

y expedir la orden de producción siempre que el nivel de inventario llegue a λT unidades.

2.2. Modelos probabilísticos

2.2.1. Introducción

Los modelos de inventario se clasifican como estocásticos siempre que la demanda o tiempo de espera sean variables aleatorias. En el análisis presentado de los modelos determinísticos se consideraron situaciones donde no se permite déficit; no obstante cuando la demanda es estocástica el número de unidades solicitadas no se podrá predecir, excepto de manera probable. Los modelos matemáticos que se plantean en esta sección representarán el costo total esperado de inventario, además para poder deducir una norma operacional óptima que minimice dicho costo esperado será preciso saber algo sobre el comportamiento de la demanda durante cierto intervalo de tiempo (Ver [7]). A continuación se analizará un modelo de inventario estocástico sencillo a manera de ilustración, donde de la demanda se conoce su función de distribución, y posteriormente se analizará el mismo modelo donde solo son conocidos los dos primeros momentos de la demanda, es decir, su media μ y varianza σ^2.(vea Moon y Gallego [8])

2.2.2. Modelo con distribución conocida

Supóngase que se almacena cierto artículo cuyo costo de compra por unidad es c y su precio de venta es p. La demanda del artículo es una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$, y sea $E(X) <\propto$ su esperanza matemática. Se pretende determinar el tamaño Q del pedido que se debe solicitar al inicio del periodo, con el objetivo de maximizar la ganancia media o bien minimizar los costos medios con relación al artículo. Si hay agotamiento de existencias se incurre en una penalidad que se representará por un costo π por unidad. De otra parte si la demanda durante el periodo es menor que la cantidad ordenada Q, el surtidor reconoce un precio s de salvamento por artículo $s < c$. Este precio de salvamento es frecuente en modelos de inventario de artículos perecederos, por ejemplo lácteos con fecha de vencimiento.

Dado un valor Q la utilidad $U_Q(X)$ es una variable aleatoria que se expresa.

$$U_Q(X) = \begin{cases} pX - cQ + s(Q - X), & \text{si } X \leq Q \\ pQ - cQ - \pi(X - Q), & \text{si } X > Q \end{cases}.$$

La esperanza matemática

$$\begin{aligned} E[U_Q(X)] &= \int_0^Q [pX - cQ + s(Q - x)]dF(X) + \int_Q^\infty [pQ - cQ - \pi(X - Q)]dF(X) \\ &= (p - s)\mu - (c - s)Q - (p + \pi - s)\int_Q^\infty (X - Q)dF(x). \end{aligned}$$

Sea $[X - Q]^+ = max[X - Q; 0]$, de donde

$$E[X - Q]^+ = \int_Q^\infty (X - Q)dF(x).$$

Luego la utilidad media se expresa

$$E[U_Q(X)] = (p-s)\mu - (c-s)Q - (p+\pi-s)E[X-Q]^+$$

El problema radica en hallar el valor de Q que maximice la utilidad media.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Q}E[U_Q(X)] &= -(c-p-\pi) - (p+\pi-s)\int_0^Q dF(X)\\ &= (p-c+\pi) - (p+\pi-s)F(Q).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Q^2}E[U_Q(X)] = -(p+\pi-s)f(Q) < 0.$$

Luego $Q^* = F^{-1}\left[\frac{p-c+\pi}{p+\pi-s}\right]$ maximiza la utilidad media.

2.2.3. Modelo con distribución desconocida

El siguiente análisis se sustenta bajo el supuesto que no se conoce la función de distribución de la demanda; únicamente se conoce la media μ y la varianza σ^2.
Partiendo de la función de utilidad definida en la sección anterior.

$$U_Q(X) = \begin{cases} pX - cQ + s(Q-X) & \text{si } X \le Q \\ pQ - cQ - \pi(X-Q) & \text{si } X > Q \end{cases}$$

la cual se puede escribir como

$$U_Q(X) = \begin{cases} pX - cQ + s(Q-X) & \text{si } X \le Q \\ p(Q-X) - cQ - \pi(X-Q) + pX & \text{si } X > Q, \end{cases}$$

se obtiene que la esperanza matemática se expresa

$$\begin{aligned}E[U_Q(X)] &= p\mu - cQ + sE[Q-X]^+ - pE[X-Q]^+ - \pi E[X-Q]^+\\ &= p\mu - cQ + sE[Q-X]^+ - (p+\pi)E[X-Q]^+.\end{aligned}$$

Claramente, $(Q-X)^+ = Max[(Q-X);0] = Q - X + (X-Q)^+$, entonces

$$\begin{aligned}E[U_Q(X)] &= p\mu - cQ + sE[(Q-X) + (X-Q)^+] - (p+\pi)E[X-Q]^+\\ &= p\mu - cQ + sE[Q-X] + sE[X-Q]^+ - (p+\pi)E[X-Q]^+\\ &= p\mu - cQ + sQ - s\mu - (p+\pi-s)E[X-Q]^+\\ &= (p-s)\mu - Q(c-s) - (p+\pi-s)E[X-Q].^+\end{aligned}$$

Se trata de hallar el valor Q que maximice la expresión anterior con un tratamiento distinto al utilizado en la sección anterior, puesto que no se conoce la función de distribución de la demanda.

$$\begin{aligned}
E[(X-Q)^2] &= E[X^2 - 2XQ + Q^2] \\
&= E[X^2] - 2QE[X] + Q^2 \\
&= E[X^2] - 2Q\mu + Q^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2 + \mu^2 - 2Q\mu + Q^2 \\
&= \sigma^2 + (\mu - Q).^2
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Cauchy se obtiene que

$$E \mid X - Q \mid \leq [E[(X-Q)^2]]^{\frac{1}{2}},$$

de donde

$$E \mid X - Q \mid \leq [\sigma^2 + (Q-\mu)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$E \mid X - Q \mid$ representa el error medio entre la demanda en el periodo y la cantidad ordenada. Tomando el peor de los casos se obtiene

$$E \mid X - Q \mid = [\sigma^2 + (Q-\mu)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Teniendo en cuenta que $(X-Q)^+$ se puede también escribir como

$$\frac{\mid X - Q \mid + (X-Q)}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned}
E[X-Q]^+ &= \frac{E \mid X - Q \mid + E[X-Q]}{2} \\
&= \frac{[\sigma^2 + (Q-\mu)^2]^{\frac{1}{2}} + \mu - Q]}{2}.
\end{aligned}$$

Luego la utilidad media se expresa

$$E[U_Q(X)] = = (p-s)\mu - Q(c-s) - (p+\pi-s)\frac{[\sigma^2 + (Q-\mu)^2]^{\frac{1}{2}} + \mu - Q]}{2},$$

de donde se obtiene que la cantidad ordenada óptima que maximiza la utilidad media viene dada por

$$Q^* = \frac{\sigma \mid p + \pi + s - 2c \mid}{2[(c-s)(p+\pi-c)]^{\frac{1}{2}}} + \mu$$

CAPÍTULO 3

Modelo de inventario determinístico con tasa de demanda lineal

3.1. Introducción

En [7] se examina un modelo de inventario con tasa de demanda no constante, creciente y derivable en todo el horizonte de planificación. Allí se supone que en cada instante T_j el nivel de inventario se hace igual a cero e inmediatamente se repone con un pedido de tamaño S_j, el cual permite satisfacer la demanda hasta el siguiente instante de reposición T_{j+1}.

El problema que allí se ha resuelto consiste en la obtención de condiciones necesarias para los instantes óptimos de reposición T_j con $j = 1, 2, 3, ..., m - 1$ que minimizan el costo total en el horizonte de planificación, considerando $T_0 = 0$ y además $T_m = H$.

En este capítulo se presenta una solución a un problema poco examinado en la literatura de los modelos de inventario, el cual se refiere a la determinación de los instantes de reposición cuando se considera una tasa de demanda lineal. En [2] se estudia el problema en forma parcial, obteniendo una solución aproximada para los tiempos de reposición, sin embargo, algunos autores como [3] y [4] no examina este problema con mucho detalle.

El problema aquí estudiado consiste en la obtención de las condiciones suficientes para los tiempos óptimos de reposición, estos tiempos son determinados, en forma recursiva, al minimizar la función de costo total. Aunque la aproximación presentada en (Naddor [2] página 64) es buena, la solución que se expone en este trabajo es la que realmente minimiza la función de costos y se demuestra al probar con ayuda del Teorema de los

Círculos de Gerschgorin, que la matriz Hessiana de la función de costo total, evaluada en los tiempos obtenidos es definida positiva, condición suficiente para garantía de un mínimo.
Inicialmente se presentará la estructura de un modelo general de inventario con tasa de demanda no constante y creciente, posteriormente se dará respuesta al problema de obtener condiciones necesarias y suficientes para los tiempos óptimos cuando la tasa de demanda es de la forma $r(t) = \lambda t$ siendo $\lambda > 0$ y se hará la correspondiente comparación de la solución obtenida con la aproximación presentada en (Naddor [2] página 64).

Al final de la sección se presenta un ejemplo que se resolverá paralelamente utilizando la aproximación y utilizando la solución obtenida en el presente trabajo. También al final de la sección se presenta un algoritmo de solución programado en Visual Basic que permite determinar simultáneamente el número de reposiciones y los instantes de reposición que minimizan la función de costos total. El código en visual Basic se ilustra en el Apéndice 4.2.1.

Por último se dará respuesta a un problema que se plantea en [2] el cual consiste en determinar los tiempos de reposición y el número óptimo de reposisiciones, cuando la tasa de demanda es de la forma $r(t) = \lambda t + \beta$ y bajo la política (s, q) que considera pedidos de igual tamaño. La determinación de los tiempos óptimos será posible obtenerla de manera analítica, sin embargo la determinación del número óptimo de reposiciones se obtendrá utilizando un algoritmo que será programado en Matlab. El código en Matlab se ilustra en el Apéndice 4.1.1.

Definición 3.1.1 (Nivel de inventario). *El nivel de inventario es una función del tiempo que representa el número de unidades almacenadas en cualquier instante t.*

3.2. Supuestos y notación

1. La tasa de demanda es conocida.
2. No hay demanda insatisfecha.
3. El tiempo de espera entre la orden del pedido y la recepción del mismo es cero.
4. Los costos en consideración son por mantenimiento por unidad del producto por unidad de tiempo y por reposición.

Se hará uso de la siguiente notación. Alguna notación adicional será introducida cuando se necesite.

H Horizonte de planificación.

m Número de reposiciones durante el horizonte de planificación.

S_j Tamaño del j - ésimo pedido, $j = 1, 2, ..., (m-1)$.

T_{j-1} Instante de tiempo en el cual se lleva a cabo el j-ésimo pedido, $j = 1, 2, ..., m$, donde $T_0 = 0$.

$T_m = H$ En este último instante no se hace pedido.

c_1 Costo de mantenimiento de inventario por unidad y por unidad de tiempo.

c_2 Costo de cada reposición, es independiente del volumen.

$r(t)$ Tasa de demanda .

3.3. Análisis del modelo general

En este modelo se considera un plan $[T_j, S_j]$, para un modelo de inventario determinista con tasa de demanda $r(t)$, función derivable y creciente en el horizonte de planificación $[0, H]$.

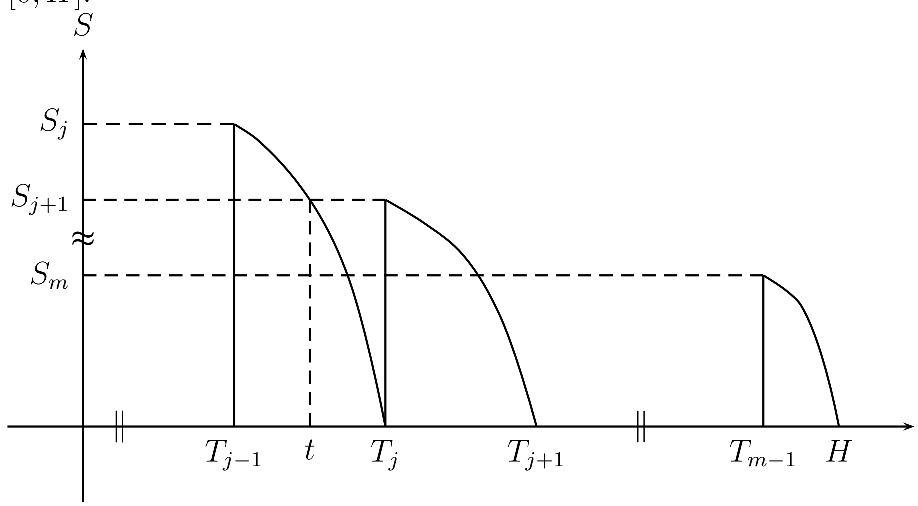

Figura 3.1: Modelo General con Demanda Creciente

El tamaño del pedido que se recibe en el instante inicial T_{j-1} del j-ésimo periodo $[T_{j-1}, T_j]$ viene dado por:

$$S_j = \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx,$$

donde $r(t)$ es la tasa de demanda (ver figura 3.2). Sea $Q(t)$ el nivel de inventario en el instante $t \in (T_{j-1}, T_j)$, en efecto,

$$\begin{aligned} Q(t) &= S_j - \int_{T_{j-1}}^{t} r(x)dx. \\ &= \int_{t}^{T_j} r(x)dx \qquad t \in (T_{j-1}, T_j). \end{aligned}$$

El inventario acumulado sobre el periodo (T_{j-1}, T_j) viene dado por

$$\int_{T_{j-1}}^{T_j} \int_{t}^{T_j} r(x)dxdt \qquad t \in (T_{j-1}, T_j).$$

Luego el inventario acumulado $\int_0^H Q(t)dt$ sobre el horizonte de planificación $(0, H)$, se expresa

$$\begin{aligned} \int_0^H Q(t)dt &= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_{j-1}}^{T_j} \int_{t}^{T_j} r(x)dxdt \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_{j-1}}^{T_j} \int_{T_{j-1}}^{x} r(x)dtdx \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_{j-1}}^{T_j} [x - T_{j-1}]r(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{T_{j-1}}^{T_j} xr(x)dx - (T_{j-1}) \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $T_0 = 0$ y $T_m = H$ se garantiza que

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{T_{j-1}}^{T_j} xr(x)dx = \int_0^H xr(x)dx.$$

El inventario acumulado para el horizonte de planificación es

$$\begin{aligned}\int_0^H Q(t)dt &= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_{j-1}}^{T_j} xr(x)dx - \sum_{j=1}^{m} (T_{j-1}) \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx \\ &= \int_0^H xr(x)dx - \sum_{j=2}^{m} (T_{j-1}) \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx.\end{aligned}$$

Teniendo el inventario acumulado sobre el horizonte completo, es posible obtener el inventario promedio sobre el mismo, este inventario promedio se expresa

$$\frac{1}{H}\int_0^H Q(t)dt = \frac{1}{H}\int_0^H xr(x)dx - \frac{1}{H}\sum_{j=2}^{m} (T_{j-1}) \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx.$$

La función de costo total en el horizonte completo será entonces

$$C(m,T) = \frac{c_1}{H}\left(\int_0^H xr(x)dx - \sum_{j=1}^{m} (T_{j-1}) \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(x)dx\right) + c_2 m. \tag{3.3.1}$$

Dado un valor m, una condición necesaria para que los tiempos de reposición $T_1, T_2, ..., T_{m-1}$, minimicen la función de costo total (3.3.1), es que ellos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial C(m,T)}{\partial T_j} = 0 \qquad j = 1, 2, 3, ..., m-1,$$

Aplicando el operador a la expresión (3.3.1) se obtiene el mencionado sistema de ecuaciones,

$$r(T_j)(T_j - T_{j-1}) - \int_{T_j}^{T_{j+1}} r(x)dx = 0.$$

Por lo tanto, como condición necesaria para que los tiempos $T_1, T_2, ..., T_{m-1}$ minimicen la función (3.3.1) es que satisfagan la ecuación

$$\int_{T_j}^{T_{j+1}} r(x)dx = r(T_j)(T_j - T_{j-1}). \tag{3.3.2}$$

3.3.1. Demanda constante

A manera de contraste del resultado obtenido en la expresión (3.3.2) para el caso de demanda constante $r(t) = \lambda$, se tiene que tal expresión tendrá la forma

$$\lambda(T_{j+1} - T_j) = \lambda(T_j - T_{j-1}),$$

quiere decir que las reposiciones se harán a intervalos de tiempo iguales, como se muestra en la figura 3.2. Sabiendo que el horizonte de planificación es H y se deben de hacer m reposiciones, tales intervalos tendrán una longitud constante de $\frac{H}{m}$.

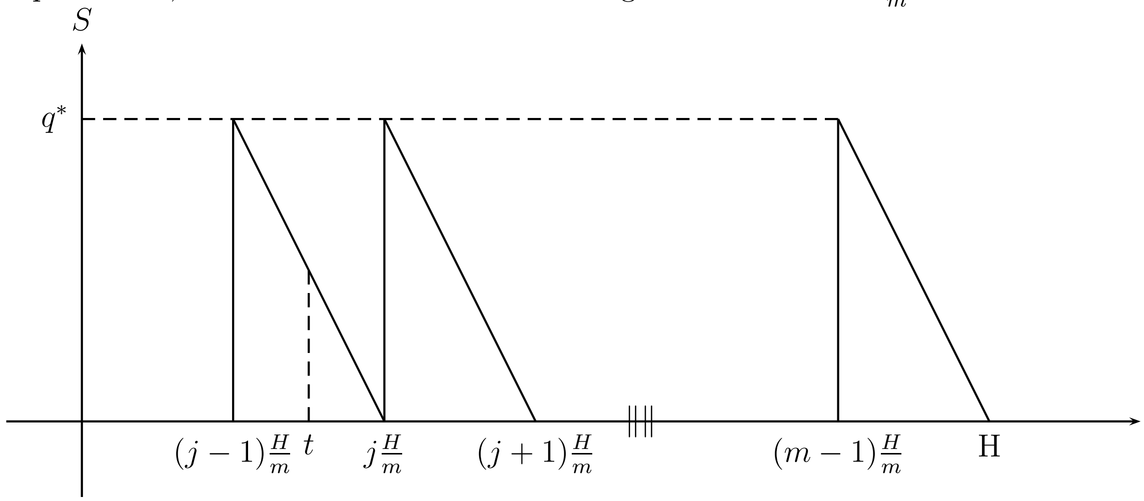

Figura 3.2: Demanda Constante

La función de costos (3.3.1) será para este caso:

$$\begin{aligned} c(m) &= \frac{c_1}{H}\left(\lambda\frac{H^2}{2} - \sum_{j=1}^{m}\lambda T_{j-1}(T_j - T_{j-1})\right) + c_2 m \\ &= \frac{c_1}{H}\left(\lambda\frac{H^2}{2} - \lambda\frac{H}{m}\sum_{j=1}^{m}T_{j-1}\right) + c_2 m \\ &= \frac{c_1}{H}\left(\lambda\frac{H^2}{2} - \lambda\frac{H^2}{m^2}\sum_{j=1}^{m-1}j\right) + c_2 m \\ &= \frac{\lambda H c_1}{2m} + c_2 m \end{aligned}$$

La demanda total sobre el horizonte completo es $D = \lambda H$ y la cantidad del pedido en cada reposición es $q = \frac{D}{m}$, luego la función de costo total para el caso en cuestión es.

$$c(q) = \frac{q}{2}c_1 + \frac{D}{q}c_2, \tag{3.3.3}$$

la cual representa el bien conocido modelo del Lote Económico Optimo (EOQ) analizado en la sección 2.1.2. Tambien es conocido en la literatura tradicional, ver por ejemplo [16], que la función (3.3.3) es mínima para

$$q^* = \sqrt{\frac{2c_2D}{c_1}}$$

3.3.2. Condiciones suficientes de optimalidad para $r(t) = \lambda t$

Con base en lo examinado en la sección 3.3, se aplicarán estos resultados para dar respuesta al problema el cual consiste en la obtención de condiciones necesarias y suficientes para los tiempos óptimos de reposición en un modelo de inventario con tasa de demanda $r(t) = \lambda t$, en [2] resuelven este problema bajo las políticas (s, q) y (t, S_i), tales políticas consideran pedidos de igual tamaño y tiempos equidistantes de reposición respectivamente. Allí mismo verifican que estas políticas no son las mas óptimas para este caso e intentan resolver el problema bajo la política (t_i, S_i) la cual consiste en obtener tiempos de reposición y tamaños de pedido en cada reposición que mejore las dos políticas anteriores, la mejoría es referida a obtener costos más bajos. En este último caso obtienen la ecuación de costos pero sugieren una solución aproximada para obtener los tiempos de reposición. La idea central en esta sección es obtener condiciones necesarias y suficientes para los tiempos óptimos de reposición.

Para tasa de demanda $r(t) = \lambda t$ la ecuación general de costo total (3.3.1) se expresa:

$$C(m, T_j) = c_1\left[\frac{\lambda H^2}{3} - \frac{\lambda}{2H}\sum_{j=2}^{m}[T_j^2 - T_{j-1}^2]T_{j-1}\right] + c_2 m \tag{3.3.4}$$

Los $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}$ que minimizan la función de costo total (3.3.4), deben satisfacer la expresión (3.3.2), de esta manera se obtiene:

$$\frac{\lambda}{2}(T_{j+1}^2 - T_j^2) = \lambda T_j(T_j - T_{j-1}) \Longrightarrow 3T_j^2 - T_{j+1}^2 - 2T_jT_{j-1} = 0.$$

Bajo el supuesto que $T_0 = 0$ y $T_m = H$ se obtienen las siguientes expresiones para los $T_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}T_2, \qquad T_2 = (3 - \frac{2}{\sqrt{3}})^{-\frac{1}{2}}T_3, \qquad T_3 = (3 - 2(3 - \frac{2}{\sqrt{3}})),^{-\frac{1}{2}}T_4.$$

En general se obtiene las siguientes fórmulas recursivas

$$T_j = a_j T_{j+1} \quad \text{donde} \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad a_j = (3 - 2a_{j-1}).^{-\frac{1}{2}} \tag{3.3.5}$$

Por lo tanto para un valor m fijo es posible calcular $a_1, a_2, a_3, ..., a_{m-1}$ y posteriormente calcular

$$T_{m-1} = a_{m-1}H, \quad T_{m-2} = a_{m-2}T_{m-1}, ..., T_1 = a_1 T_2.$$

La matriz hessiana correspondiente a la función de costos (3.3.4) está dada por

$$B = \begin{cases} 3\lambda T_i - \lambda T_{j-1} & \text{si } i = j. \\ -\lambda T_{max\ [i,j]} & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Para garantizar que los tiempos de reposición obtenidos minimizan la función de costos (3.3.4) es suficiente demostrar que B es definida positiva.

Lema 3.3.1.

$$0 < a_j < 1 \quad \textit{para} \quad j = 1, 2, ..., (m-1)$$

La demostración del Lema 3.3.1 es inmediata, dado que de la expresión (3.3.5), se tiene que $T_j = a_j T_{j+1}$ y además $T_j < T_{j+1}$ para $j = 1, 2, ..., (m-1)$.

Lema 3.3.2.

$$a_j > a_{j-1} \quad \textit{para} \quad j = 1, 2, ..., (m-1)$$

Demostración. Claramente $(3 - 2x)^{-\frac{1}{2}} > x$ para $0 < x < 1$.

En particular para $x = a_{j-1}$, luego $(3 - 2a_{j-1})^{-\frac{1}{2}} > a_{j-1}$.

A partir de una de las fórmulas recursivas de la expresión (3.3.5) se verifica entonces

$$a_j > a_{j-1}.$$

□

Propiedad 3.3.3.

$$T_j - T_{j-1} > T_{j+1} - T_j, \quad para \quad j = 1, 2, ..., (m-1).$$

Demostración. Es fácil probar que

$$\frac{2}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}} > 1 + \frac{x}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}} \qquad para \quad 0 < x < 1,$$

en particular para $x = a_{j-1}$.
Luego

$$\frac{2}{(3-2a_{j-1})^{\frac{1}{2}}} > 1 + \frac{a_{j-1}}{(3-2a_{j-1})^{\frac{1}{2}}}.$$

Por consiguiente al hacer uso de nuevo de la expresión (3.3.5) para a_j, se verifica entonces que

$$2a_j > 1 + a_{j-1}a_j.$$

En efecto $2a_jT_{j+1} > T_{j+1} + a_{j-1}a_jT_{j+1}$. Además como $T_j = a_jT_{j+1}$, entonces se tiene que

$$2T_j > T_{j+1} + a_{j-1}T_j = T_{j+1} + T_{j-1},$$

luego

$$T_j - T_{j-1} > T_{j+1} - T_j$$

□

Lema 3.3.4. *Todo valor propio ν de M satisface que*

$$|\nu - m_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} | m_{ij} |$$

Teorema de los círculos de Gerschgorin (Strang, G. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones [17]. Página 337*)

Teorema 3.3.5. *La matriz Hessiana*

$$B = \begin{cases} 3\lambda T_i - \lambda T_{j-1} & si\ i = j. \\ -\lambda T_{max\ [i,j]} & si\ |i-j| = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

es definida positiva.

Demostración. Las componentes de la Matriz Hessiana (3.3.6) son caracterizadas de la siguiente manera,

$$b_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, ..., (i-2), (i+2), ..., (m-1),$$

además

$$b_{i(i-1)} = -\lambda T_i, \quad b_{ii} = 3\lambda T_i - \lambda T_{i-1}, \quad b_{i(i+1)} = -\lambda T_{i+1}.$$

Por tanto

$$\sum_{j \neq i} \mid b_{ij} \mid = \mid -\lambda T_i \mid + \mid -\lambda T_{i+1} \mid = \lambda T_i + \lambda T_{i+1}.$$

De la propiedad (3.3.3), se garantiza que $T_{i+1} + T_i < 3T_i - T_{i-1}$, de donde

$$\lambda T_{i+1} + \lambda T_i < 3\lambda T_i - \lambda T_{i-1} = b_{ii},$$

luego $\sum_{j \neq i} \mid b_{ij} \mid < b_{ii}$. Por el Lema 3.3.4 anterior se verifica entonces que $|\nu - b_{ii}| < b_{ii}$.

En efecto $0 < \nu < 2b_{ii}$, lo cual garantiza que la matriz B es definida positiva. □

El algoritmo de cálculo de los valores m y T_j óptimos se puede resumir de la siguiente manera:

1. Hacer $m = 2$.
2. Hallar T_1 y $C(2; T_1)$.
3. Haga para $i = 1$ hasta $(m-1)$. $\quad V_i = T_i$. Fin para.
4. Hallar $C(m; T_1, ..., T_{m-1})$.
5. Si $C(m; T_1, ..., T_{m-1}) \leq C(m-1; V_1, ..., V_{m-2})$.
6. m=m+1 ir a 3.
7. Si no, los valores óptimos son $(m-1)$ reposiciones, en los instantes $V_1, ..., V_{m-1}$.

Ejemplo 3.3.1. Una linea de producción requiere cierto combustible a un índice uniforme de 24 horas al día 7 dias a la semana durante 3 años. La tasa anual de consumo del combustible es de $1600t\frac{\text{galones}}{\text{año}}$. Se consideran dos costos, $c_1 = \$0,4$ por galón por año correspondiente a mantenimiento de inventario. El combustible se envía por camiones y cada vez que se hace un pedido se incurre en un costo $c_2 = \$500$. Sabiendo que la linea de producción necesita en los tres años 7200 galones de combustible, ¿Que cantidades se deben entregar en cada envío?, ¿En que tiempo se deben hacer los pedidos?, ¿Cual es el costo total del sistema en los tres años?.

Se resolverá el problema con el algoritmo de cálculo presentado con anterioridad, haciendo paralelamente una comparación con la solución aproximada

$$T_i = \frac{H}{2}\left(\frac{i}{m} + \sqrt{\frac{i}{m}}\right),$$

para el valor de m óptimo (ver Naddor [2]).

Los datos del problema son

$H = 3$ años $= T_m$; $r(t) = 1600t \ \frac{\text{galones}}{\text{año}}$; $c_1 = \$\ 0{,}4$; $c_2 = \$\ 500$.

Para $m = 1$ Reposición

- Se hace una sola reposición al inicio del periodo: $S_1 = 7200\ gal$, Costo= \$ 6260.

A continuación se hará la comparación de los costos para $m = 2, 3, 4$ reposiciones, es decir lo que se intenta comparar es la solución obtenida en el presente trabajo que se ha denotado como solución exacta y la aproximación que se propone en [2]

Para $m = 2$ Reposiciones

- **Solución Exacta**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 2399{,}86$
$T_1 = 1{,}7320$	$S_2 = 4800{,}14$
Costo Total $= \$1811{,}488$	

- **Aproximación**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 2622{,}62$
$T_1 = 1{,}8106$	$S_2 = 4577{,}38$
Costo Total = \$1814,964	

Para $m = 3$ Reposiciones

- **Solución Exacta**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 1300{,}5$
$T_1 = 1{,}2750$	$S_2 = 2599{,}71$
$T_2 = 2{,}2084$	$S_3 = 3299{,}78$
Costo Total = \$2006,591	

- **Aproximación**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 1492{,}76$
$T_1 = 1{,}3660$	$S_2 = 2557{,}24$
$T_2 = 2{,}2247$	$S_3 = 3150$
Costo Total = \$2009,500	

Para $m = 4$ Reposiciones

- **Solución Exacta**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 850{,}37$
$T_1 = 1{,}0315$	$S_2 = 1701{,}47$
$T_2 = 1{,}7867$	$S_3 = 1469{,}4$
$T_3 = 2{,}4271$	$S_4 = 3178{,}74$
Costo Total = \$2366,604	

- **Aproximación**

Tiempos de Reposición T_i (Años)	Tamaño del Pedido S_i (Galones)
$T_0 = 0$	$S_1 = 1012{,}50$
$T_1 = 1{,}1250$	$S_2 = 1610{,}12$
$T_2 = 1{,}8106$	$S_3 = 2078$
$T_3 = 2{,}4240$	$S_4 = 2499{,}38$
Costo Total = \$2369,024	

La solución óptima para el problema planteado en el ejemplo es hacer 3 reposiciones en los instantes,

$$T_0 = 0; \qquad T_1 = 1{,}275; \qquad T_2 = 2{,}208.$$

El algoritmo de solución permite determinar el número óptimo de reposiciones e instantes de reposición que minimizan la función de costos correspondiente al modelo en estudio. Con el uso del algoritmo se ponen de manifiesto situaciones donde la aproximación dista en forma significativa de la solución exacta.

A continuación se presenta varias ejecuciones del algoritmo cuyos datos de entrada se observan en la figura 3.3, la salida son los tiempos óptimos de reposición y compara los costos con la solución aproximada; otra salida importante del algoritmo es el número óptimo de reposiciones; inicialmente se entran 10 reposiciones, pero la salida muestra que bajando las reposiciones a 4 los costos serán menores. Esta nueva ejecución se muestra en la figura 3.4

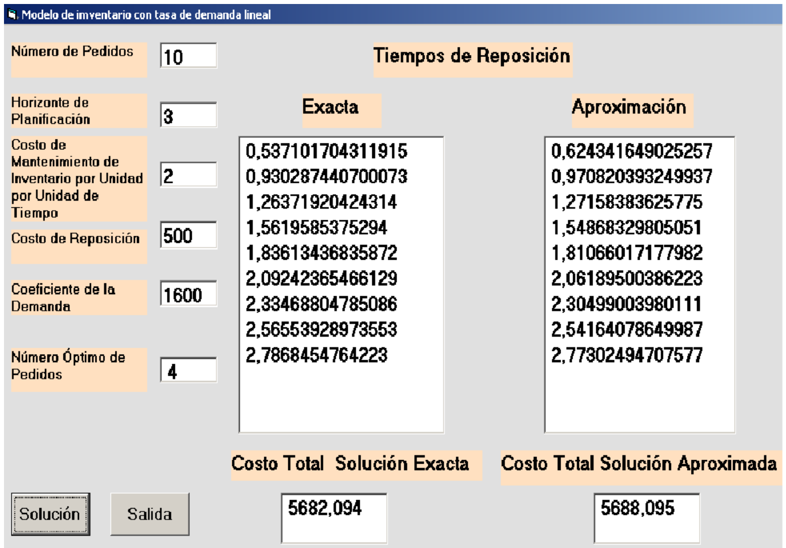

Figura 3.3: Ejecución del Algoritmo

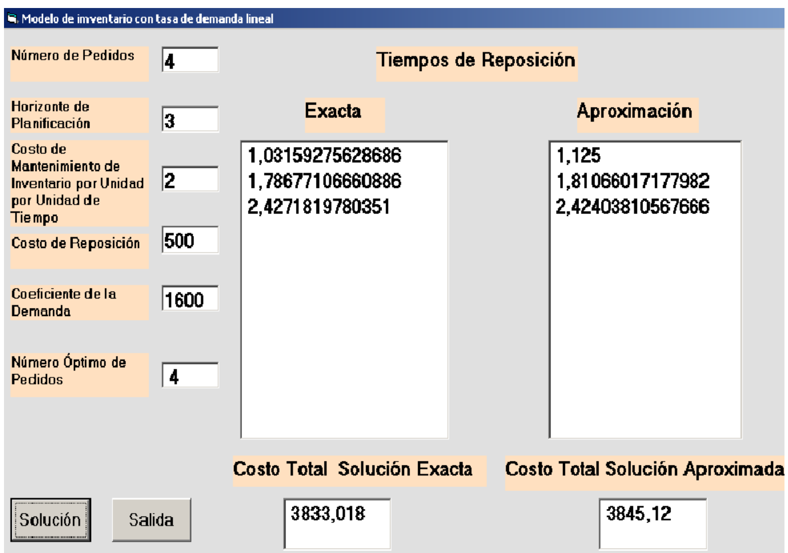

Figura 3.4: Ejecución del Algoritmo con El número Optimo de Repsiciones

3.4. Tasa de demanda $r(t) = \lambda t + \beta$

En esta sección se estudiará un modelo de inventario, sin déficit, la tasa de demanda tiene un comportamiento no aleatorio y se caracteriza mediante una forma lineal $r(t) = \lambda t + \beta$, función continua en todo el horizonte de planificación. $[0, H]$. Figura 3.5 En los

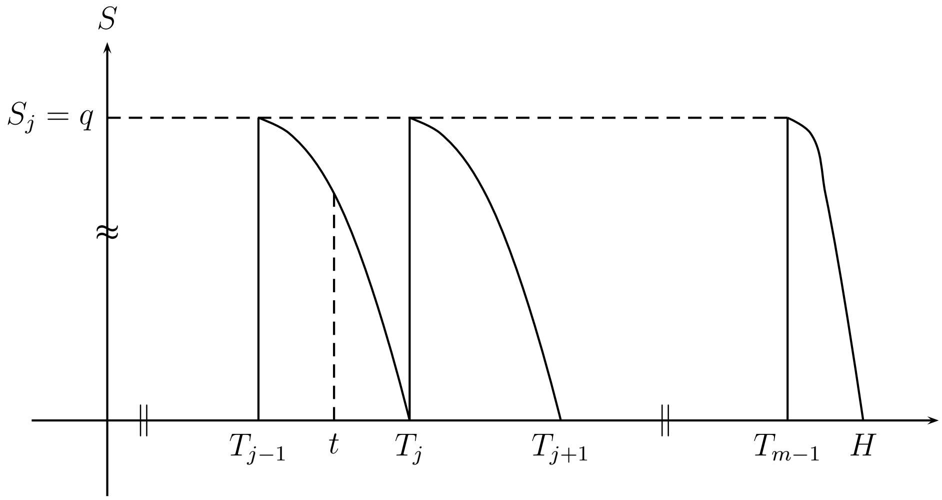

Figura 3.5: Tasa de Demanda no Constante y Pedidos de Igual Tamaño

supuestos que se van a consiederar, se contempla que en cada instante T_j, $j = 1, \ldots, m-1$, se hará un pedido del mismo tamaño tamaño q, el cual cubrirá la demanda hasta el próximo instante de reposisción T_{j+1}, las reposiciones se asumirán inmediatas.
Al no pemitir déficit y al considerar que se hacen m pedidos todos de igual tamaño, entonces la demanda total D sobre el horizonte completo será mq. Para obtener la función de costos total, se deberá calcular el inventario promedio y para ello se ilustrará el modelo utilizando una gráfica alternativa. Figura 3.6
La demanda tiene la forma $r(t) = \lambda t + \beta$, entonces la ecuación de la parábola, ilustrada en la Figura 3.6, tendrá por ecuación

$$mq - \int_0^t (\lambda x + \beta) dx = -\frac{\alpha t^2}{2} - \beta t + mq.$$

Claramente en $T_m = H$ el nivel de inventario se hace cero y allí la parábola presenta un intercepto, es decir,

$$-\frac{\alpha H^2}{2} - \beta H + mq = 0, \text{en efecto } \; q = \frac{H(\alpha H + 2\beta)}{2m}, \tag{3.4.1}$$

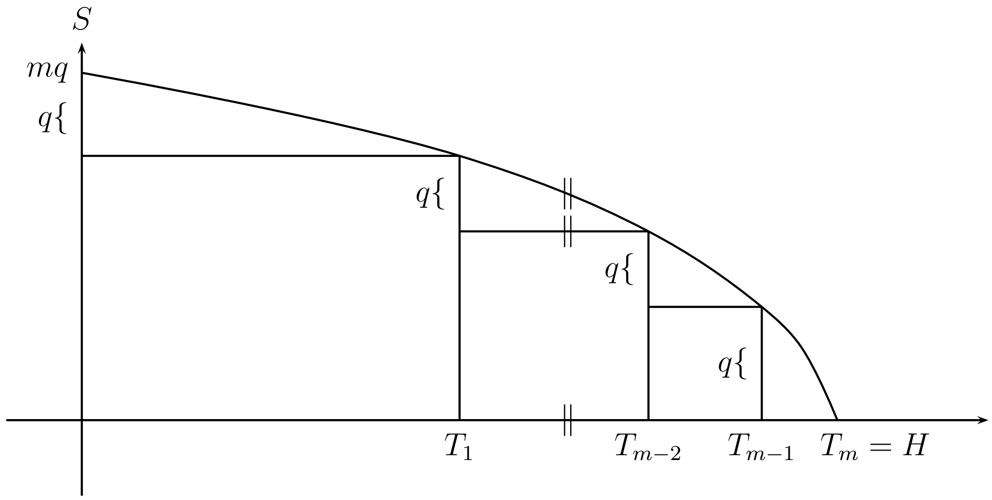

Figura 3.6: Tasa de Demanda no Constante y Pedidos de Igual Tamaño

luego la ecuación de la parábola se expresa

$$f(t) = -\frac{\alpha t^2}{2} - \beta t + \frac{H(\alpha H + 2\beta)}{2}. \tag{3.4.2}$$

De acuerdo a la Figura 3.6 el inventario acumulado sobre el horizonte de planificación, está dado por:

$$\begin{aligned} I_{Acumulado} &= \textit{Área bajo la parábola} \; - \; \textit{Área de los } m-1 \textit{ rectángulos} \\ &= \int_o^H \left(-\frac{\alpha t^2}{2} - \beta t + \frac{H(\alpha H + 2\beta)}{2} \right) dt - q \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)(T_i - T_{i-1}) \\ &= \frac{\alpha H^3}{3} - \frac{\beta H^2}{2} - \frac{H(\alpha H + 2\beta)}{2m} \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)(T_i - T_{i-1}), \quad \text{por la expresión (3.4.1).} \end{aligned}$$

Teniendo presente que el inventario promedio es el cociente entre el inventario total acumulado en el horizonte de planificación y el horizonte mismo, entonces en este modelo el inventario promedio será

$$\bar{I} = \frac{I_{Acumulado}}{H} = \frac{\alpha H^2}{3} - \frac{\beta H}{2} - \frac{(\alpha H + 2\beta)}{2m} \sum_{i=1}^{m-1}, (m-i)(T_i - T_{i-1}) \tag{3.4.3}$$

Ésta expresión (3.4.3) permitirá calcular el costo total asociado a mantenimiento de inventario. Suponiendo m reposiciones y además que cada reposición tiene un costo fijo de c_2, y que el costo de mantenimiento de inventario por unidad por unidad de tiempo es c_1, se verifica entonces que la función de costos total se expresa:

$$C(T_i, m) = c_1 \left[\frac{\alpha H^2}{3} - \frac{\beta H}{2} - \frac{(\alpha H + 2\beta)}{2m} \sum_{i=1}^{m-1}, (m-i)(T_i - T_{i-1}) \right] + c_2 m. \qquad (3.4.4)$$

El cálculo de los tiempos óptimos se obtendrá mediante una expresión de recursividad que se contruye a continuación. Óbservese de la figura 3.6 y de la expresión (3.4.2) que:

$$f(T_m) = 0, \quad f(T_{m-1}) = q, \quad f(T_{m-2}) = 2q$$

en consecuencia,

$$f(T_{m-i}) = iq = \frac{iH(\alpha H + 2\beta)}{2m}, \qquad \text{por la expresiòn (3.4.1)}$$

utilizando la ecuación de la parábola (3.4.2), se garantizará que:

$$\alpha T_{m-i} + 2\beta T_{m-i} - \frac{H(\alpha H + 2\beta)}{m}(m-i) = 0. \qquad (3.4.5)$$

La ecuación (3.4.5) es equivalente a

$$\alpha T_i + 2\beta T_i - \frac{Hi(\alpha H + 2\beta)}{m} = 0,$$

cuya solución para T_i representarán los tiempos óptimos de reposición, en efecto:

$$T_i = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{Hi(\alpha H + 2\beta)}{m}}}{\alpha} \quad \text{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, m-1. \qquad (3.4.6)$$

Teniendo los tiempos de reposición, dados en (3.4.6), se pueden reemplazar en la función de costos total (3.4.4) y obtener la siguiente expresión, la cual sólo dependerá del número de reposiciones m

$$C(m) = c_2 m + c_1 \left[\frac{\alpha H^2}{3} - \frac{\beta H}{2} - \frac{(\alpha H + 2\beta)}{2\alpha m} \sum_{i=1}^{m-1} (m-i) g(i) \right], \qquad (3.4.7)$$

donde

$$g(i) = \left(\sqrt{\beta^2 + \frac{Hi(\alpha H + 2\beta)}{m}} - \sqrt{\beta^2 + \frac{H(i-1)(\alpha H + 2\beta)}{m}} \right)$$

3.4.1. Ejecución del algoritmo y resultados

En ésta sección se presenta varias ejecuciones del algoritmo, cuyo código se ilustra en el apéndice 4.1.1. Los resultados se irán presentando en el mismo formato de salida del programa. Cada salida del programa vendrá acompañada de la respectiva gráfica de la función de costos total (3.4.7), sobre la cual se observará el valor óptimo de reposiciones, y también el valor de mínimo costo. La salida en cada ejecución será: **Número Óptimo de Reposiciones, Tamaño de la Reposición, Costo Mínimo, e Instantes de Reposición en años**

En todas las ejecuciones se supondrá un horizonte de planificación $H = 3$ años, igualmente se supondrá para el coeficiente de la demanda $\alpha = 1600$. Lo que se irá modificando serán los costos tanto de almacenamiento por unidad por unidad de tiempo $c1$, como el coste de reposición $c2$, con el objetivo de ir observando el comportamiento de la función y como es su valor mínimo respecto a los cambios en los costos.

- **Ejecución 1.** La función de costos se observa en la Figura 3.7

$$\alpha = 1600, \quad \beta = 0, \quad H = 3 \text{ años}, \quad c_1 = \$1 \quad c_2 = \$500$$

```
Optimo_de_Reposiciones =3

Tamano_de_Reposicion =2400

Costo_Minimo = 2.9548e+003

Instantes_de_Reposicion

         0
    1.7321
    2.4495
```

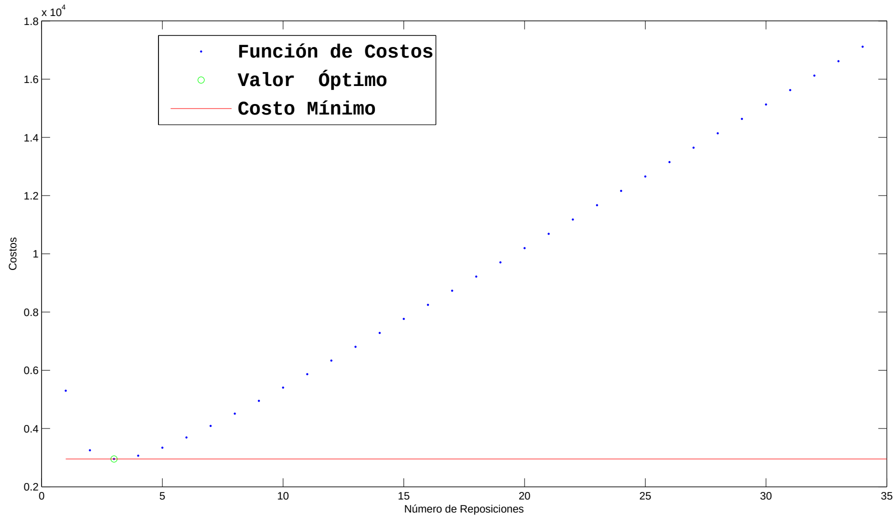

Figura 3.7: $\alpha = 1600,\ \ \beta = 0,\ \ H = 3$ años, $\ \ c_1 = \$1 \quad c_2 = \$500$

- **Ejecución 2.** La función de costos se observa en la Figura 3.8

$$\alpha = 1600, \ \ \beta = 10, \ \ H = 3 \ \text{años}, \ \ c_1 = \$10 \ \ c_2 = \$500$$

```
Optimo_de_Reposiciones =9
Tamano_de_Reposicion =800
Costo_Minimo =9.0173e+003

Instantes_de_Reposicion =

         0
    1.0000
    1.4142
    1.7321
    2.0000
    2.2361
    2.4495
    2.6458
    2.8284
```

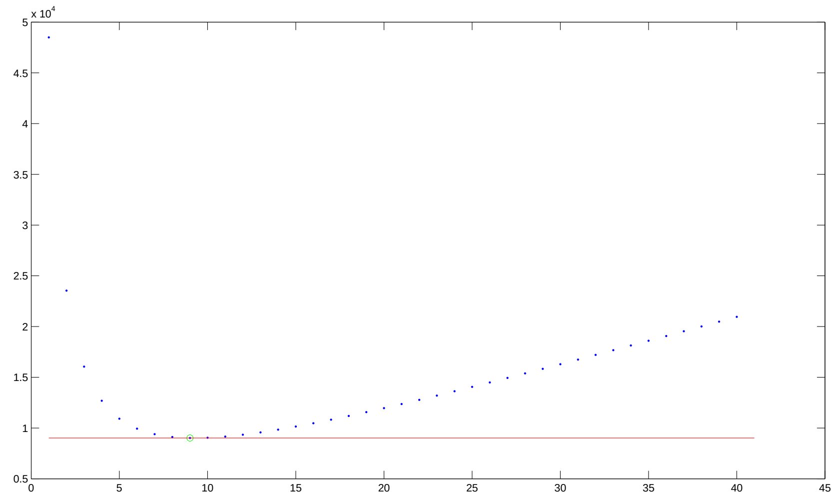

Figura 3.8: $\alpha = 1600,\ \beta = 0,\ H = 3$ años, $c_1 = \$10 \quad c_2 = \$500$

- **Ejecución 3.** La función de costos se observa en la Figura 3.9

$$\alpha = 1600, \quad \beta = 10, \quad H = 3 \text{ años}, \quad c_1 = \$100 \ \ c_2 = \$500$$

```
Optimo_de_Reposiciones =28
Tamano_de_Reposicion = 257.1429
Costo_Minimo =2.7829e+004

Instantes_de_Reposicion =

0     0.5669     0.8018     0.9820     1.1339     1.2677     1.3887     1.5000

1.6036  1.7008     1.7928     1.8803     1.9640     2.0442     2.1213     2.1958

2.2678     2.3376  2.4054     2.4713     2.5355     2.5981     2.6592     2.7190

2.7775     2.8347     2.8909      2.9459
```

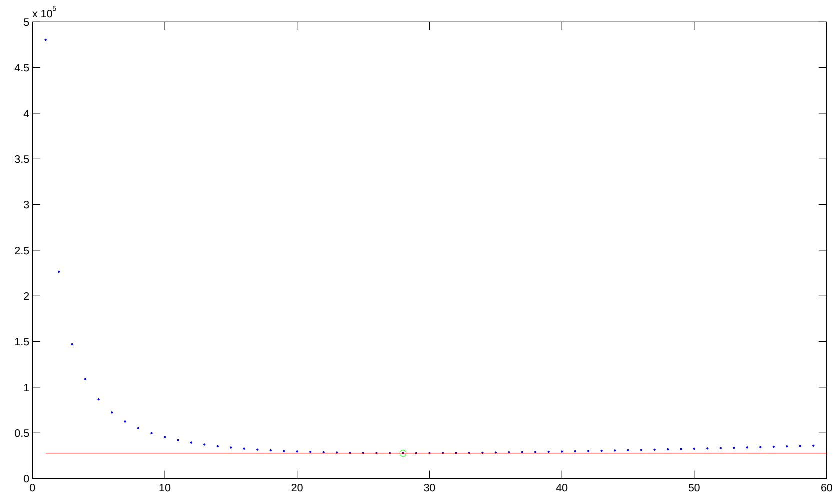

Figura 3.9: $\alpha = 1600$, $\beta = 0$, $H = 3$ años, $c_1 = \$100$ $c_2 = \$500$

En estas tres primeras ejecuciones del algoritmo se ha hecho variación sobre el costo de mantenimiento. Al observar que este costo se ha ido incrementando, es natural que el número óptimo de reposiciones aumente debido a que mantener almacenado sale costoso. En la salidas del algoritmo y en las respectivas gráficas se aprecia tal relación.

A continuación se hará tres ejecuciones mas, pero esta vez modificando el costo de reposición y se podrá ver que en este caso la relación de este costo respecto al número de reposiciones es inversa.

- **Ejecución 4.** La función de costos se observa en la Figura 3.10

$$\alpha = 1600, \quad \beta = 10, \quad H = 3 \text{ años}, \quad c_1 = \$4 \;\; c_2 = \$500$$

```
Optimo_de_Reposiciones =6
Tamano_de_Reposicion =1205
Costo_Minimo =5.6614e+003

Instantes_de_Reposicion =

         0    1.2211    1.7294    2.1195    2.4483    2.7381
```

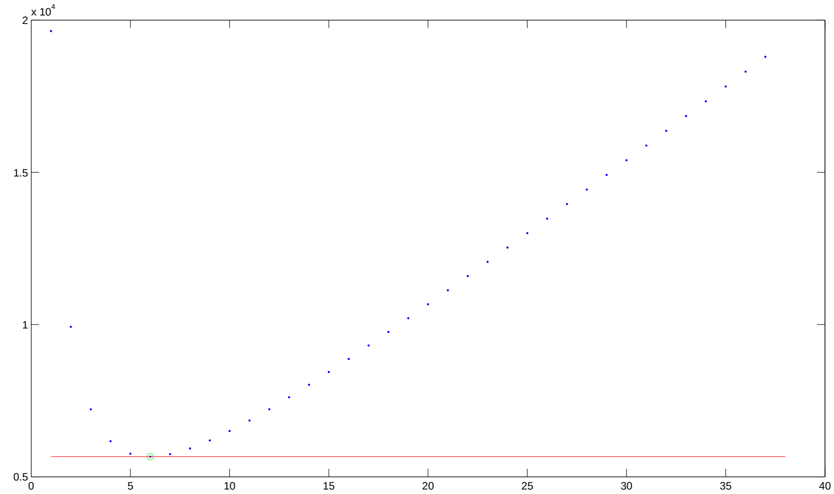

Figura 3.10: $\alpha = 1600,\ \beta = 0,\ H = 3$ años, $c_1 = \$4 \quad c_2 = \$500$

- **Ejecución 5.** La función de costos se observa en la Figura 3.11

$$\alpha = 1600, \quad \beta = 10, \quad H = 3 \text{ años}, \quad c_1 = \$4 \quad c_2 = \$700$$

```
Optimo_de_Reposiciones =5

Tamano_de_Reposicion =1446

Costo_Minimo =6.7566e+003

Instantes_de_Reposicion =

         0    1.3382    1.8951    2.3224    2.6826
```

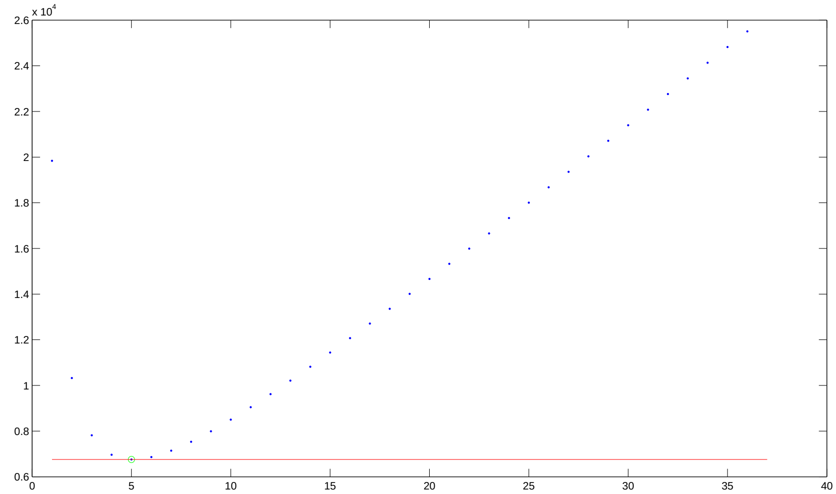

Figura 3.11: $\alpha = 1600,\ \beta = 0,\ H = 3$ años, $c_1 = \$4 \quad c_2 = \$700$

- **Ejecución 6.** La función de costos se observa en la Figura 3.12

$$\alpha = 1600, \quad \beta = 10, \quad H = 3 \text{ años}, \quad c_1 = \$4 \quad c_2 = \$5000$$

```
Optimo_de_Reposiciones =2
Tamano_de_Reposicion =  3615
Costo_Minimo =1.8924e+004

Instantes_de_Reposicion =

         0    2.1195
```

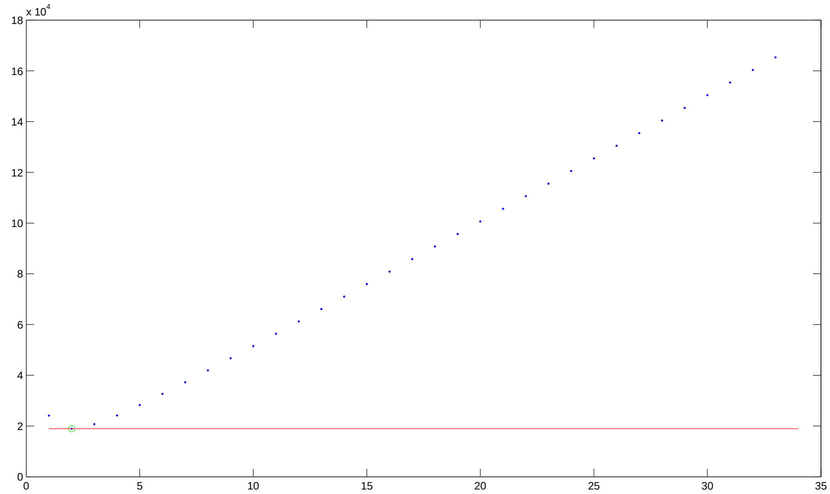

Figura 3.12: $\alpha = 1600,\ \beta = 0,\ H = 3$ años, $c_1 = \$4 \quad c_2 = \$5000$

En la última ejecución se ha elevado de manera significativa el costo de reposición, y la salida también es una solución razonable dado que con este costo tan alto no es conveniente como norma operacional hacer pedidos de manera frecuente.

3.5. Discusión y conclusiones

Las soluciones numéricas a los problemas cuyos resultados analíticos son complejos ofrecen alternativas interesantes y de fácil implementación computacional dado el avance significativo del análisis numérico en los últimos tiempos. Muchas disciplinas sobre todo la ingeniería ha adoptado estás técnicas de carácter numérico para dar respuesta a los problemas reales que surgen sin necesidad de relajar supuestos, sin embargo la labor de las personas dedicadas a investigar soluciones analíticas a tales problemas que solo han sido enfrentados numéricamente debe también ser destacable ya que proporciona la manera de obtener resultados más precisos y exactos. Precisamente ese es el trabajo realizado en esta tesis de maestría el cuál se fundamenta en los avances y desarrollos de investigaciones que se refiere a los modelos de inventarios, pues aún podemos encontrar algunos problemas relacionados con el tema que no han sido resueltos.

Una conclusión importante es que el tiempo de espera promedio para una demanda de un cliente es un promedio proporcional a los pedidos pendientes, con la constante de proporcionalidad $\frac{1}{\lambda}$ que es el reciproco de la tasa de demanda. Además, los principales resultados en esta tesis fue obtener las condiciones necesarias y suficientes para los tiempos óptimos que minimizan la función de costo total cuando la tasa de demanda es de la forma $r(t) = \lambda t$ siendo $\lambda > 0$ y se compara con la solución aproximada presentada en (Naddor [2] pagina 64), presentando de forma detallada el desarrollo formal y analítico, además, se muestra la elaboración de un algoritmo para resolver ambos casos, con el cual se muestran los resultados de la solución aproximada dada en Naddor, y la solución exacta desarrollada aquí.

Tambien se dió respuesta a un problema que se plantea en [2] el cual consiste en determinar los tiempo de reposición y el número óptimo de reposiciones, cuando la tasa de demanda es de la forma $r(t) = \lambda t + \beta$ y bajo la política (s, q) que considera pedidos de igual tamaño. Utilizando el algoritmo propuesto para determinar el número óptimo de reposiciones y también de forma analítica.

CAPÍTULO 4

Apéndices

4.1. Apéndice A

4.1.1. Código en matlab

```
function[m,c,q,T]=inventario3(a,b,H,C1,C2);
%a,b Son las entradas que caracterizan la demanda de la forma at+b.
%H: es el horizonte de planificación.
%C1: Costo de mantenimiento de inventario por unidad por unidad de tiempo.
%C2: Costo de reposición, independiente del volumen.
m=3; c=zeros(m,1); c(1)=C1*((a*H^2)/3-b*H/2)+C2;
c(2)=C1*((a*H^2)/3-b*H/2-(a*H+2*b)/(4*a)*(sqrt(b^2+(a*H*(a*H+2*b))/2)-b))+2*C2;
if c(2)< c(1);
   while c(m-1)<c(m-2);
         for i=1:m-1
             v1(i)=(m-i)*(sqrt(b^2+(a*H*i*(a*H+2*b))/m)
                        -sqrt(b^2+(a*H*(i-1)*(a*H+2*b))/m));
         end
    s=sum(v1);
    c(m)=C1*((a*H^2)/3-b*H/2-(a*H+2*b)*s/(2*a*m))+C2*m;
    m=m+1;
    end
         for i=1:m-1;
            T(i)=(-b+sqrt(b^2+(a*H*(i-1)*(a*H+2*b))/(m-2)))/a;
```

```
         end
         l=3;
         while l < m+15
               for i=1:l-1
                   v2(i)=(l-i)*(sqrt(b^2+(a*H*i*(a*H+2*b))/l)
                       -sqrt(b^2+(a*H*(i-1)*(a*H+2*b))/l));
               end
    s1=sum(v2);
    K(1)=c(1);
    K(2)=c(2);
    K(l)=C1*((a*H^2)/3-b*H/2-(a*H+2*b)*s1/(2*a*l))+C2*l;
    l=l+1;
        end
end
 Reposiciones=m-2
 CostoMinimo=c(m-2)
     if m==3
       Tiemposdereposicion=0
     else
       Tiemposdereposicion=T'
       hold on
       plot(K)
     end
 Costos=c
 tamanodereposicion=H*(a*H+2*b)/(2*(m-2))
```

4.2. Apéndice B

4.2.1. Código en visual basic

```
Private Sub Command1_Click() Dim m As Integer, Dim s As Integer,
Dim H As Single, Dim d As Single Dim c As Double Dim z As Single c
= Text3.Text z = Text4.Text d = Text5.Text m = Text1.Text H =
Text2.Text If m = 1 Then
    Picture1.Cls
```

```
    Picture1.Print
    Picture1.Print "Una sola reposición inicial de "
    Picture1.Print
    Picture1.Print (d * H ^ 2) / 2
    Picture3.Cls
    Picture3.Print c * ((d * H ^ 3) / 3) + z
    Picture2.Cls
    Picture4.Cls
Else
    ReDim A(1 To m)
    ReDim B(1 To m) As Double
    ReDim R(1 To m)
    ReDim T(1 To m)

    Dim suma As Single
    Dim c1 As Double
    Dim costo As Double
    ReDim w(2 To m)
    Dim cost As Single
    suma = 0
    H = Text2.Text
    T(m) = H
    A(1) = 3 ^ (-0.5)
    For i = 2 To m - 1
         A(i) = (3 - 2 * A(i - 1)) ^ (-0.5)
    Next i
    For i = 1 To m - 1
         T(m - i) = A(m - i) * T(m - i + 1)
    Next i
    Picture1.Cls
    For i = 1 To m - 1
         Picture1.Print T(i)
    Next i
    For i = 2 To m
         w(i) = ((T(i)) ^ 2 - (T(i - 1)) ^ 2) * T(i - 1)
    Next i
    For i = 2 To m
         suma = suma + w(i)
```

```
    Next i
    cost = (c / H) * ((d * H ^ 3) / 3 - (d / 2) * suma) + z * m
    Picture3.Cls
    Picture3.Print cost
    Sum = 0
    For i = 1 To m
         B(i) = (H / 2) * ((i / m) + (i / m) ^ 0.5)
    Next i
    Picture2.Cls
    For i = 1 To m - 1
         Picture2.Print B(i)
    Next i
    For i = 2 To m
         R(i) = ((B(i)) ^ 2 - (B(i - 1)) ^ 2) * B(i - 1)
    Next i
    For i = 2 To m
         Sum = Sum + R(i)
    Next i
    cost = (c / H) * ((d * H ^ 3) / 3 - (d / 2) * Sum) + z * m
    Picture4.Cls
    Picture4.Print cost
End If
 Dim k As Double
 Dim su As Single
 ReDim A1(1000)
 ReDim B1(1000)
 ReDim R1(1000)
 ReDim T1(1000)
 ReDim w1(1000)
 A1(1) = 3 ^ (-0.5)
 c1 = (c * d * H ^ 3 / 3) + z
 k = 2
1:
 k = k + 1
 T1(k) = H
 su = 0
 For j = 2 To (k - 1)
      A1(j) = (3 - 2 * A1(j - 1)) ^ (-0.5)
```

```
 Next j
 For j = 1 To (k - 1)
      T1(k - j) = A1(k - j) * T1(k - j + 1)
 Next j
 For j = 2 To k
      w1(j) = ((T1(j)) ^ 2 - (T1(j - 1)) ^ 2) * T1(j - 1)
 Next j
 For j = 2 To k
      su = su + w1(j)
 Next j
 costo = (c / H) * ((d * H ^ 3) / 3 - (d / 2) * su) + z * k
 If costo < c1 Then
      c1 = costo
      GoTo 1
 Else
    Picture5.Cls
    Picture5.Print k - 1
End If
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] Hadley, G., Whitin, T.M. (1963). *Analisis of inventory sistem.* Englewood Cliffs, Nj:Prentice-Halls.

[2] Naddor, E. (1996). *Inventory Sistem.* Jhon Wiley Publisher.

[3] Silver, E.A., Pyke, D.F. and Peterson, R.(1998). *Inventory management and Production Planing and Sheduling,* Third ed. Jhon Wiley Sons, Inc.

[4] Zipkin, P.H. (2000), *Foundations of Inventory Management.* M_cGraw Hill Companies.

[5] N.E., Jaber, M.Y.,Noueihed, N.A.(2000). Economic lot sizing with the consideration of random machine unavailability time. *Computers Operations Research, 27, 335-351*

[6] Laniado, H., Garcia, A.F (2006) Modelo de Producción-Inventario con tiempo de espera proporcional al tiempo de producción. *Ingeniería y Ciencia, Volumen 2, Número 3 51-64*

[7] Laniado. H. *Modelo de inventario determinista con tasa de demanda creciente* Tesis de Maestría. Eafit 2003.

[8] Gallego, G., Moon, I. (1993). The distribution free newsboy problem: Review and extensions. *Journal of the Operational Research Society, 44, 825-834*

[9] Hariga, M.A. (1998). Single period inventory models with two levels of storage. *Production Planing Control,9, N 6, 553-560*

[10] Goyal, S.K., Hariga, M.A, Alyan, A. (1996). The Trended Inventory Lot Sizing Prolblem with Shortages under a New Replenishment Policy. *The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, N^o*10 *1286-1295*

[11] Hariga, M.A, Goyal, S.K. (1995). An Alternative Procedure for Determining the Optimal Policy for an Inventory Item Linear Trend In Demand. *The Journal of the Operational Research Society, Vol. 46, N^o*4 *521-527*

[12] Hariga, M.A. (1994). The Inventory Lot-Sizing Problem with Continuous Time-Varying Demand and Shortages. *The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, N^o*7 *827-837*

[13] Hariga, M.A. (1998). Economic Production- Ordering Quantity Models with Limited Production Capacity. *Production Planing Control, 9, N^o 7 671-674*

[14] Goyal, S.K., Gopalakrishnan,M. (1996). Production Lot Sizing Model with Insufficient Production Capacity. *Production Planing Control 7, 222-224*

[15] Whitin T.M.(1955). *Inventory control and price theory.* Management Science, Vol 2, No 1, 61-68 oct 1955.

[16] Taha, H.A. (1987). *Operations research: an introduction* . Macmillan Publishing Co. Inc. Indianapolis, IN, USA. Cuarta edición.

[17] Strang,G. (1982) *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones* Fondo Educativo interamericano.