

**IDEAL MINIMAL DE OPERADORES CON PARÁMETROS, UN NÚMERO
REAL Y UNA FUNCIÓN DE ORLICZ**

Hernán Argenis Monsalve Pérez

José Rodolfo Vahos Sarrias

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Mayo 2009

IDEAL MINIMAL DE OPERADORES CON PARÁMETROS, UN NÚMERO REAL Y UNA FUNCIÓN DE ORLICZ

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Hernán Argenis Monsalve Pérez

José Rodolfo Vahos Sarrias

Director

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Doctor en Ciencias Matemáticas



ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Mayo 2009

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Medellín, 9 de junio de 2009.

Agradecimientos

Damos nuestro más profundo y sincero agradecimiento a quienes de una u otra forma han contribuido en la realización de este trabajo de tesis.

Especialmente: a nuestras familias por su permanente apoyo y al Doctor Gabriel Ignacio Loiza por su excelente asesoría, por el invaluable aporte y acompañamiento tanto anímico como académico.

Muchas gracias.

Resumen

En un artículo reciente [7], G. Loaiza y W. Acevedo introdujeron una norma tensorial $g_{H\sigma}$ y un ideal de operadores $\mathcal{P}_{H\sigma}$ con parámetros, una función de Orlicz H y un número real $0 \leq \sigma < 1$. Además, mediante $g_{H\sigma}$ se caracterizó el ideal $\mathcal{P}_{H\sigma}$. En el presente trabajo se caracteriza, mediante un diagrama de factorización, el ideal minimal de operadores asociado a $g_{H\sigma}$, en el sentido de Defant y Floret [1]. Finalmente, presentamos ejemplos no triviales de operadores que pertenezcan a componentes del mencionado ideal de operadores.

Índice general

Introducción	1
1. Propuesta inicial	3
1.1. Objetivos	3
1.2. Metodología	3
2. Preliminares	5
2.1. Conceptos básicos y notación	5
2.2. Espacios de sucesiones de Orlicz.	6
2.3. Retículos de Banach	8
2.4. Normas Tensoriales e ideales de operadores	10
3. Sobre la norma tensorial $g_{H\sigma}$	17
3.1. Introducción de la norma tensorial	17
3.2. Caracterización del ideal $\mathcal{P}_{H\sigma}$	32
4. Ideal minimal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$	41
4.1. Introducción del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$	41
4.2. Caracterización del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$	50
5. Ejemplos	65
Conclusiones	71
Problemas abiertos	73
Bibliografía	75

Introducción

La teoría de ideales de operadores en la clase de espacios de Banach es inicialmente sistematizada por Pietsch [12], concentrando la atención en la caracterización y estudio de los operadores p -absolutamente sumantes y su relación con resultados clásicos sobre convergencia de series en espacios de Banach. Otros ideales de operadores caracterizados a principios de los setenta son los ideales de operadores p -nucleares y p -integrales, cuyo estudio ha llevado a generalizaciones como los ideales de operadores $p\sigma$ -nucleares y $p\sigma$ -integrales caracterizados de diversas formas, de las cuales destacamos las presentadas por Sánchez Pérez en [14], que se hacen con base a teoremas de factorización a través de espacios de tipo fijo que involucran a los clásicos L_p y L_∞ .

De otro lado, los trabajos de Grothendieck [2] y [3] desarrollaron profundamente la teoría general de productos tensoriales en las clases de espacios de Banach y de los espacios localmente convexos. Grothendieck introduce el concepto de norma tensorial dotando con distintas topologías a los productos tensoriales de espacios de Banach, con el fin de estudiar la estructura de diversos espacios funcionales, y los utilizó para dar una representación al teorema de los núcleos de Schwartz. Debido a que existe una forma de asociar biunívocamente las normas tensoriales finitamente generadas con los ideales de operadores, y que este hecho ha sido un fuerte motor de desarrollo para ambas teorías, en la actualidad se considera una misma teoría general, la de normas tensoriales e ideales de operadores como lo exponen Defant y Floret en el libro *Tensor norms and operator ideals* [1].

En la correspondencia entre normas tensoriales e ideales de operadores se basa la orientación metodológica adoptada en la elaboración de este trabajo, que consiste en estudiar un nuevo ideal de operadores que aparece implícitamente ligado a la norma tensorial $g_{H\sigma}$ introducida por G. Loaiza y W. Acevedo en [7].

Precisamente, en [7] se introduce la norma tensorial $g_{H\sigma}$, donde H es una función de Orlicz y σ es un real, con $0 \leq \sigma < 1$, y con iguales parámetros se introduce y caracteriza el ideal de operadores $H\sigma$ absolutamente sumantes, lo cual propone un marco más general para el estudio del ideal de operadores p -absolutamente sumantes. La idea de considerar una función de Orlicz H en lugar del real p es natural porque los espacios de sucesiones de Orlicz son una generalización natural de los espacios de sucesiones ℓ_p .

Al tener una norma tensorial finitamente generada, como lo es $g_{H\sigma}$, existe el ideal minimal de operadores asociado en el sentido de Defant y Floret [1], y, es pertinente caracterizar y estudiar dicho ideal. Lo anterior es precisamente el objeto del presente trabajo; que constituye una continuación del estudio presentado en [7].

Es preciso aclarar, que también existe un ideal maximal de operadores $\mathcal{I}_{H\sigma}$ asociado a la tensor-norma $g_{H\sigma}$, en el sentido de Defant y Floret, cuyo estudio es importante y entraña dificultades

especiales en el marco de la teoría local de espacios de Banach. El estudio de dicho ideal maximal, así como el estudio de coincidencias entre componentes de $\mathcal{I}_{H\sigma}$ con componentes de $\mathcal{N}_{H\sigma}$, constituyen temas para futuros proyectos.

Esta memoria de tesis se presenta de la siguiente forma: en el primer capítulo se expresan los objetivos y metodología del presente trabajo, en el segundo capítulo aparecen los conceptos básicos necesarios, en el tercer capítulo se presenta el trabajo [7] (más que citando los resultados, se presentan las pruebas para dar a la presente memoria un caracter de auto contenido), en el cuarto capítulo se introduce el ideal minimal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$ asociado a $g_{H\sigma}$ y se caracteriza mediante un diagrama de factorización, y, en el quinto capítulo se presentan dos ejemplos no triviales de operadores pertenecientes a componentes de $\mathcal{N}_{H\sigma}$.

Capítulo 1

Propuesta inicial

1.1. Objetivos

Objetivo general

Presentar un estudio del ideal minimal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$, asociado en el sentido de Defant y Floret a la norma tensorial $g_{H\sigma}$ introducida en [7].

Objetivos específicos

1. Para cada función de Orlicz H (con condiciones adecuadas) y para cada número real σ , ($0 \leq \sigma < 1$), caracterizar mediante un diagrama de factorización, los operadores que pertenezcan a componentes del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$.
2. Presentar ejemplos no triviales de operadores que pertenezcan a componentes del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$.

1.2. Metodología

Esta memoria presenta los resultados de una investigación que inició con una búsqueda de información sobre todos los temas que se abordan, además de las definiciones básicas que son necesarias para la comprensión y contextualización de todo el contenido del trabajo.

La principal estrategia metodológica para el estudio del ideal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$, consistió en aprovechar la relación entre normas tensoriales e ideales de operadores, siguiendo la línea de estudios relacionados con las tensor normas finitamente generadas introducidas por Grothendiek [2].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se establecen la notación, definiciones, conceptos y resultados necesarios.

2.1. Conceptos básicos y notación

Como es usual, denotamos \mathbb{R} al cuerpo de los números reales que será el cuerpo de escalares para cualquier retículo que se considere, a pesar de que los resultados son válidos si se consideran escalares complejos. Cuando sea necesario enfatizar la norma de un elemento x de un espacio normado E , se escribe $\|x\|_E$, y simplemente $\|x\|$ si no hay lugar a confusión.

Para un espacio E , se denotará por:

1. E' al espacio dual topológico de E , es decir, al espacio vectorial $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de las aplicaciones lineales y continuas de E en \mathbb{R} .
2. \widehat{E} a la complección de E , esto es, al único espacio de Banach \widehat{E} , salvo isometrías, tal que $E \subset \widehat{E}$ y E es denso en \widehat{E} .
3. $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$; la llamada bola unidad cerrada en E .
4. $NORM(E)$ a la clase de todos los espacios normados y $FIN(E)$ a la clase de todos los subespacios de dimensión finita de E .
5. FIN a la clase de espacios normados de dimensión finita

Para dos espacios lineales topológicos E y F , denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F .

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ será la aplicación adjunta de T , precisamente, la aplicación definida para cada $y' \in F'$ y $x \in E$ por

$$\langle T'(y'), x \rangle = \langle T(x), y' \rangle.$$

En general, un operador será una aplicación lineal y continua entre espacios vectoriales topológicos.

Un espacio de sucesiones escalares λ (También llamado espacio coordenado) es un espacio lineal de sucesiones escalares $x = (x_n)$, con las operaciones suma y producto por un escalar definidas

componente a componente como es habitual. Los espacios de sucesiones escalares que manejaremos son de Banach y algunos pertenecen a la clase de espacios que poseen una base Schauder, es decir, una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de λ tal que para todo $x \in \lambda$ existe una sucesión única de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.

Se dice que un espacio de sucesiones escalares es regular cuando tiene una base Schauder formada por los vectores unitarios e_i , que son aquellas sucesiones en las que la i -ésima coordenada es 1 y el resto son ceros.

Si un espacio de Banach de sucesiones λ es regular entonces se presenta la propiedad de convergencia seccional, es decir, dada (a_i) en λ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i e_i$ en norma.

2.2. Espacios de sucesiones de Orlicz.

La extensión natural de los espacios clásicos de sucesiones escalares ℓ_p son los espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_H . Precisamente, en un intento natural de generalizar los espacios clásicos $L_p(\mu)$ y ℓ_p aparece en la literatura la teoría de Orlicz, de funciones medibles y de sucesiones. En estos espacios el papel de la función t^p es esencial y resulta natural tratar de reemplazarla por otro tipo de función convexa más general. En principio Young, en sus estudios sobre series de Fourier [16], ya había estudiado una clase de funciones convexas que hoy día se denominan funciones de Young, pero fueron Orlicz y sus estudiantes quienes plantearon el estudio de espacios de Orlicz, definidos a partir de funciones de Young.

Damos a continuación algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de espacios de Orlicz que el lector puede encontrar en el libro de Lindenstrauss y Tzafriri [5] o bien en el de Rao y Ren [13].

Una función de Orlicz H , es una función definida para $x \geq 0$, continua, convexa, no decreciente, con $H(0) = 0$ y $H(x) > 0$ para $x > 0$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \infty$. Dada una función de Orlicz H se define el espacio de sucesiones de Orlicz ℓ_H como el espacio de sucesiones escalares (α_i) , tales que existe $\rho > 0$ para el cual $\sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{|\alpha_i|}{\rho}) < \infty$; dotado de la norma

$$\Pi_H((\alpha_i)) := \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H\left(\frac{|\alpha_i|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

Se dice que una función de Orlicz H satisface la condición Δ_2 en 0, si

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{H(2x)}{H(x)} < +\infty.$$

En general, el espacio ℓ_H no es regular, pero si lo es cuando H cumple la propiedad Δ_2 en 0, en tal caso ℓ_H coincide con la clausura en ℓ_H del espacio generado por los vectores unitarios e_i .

Dada una función de Orlicz H , existe otra función de Orlicz H^* , definida para cada $y \geq 0$ por

$$H^*(y) = \sup\{xy - H(x) : x \geq 0\}$$

denominada función complementaria de H

Es de anotar que $(H^*)^* = H$ y que mediante H^* , el espacio ℓ_H se puede dotar de otra norma $\|\cdot\|_H$, usualmente llamada norma de Orlicz, definida para cada (α_i) en ℓ_H por

$$\|(\alpha_i)\|_H = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^*(|\beta_i|) \leq 1 \right\}$$

y se cumple para cada (α_i) en ℓ_H que

$$\Pi_H((\alpha_i)) \leq \|(\alpha_i)\|_H \leq 2\Pi_H((\alpha_i)).$$

Si además H cumple la propiedad Δ_2 en 0, se verifica que ℓ'_H es isomorfo a ℓ_{H^*} . Para tener una isometría entre estos dos espacios es necesario tomar $\Pi_H(\cdot)$ en ℓ_H y $\|\cdot\|_{H^*}$ en ℓ_{H^*} , ver [13]; 58-61 y [5]; 147-148.

Siguiendo los pasos del capítulo cuatro de [13], tomando como espacio de medida el conjunto de números naturales con una medida puramente atómica (es decir, $\mu\{i\} = 1$ para todo i), se puede establecer la siguiente versión de la desigualdad de Hölder para espacios de sucesiones de Orlicz: para (a_i) en ℓ_H y (b_i) en ℓ_{H^*} , se cumple

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \min\{ \Pi_H((a_i))\|(b_i)\|_{H^*}, \Pi_{H^*}((a_i))\|(b_i)\|_H \}$$

También se cumple que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq 2\Pi_H((a_i))\Pi_{H^*}((b_i)).$$

Un caso particular de espacios de sucesiones de Orlicz corresponde al de los espacios clásicos ℓ_p , que son fundamentales en la teoría de los espacios de sucesiones escalares. Los recordaremos ahora con el fin de fijar la notación.

Para $1 \leq p < \infty$, la función $H(t) = t^p$ es una función de Orlicz y al correspondiente espacio de sucesiones de Orlicz se le denota por ℓ_p . Así, ℓ_p es el conjunto de sucesiones escalares $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

En este caso, se denota la norma $\Pi_H(\cdot)$ por $\|\cdot\|_p$ y se puede probar que,

$$\|\mathbf{x}\|_p := \Pi_H((a_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para el caso en que $p = \infty$, ℓ_{∞} denota al conjunto de las sucesiones acotadas $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, es decir, aquellas en que $\sup_i |x_i| < \infty$, con norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} := \sup_i |x_i|.$$

Es bien conocido que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, con $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach.

A cada número real $1 \leq p < \infty$ se asocia otro número $1 < p' \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y se dice que p y p' son exponentes conjugados. Se verifica que el dual del espacio ℓ_p es isométricamente isomorfo al espacio $\ell_{p'}$. Como consecuencia se obtiene que los espacios ℓ_p son reflexivos para $1 < p < \infty$. Es de anotar, que la función complementaria de $H(t) = t^p$ no es $G(t) = t^{p'}$, pero la función complementaria de $H_p(t) = \frac{t^p}{p}$ es $H_{p'}(t) = \frac{t^{p'}}{p'}$.

Se denota c_0 al subespacio de ℓ_∞ que consiste de todas las sucesiones convergentes a 0. El espacio c_0 es de Banach con la norma inducida $\|\cdot\|_\infty$.

En los espacios ℓ_p con $1 \leq p < \infty$, y en c_0 , la sucesión de vectores e_n , constituye una base de Schauder, es decir, ℓ_p y c_0 son espacios regulares. Es de resaltar que el espacio ℓ_∞ no es regular.

A continuación se presentan algunos conceptos necesarios. Si Γ es un conjunto, denotamos por $\ell_H(\Gamma)$ al espacio de los elementos $a = (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, donde $a_\gamma \in \mathbb{R} \forall \gamma \in \Gamma$ y existe una sucesión $S = \{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ en Γ con $a_\gamma = 0$ si $\gamma \notin S$.

En $\ell_H(\Gamma)$ definimos

$$\Pi_H((a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) := \Pi_H((a_{\gamma_n})).$$

El funcional $\Pi_H((a_{\gamma_n}))$ define una norma en $\ell_H(\Gamma)$ y su dual es isomorfo a $\ell_{H^*}(\Gamma)$. Como antes, para que exista una isometría es necesario tomar en el espacio dual la norma de Orlicz $\|(\cdot)\|_{H^*}$.

También en el caso de los espacios de Orlicz, podemos considerar espacios de sucesiones vectoriales.

Si $\{X_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de espacios de Banach, denotamos por $\ell_H\{((X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})\}$ al espacio de Bochner, de elementos $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $x_\gamma \in X_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma$, tal que $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in \ell_H(\Gamma)$, con la norma $\Pi_H((\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma})$.

Si $X_\gamma = X \forall \gamma \in \Gamma$, escribimos $\ell_H\{\Gamma, X\}$ en lugar de $\ell_H\{((X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})\}$.

Si $\Gamma = \mathbb{N}$, escribimos $\ell_H\{(X_i)\}$ y $\ell_H\{X\}$ en vez de $\ell_H\{(X_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ y $\ell_H\{\mathbb{N}, X\}$ respectivamente.

A partir de los espacios ℓ_p y ℓ_H podemos construir, como hemos indicado, el espacio $\ell_p\{\ell_H\}$ cuyos elementos son sucesiones de elementos de ℓ_H y cuya sucesión de normas está en ℓ_p . Según esto los elementos de $\ell_p\{\ell_H\}$ son sucesiones de la forma $\mathbf{x} = \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right)_{i=1}^\infty$ tales que

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p\{\ell_H\}} := \left\| \left(\left\| (x_{ij})_{j=1}^\infty \right\|_{\ell_H} \right)_{i=1}^\infty \right\|_{\ell_p} < \infty$$

El dual de $\ell_p\{\ell_H\}$, $1 \leq p < \infty$ es $\ell_{p'}\{\ell_{H^*}\}$. En los resultados respecto a la caracterización de los operadores nucleares asociados a una función de Orlicz nos encontraremos con el caso $p = 1$, esto es, el espacio $\ell_1\{\ell_H\}$.

2.3. Retículos de Banach

Muchos de los espacios de funciones y de sucesiones que aparecen en el análisis real están dotados de un orden natural compatible tanto con su estructura lineal como con su topología. En el

caso particular de los espacios de Banach, esta observación ha dado lugar a la fértil teoría de los retículos de Banach que tanta importancia ha adquirido en los últimos cincuenta años. Exponemos ahora algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de retículos de Banach que serán de utilidad más adelante. Para mayor información sobre retículos, remitiremos a [6], [10] [15] y [4].

Un espacio vectorial real E se dice que es espacio vectorial real ordenado si existe en él una relación de orden parcial \leq compatible con la estructura lineal, es decir, si se satisfacen:

1. si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in E$ y
2. si $x \leq y$, entonces $\alpha x \leq \alpha y$ para todo $\alpha \geq 0$.

Un elemento x en un espacio vectorial ordenado E es llamado positivo si $x \geq 0$.

El conjunto de todos los elementos positivos de E lo denotamos por E^+ .

Si además, se cumple que para todo $x, y \in E$ existen en E los elementos $x \vee y := \sup\{x, y\}$ y $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ entonces el espacio vectorial real ordenado E es llamado retículo lineal o espacio de Riesz.

Si definimos para cualquier $x \in E$, $x^+ := x \vee 0$ y $x^- := (-x) \vee 0$, podemos descomponer x como $x = x^+ - x^-$, llamando x^+ su parte positiva y x^- su parte negativa, notemos que $x^+, x^- \in E^+$ y $x^+ \wedge x^- = 0$.

Definimos también $|x| := x \vee (-x)$ y lo llamamos *módulo* de x , al que también podemos descomponer como $|x| = x^+ + x^-$.

Un conjunto A de un retículo vectorial E se dice que es sólido si para todo $x \in A$ y para todo $y \in E$, con $|y| \leq |x|$, se verifica que $y \in A$.

Se dice que un retículo lineal es orden completo (o Dedekind completo) si para todo conjunto no vacío mayorado, su supremo es un elemento del espacio.

Un retículo vectorial topológico es un retículo vectorial dotado de una topología Hausdorff que posee una base de entornos de cero que son conjuntos sólidos.

Una seminorma (norma) $p(\cdot)$ en un retículo vectorial topológico se dice que es una seminorma (norma) de retículo si $|x| \leq |y|$ implica que $p(x) \leq p(y)$.

Un retículo vectorial topológico se dice que es normado si su topología está dada mediante una sola norma de retículo. Si además es completo, diremos que el retículo es de Banach.

Un retículo de Banach E se dice que es un M -espacio abstracto, siempre y cuando su norma es una M -norma, es decir, si $x \wedge y = 0$ en E implica que $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Sean E y F retículos lineales y $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que T es positivo si $T(E^+) \subset F^+$.

Un operador (aplicación lineal y continua) $T : E \rightarrow F$ entre dos retículos lineales topológicos E y F es llamado homomorfismo reticular si $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$, para todo x, y en E .

Todo homomorfismo reticular T necesariamente es un operador positivo y además por el teorema de Ando, si E y F son retículos de Banach, T'' también es homomorfismo reticular. Todos los espacios de sucesiones que aparecen en este trabajo, son retículos de Banach y sus propiedades reticulares serán necesarias en varios de los desarrollos presentados.

2.4. Normas Tensoriales e ideales de operadores

Respecto a normas tensoriales e ideales de operadores, remitimos al lector al texto de Defant y Floret [1].

Dados dos espacios vectoriales E y F sobre un mismo cuerpo de escalares, denotamos por $B(E, F)$ al espacio vectorial de las formas bilineales sobre el producto cartesiano $E \times F$.

Recordemos que una forma bilineal sobre $E \times F$ es una aplicación $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ que es lineal en cada componente, es decir, para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in E$ y $u, v \in F$ se cumple que,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y, u) &= \alpha\varphi(x, u) + \beta\varphi(y, u) \\ \varphi(x, \alpha u + \beta v) &= \alpha\varphi(x, u) + \beta\varphi(x, v)\end{aligned}$$

Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo \mathbb{R} , cada elemento $(x, y) \in E \times F$ define una forma lineal canónica sobre $B(E, F)$ en \mathbb{R} denotada por el símbolo $x \otimes y$ y definida para toda $\varphi \in B(E, F)$ por

$$\langle x \otimes y, \varphi \rangle := \varphi(x, y).$$

Se llama producto tensorial de los espacios vectoriales E y F al subespacio vectorial $E \otimes F$ del dual algebraico de $B(E, F)$ generado por el conjunto de formas lineales

$$\{x \otimes y \text{ con } x \in E \text{ y } y \in F\}.$$

Los elementos de $E \otimes F$ se llaman tensores y cada uno admite representaciones de la forma $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Así pues, un tensor es una aplicación lineal sobre $B(E, F)$ de la forma

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i.$$

Dados los espacios vectoriales E, F, G, H y las aplicaciones lineales $A : E \rightarrow F$ y $B : G \rightarrow H$ se llama producto tensorial de aplicaciones a la aplicación

$$A \otimes B : E \otimes G \rightarrow F \otimes H$$

definida para cada $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ en $E \otimes G$ por:

$$(A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^n A(x_i) \otimes B(y_i) \in F \otimes H.$$

Cuando en el producto tensorial de dos espacios E y F , se tenga definida una norma α , nos referiremos al espacio vectorial normado como $E \otimes_{\alpha} F$ y a su complección como $E \widehat{\otimes}_{\alpha} F$.

A la norma de un elemento cualquiera $z \in E \otimes F$, la denotaremos por $\alpha(z; E, F)$, por $\|z\|_{\alpha}$ ó simplemente por $\alpha(z)$, cuando se sobreentienda la norma.

Definición 2.4.1. Una norma tensorial α es un functor que hace corresponder a cada par de espacios normados (E, F) una norma sobre $E \otimes F$ formando un nuevo espacio normado que denotaremos por $E \otimes_{\alpha} F$.

Sean E, F espacios normados. Una norma α definida en el producto tensorial $E \otimes F$ se dice que es razonable si verifica que:

1. $\alpha(x \otimes y) = \|x\|_E \|y\|_F$ para todo $x \in E, y \in F$, y
2. para todo $x' \in E', y' \in F', x' \otimes y' \in (E \otimes_{\alpha} F)'$ y $\|x' \otimes y'\|_{(E \otimes_{\alpha} F)'} = \|x'\|_{E'} \|y'\|_{F'}$.

Se dice que una norma tensorial α es una **tensornorma** si verifica que para cada par de espacios normados E y F , $\alpha(\cdot, E, F)$ es una norma razonable en $E \otimes F$, y además satisface la propiedad métrica de las aplicaciones, esto es, dados los espacios normados E_1, E_2, F_1, F_2 y las aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1), B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$, se debe tener que

$$A \otimes B \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_{\alpha} E_2, F_1 \otimes_{\alpha} F_2)$$

y además,

$$\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Por otro lado, dada una norma tensorial α , definida en una clase de espacios normados \mathcal{A} que contenga la clase de espacios de dimensión finita se define la norma tensorial $\vec{\alpha}$ en la clase de espacios normados, denominada la *envoltura finitamente generada* por α , mediante:

$$\vec{\alpha}(z; E, F) = \inf \{ \alpha(z; M, N) : M \in FIN(E), N \in FIN(F) \}$$

Se dice que una norma tensorial α es *finitamente generada* si $\alpha = \vec{\alpha}$.

A continuación se presentan algunos de los ejemplos más conocidos, y de amplio interés teórico de normas tensoriales.

Norma tensorial proyectiva. Dados $E, F \in NORM$ definimos:

$$\pi(z; E, F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \mid z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Norma tensorial inyectiva

Dados $E, F \in NORM$ y $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ definimos:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z; E, F) &= \sup_{\|x'\|_{E'} \leq 1, \|y'\|_{F'} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \langle x_i, x' \rangle \langle y_i, y' \rangle \right| \\ &= \sup_{\|x'\|_{E'} \leq 1, \|y'\|_{F'} \leq 1} \langle z, x' \otimes y' \rangle. \end{aligned}$$

El valor teórico de las normas tensoriales inyectiva y proyectiva se resaltan en el siguiente hecho: Si α es una tensornorma finitamente generada, entonces para todo par de espacios normados E y F y para $z \in E \otimes F$ se tiene que

$$\varepsilon(z; E, F) \leq \alpha(z; E, F) \leq \pi(z; E, F).$$

Norma tensorial de Saphar

Para su construcción, previamente necesitamos definiciones y notación. Sea $E \in NORM$, para cada sucesión (x_i) en E y cada número p , con $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$\pi_p((x_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

$$\varepsilon_p((x_i)) = \sup_{\|x'\|_{B_{E'}}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x', x_i \rangle|^p \right)^{1/p}$$

Si $p = \infty$,

$$\pi_{\infty}((x_i)) = \varepsilon_{\infty}((x_i)) = \sup_{i \in N} \|x_i\|.$$

Las funciones π_p y ε_p se aplican también a sucesiones finitas $(x_i)_{i=1}^n$ suponiendo que $x_i = 0$ si $i > n$.

Una sucesión (x_i) en E se llama p -absolutamente sumable si $\pi_p(x_i) < \infty$. Se representa por $\ell^p[E]$ el conjunto de tales sucesiones en E . Una sucesión (x_i) en E se llama débilmente p -absolutamente sumable si $\varepsilon_p((x_i)) < \infty$. Ahora, dado $1 \leq p \leq \infty$, si $E, F \in NORM$, definimos la norma tensorial g_p de Saphar así:

$$g_p(z; E, F) = \inf \left\{ \pi_p(x_i) \varepsilon_{p'}((x_i)) : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F \right\}.$$

Norma tensorial de Lapresté

Varios ejemplos importantes de normas tensoriales son casos particulares de la siguiente, llamada norma tensorial de Lapresté, definida como sigue:

Para p, q en $[1, \infty]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, existe un único r en $[1, \infty]$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, o de manera equivalente, si p' y q' son los respectivos exponentes conjugados de p y q entonces $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$. Ahora, para cada par de espacios de Banach E y F se define:

$$\alpha_{p,q}(z; E, F) = \inf \left\{ \left\| (\lambda_i) \right\|_r \varepsilon_{q'}(x_i) \varepsilon_{p'}(y_i) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i \right\}$$

$\alpha_{p,q}$ es una norma tensorial en la clase de espacios de Banach y es una generalización de otras normas tensoriales, a saber:

Para $q = 1$ se tiene $g_p = \alpha_{p,1}$ coincide con la norma tensorial de Saphar.

Para $p = 1$ y $q = 1$ se tiene $\pi = \alpha_{1,1}$, la norma tensorial proyectiva.

De otro lado, a partir de una norma tensorial α , definimos también su *norma dual* α' de la siguiente manera: Si $M, N \in FIN$

$$\alpha'(z, M, N) = \sup_{u \in B_{M' \otimes_{\alpha} N'}} |\langle z, u \rangle| = \sup \{ |\langle u, z \rangle| : \alpha(u; M', N') \leq 1 \}$$

que se extiende a la clase de espacios normados como la norma tensorial finitamente generada por α' , ya definida en la clase de espacios de dimensión finita.

En 1968 Pietsch muestra la relevancia de la noción de ideales de operadores de Banach, en los años siguientes, él y su escuela investigan todos los aspectos de la teoría abstracta de ideales de operadores, que aparecen en la monografía “Operators ideals” [12] en 1978. Presentamos ahora algunas nociones fundamentales de esta teoría.

Definición 2.4.2. *Un ideal de operadores (o, simplemente, ideal) entre espacios de Banach es un functor \mathfrak{A} que asocia a cada par de espacios de Banach E y F un subconjunto $\mathfrak{A}(E, F)$ (llamado componente de \mathfrak{A}) de $\mathfrak{L}(E, F)$, tal que se cumplen las siguientes condiciones, para espacios de Banach arbitrarios E, F, G y H :*

1. $\forall x' \in E', \forall y \in F, \quad x' \otimes y \in \mathfrak{A}(E, F)$.
2. $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{A}(E, F), \quad S_1 + S_2 \in \mathfrak{A}(E, F)$.
3. $\forall R \in \mathfrak{L}(G, H), \forall S \in \mathfrak{A}(F, G), \forall T \in \mathfrak{L}(E, F), \quad RST \in \mathfrak{A}(E, H)$.

Es claro que la componente $\mathfrak{A}(E, F)$ de \mathfrak{A} es un subespacio vectorial de $\mathfrak{L}(E, F)$ y que contiene al espacio de operadores de E en F de rango finito.

Definición 2.4.3. *Sea \mathfrak{A} un ideal y α un functor que asocia a cada componente $\mathfrak{A}(E, F)$ una norma (cuasinorma ó seminorma), tal que para cada R en $\mathfrak{L}(G, H)$, S en $\mathfrak{A}(F, G)$ y T en $\mathfrak{L}(E, F)$ se verifica que*

$$\alpha(RST) \leq \|R\|\alpha(S)\|T\|$$

en tal caso, a la pareja (\mathfrak{A}, α) la llamaremos *ideal normado (casi o seminormado)*.

A continuación se presentan algunos ejemplos de ideales normados de operadores.

Ideal de operadores p -absolutamente sumantes

Un ejemplo importante, por sus múltiples aplicaciones y su riqueza teórica, es el llamado ideal de operadores p -absolutamente sumantes, que se definen como sigue:

Sean E, F espacios de Banach, un operador $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ es p -absolutamente sumante de E en F si existe $C > 0$ tal que para toda sucesión (x_i) débilmente p -sumable en E , es decir, con $\varepsilon_p((x_i)) < \infty$, se cumple que

$$\pi_p((Tx_i)) \leq C\varepsilon_p((x_i)). \quad (2.1)$$

El ideal de operadores p -absolutamente sumantes (denotado por \mathcal{P}_p) se define tomando para cada par de espacios de Banach E y F , la respectiva componente $\mathcal{P}_p(E, F)$ como el espacio de operadores p -absolutamente sumantes de E en F , con norma definida para cada $T \in \mathcal{P}_p(E, F)$ por $\mathbf{P}_p(T) = \inf C$ sobre todas las constantes C que satisfacen 2.1.

Ideal de operadores $p\sigma$ - absolutamente continuos

Matter en 1985 [8] introdujo el ideal $\mathcal{P}_{p\sigma}$ de operadores $p\sigma$ - absolutamente continuos y que posteriormente retoman López Molina y Sánchez Pérez en su artículo *Ideales de operadores absolutamente continuos* [14] presentando nuevas caracterizaciones de este ideal, que completan de

forma natural las obtenidas por Matter. Precisamente, $\mathcal{P}_{p\sigma}$ se define como sigue:

Sean $E, F \subset BAN$ y $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \sigma < 1$. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es $p\sigma$ -absolutamente continuo si existe $G \in BAN$ y un operador $S \in \mathcal{P}_p(E, G)$ tal que

$$\|Tx\| \leq \|Sx\|^{1-\sigma} \|x\|^\sigma$$

para cada $x \in E$.

Designaremos por $\mathcal{P}_{p\sigma}$ al ideal de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos, donde cada componente respecto a espacios de Banach E y F es el respectivo espacio de operadores $p\sigma$ -absolutamente continuos de E en F , denotado por $\mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$, con norma definida para $T \in \mathcal{P}_{p\sigma}(E, F)$ por $\mathbf{P}_{p\sigma}(T) = \inf \mathbf{P}_p(S)$ tomando el ínfimo sobre todas las aplicaciones S que verifican la definición.

En términos generales, dada una tensornorma finitamente generada α , se pueden considerar tres ideales de operadores asociados a ella como indicamos a continuación.

1) El ideal asociado a α' se puede usar para describir el espacio dual de $(E \widehat{\otimes}_{\alpha'} F)$, para cada par de espacios de Banach E y F ; por ejemplo, en el caso de las tensornormas de Saphar, este ideal coincide con el respectivo ideal de los operadores absolutamente sumantes.

2) El ideal minimal cuyos componentes son los operadores $T : E \rightarrow F$ tales que existe $z_T \in E' \widehat{\otimes}_{\alpha} F$ con $T(x) = z_T(x)$ para todo $x \in E$, dotado de la correspondiente norma cociente, es decir, del ínfimo de $\alpha(z_T)$ que verifican la propiedad anterior respecto de T . Este ideal es llamado ideal de los operadores α -nucleares

3) El ideal maximal asociado a α en el sentido de Pietsch, cuyas componentes son los operadores $T : E \rightarrow F$ tales que si $J_F : F \rightarrow F''$ es la inclusión canónica, entonces $J_F T \in (E \widehat{\otimes}_{\alpha'} F')'$. A estos operadores se les llama tradicionalmente operadores α -integrales.

El ideal minimal de operadores \mathcal{N}_p , asociado a la tensornorma de Saphar g_p , es el usualmente llamado, ideal de operadores p -nucleares. La caracterización de las componentes de dicho ideal fué realizada mediante un diagrama de factorización (análogo al obtenido en el capítulo 4 de esta memoria) y la caracterización, que puede consultarse en [1], es la siguiente:

Sean, E, F dos espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $p > 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) T es p -nuclear de E en F
- 2) T factoriza según el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\quad T \quad} & F \\
 A \downarrow & & \uparrow C \\
 \ell_\infty & \xrightarrow{\quad B \quad} & \ell_p
 \end{array}$$

donde A y C son continuas, B es el operador diagonal multiplicación por una sucesión positiva

$((b_{ij}))$ de ℓ_1 .

Además, la norma de T se puede calcular por

$$\mathbf{N}_p(T) = \inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\},$$

tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles según las condiciones establecidas en (2).

Capítulo 3

Sobre la norma tensorial $g_{H\sigma}$

Los resultados del artículo publicado por G. Loaiza y W. Acevedo, titulado *Sobre un ideal de operadores con parámetros, una función de Orlicz y un número real* [7], ofrecen un nuevo marco de generalización para los operadores p -absolutamente sumantes y proponen nuevos problemas en la teoría general de normas tensoriales e ideales de operadores, según [1]. En dicho trabajo se introduce una nueva norma tensorial, mediante la cual se caracteriza un ideal de operadores.

Como el presente trabajo es una continuación del estudio iniciado en dicho artículo, en este capítulo se expone en detalle los resultados de [7], con sus respectivas demostraciones para buscar que esta memoria tenga carácter autocontenido. En algunos casos se muestran mas detalles en las pruebas, que los escritos en [7].

En resumen, este capítulo divulga los resultados de [7] y expone las bases necesarias para abordar el estudio presentado en los dos últimos capítulos de esta memoria, los cuales constituyen el objeto del presente trabajo.

3.1. Introducción de la norma tensorial

Como el ideal normado de operadores $H\sigma$ -nucleares se define mediante la norma tensorial $g_{H\sigma}$ introducida en [7], iniciemos por establecer la terminología necesaria.

Sean $0 \leq \sigma < 1$, H y H^* dos funciones de Orlicz complementarias y E un espacio de Banach. Se define el espacio $\ell_H[E]$ de las sucesiones fuertemente H -sumables de E como el espacio de sucesiones (x_i) de E , tales que $(\|x_i\|) \in \ell_H$, dotado con la topología dada por la norma

$$\pi_H((x_i)) = \Pi_H((\|x_i\|)).$$

Consideremos al conjunto de sucesiones (x_i) de E tales que para cada $x' \in B_{E'}$, la sucesión $(|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma) \in \ell_H$ y denotemos

$$\delta_{H\sigma}((x_i)) := \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)\|_H$$

$\delta_{H\sigma}(\cdot)$ es una seminorma en el espacio de sucesiones de Bochner $\ell_H[E]$.

Proposición 3.1.1. *Si E es un espacio de Banach, para cada sucesión (x_i) en $\ell_H[E]$ se verifica que:*

$$\sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle x_i, x' \rangle|)\|_H \leq \delta_{H\sigma}((x_i)) \leq \|(x_i)\|_H \leq 2\pi_H((x_i)) \quad (3.1)$$

Demostración. Para cada $x' \in B_{E'}$ tenemos

$$\begin{aligned} |\langle x_i, x' \rangle| &= |\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} |\langle x_i, x' \rangle|^\sigma \\ &\leq |\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma \|x'\|^\sigma \\ &\leq |\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma \\ &\leq \|x_i\|^{1-\sigma} \|x'\|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma \\ &\leq \|x_i\|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma \\ &= \|x_i\| \end{aligned}$$

y por tanto

$$|\langle x_i, x' \rangle| \leq |\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma \leq \|x_i\|,$$

de lo cual se sigue, por propiedad reticular, que

$$\|(|\langle x_i, x' \rangle|)\|_H \leq \|(|\langle x_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)\|_H \leq \|(\|x_i\|)\|_H.$$

Tomando supremo sobre $x' \in B_{E'}$ y teniendo en cuenta que $\|(x_i)\|_H \leq 2\pi_H((x_i))$ tenemos

$$\sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle x_i, x' \rangle|)\|_H \leq \delta_{H\sigma}((x_i)) \leq \|(x_i)\|_H \leq 2\pi_H((x_i))$$

□

Pasemos ahora a la definición del funcional, que definirá una norma tensorial.

Definición 3.1.1. *Sea $0 \leq \sigma < 1$ y sean H y H^* un par de funciones de Orlicz complementarias tales que H tiene la propiedad Δ_2 en cero y de modo que $H(1) = 1$. Para cada par de espacios de Banach E y F y para cada $z \in E \otimes F$ definimos*

$$g_{H\sigma}(z; E, F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\}$$

Se escribirá $g_{H\sigma}(z)$ en lugar de $g_{H\sigma}(z; E, F)$, si no hay lugar a confusión

Antes de probar que $g_{H\sigma}$ es una tenosnorma veamos las siguientes proposiciones:

Proposición 3.1.2. *Para toda sucesión de reales (β_i) , se tiene que*

$$\|(\beta_i)\|_{H^*} = \|(\beta_i)\|_{H^*}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|(|\beta_i|)\|_{H^*} &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i \theta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^{**}(|\theta_i|) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i| |\theta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^{**}(|\theta_i|) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i \theta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^{**}(|\theta_i|) \leq 1\right\} \\
&= \|(\beta_i)\|_{H^*}.
\end{aligned}$$

□

Nótese que como el dual topológico de \mathbb{R} es \mathbb{R} , se tiene:

$$\{\|\beta\| : \beta \in E', \|\beta\| \leq 1\} = \{|\beta| : \beta \in \mathbb{R}, |\beta| \leq 1\} \quad \text{y} \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha\beta.$$

Proposición 3.1.3. *Para toda sucesión de reales (β_i) , tal que $\delta_{H^*\sigma}(\beta_i) < \infty$, se tiene que*

$$\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) = \|((\beta_i))\|_{H^*}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) &= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle \beta_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\beta_i x'|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\beta_i x'|^{1-\sigma} |\beta_i|^\sigma)\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\beta_i|^{1-\sigma} |x'|^{1-\sigma} |\beta_i|^\sigma)\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\beta_i| |x'|^{1-\sigma})\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} \| |x'|^{1-\sigma} (|\beta_i|) \|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} |x'|^{1-\sigma} \|(|\beta_i|)\|_{H^*} \\
&= \sup_{x' \in B_{E'}} |x'|^{1-\sigma} \|(\beta_i)\|_{H^*} \\
&= \|(\beta_i)\|_{H^*} \sup_{x' \in B_{E'}} |x'|^{1-\sigma} \\
&= \|(\beta_i)\|_{H^*} \sup_{x' \in B_{\mathbb{R}}} |x'|^{1-\sigma} \\
&= \|(\beta_i)\|_{H^*} \sup_{|x'| \leq 1} |x'|^{1-\sigma} \\
&\leq \|(\beta_i)\|_{H^*}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) \leq \|((\beta_i))\|_{H^*} \quad (1)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) &= \sup_{x' \in B_{E'}} \|(|\langle \beta_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &\geq \|(|\langle \beta_i, x' \rangle|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \quad \text{para todo } x' \in B_{E'}\end{aligned}$$

En particular para $x' = 1 \in B_{E'}$ se tiene,

$$\begin{aligned}\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) &\geq \|(|\langle \beta_i, 1 \rangle|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \|(|\beta_i \cdot 1|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \|(|\beta_i|^{1-\sigma} \|\beta_i\|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \|(|\beta_i|^{1-\sigma} |\beta_i|^\sigma)\|_{H^*} \\ &= \|(|\beta_i|)\|_{H^*} \\ &= \|(\beta_i)\|_{H^*}.\end{aligned}$$

TDe tal forma se tiene que

$$\delta_{H^*\sigma}((\beta_i)) \geq \|((\beta_i))\|_{H^*} \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\delta_{H^*\sigma}((\beta_{ij})) = \|((\beta_{ij}))\|_{H^*}$$

□

Teorema 3.1.1. $g_{H\sigma}$ define una norma tensorial en la clase de espacios normados

Demostración.

1. Veamos que $g_{H\sigma}$ es una seminorma en $E \otimes F$

Por definición para todo $z \in E \otimes F$ se tiene que $g_{H\sigma}(z; E, F) \geq 0$

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E \otimes F$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha z &= \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha (x_{ij} \otimes y_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha x_{ij} \otimes y_{ij}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma}(\alpha z; E, F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H(\alpha(x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha| \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= \inf \left\{ |\alpha| \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= |\alpha| \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= |\alpha| g_{H\sigma}(z; E, F)
\end{aligned}$$

2. Probemos ahora la desigualdad triangular.

Sean $z, w \in E \otimes F$ y sea $\epsilon > 0$. Por aproximación al ínfimo existen representaciones para z y w dadas por

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{y} \quad w = \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$$

tales que

$$\sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) < g_{H\sigma}(z; E, F) + \epsilon/2$$

$$\sum_{i=1+n}^{m+n} \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) < g_{H\sigma}(w; E, F) + \epsilon/2.$$

Consideremos la representación de $z + w$ de la forma

$$z + w = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma}(z+w; E, F) &= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n+m} \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) : z = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{i,j} \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+m} \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) \\
&< g_{H\sigma}(z; E, F) + \epsilon/2 + g_{H\sigma}(w; E, F) + \epsilon/2 \\
&= g_{H\sigma}(z; E, F) + g_{H\sigma}(w; E, F) + \epsilon
\end{aligned}$$

y dado que ϵ es arbitrario se tiene

$$g_{H\sigma}(z+w; E, F) \leq g_{H\sigma}(z; E, F) + g_{H\sigma}(w; E, F),$$

es decir $g_{H\sigma}(z; E, F)$ es una seminorma.

3. Veamos que $g_{H\sigma}(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$. Sea $(\alpha_i) = (1, 0, 0, \dots)$. Como $H(1) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi_H((1, 0, 0, 0, \dots)) &= \pi_H((\alpha_i)) \\
&= \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H\left(\frac{\alpha_i}{\rho}\right) \leq 1 \right\} \\
&= \inf\left\{ \rho > 0 : H\left(\frac{\alpha_1}{\rho}\right) + H\left(\frac{\alpha_2}{\rho}\right) + \dots \leq 1 \right\} \\
&= \inf\left\{ \rho > 0 : H\left(\frac{1}{\rho}\right) + H\left(\frac{0}{\rho}\right) + \dots \leq 1 \right\} \\
&= \inf\left\{ \rho > 0 : H\left(\frac{1}{\rho}\right) + H(0) + \dots \leq 1 \right\} \\
&= \inf\left\{ \rho > 0 : H\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Sea $\rho \in \{\rho > 0 : H(\frac{1}{\rho}) \leq 1\}$ y supongamos que $0 < \rho < 1$. Luego, $\frac{1}{\rho} > 1$ y así,

$$H\left(\frac{1}{\rho}\right) \geq \frac{1}{\rho} H(1) = \frac{1}{\rho} > 1.$$

Se tiene entonces que $H(\frac{1}{\rho}) > 1$, de donde $\rho \notin \{\rho > 0 : H(\frac{1}{\rho}) \leq 1\}$ y por lo tanto $\rho \geq 1$.

Ahora como $1 \in \{\rho > 0 : H(\frac{1}{\rho}) \leq 1\}$ y 1 es una cota inferior de este conjunto entonces, $1 = \inf\{\rho > 0 : H(\frac{1}{\rho}) \leq 1\}$ por lo tanto, $\pi_H((1, 0, 0, \dots)) = 1$. Además,

$$\begin{aligned}
\|(1, 0, 0, \dots)\|_{H^*} &= \|(\alpha_i)\|_{H^*} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H^{**}(|\beta_i|) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H(|\beta_i|) \leq 1\right\} \\
&= \sup\{|\beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H(|\beta_i|) \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Es claro que $1 \in \{|\beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H(|\beta_i|) \leq 1\}$, pues la sucesión (α_i) verifica

$$\sum_{i=1}^{\infty} H(|\alpha_i|) = 1.$$

Supongamos ahora que la sucesión (ρ_i) es tal que $\sum_{i=1}^{\infty} H(|\rho_i|) \leq 1$. Luego,

$$\rho_1 \in \{|\beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H(|\beta_i|) \leq 1\}.$$

Ahora, si $\rho_1 > 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} H(|\rho_i|) &\geq H(|\rho_1|) \geq |\rho_1| H(1) = |\rho_1| \\
&= \rho_1 > 1,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo, y por tanto $\rho_1 \leq 1$. Así se tiene que

$$\begin{aligned}
1 &= \sup\{|\beta_i| : \sum_{i=1}^{\infty} H(|\beta_i|) \leq 1\} \\
&= \|(1, 0, 0, \dots)\|_{H^*} \\
&= \delta_{H^* \sigma}((1, 0, 0, \dots))
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
1 \otimes 1 &= \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} \otimes \alpha_{1j} \\
&= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \alpha_{ij}
\end{aligned}$$

$$\text{con } \alpha_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq j \leq k_1 \end{cases} \quad \text{y así para } 1 \otimes 1 \text{ se cumple que}$$

$$\begin{aligned} g_{H\sigma}(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*}((y_{ij})) : 1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^1 \pi_H((\alpha_{ij})_{j=1}^{k_1}) \delta_{H^*}((\alpha_{ij})_{j=1}^{k_1}) \\ &= \pi_H((\alpha_{1j})_{j=1}^{k_1}) \delta_{H^*}((\alpha_{1j})_{j=1}^{k_1}) \\ &= \pi_H((1, 0, 0, 0, \dots, 0)) \delta_{H^*}((1, 0, 0, 0, \dots, 0)) \\ &= \pi_H((1, 0, 0, 0, \dots)) \delta_{H^*}((1, 0, 0, 0, \dots)) \\ &= (1)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ es cualquier representación de $1 \otimes 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= |\langle 1 \otimes 1, 1 \otimes 1 \rangle| \\ &= \left| \left\langle 1 \otimes 1, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \langle 1, \alpha_{ij} \rangle \langle 1, \beta_{ij} \rangle \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \beta_{ij} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} |\alpha_{ij} \beta_{ij}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \min \{ \pi_H((\alpha_{ij})) \| (\beta_{ij}) \|_{H^*}, \pi_{H^*}((\alpha_{ij})) \| (\beta_{ij}) \|_H \} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{ij})) \| (\beta_{ij}) \|_{H^*} \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((\beta_{ij})) \end{aligned}$$

obteniendo así

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((\beta_{ij})).$$

Luego, 1 es una cota inferior del conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((\beta_{ij})) : 1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \right\}$$

y así,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((\alpha_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((\beta_{ij})) : 1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \right\} \\ &= g_{H\sigma}(1 \otimes 1, \mathbb{R}, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

quedando probada la igualdad

4. Veamos ahora que $g_{H\sigma}$ satisface la propiedad métrica de las aplicaciones.

Sean E_1, E_2, F_1, F_2 espacios normados y las aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$, $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y la aplicación $A \otimes B \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_{g_{H\sigma}} E_2, F_1 \otimes_{g_{H\sigma}} F_2)$.

Si $B = 0$ es claro que $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|$. Veamos el caso en que $B \neq 0$, de esta manera, para $y' \in B_{F_2'}$ se tiene $\|y'\|_{F_2'} \leq 1$. Como $B'(y') \in E_2'$, entonces $\frac{B'(y')}{\|B'\|} \in E_2'$.

Ahora,

$$\begin{aligned} \|B'(y')\| &= \sup_{\|x\|_{E_2} \leq 1} |\langle B'(y'), x \rangle| \\ &\leq \sup_{\|x\|_{E_2} \leq 1} \|B'(y')\| \|x\| \\ &\leq \sup_{\|x\|_{E_2} \leq 1} \|B'\| \|y'\| \|x\| \\ &= \|B'\| \|y'\| \sup_{\|x\|_{E_2} \leq 1} \|x\| \\ &\leq \|B'\|, \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{\|B'(y')\|}{\|B'\|} \leq 1$$

y además, $\|B\| = \|B'\|$. En consecuencia para cada $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E_1 \otimes E_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{H^*\sigma}((B(y_{i,j}))) &= \sup_{y' \in B_{F'_2}} \left\| (|\langle B(y_{ij}), y' \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{ij})\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| (|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{ij})\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \frac{\|B'\|}{\|B'\|} \left\| (|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{ij})\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \frac{1}{\|B'\|} \left\| (|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{ij})\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \frac{1}{\|B'\|} (|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \|B(y_{ij})\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \frac{1}{\|B'\|^{1-\sigma}} (|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \frac{\|B(y_{ij})\|^\sigma}{\|B'\|^\sigma}) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \left(\frac{1}{\|B'\|^{1-\sigma}} |\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \frac{\|B(y_{ij})\|^\sigma}{\|B'\|^\sigma} \right) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \left(|\frac{1}{\|B'\|} \langle y_{ij}, B'(y') \rangle|^{1-\sigma} \frac{\|B(y_{ij})\|^\sigma}{\|B'\|^\sigma} \right) \right\|_{H^*} \\
&= \|B'\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \left(|\langle y_{ij}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|^{1-\sigma} \frac{\|B(y_{ij})\|^\sigma}{\|B'\|^\sigma} \right) \right\|_{H^*} \\
&\leq \|B\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \left(|\langle y_{ij}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|^{1-\sigma} \frac{\|B\|^\sigma \|y_{ij}\|^\sigma}{\|B\|^\sigma} \right) \right\|_{H^*} \\
&= \|B\| \sup_{\|y'\|_{F'_2} \leq 1} \left\| \left(|\langle y_{ij}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|^{1-\sigma} \|y_{ij}\|^\sigma \right) \right\|_{H^*} \\
&= \|B\| \sup_{\|w'\|_{E'_2} \leq 1} \left\| (|\langle y_{ij}, w' \rangle|^{1-\sigma} \|y_{ij}\|^\sigma) \right\|_{H^*} \\
&= \|B\| \delta_{H^*\sigma}((y_{ij}))
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $(A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} A(x_{ij}) \otimes B(y_{ij})$ entonces,

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((A(x_{ij}))) \delta_{H^*\sigma}((B(y_{ij}))) : (A \otimes B)(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \pi_H((A(x_{ij}))_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((B(y_{ij}))_{j=1}^{k_i}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|A\| \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \|B\| \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) \\
&= \|A\| \|B\| \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &\leq \inf\{\|A\| \|B\| \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}\} \\
&= \|A\| \|B\| \inf\{\sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})_{j=1}^{k_i}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{k_i}) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}\} \\
&= \|A\| \cdot \|B\| g_{H\sigma}(z; E_1, E_2)
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
\|A \otimes B\| &= \sup_{g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq 1} g_{H\sigma}((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \\
&\leq \sup_{g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq 1} \|A\| \cdot \|B\| g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \\
&\leq \|A\| \cdot \|B\| \sup_{g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \leq 1} g_{H\sigma}(z; E_1, E_2) \\
&\leq \|A\| \cdot \|B\|.
\end{aligned}$$

Así que

$$\|A \otimes B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

y se obtiene que $g_{H\sigma}(\cdot; E, F)$ es una normatensorial.

□

Proposición 3.1.4. *Todo elemento z de $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ admite una representación de la forma*

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty \quad (1)$$

además,

$$g_{H\sigma}(z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \right\} \quad (2)$$

tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de z que cumplan la condición (1).

Demostración. Veamos que cualquier serie del tipo mencionado es convergente en $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ y por tanto define un elemento de la complección.

Primero verifiquemos para cada natural i , la convergencia de $\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ en $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$, mostrando que la respectiva sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Para $n > m$ se tiene

$$\begin{aligned} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=m+1}^n x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=m+1}^n \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=m+1}^n \right) \\ &\leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=m+1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=m+1}^\infty \right) \end{aligned}$$

y el último término de la desigualdad anterior se puede hacer tan pequeño como se quiera, ya que $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) < \infty$. En consecuencia:

i) si $\delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) = 0$, se tiene

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) = 0.$$

ii) si $\delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) = \infty$, entonces $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) = 0$ y así

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) = 0.$$

iii) si $\delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) > 0$, se tiene $\pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) > 0$ y entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) = 0.$$

Luego dado $\epsilon > 0$, existe un natural m_i tal que

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=m_i+1}^\infty \right) < \frac{\epsilon}{\delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right)}$$

y como

$$\delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=m_i+1}^\infty \right) \leq \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right)$$

se consigue que

$$\pi_H \left((x_{ij})_{j=m_i+1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=m_i+1}^\infty \right) < \epsilon$$

para $n \geq m \geq m_i$. Además tenemos que

$$\begin{aligned} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^\infty x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^m \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^m \right) \\ &\leq \pi_H \left((x_{ij})_{j=1}^\infty \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij})_{j=1}^\infty \right) < \infty. \end{aligned}$$

Ahora, la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty x_{ij} \otimes y_{ij}$ también es de Cauchy ya que

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma} \left(\sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \sum_{i=m+1}^n g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \epsilon
\end{aligned}$$

para m suficientemente grande por la condición (1). Además se cumple que

$$\begin{aligned}
g_{H\sigma}(z) &= g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} g_{H\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{H\sigma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij}))
\end{aligned}$$

de lo cual

$$g_{H\sigma}(z) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \right\}.$$

Recíprocamente, veamos que para $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ hay una representación de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$$

que satisface

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty.$$

En efecto, como $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$, es punto límite de $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, entonces existe una sucesión de Cauchy $(u_n)_{i=1}^{\infty}$ en $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$ que converge a z , es decir, que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$g_{H\sigma}(u_n - z) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una sucesión $(k_n)_{n=1}^\infty$ en \mathbb{N} estrictamente creciente tal que

$$g_{H\sigma}(u_{k_n} - u_{k_{n+1}}) \leq \frac{\epsilon}{3(2^{n+2})}$$

y claramente $z = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n}$.

Renombrando $w_n = u_{k_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ se sigue que:

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(w_0 + \sum_{k=1}^n (w_k - w_{k-1}) \right) \\ &= w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (w_k - w_{k-1}) \\ &= w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $w_0 \in E \otimes_{g_{H\sigma}} F$ y $(w_n - w_{n-1}) \in E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, entonces tienen representación en $E \otimes_{g_{H\sigma}} F$, de la forma:

$$w_0 = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_{0,i}} x_{ij}^0 \otimes y_{ij}^0$$

y

$$(w_n - w_{n-1}) = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{n,i}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$$

con los x_{ij}^0 , y_{ij}^0 , x_{ij}^n y y_{ij}^n escogidos de tal manera que:

$$\sum_{i=1}^{k_0} \pi_H \left((x_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}} \right) < g_{H\sigma}(w_0) + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} \pi_H \left((x_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) < g_{H\sigma}(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \pi_H \left((x_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) &< \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{H\sigma}(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{H\sigma}(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \right) \leq \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Así,

$$g_{H\sigma}(z) \leq \left(g_{H\sigma}(w_0) + \frac{\epsilon}{3} \right) + \frac{\epsilon}{3},$$

de donde

$$g_{H\sigma}(z) \leq g_{H\sigma}(w_0) < \infty.$$

De tal forma tenemos que

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{n,i}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$$

es convergente.

Renombremos ahora los términos de la serie que define a z de la siguiente manera.

Consideremos

$$p_0 = 1, \quad p_1 = k_0, \dots, p_n = \sum_{q=0}^{n-1} k_q$$

para cada natural n . Ahora:

1) para $s = 1, 2, \dots, p_1$ y $t = 1, 2, \dots, m_{0,s}$, sean

$$r_s = m_{0,s}$$

y

$$u_{st} \otimes v_{st} = x_{st}^0 \otimes y_{st}^0$$

2) para $s = p_1 + 1, \dots, p_2$ y $t = 1, \dots, m_{1,s-p_1}$, sean

$$r_s = m_{1,s-p_1}$$

y

$$u_{st} \otimes v_{st} = x_{s-p_1,t}^1 \otimes y_{s-p_1,t}^1$$

3) para $s = p_2 + 1, \dots, p_3$ y $t = 1, \dots, m_{2,s-p_2}$, sean

$$r_s = m_{2,s-p_2}$$

y

$$u_{st} \otimes v_{st} = x_{s-p_2,t}^2 \otimes y_{s-p_2,t}^2$$

En general, si $s = p_n + 1, \dots, p_{n+1}$ y $t = 1, \dots, m_{n,s-p_n}$ denotamos

$$r_s = m_{n,s-p_n}$$

y

$$u_{st} \otimes v_{st} = x_{s-p_n,t}^n \otimes y_{s-p_n,t}^n.$$

De esta manera z se puede representar por

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{r_s} u_{st} \otimes v_{st}.$$

veamos que esta representación cumple la condición (1), en efecto,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \pi_H \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right)$$

Se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\infty} \pi_H \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \\ = & \sum_{s=1}^{k_0} \pi_H \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=p_n+1}^{p_{n+1}} \pi_H \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \\ = & \sum_{i=1}^{k_0} \pi_H \left((x_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}^0)_{j=1}^{m_{0,i}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \pi_H \left((x_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}^n)_{j=1}^{m_{n,i}} \right) \\ < & g_{H\sigma}(w_0) + \frac{\epsilon}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{3(2^{n+1})} \\ \leq & g_{H\sigma}(w_0 - z) + g_{H\sigma}(z) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ < & g_{H\sigma}(z) + \epsilon \\ < & \infty \end{aligned}$$

así

$$\sum_{s=1}^{\infty} \pi_H \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right) < g_{H\sigma}(z) + \epsilon$$

y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario se obtiene que

$$\inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_H \left((x_{ij}) \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{ij}) \right) \right\} \leq g_{H\sigma}(z)$$

lo cual permite concluir la igualdad (2). □

3.2. Caracterización del ideal $\mathcal{P}_{H\sigma}$

Esta sección presenta el resultado principal de [7], que exhibe un ejemplo de ideales de operadores estudiados mediante normas tensoriales, tal como el problema que plantea el segundo objetivo específico de esta memoria. Para completar la exposición de los resultados de [7], se presenta el mencionado estudio a continuación.

Un ideal de operadores relacionado con la norma tensorial $g_{H\sigma}$ se define en [7] como sigue: Sean E, F espacios de Banach, H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero y $0 \leq \sigma < 1$. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es $H\sigma$ -absolutamente sumante de E en F si existe una

constante $C > 0$ tal que, para toda sucesión finita x_1, \dots, x_n se verifica

$$\|((T(x_i)))\|_H \leq C \delta_{H\sigma}((x_i)).$$

Denotaremos $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ al espacio de los operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes de E en F , con norma definida para cada $T \in \mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ por

$$\mathbf{P}_{H\sigma}(T) := \inf C,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las constantes C admisibles en la desigualdad anterior.

Se denota por $\mathcal{P}_{H\sigma}$ al ideal normado de operadores cuyas componentes son los espacios de operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes entre dos espacios de Banach.

La relación entre $\mathcal{P}_{H\sigma}$ y la norma tensorial $g_{H\sigma}$ se manifiesta en el siguiente resultado, el cual es el más importante de los presentados en [7].

Teorema 3.2.1. *Para todo par de espacios de Banach E y F ,*

$$(E \otimes_{g_{H\sigma}} F)' = \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$$

isométricamente.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$ y consideremos

$$\phi_T : E \otimes_{g_{H\sigma}} F \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\langle \phi_T, z \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle .,$$

donde $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E \otimes F$.

Veamos que $\phi_T \in (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$.

ϕ_T es aplicación lineal, en efecto si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $z_1, z_2 \in E \otimes F$ con

$$z_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{y} \quad z_2 = \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_T(\alpha z_1 + \beta z_2) &= \phi_T\left(\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} + \beta \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}\right) \\
&= \phi_T\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha x_{ij} \otimes y_{ij} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} \beta x_{ij} \otimes y_{ij}\right) \\
&= \phi_T\left(\sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} w_{ij} \otimes y_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} \langle w_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \langle \alpha x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle + \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} \langle \beta x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle + \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} \beta \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle + \beta \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=1}^{k_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \\
&= \alpha \phi_T(z_1) + \beta \phi_T(z_2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\phi_T(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha \phi_T(z_1) + \beta \phi_T(z_2)$$

y ϕ_T es aplicación lineal.

Veamos ahora que ϕ_T es continua. Sea $z \in E \otimes F$, con $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$.

$$\begin{aligned}
| \langle \phi_T, z \rangle | &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} | \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle | \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \|x_{ij}\| \|T(y_{ij})\| \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \|x_{ij}\| \|T(y_{ij})\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \pi_H(\|x_{ij}\|) \|T(y_{ij})\|_{H^*} \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \|T(y_{ij})\|_{H^*} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) C \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) \\
&\leq C \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij})
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$| \langle \phi_T, z \rangle | \leq C \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij})$$

Luego,

$$\begin{aligned}
| \langle \phi_T, z \rangle | &\leq \inf \left\{ C \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) : \| (T(y_{ij})) \|_{H^*} \leq C \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) \inf \{ C : \| (T(y_{ij})) \|_{H^*} \leq C \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij}) P_{H^*\sigma}(T) \\
&= P_{H^*\sigma}(T) \sum_{i=1}^n \pi_H(x_{ij}) \delta_{H^*\sigma}(y_{ij})
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
|\langle \phi_T, z \rangle| &\leq \inf \left\{ P_{H^*\sigma}(T) \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= P_{H^*\sigma}(T) \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\
&= P_{H^*\sigma}(T) g_{H\sigma}(z; E, F) \\
&= M g_{H\sigma}(z; E, F)
\end{aligned}$$

Resumiendo, ϕ_T es continua y por lo tanto $\phi_T \in (E \otimes F)'$. Además,

$$\begin{aligned}
\|\phi_T\| &= \sup_{g_{H\sigma}(z; E, F) \leq 1} |\langle \phi_T, z \rangle| \\
&\leq \sup_{g_{H\sigma}(z; E, F) \leq 1} P_{H^*\sigma}(T) g_{H\sigma}(z; E, F) \\
&= P_{H^*\sigma}(T) \sup_{g_{H\sigma}(z; E, F) \leq 1} g_{H\sigma}(z; E, F) \\
&= P_{H^*\sigma}(T).
\end{aligned}$$

Recíprocamente consideremos $\phi \in (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)'$ de manera que podemos definir

$$T_\phi : F \rightarrow E'$$

tal que para cada $x \in E$, $y \in F$

$$\langle T_\phi(y), x \rangle = \langle \phi, x \otimes y \rangle.$$

Veamos que $T_\phi \in \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$.

Consideremos $(y_n)_{n=1}^k \in F$. La sucesión anterior se considera como una sucesión infinita haciendo $y_n = 0$ para $n > k$, y además $\delta_{H^*\sigma}((y_n)) < \infty$.

Sean $\epsilon > 0$ y una sucesión (ϵ_n) tal que $\epsilon_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, con $\|(\epsilon_n)\|_{H^*} \leq 1$.

Como para toda $n \in \mathbb{N}$ $T_\phi(y_n) \in E'$ entonces,

$$\|T_\phi(y_n)\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle T_\phi(y_n), x \rangle|$$

y por aproximación al supremo, existe $x_n \in B_E$ tal que

$$\|T_\phi(y_n)\| \leq |\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle| + \epsilon \epsilon_n.$$

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned}
\|(\|T_\phi(y_n)\|)\|_{H^*} &\leq \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle| + \epsilon \epsilon_n)\|_{H^*} \\
&= \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle|) + \epsilon(\epsilon_n)\|_{H^*} \\
&\leq \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle|)\|_{H^*} + \|\epsilon(\epsilon_n)\|_{H^*} \\
&= \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle|)\|_{H^*} + \epsilon\|(\epsilon_n)\|_{H^*} \\
&\leq \|(|\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle|)\|_{H^*} + \epsilon \\
&= \|(\langle T_\phi(y_n), x_n \rangle)\|_{H^*} + \epsilon \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \langle T_\phi(y_n), x_n \rangle b_n : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \langle T_\phi(y_n), b_n x_n \rangle : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi, b_n x_n \otimes y_n \rangle : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \sup\left\{\langle \phi, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \otimes y_n \rangle : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&\leq \sup\left\{|\langle \phi, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \otimes y_n \rangle| : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&\leq \sup\left\{\|\phi\| g_{H\sigma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \otimes y_n\right) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \|\phi\| \sup\left\{g_{H\sigma}\left(\sum_{i=1}^1 \sum_{i=1}^{\infty} b_{in} x_{in} \otimes y_{in}\right) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \|\phi\| \sup\left\{\sum_{i=1}^1 \pi_H((b_n x_n)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \|\phi\| \sup\left\{\pi_H((b_n x_n)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&= \|\phi\| \sup\left\{\pi_H((\|b_n x_n\|)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&\leq \|\phi\| \sup\left\{\pi_H((\|b_n\|)) \delta_{H^*\sigma}((y_n)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon \\
&\leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) \sup\left\{\pi_H((\|b_n\|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Probemos ahora que

$$\sup\left\{\pi_H((\|b_n\|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\right\} \leq \sup\left\{\pi_H((\|b_n\|)) : \pi_H(|b_n|) \leq 1\right\}$$

y para ello, veamos primero que es válida la siguiente inclusión:

$$\{\pi_H((|b_n|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\} \subseteq \{\pi_H((|b_n|)) : \pi_H(|b_n|) \leq 1\}.$$

En efecto, sea

$$x \in \{\pi_H((|b_n|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\},$$

esto es,

$$x = \pi_H((|b_n|)) \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1.$$

Más aún,

$$x = \pi_H((|b_n|)) \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} H\left(\frac{|b_n|}{1}\right) \leq 1$$

de donde,

$$1 \in \{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} H\left(\frac{|b_n|}{\rho}\right) \leq 1\}.$$

Por lo tanto,

$$\inf\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} H\left(\frac{|b_n|}{\rho}\right) \leq 1\} \leq 1,$$

esto es,

$$\pi_H((|b_n|)) \leq 1$$

y así,

$$x \in \{\pi_H((|b_n|)) : \pi_H(|b_n|) \leq 1\}$$

Con lo que se tiene la inclusión y por consiguiente

$$\sup\{\pi_H((|b_n|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\} \leq \sup\{\pi_H((|b_n|)) : \pi_H(|b_n|) \leq 1\}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} \|(\|T_\phi(y_n)\|)\|_{H^*} &\leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) \sup\{\pi_H((|b_n|)) : \sum_{n=1}^{\infty} H(|b_n|) \leq 1\} + \epsilon \\ &\leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) \sup\{\pi_H((|b_n|)) : \pi_H(|b_n|) \leq 1\} + \epsilon \\ &\leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)) + \epsilon, \end{aligned}$$

y como ϵ es arbitrario, tenemos que

$$\|(\|T_\phi(y_n)\|)\|_{H^*} \leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)),$$

lo cual implica que

$$\|(T_\phi(y_n))\|_{H^*} \leq \|\phi\| \delta_{H^*\sigma}((y_n)),$$

y así,

$$T_\phi \in \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E').$$

Además,

$$\|\phi\| \in \{C > 0 : \|(T_\phi(y_n))\|_{H^*} \leq C \delta_{H^*\sigma}((y_n))\}.$$

Por lo tanto,

$$\inf\{C > 0 : \|(T_\phi(y_n))\|_{H^*} \leq C \delta_{H^*\sigma}((y_n))\} \leq \|\phi\|$$

obteniéndose,

$$P_{H^*\sigma} \leq \|\phi\|.$$

Notemos que si $\phi \in (E \otimes_{g_{H\sigma}})'$ entonces $\phi = \phi_{T_\phi}$.

En efecto, sea

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E \otimes F.$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{T_\phi}, z \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle x_{ij}, T_\phi(y_{ij}) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle \phi, x_{ij} \otimes y_{ij} \rangle \\ &= \langle \phi, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \rangle \\ &= \langle \phi, z \rangle, \end{aligned}$$

obteniéndose así la igualdad deseada.

Ahora, sea

$$\psi : (E \otimes_{g_{H\sigma}} F)' \longrightarrow \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$$

definida por

$$\psi(\phi) = T_\phi.$$

De tal forma,

$$\begin{aligned} P_{H^*\sigma}(\psi(\phi)) &= P_{H^*\sigma}(T_\phi) \\ &\leq \|\phi\| \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned}\|\phi\| &= \|\phi_{T_\phi}\| \leq P_{H^*\sigma}(T_\phi) \\ &= P_{H^*\sigma}(\psi(\phi)).\end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene que

$$\|\phi\| = P_{H^*\sigma}(\psi(\phi)).$$

Resumiendo, se tiene que

$$(E \otimes_{g_{H\sigma}} F)' = \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E') \text{ isométricamente.}$$

□

Capítulo 4

Ideal minimal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$

En este capítulo se define el ideal de operadores $\mathcal{N}_{H\sigma}$, asociado a $g_{H\sigma}$, y se caracterizan los elementos de componentes del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$. En la primera sección se presenta detalladamente el contexto de definición del ideal de operadores y en la segunda sección se presenta el resultado principal; el teorema de caracterización.

4.1. Introducción del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$

A continuación, con referencia a un par espacios de Banach (E, F) , y usando el teorema de caracterización de los elementos de $E \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ como series dobles, se definen los elementos de la componente de $\mathcal{N}_{H\sigma}$ correspondiente a $\mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$.

Primero, mostraremos la forma en que se construye un ideal minimal de operadores asociado a una norma tensorial finitamente generada, según el libro de Defant y Floret [1].

Dada una tensornorma finitamente generada α en la clase de espacios normados, respecto a las tensornormas inyectiva y proyectiva, se verifica que $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$, lo cual implica que las siguientes inclusiones canónicas son continuas, con normas menores o iguales que uno.

$$E \otimes_{\pi} F \hookrightarrow E \otimes_{\alpha} F \hookrightarrow E \otimes_{\varepsilon} F \quad (4.1)$$

que permiten la siguiente cadena de sobreyecciones, con normas menores o iguales que 1,

$$(E \otimes_{\varepsilon} F)' \xrightarrow{\leq 1} (E \otimes_{\alpha} F)' \xrightarrow{\leq 1} (E \otimes_{\pi} F)' \quad (4.2)$$

Además se sabe que $(E \otimes_{\pi} F)' = \mathcal{L}(E, F')$ isométricamente.

De otro lado, de $\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha$ se consigue la siguiente inclusión con norma menor o igual que 1

$$E \otimes_{\alpha} F \xrightarrow{\leq 1} E \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \quad (4.3)$$

Es conocido también que con norma 1 se tiene que

$$E' \otimes_{\overleftarrow{\alpha}} F \xrightarrow{1} (E \otimes_{\alpha'} F) \quad (4.4)$$

Al tomar E' en lugar de E en (3.3) y teniendo en cuenta (3.4) y (3.2) se tiene

$$E' \otimes_{\alpha} F \xrightarrow{\leq 1} E' \otimes_{\bar{\alpha}} F \xrightarrow{1} (E \otimes_{\alpha'} F)' \xrightarrow{\leq 1} (E \otimes_{\pi} F)' = \mathcal{L}(E, F'') \quad (4.5)$$

Por tanto se tiene que

$$E' \otimes_{\alpha} F \xrightarrow{\leq 1} \mathcal{L}(E, F) \quad (4.6)$$

Entonces dados un par de espacios de Banach E, F y una tensornorma α , existe una aplicación inyectiva y continua con norma menor o igual que uno

$$\Phi_{\alpha} : E' \otimes_{\alpha} F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

de manera que para todo $z \in E' \otimes_{\alpha} F$ con representación

$$z = \sum_{i=1}^n x'_i \otimes y_i,$$

se verifica que $\Phi_{\alpha}(z) = T_z$ tal que

$$T_z(x) = \sum_{i=1}^n \langle x'_i, x \rangle y_i.$$

La aplicación Φ_{α} se puede extender con continuidad a la complección del α -producto tensorial. Denotemos por $\hat{\Phi}_{\alpha}$ a la extensión de la aplicación. Los operadores de su conjunto imagen se dice que son α -nucleares de E en F y la clase de ellos, con norma en $E' \hat{\otimes}_{\alpha} F$, se denota por $\mathcal{U}(E, F)$, que serán las componentes del ideal de operadores. También se denota \mathcal{U}^{min} a la clase de todas las componentes y ésta constituye un ideal minimal normado de operadores.

Queremos resaltar que a pesar de que Φ_{α} es inyectiva, $\hat{\Phi}_{\alpha}$ no tiene porqué ser inyectiva, lo cual, tomando $\alpha = \pi$, origina un interesante problema, la denominada propiedad de aproximación de Grothendieck.

Nuestro estudio se puntualizará en el caso en que $\alpha = g_{H\sigma}$, de esta manera consideramos la aplicación

$$\Phi_{g_{H\sigma}} : E' \otimes_{g_{H\sigma}} F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

de manera que para todo $z \in E' \otimes_{g_{H\sigma}} F$ con representación

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} x'_{ij} \otimes y_{ij}, \quad (4.7)$$

se verifica que $\Phi_{g_{H\sigma}}(z) = T_z$ tal que

$$T_z(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij}.$$

De tal forma, cualquier representación de $z \in E' \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$, de la forma 4.7, que verifique

$$\pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) < \infty, \quad \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \infty,$$

define un $T_z \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que para todo x en E ,

$$T_z(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij}.$$

Definición 4.1.1. Sean E, F dos espacios de Banach. Se dice que un operador $T : E \rightarrow F$ es $H\sigma$ -nuclear si

$$T = \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z), \quad \text{para algùn } z \in E' \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F.$$

En este caso se escribe $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ y se define la norma $H\sigma$ -nuclear como la norma del cociente, es decir,

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) := \inf \{ g_{H\sigma}(z) : \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T \}.$$

Se denota por $\mathcal{N}_{H\sigma}$ a la clase de todos los $(\mathcal{N}_{H\sigma}(E, F), \mathbf{N}_{H\sigma})$, tal que E y F sean espacios de Banach.

De la teoría general de normas tensoriales e ideales de operadores y dada la forma en que se definió $\mathcal{N}_{H\sigma}$ a partir de $g_{H\sigma}$, queda justificado que $\mathcal{N}_{H\sigma}$ es un ideal minimal normado de operadores. No obstante, con el ánimo de mostrar algunos procedimientos propios de la teoría de ideales de operadores, en esta memoria probaremos que $\mathcal{N}_{H\sigma}$ es un ideal de operadores. Precisamente, siguiendo el procedimiento realizado en [14] para probar que $\mathcal{P}_{p\sigma}$ es un ideal de operadores entre espacios de Banach, probaremos que $\mathcal{N}_{H\sigma}$ también lo es. Pero primero se justificará, que cada componente es un subespacio vectorial normado de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposición 4.1.1. Para cada par de espacios de Banach E, F , se tiene que $\mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$ con norma $\mathbf{N}_{H\sigma}(T)$.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; S y $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$

veamos que $\alpha S + \beta T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, es decir existe $z \in E' \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ tal que $\alpha S + \beta T = \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)$

Como $S, T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, existen $z_1, z_2 \in E' \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ tales que $S = \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_1), T = \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_2)$

luego,

$$\begin{aligned} \alpha S + \beta T &= \alpha \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_1) + \beta \hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_2) \\ &= \alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2}. \end{aligned}$$

Veamos que

$$(\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2})(x) = [\hat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)](x) \quad \text{para algùn } z \in E' \hat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$$

En efecto, sean

$$z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{y} \quad z_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} t'_{ij} \otimes w_{ij}.$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
(\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2})(x) &= \alpha T_{z_1}(x) + \beta T_{z_2}(x) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle t'_{ij}, x \rangle w_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\langle x'_{ij}, x \rangle \alpha y_{ij} + \langle t'_{ij}, x \rangle \beta w_{ij}).
\end{aligned}$$

Dado que,

$$\langle x'_{ij}, x \rangle \alpha y_{ij} + \langle t'_{ij}, x \rangle \beta w_{ij} = \begin{cases} \langle t'_{ij}, x \rangle \beta w_{ij} & \text{si } \langle x'_{ij}, x \rangle = 0 \\ \langle x'_{ij}, x \rangle (\alpha y_{ij} + \frac{\langle t'_{ij}, x \rangle}{\langle x'_{ij}, x \rangle} \beta w_{ij}) & \text{si } \langle x'_{ij}, x \rangle \neq 0 \end{cases}$$

entonces ,

$$(\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2})(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle z'_{ij}, x \rangle h_{ij}$$

$$\text{donde } z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z'_{ij} \otimes h_{ij} \in E' \widehat{\otimes}_{gH\sigma} F.$$

Lo anterior implica que

$$(\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2})(x) = T_z(x) = (\widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z))(x),$$

esto es,

$$\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2} = \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z) \quad \text{para algùn } z \in E' \widehat{\otimes}_{gH\sigma} F.$$

Por lo tanto

$$\alpha T_{z_1} + \beta T_{z_2} \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$$

y así,

$$\mathcal{N}_{H\sigma}(E, F) \text{ es un subespacio vectorial de } \mathcal{L}(E, F)$$

□

A continuación se presentan las pruebas para justificar que $NH\sigma(\cdot)$ es norma en cada componente.

Proposición 4.1.2. *Si E y F son espacios de Banach, para cada $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, se cumple*

$$NH\sigma(T) = 0 \quad \text{si y solo si } T = 0.$$

Demostración. Si $T = 0 \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ entonces,

$$\begin{aligned}
NH\sigma(T) &= NH\sigma(0) \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z) = 0\} \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(z) : T_z = 0\}.
\end{aligned}$$

En particular, sea $z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} o'_{ij} \otimes o_{ij} \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$, entonces

$$T_{z_0}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle o'_{ij}, x \rangle o_{ij} = 0$$

Como,

$$g_{H\sigma}(z_0) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \right\}$$

y como $z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} o'_{ij} \otimes o_{ij}$ es una de tantas representaciones de z_0 tenemos que:

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((o'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*}((o_{ij})_{j=1}^{\infty}) \in \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \right\}$$

y así,

$$\begin{aligned} 0 &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \right\} \\ &= g_{H\sigma}(z_0). \end{aligned}$$

Luego $0 \in \{g_{H\sigma}(z) : T_z = 0\}$, esto es,

$$0 = \inf \{g_{H\sigma}(z) : T_z = 0\} = N_{H\sigma}(T).$$

Ahora supongamos que $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ y $N_{H\sigma}(T) = 0$. Como $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ entonces existe

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$$

tal que $\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T$. Luego,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (\langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\| (\langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij})_{j=1}^{\infty} \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left\| (\langle x'_{ij}, x \rangle)_{j=1}^{\infty} \right\| \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \|x\| \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) \\ &= \|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) \end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &\leq \inf\left\{\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij}\right\} \\
&= \|x\| \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij}\right\} \\
&= \|x\| g_{H\sigma}(z) \text{ tal que } T = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &\leq \inf\{\|x\| g_{H\sigma}(z) : T = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)\} \\
&= \|x\| \inf\{g_{H\sigma}(z) : T = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)\} \\
&= \|x\| N_{H\sigma}(T) = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\|T(x)\| = 0$. Así que, $T(x) = 0$ y como x es arbitraria, $T = 0$ □

Proposición 4.1.3. *Para cada $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple $N_{H\sigma}(\alpha T) = |\alpha| N_{H\sigma}(T)$*

La igualdad es obvia si $\alpha = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned}
N_{H\sigma}(\alpha T) &= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \alpha T = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)\} \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \alpha T = T_z\} \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(z) : T = \frac{1}{\alpha} T_z\}
\end{aligned}$$

Probemos ahora que, $T_{\alpha z} = \alpha T_z(x)$ con $z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ tal que $\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T$. En efecto,

$$T_{\alpha z}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \alpha x'_{ij}, x \rangle y_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij} = \alpha T_z(x).$$

Tenemos así que,

$$\begin{aligned}
N_{H\sigma}(\alpha T) &= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \frac{1}{\alpha} T_z = T\} \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(z) : T_{\frac{1}{\alpha} z} = T\} \\
&= \inf\{g_{H\sigma}(\alpha w) : T_w = T\} \\
&= \inf\{|\alpha| g_{H\sigma}(w) : T_w = T\} \\
&= |\alpha| \inf\{g_{H\sigma}(w) : T_w = T\} \\
&= |\alpha| N_{H\sigma}(T).
\end{aligned}$$

Se probará ahora la desigualdad triangular.

Proposición 4.1.4. *Para cada $T_1, T_2 \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, se cumple $N_{H\sigma}(T_1 + T_2) \leq N_{H\sigma}(T_1) + N_{H\sigma}(T_2)$*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, como

$$N_{H\sigma}(T_1) = \inf\{g_{H\sigma}(z_1) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_1) = T_1\} \quad y$$

$$N_{H\sigma}(T_2) = \inf\{g_{H\sigma}(z_2) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z_2) = T_2\},$$

por aproximación al infimo, existen $w, y \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ con $\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w) = T_1$, $\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(y) = T_2$ tales que

$$g_{H\sigma}(w) \leq N_{H\sigma}(T_1) + \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad g_{H\sigma}(y) \leq N_{H\sigma}(T_2) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Sumando miembro a miembro

$$\begin{aligned} g_{H\sigma}(w + y) &\leq g_{H\sigma}(w) + g_{H\sigma}(y) \\ &\leq N_{H\sigma}(T_1) + N_{H\sigma}(T_2) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w + y) &= T_{w+y} \\ &= T_w + T_y \\ &= \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w) + \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(y) \\ &= T_1 + T_2, \end{aligned}$$

entonces

$$g_{H\sigma}(w + y) \in \{g_{H\sigma}(z) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T_1 + T_2\}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} N_{H\sigma}(T_1 + T_2) &= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T_1 + T_2\} \\ &\leq g_{H\sigma}(w + y) \\ &\leq N_{H\sigma}(T_1) + N_{H\sigma}(T_2) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ fue escogido arbitrariamente

$$N_{H\sigma}(T_1 + T_2) \leq N_{H\sigma}(T_1) + N_{H\sigma}(T_2),$$

quedando así probado que $N_{H\sigma}(T)$ es una norma. \square

Teorema 4.1.1. *$(\mathcal{N}_{H\sigma}, N_{H\sigma}(\cdot))$ es un ideal normado de operadores en la clase de espacios de Banach.*

Demostración.

1. Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operador de rango finito n , $(e_{ij})_{j=1}^n$ una base para $T(E)$ y $x \in E$.

Luego,

$$T(x) = \sum_{j=1}^n \varphi'_{ij}(x) e_{ij} = \sum_{j=1}^n \langle \varphi'_{ij}, x \rangle e_{ij} \quad \text{donde } (\varphi'_j)_{j=1}^n \text{ es una sucesión de ciertos elementos de } E'$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^n \langle \varphi'_{ij}, x \rangle e_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^n \langle \varphi'_{ij}, x \rangle e_{ij} + \sum_{i=1}^1 \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle o'_{ij}, x \rangle o_{ij} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle o'_{ij}, x \rangle o_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi'_{ij}, x \rangle n_{ij} \quad \text{con } \psi'_{ij} \in E' \text{ y } n_{ij} \in F \end{aligned}$$

Sea $z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \psi'_{ij} \otimes n_{ij} \in E' \otimes_{gH\sigma} F \subset E' \widehat{\otimes}_{gH\sigma} F$

Para el tensor z anterior es evidente que,

$$\pi_H((\psi'_{ij})_{j=1}^{\infty}), \delta_{H^*}((n_{ij})_{j=1}^{\infty}) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\psi'_{ij})) \delta_{H^*}((n_{ij})) < \infty \quad \text{por ser series finitas.}$$

Esto implica que existe un $T_z \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$T_z = \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z) \quad \text{con} \quad T_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi'_{ij}, x \rangle n_{ij} = T(x),$$

y así, $T = T_z = \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z)$ para algún $z \in E' \widehat{\otimes}_{gH\sigma} F$, quedando entonces que $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, y así los operadores $H\sigma$ -nucleares contienen a los operadores de rango finito.

2. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$, por consiguiente $\alpha T_1 + \beta T_2 \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$. Haciendo $\alpha = \beta = 1$, se tiene que $T_1 + T_2 \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$.
3. Sean $R \in \mathcal{L}(G, H)$, $S \in \mathcal{N}_{H\sigma}(F, G)$ y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, probemos que $RST \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, H)$, es decir,

$$RST = \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z) \quad \text{para algún } z \in E' \otimes_{gH\sigma} H.$$

En efecto, por hipótesis $S \in \mathcal{N}_{H\sigma}(F, G)$. Luego, $S = \widehat{\Phi}_{gH\sigma}(z)$ para algún

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \in F' \widehat{\otimes}_{gH\sigma} G,$$

tal que

$$\pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}), \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \infty.$$

Esto es,

$$S = T_z \quad \text{con} \quad T_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (RST)(x) &= (RT_zT)(x) \\ &= R[T_z(T(x))] \\ &= R\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, T(x) \rangle y_{ij}\right] \\ &= R\left[\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle T'(x'_{ij}), x \rangle y_{ij}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R(\langle T'(x'_{ij}), x \rangle y_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle T'(x'_{ij}), x \rangle R(y_{ij}). \end{aligned}$$

Sea

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T'(x'_{ij}) \otimes R(y_{ij}) \in E' \otimes_{g_{H\sigma}} H \subset E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} H.$$

Puesto que,

$$\pi_H((T'(x'_{ij}))_{j=1}^{\infty}), \delta_{H^*\sigma}((R(y_{ij}))_{j=1}^{\infty}) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((T'(x'_{ij}))) \delta_{H^*\sigma}((R(y_{ij}))) < \infty,$$

entonces

$$\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w) = T_w \quad \text{con} \quad T_w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle T'(x'_{ij}), x \rangle R(y_{ij}) = (RST)(x)$$

y así,

$$RST = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w) \quad \text{con} \quad w \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} H.$$

De lo anterior se tiene que,

$$RST \in \mathcal{N}(E, H).$$

Ahora probemos que

$$N_{H\sigma}(RST) \leq \|R\| N_{H\sigma}(S) \|T\|$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
N_{H\sigma}(RST) &= \inf\{g_{H\sigma}(w) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(w) = RST\} \\
&\leq g_{H\sigma}(w) \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((T'(x'_{ij})))\delta_{H^*\sigma}((R(y_{ij}))) : w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T'(x'_{ij}) \otimes R(y_{ij})\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((T'(x'_{ij})))\delta_{H^*\sigma}((R(y_{ij}))) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|T'\| \pi_H((x'_{ij})) \|R\| \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \\
&= \|T'\| \|R\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij}))\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) \\
&= \|T\| \|R\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij}))\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
N_{H\sigma}(RST) &\leq \inf\{\|T\| \|R\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij}))\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij}\} \\
&= \|T\| \|R\| \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij}))\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij}\right\} \\
&= \|T\| \|R\| g_{H\sigma}(z) \quad \text{con } s = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z).
\end{aligned}$$

Nuevamente

$$\begin{aligned}
N_{H\sigma}(RST) &\leq \inf\{\|T\| \|R\| g_{H\sigma}(z) : S = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)\} \\
&= \|T\| \|R\| \inf\{g_{H\sigma}(z) : S = \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z)\} \\
&= \|T\| \|R\| N_{H\sigma}(S) \\
&= \|T\| N_{H\sigma}(S) \|R\|.
\end{aligned}$$

□

4.2. Caracterización del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$

Como se dijo antes, el teorema de caracterización que se presenta en esta sección, se hace mediante un diagrama de factorización para los operadores que pertenecen a componentes del ideal $\mathcal{N}_{H\sigma}$. No es extraño que dicha caracterización se base en un diagrama de factorización, de hecho, los teoremas para caracterizar ideales de operadores maximales o minimales, se han logrado generalmente mediante ese tipo de diagramas y en términos de espacios clásicos.

Antes de pasar al teorema de caracterización de operadores $H\sigma$ -nucleares entre espacios de Banach, probaremos el siguiente resultado que se empleará en algún momento de su demostración.

Si $((\alpha_{ij})) \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$ entonces

$$\sup_{\|((\alpha_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} |\alpha_{ij}| \leq \sup_{|\alpha_{ij}| \leq 1} |\alpha_{ij}| \quad (4.8)$$

Demostración. Sea $x \in \{|\alpha_{ij}| : \|((\alpha_{ij}))\| \leq 1\}$, con lo cual $x = |\alpha_{ij}|$ y $\|((\alpha_{ij}))\| \leq 1$.

Lo cual implica que, $x = |\alpha_{ij}|$ y $\sup_{i \in \mathbb{N}} (\sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_{ij}|) \leq 1$. Ahora, como

$$|\alpha_{ij}| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (\sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_{ij}|) \leq 1,$$

entonces $x = |\alpha_{ij}|$ con $|\alpha_{ij}| \leq 1$. En consecuencia, $x \in \{|\alpha_{ij}| : |\alpha_{ij}| \leq 1\}$ y por tanto

$$\{|\alpha_{ij}| : \|((\alpha_{ij}))\| \leq 1\} \subseteq \{|\alpha_{ij}| : |\alpha_{ij}| \leq 1\},$$

de lo cual se sigue la desigualdad 4.8. \square

Teorema 4.2.1. Sean, E, F dos espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero, tal que $H(1) = 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) T es $H\sigma$ -nuclear
- 2) T factoriza según el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ A \downarrow & & \uparrow C \\ \ell_\infty\{\ell_\infty\} & \xrightarrow{B} & \ell_1\{\ell_H\} \end{array}$$

donde A y C son continuas, B es el operador diagonal multiplicación por una sucesión positiva $((b_{ij}))$ de $\ell_1\{\ell_H\}$.

Además, $\mathbf{N}_{H\sigma}(T) = \inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$, tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles según las condiciones establecidas en (2).

Demostración. Veamos (1) \Rightarrow (2).

Sea T un operador $H\sigma$ -nuclear, es decir $T \in \mathcal{N}_{H\sigma}(E, F)$. Como

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) = \inf\{g_{H\sigma}(z) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T\},$$

por aproximación al ínfimo, para toda $\varepsilon > 0$, existe $z \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ tal que

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) + \varepsilon > g_{H\sigma}(z), \quad \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T.$$

Es claro que $N_{H\sigma}(T) + \epsilon$ no es cota inferior del conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((w'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((t_{ij})) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w'_{ij} \otimes t_{ij} \right\},$$

por lo que existe una representación

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij} \in E' \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$$

Con,

$$\pi_H((x'_{ij})_{j=1}^{\infty}) < \infty, \quad \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \infty$$

tal que

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})).$$

Como z tiene la representación y además verifica las condiciones dadas anteriormente, define un $T_z \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que para toda $x \in E$,

$$T_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij}.$$

Luego,

$$T(x) = (\widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z))(x) = T_z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) = 1$ y en consecuencia se tiene,

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})). \quad (4.9)$$

Definamos las aplicaciones lineales

$$A : E \rightarrow \ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\}, \quad B : \ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\} \rightarrow \ell_1\{\ell_H\} \quad \text{y} \quad C : \ell_1\{\ell_H\} \rightarrow F,$$

definidas, para toda $x \in E$, para todo $((\lambda_{ij})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\}$ y para todo $((\beta_{ij})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty} \in \ell_1\{\ell_H\}$ mediante las fórmulas:

$$A(x) := \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right)_{j=1}^{\infty} \right)_{i=1}^{\infty},$$

$$B((\lambda_{ij})) := ((\lambda_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}$$

$$y \quad C((\beta_{ij})) := \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_{ij}.$$

Veamos que $A \in \mathcal{L}(E, \ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\})$. En efecto, si $x \in E$

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_{\ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\}} &= \left\| \left(\left\| \left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} = \left\| \left(\sup_j \left| \frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right| \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} \\ &= \left\| \left(\sup_j \frac{|\langle x'_{ij}, x \rangle|}{\|x'_{ij}\|} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} \leq \left\| \left(\sup_j \frac{\|x'_{ij}\| \|x\|}{\|x'_{ij}\|} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} \\ &= \left\| \left(\sup_j \|x\| \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_{\ell_{\infty}} \\ &= \|(\|x\|)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_{\infty}} \\ &= \sup_i \|x\| \\ &= \|x\| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A(x) \in \ell_{\infty}\{\ell_{\infty}\}$ y A es continua. Además,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \leq 1 \quad (4.10)$$

Probemos que A es lineal. En efecto, si $x, y \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, \alpha x + \beta y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, \alpha x \rangle + \langle x'_{ij}, \beta y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, \alpha x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) + \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, \beta y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\alpha \langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) + \left(\left(\frac{\beta \langle x'_{ij}, y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \left(\alpha \left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) + \left(\beta \left(\frac{\langle x'_{ij}, y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \alpha \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) + \beta \left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, y \rangle}{\|x'_{ij}\|} \right) \right) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

Probemos ahora que $B \in \mathcal{L}(\ell_\infty\{\ell_\infty\}, \ell_1\{\ell_H\})$. Sea $((\lambda_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\|B((\lambda_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} &= \|(\|(\lambda_{ij}\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty\|_{\ell_H})_{i=1}^\infty\|_{\ell_1} \\
&= \|(\pi_H((\lambda_{ij}\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty))_{i=1}^\infty\|_{\ell_1} \\
&= \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\lambda_{ij}\|x'_i\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\|\lambda_{ij}\|x'_i\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\|\lambda_{ij}\|x'_i\|)_{j=1}^\infty) \\
&\leq \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\sup_j |\lambda_{ij}| \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \Pi_H(\|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} (\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \Pi_H((\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&\leq \sum_{i=1}^\infty \sup_i \|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \Pi_H((\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&\leq \sum_{i=1}^\infty \|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \|(\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \Pi_H((\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \|(\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty) \\
&= \|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \|(\|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \sum_{i=1}^\infty \Pi_H((x'_{ij})_{j=1}^\infty) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto B es continua y

$$B((\lambda_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}.$$

Mas aún,

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \sup_{\|((\lambda_{ij}))\| \leq 1} \|B((\lambda_{ij}))\| \\
&= \sup_{\|((\lambda_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|(\|(\lambda_{ij})_{j=1}^\infty\|_{\ell_\infty})_{i=1}^\infty\|_{\ell_\infty} \sum_{i=1}^\infty \pi_H((x'_{ij})) \\
&= \sup_{\|((\lambda_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|((\lambda_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \sum_{i=1}^\infty \pi_H((x'_{ij})) \\
&= \sum_{i=1}^\infty \pi_H((x'_{ij})) \sup_{\|((\lambda_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|((\lambda_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \\
&\leq \sum_{i=1}^\infty \pi_H((x'_{ij})).
\end{aligned}$$

Así,

$$\|B\| \leq \sum_{i=1}^\infty \pi_H((x'_{ij})). \quad (4.11)$$

Veamos ahora que B es operador lineal. En efecto, si $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $((\lambda_{ij})), ((\beta_{ij})) \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$, entonces

$$\begin{aligned}
B(\alpha((\lambda_{ij})) + \delta((\beta_{ij}))) &= B(((\alpha\lambda_{ij}) + ((\delta\beta_{ij}))) \\
&= B(((\alpha\lambda_{ij} + \delta\beta_{ij}))) \\
&= ((\alpha\lambda_{ij} + \delta\beta_{ij}) \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \\
&= ((\alpha\lambda_{ij} \|x'_{ij}\| + \delta\beta_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \\
&= ((\alpha\lambda_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty + ((\delta\beta_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \\
&= ((\alpha\lambda_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty + ((\delta\beta_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \\
&= \alpha((\lambda_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty + \delta((\beta_{ij} \|x'_{ij}\|)_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \\
&= \alpha B((\lambda_{ij})) + \delta B((\beta_{ij})).
\end{aligned}$$

De tal forma se tiene que $B \in \mathcal{L}(\ell_\infty\{\ell_\infty\}, \ell_1\{\ell_H\})$.

Probemos ahora que $C \in \mathcal{L}(\ell_1\{\ell_H\}, F)$. Sean $((\beta_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|C(((\beta_{ij})))\|_F &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_{ij} \right\|_F = \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \left| \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_{ij}, y' \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \beta_{ij} y_{ij}, y' \rangle \right| \leq \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \beta_{ij} y_{ij}, y' \rangle| \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_{ij} \langle y_{ij}, y' \rangle| \\
&\leq \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\beta_{ij})) \|(\langle y_{ij}, y' \rangle)\|_{H^*} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\beta_{ij})) \sup_{\|y'\|_{F'} \leq 1} \|(\langle y_{ij}, y' \rangle)\|_{H^*} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\beta_{ij})) \varepsilon_{H^*}((y_{ij})) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\beta_{ij})) \delta_{H^* \sigma}((y_{ij})) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\beta_{ij})) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \|(\beta_{ij})_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_H} \\
&= \|(\|(\beta_{ij})_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_H})_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_1} \\
&= \|((\beta_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Luego C es continua y $C(((\beta_{ij}))) \in F$. Además,

$$\begin{aligned}
\|C\| &= \sup_{\|((\beta_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \leq 1} \|C(((\beta_{ij})))\| \\
&= \sup_{\|((\beta_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \leq 1} \|((\beta_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que

$$\|C\| \leq 1. \tag{4.12}$$

Veamos que C es operador lineal.

En efecto, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $((b_{ij})), ((a_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
C(\alpha((b_{ij})) + \beta((a_{ij})) &= C(((\alpha b_{ij})) + ((\beta a_{ij}))) \\
&= C(((\alpha b_{ij} + \beta a_{ij}))) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha b_{ij} + \beta a_{ij}) y_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha b_{ij} y_{ij} + \beta a_{ij} y_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha b_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta a_{ij} y_{ij} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} y_{ij} + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} y_{ij} \\
&= \alpha C(((b_{ij}))) + \beta C(((a_{ij})))
\end{aligned}$$

y así $C \in \mathcal{L}(\ell_1\{\ell_H\}, F)$.

Por otro lado, tenemos que dado $x \in E$

$$\begin{aligned}
CBA(x) &= C(B(A(x))) \\
&= C\left(B\left(\left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|}\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right) \\
&= C\left(\left(\left(\frac{\langle x'_{ij}, x \rangle}{\|x'_{ij}\|} \|x'_{ij}\|\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= C\left(\left(\langle x'_{ij}, x \rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij} \\
&= T(x)
\end{aligned}$$

y por 4.9 4.10 4.11, 4.12

$$\|A\| \|B\| \|C\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((x'_{ij})) \leq \mathbf{N}_{H\sigma}(T) + \varepsilon$$

En resumen, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe una factorización de T de acuerdo a (2) que verifica,

$$\|A\| \|B\| \|C\| \leq \mathbf{N}_{H\sigma}(T) + \varepsilon \quad (4.13)$$

Veamos ahora (2) \Rightarrow (1).

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ que factoriza según (2), probemos que T es $H\sigma$ -nuclear.

Sea $P_{ij} : \ell_\infty\{\ell_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$P_{ij}(((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) = \alpha_{ij}$$

Probemos que $P_{ij} \in (\ell_\infty\{\ell_\infty\})'$. En efecto, si $((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$ se tiene que

Entonces,

$$\begin{aligned} |P_{ij}(((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty)| &= |\alpha_{ij}| \\ &\leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_{ij}| \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (\sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha_{ij}|) \\ &= \|((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty\| \end{aligned}$$

Lo cual significa que P_{ij} es continua.

Ahora sean: $((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty$, $((\beta_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_{ij}(\alpha((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty + \beta((\beta_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) &= P_{ij}(((\alpha\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty + ((\beta\beta_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) \\ &= P_{ij}(((\alpha\alpha_{ij} + \beta\beta_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) \\ &= \alpha\alpha_{ij} + \beta\beta_{ij} \\ &= \alpha P_{ij}(((\alpha_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) + \beta P_{ij}(((\beta_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty) \end{aligned}$$

Luego P_{ij} es lineal y en consecuencia $P_{ij} \in (\ell_\infty\{\ell_\infty\})'$.

Recordemos que $A : E \rightarrow \ell_\infty\{\ell_\infty\}$ y por tanto $A : (\ell_\infty\{\ell_\infty\})' \rightarrow E'$. Denotaremos por $x'_{ij} = A'(P_{ij})$. Además, si $x \in E$ y $A(x) = ((u_{ij})_{j=i}^\infty)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$, Como $P_{ij} \in (\ell_\infty\{\ell_\infty\})'$, entonces

$$P_{ij}(A(x)) = P_{ij}(((u_{ij})_{j=i}^\infty)_{i=1}^\infty) = u_{ij}$$

lo cual implica que,

$$u_{ij} = \langle P_{ij}, A(x) \rangle = \langle A'(P_{ij}), x \rangle = \langle x'_{ij}, x \rangle.$$

Luego, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ $u_{ij} = \langle x'_{ij}, x \rangle$, por lo tanto $((u_{ij})_{j=i}^\infty)_{i=1}^\infty = ((\langle x'_{ij}, x \rangle)_{j=i}^\infty)_{i=1}^\infty$

Es decir,

$$\text{para todo } x \in E, \quad A(x) = ((\langle x'_{ij}, x \rangle)_{j=i}^\infty)_{i=1}^\infty \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$$

Por otro lado, por hipotesis, como B es el operador diagonal multiplicación por una sucesión positiva $((b_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$, entonces

$$B(((\lambda_{ij}))) = ((\lambda_{ij}b_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty.$$

Ahora, sea $U = ((\lambda_{ij}))$ tal que para toda $i, j \in \mathbb{N}$, $\lambda_{ij} = 1$. Luego,

$$B(U) = ((\lambda_{ij}b_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty = ((b_{ij})_{j=1}^\infty)_{i=1}^\infty$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|(|b_{ij}|)_{j=1}^{\infty}\|_H &= \sum_{i=1}^{\infty} \|(b_{ij})_{j=1}^{\infty}\|_H \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \|(b_{ij})_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_H} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \| |(b_{ij})_{j=1}^{\infty} \|_{\ell_H} \\
&= \|(\|(b_{ij})_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_H})_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_1} \\
&= \|((b_{ij})_{j=1}^{\infty})_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_1 \ell_H} \\
&= \|B(U)\|_{\ell_1 \ell_H} \\
&\leq \|B\| \|U\| \\
&= \|B\|.
\end{aligned}$$

Como H verifica la condición Δ_2 en 0 entonces ℓ_H es regular y por lo tanto, $\ell_1\{\ell_H\}$ también lo es. Luego existe una base Schauder e_{ij} para $\ell_1\{\ell_H\}$, con $e_{ij} := (0, 0, \dots, 0, e_j, 0, \dots)$, donde $e_j := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ está colocado en la i -ésima posición.

Denotemos por $y_{ij} := C(e_{ij})$ y sea $((\beta_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$ luego se tiene que

$$((\beta_{ij})) = \sum_i \sum_j \beta_{ij} e_{ij}$$

y como C es lineal y continua entonces,

$$\begin{aligned}
C(((\beta_{ij}))) &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} e_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C(\beta_{ij} e_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} C(e_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_{ij}.
\end{aligned}$$

Ahora,

Sea $x \in E$, entonces

$$\begin{aligned}
T(x) &= (CBA)(x) \\
&= (CB)(A(x)) \\
&= CB\left(\left(\left(\langle x'_{ij}, x \rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= C\left(B\left(\left(\left(\langle x'_{ij}, x \rangle\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty}\right)\right) \\
&= C\left(\left(\left(\langle x'_{ij}, x \rangle b_{ij}\right)_{j=1}^{\infty}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \langle x'_{ij}, x \rangle y_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle b_{ij} x'_{ij}, x \rangle y_{ij}
\end{aligned}$$

Si llamamos $w'_{ij} = b_{ij}x'_{ij}$, tenemos que

$$T(x) = CBA(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle w'_{ij}, x \rangle y_{ij},$$

es decir,

$$T(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle w'_{ij}, \cdot \rangle y_{ij}.$$

Falta probar que $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((w'_{ij}))\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) < \infty$. En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) &= \delta_{H^*\sigma}((C(e_{ij}))) \\
&\leq \|C\| \delta_{H^*\sigma}((e_{ij})) \\
&\leq \|C\| \|e_{ij}\|_{H^*} \\
&= \|C\|
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((w'_{ij})) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|C\| \pi_H((w'_{ij})) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((w'_{ij})) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((b_{ij}x'_{ij})) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}x'_{ij}\|)) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\| \|x'_{ij}\|)) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\| \|A'(P_{ij})\|)) \\
&\leq \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\| \|A'\| \|P_{ij}\|)) \\
&= \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\| \|A\| \|P_{ij}\|)) \\
&= \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\| \|P_{ij}\|)) \\
&= \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \|P_{ij}\| \pi_H((\|b_{ij}\|)) \\
&= \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{\|(\alpha_{ij})\| \leq 1} |P_{ij}((\alpha_{ij}))| \pi_H((\|b_{ij}\|)) \\
&= \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{\|(\alpha_{ij})\| \leq 1} |\alpha_{ij}| \pi_H((\|b_{ij}\|)) \\
&\leq \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{|\alpha_{ij}| \leq 1} |\alpha_{ij}| \pi_H((\|b_{ij}\|)) \quad \text{por 4.8} \\
&\leq \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((\|b_{ij}\|)) \\
&\leq \|A\| \|C\| \sum_{i=1}^{\infty} \|(\|b_{ij}\|)_{j=1}^{\infty}\|_H \\
&\leq \|A\| \|C\| \|B\| \\
&= \|A\| \|B\| \|C\| \\
&< \infty
\end{aligned}$$

De manera que T es $H\sigma$ -nuclear y además

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{H\sigma}(T) &= \inf\{g_{H\sigma}(z) : \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T\} \\
&\leq g_{H\sigma}(z) \text{ con } \widehat{\Phi}_{g_{H\sigma}}(z) = T \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((z'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) : z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z'_{ij} \otimes y_{ij}\right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H((w'_{ij})_{j=1}^{\infty}) \delta_{H^*\sigma}((y_{ij})_{j=1}^{\infty}) \\
&\leq \|A\| \|B\| \|C\|
\end{aligned}$$

Luego,

$$N_{H\sigma}(T) \leq \inf\{\|A\| \|B\| \|C\|\} \quad (4.14)$$

donde se ha tomado el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles según las condiciones establecidas en (2).

Ahora bien, por 4.13

$$\begin{aligned}
\inf\{\|A\| \|B\| \|C\|\} &\leq \|A\| \|B\| \|C\| \\
&\leq N_{H\sigma}(T) + \epsilon
\end{aligned}$$

y como ϵ fué escogido en forma arbitraria,

$$\inf\{\|A\| \|B\| \|C\|\} \leq N_{H\sigma}(T) \quad (4.15)$$

Finalmente, de 4.14 y 4.15

$$\mathbf{N}_{H\sigma}(T) = \inf\{\|C\| \|B\| \|A\|\},$$

con lo cual termina la prueba. \square

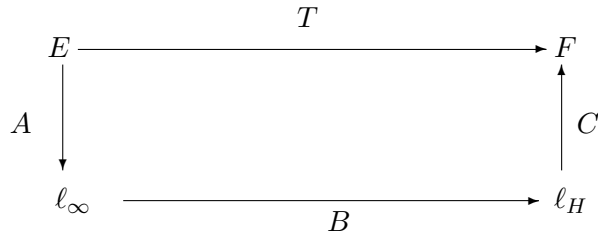
Vale la pena destacar, que si en la expresión que define a la norma tensorial $g_{H\sigma}(z)$, se toma el ínfimo, no sobre las representaciones de z del tipo

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \otimes y_{ij},$$

sino sobre representaciones del tipo

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i,$$

entonces el funcional $g_{H\sigma}$ no necesariamente cumpliría la desigualdad triangular; sería una casi-norma en cualquier producto tensorial $E \otimes F$. En tal caso, se podría hacer un teorema semejante al anterior. La diferencia radica en que en ese caso, el diagrama de factorización sería el siguiente:



En este caso, la demostración sería totalmente análoga a la del teorema de caracterización (4.2.1) probado en esta sección.

Capítulo 5

Ejemplos

En este capítulo se presentan dos ejemplos no triviales de operadores $H\sigma$ -nucleares.

A partir de la caracterización de los operadores $H\sigma$ -nucleares se consigue el siguiente resultado; que presenta el primer ejemplo.

Proposición 5.0.1. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Todo operador positivo*

$$S : L_\infty(\mu) \rightarrow \ell_1\{\ell_H\}$$

es $H\sigma$ -nuclear.

Demostración. Como $\ell_1\{\ell_H\}$ es retículo de Banach orden completo entonces

$$\sup\{S(f) : \|f\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1\} \text{ existe y es un elemento de } \ell_1\{\ell_H\}$$

Esto es,

$$\sup_{\|f\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1} S(f) := ((g_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$$

Además es mayor que cero ya que S es un operador positivo

Dada una función $f \in L_\infty(\mu)$ denotemos $S(f) = ((f_{ij}^s)) \in \ell_1\{\ell_H\}$ y consideremos las aplicaciones

$$A : L_\infty(\mu) \rightarrow \ell_\infty\{\ell_\infty\}$$

$$D_g : \ell_\infty\{\ell_\infty\} \rightarrow \ell_1\{\ell_H\}$$

$$I : \ell_1\{\ell_H\} \rightarrow \ell_1\{\ell_H\}$$

Definidas de la siguientes forma:

Para toda $h \in L_\infty(\mu)$,

$$A(h) = \begin{cases} \left(\left(\frac{h_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) & \text{si } g_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{si } g_{ij} = 0 \end{cases}$$

Para cada $((b_{ij})) \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$,

$$D_g(((b_{ij}))) := ((b_{ij}g_{ij})).$$

Para todo $((a_{ij})) \in \ell_1\{\ell_H\}$,

$$I(((a_{ij}))) = ((a_{ij}))$$

Veamos ahora que $A \in \mathcal{L}(L_\infty(\mu), \ell_\infty\{\ell_\infty\})$

En efecto

Si $f \in L_\infty(\mu)$ es tal que $\|f\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1$ entonces

$$S(f) = ((f_{ij}^s)) \in \ell_1\{\ell_H\} \quad \text{y} \quad ((f_{ij}^s)) \leq \sup_{\|f\|_{L_\infty(\mu)}} S(f) = ((g_{ij}))$$

Por lo tanto, $f_{ij}^s \leq g_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ y así

$$\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}} \leq 1 \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|A(f)\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} &= \left\| \left(\left(\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \right\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \\ &= \sup_i \left(\sup_j \left(\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Ahora, para cada $h \in L_\infty(\mu)$, con $\|h\|_{L_\infty(\mu)} \neq 0$, como $\left\| \frac{h}{\|h\|} \right\|_{L_\infty(\mu)} = 1$, entonces

$$\left\| A \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1.$$

Además,

$$\frac{1}{\|h\|} \|A(h)\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} = \left\| \frac{1}{\|h\|} A(h) \right\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} = \left\| A \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1$$

y se sigue que

$$\|A(h)\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq \|h\| < \infty.$$

Supongamos que $\|h\| = 0$, entonces $h = 0$ y por lo tanto $A(h) = 0$. De nuevo se cumple

$$\|A(h)\| = 0 \leq \|h\| < \infty.$$

Por consiguiente hemos probado así que A está bien definida y es continua.

Además,

$$\|A\| = \sup_{\|h\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1} \|A(h)\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq \sup_{\|h\|_{L_\infty(\mu)} \leq 1} \|h\|_{\ell_\infty(\mu)} \leq 1$$

y en consecuencia $\|A\| \leq 1$.

Veamos que A es aplicación lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, w \in L_\infty(\mu)$. Entonces,

$$\begin{aligned} A(\alpha f + \beta w) &= \left(\left(\frac{\alpha f_{ij}^s + \beta w_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\alpha f_{ij}^s}{g_{ij}} + \frac{\beta w_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \\ &= \left(\left(\frac{\alpha f_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) + \left(\left(\frac{\beta w_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \\ &= \alpha \left(\left(\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) + \beta \left(\left(\frac{w_{ij}^s}{g_{ij}} \right) \right) \\ &= \alpha A(f) + \beta A(w) \end{aligned}$$

Luego, $A \in \mathcal{L}(L_\infty(\mu), \ell_\infty\{\ell_\infty\})$.

Por otro lado, consideremos $((b_{ij})) \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$.

$$\begin{aligned} \|D_g(((b_{ij})))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} &= \|((b_{ij}g_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\ &= \|(\| (b_{ij}g_{ij})_{j=1}^\infty \|_{\ell_H})_{i=1}^\infty\|_{\ell_1} \\ &= \sum_{i=1}^\infty \| (b_{ij}g_{ij}) \|_{\ell_H} \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \|(\sup_i \sup_j \{b_{ij}\}g_{ij})\|_{\ell_H} \\ &= \sum_{i=1}^\infty \|(\|((b_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}}g_{ij})\|_{\ell_H} \\ &= \|((b_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \sum_{i=1}^\infty \| (g_{ij}) \|_{\ell_H} \\ &= \|((b_{ij}))\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \|((g_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto D_g está bien definida y es continua.

Ahora:

$$\begin{aligned}
\|D_g\| &= \sup_{\|(b_{ij})\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|D_g((b_{ij}))\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\
&\leq \sup_{\|(b_{ij})\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|(b_{ij})\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \|(g_{ij})\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\
&= \|(g_{ij})\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \sup_{\|(b_{ij})\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \leq 1} \|(b_{ij})\|_{\ell_\infty\{\ell_\infty\}} \\
&\leq \|(g_{ij})\|_{\ell_1\{\ell_H\}} \\
&= \|g\|_{\ell_1\{\ell_H\}}
\end{aligned}$$

Tenemos así que

$$\|D_g\| \leq \|g\|_{\ell_1\{\ell_H\}}$$

Veamos que D_g es lineal

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $((a_{ij}), (b_{ij})) \in \ell_\infty\{\ell_\infty\}$

$$\begin{aligned}
D_g(\alpha((a_{ij})) + \beta((b_{ij}))) &= D_g((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})) \\
&= ((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})g_{ij}) \\
&= ((\alpha a_{ij}g_{ij} + \beta b_{ij}g_{ij})) \\
&= ((\alpha a_{ij}g_{ij})) + ((\beta b_{ij}g_{ij})) \\
&= \alpha((a_{ij}g_{ij})) + \beta((b_{ij}g_{ij})) \\
&= \alpha D_g((a_{ij})) + \beta D_g((b_{ij}))
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D_g \in \mathcal{L}(\ell_\infty\{\ell_\infty\}, \ell_1\{\ell_H\})$$

Es evidente que

$$I \in \mathcal{L}(\ell_1\{\ell_H\}, \ell_1\{\ell_H\})$$

Veamos ahora que $S = ID_gA$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(ID_gA)(f) &= I(D_g(A(f))) \\
&= I\left(D_g\left(\left(\left(\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}}\right)\right)\right)\right) \\
&= I\left(\left(\left(\frac{f_{ij}^s}{g_{ij}}g_{ij}\right)\right)\right) \\
&= I((f_{ij}^s)) \\
&= ((f_{ij}^s)) \\
&= S(f)
\end{aligned}$$

Por tanto el operador S es H_σ -nuclear. □

Utilizando el ejemplo anterior, se puede obtener un resultado parecido en una clase algo distinta de operadores positivos, como se expresa en el siguiente resultado.

Teorema 5.0.2. *Sea G un espacio M -abstracto, y sea H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en 0. Entonces todo homomorfismo de retículos*

$$T : G \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$$

es $H\sigma$ -nuclear.

Demostración. Recordamos primero que $\ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\} = (c_0\{\ell_{H^*}(\Gamma_i)\})'$ isométricamente.

Consideremos $T : G \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$ un homomorfismo de retículos, así

$$T'' : G'' \rightarrow (\ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\})'' = (c_0\{\ell_{H^*}(\Gamma_i)\})'''$$

también es un operador positivo por el teorema de Ando, ver teorema 1.4.19 de [10].

Ahora bien, el espacio $(c_0\{\ell_{H^*}(\Gamma_i)\})' = \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$ es complementado en $(c_0\{\ell_{H^*}(\Gamma_i)\})'''$, así que existe un operador proyección positiva

$$P : (c_0\{\ell_{H^*}(\Gamma_i)\})''' \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\},$$

entonces

$$PT'' : G'' \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$$

de tal manera que si J_G denota la inclusión natural de G en G'' , por lo que

$$PT'' J_G = T.$$

De otro lado, siendo G espacio M -abstracto, el espacio G' , por [15] teorema 8.5, es reticularmente isométrico a $L_1(\mu)$ para algún espacio de medida (Ω, Σ, μ) . De lo cual G'' es reticularmente isométrico a $L_\infty(\mu)$. Denotemos por

$$B : G'' \rightarrow L_\infty(\mu)$$

la correspondiente aplicación isometría positiva y notemos que

$$PT'' B^{-1} B J_G = T.$$

Ahora, el operador S definido por $S := PT'' B^{-1}$ es positivo. Dado que $T = S B J_G$, que el operador $B J_G$ pertenece a $\mathcal{L}(G, L_\infty(\mu))$ y que $\mathcal{N}_{H\sigma}$ es un ideal de operadores, para probar que T es $H\sigma$ -nuclear bastará con que S sea $H\sigma$ -nuclear.

Veremos que en general se verifica que, para todo operador positivo

$$S : L_\infty(\mu) \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$$

es $H\sigma$ -nuclear.

En efecto, como el sistema de vectores unitarios $\{e_{ig} : g \in \Gamma_i, i \in \mathbb{N}\}$ es una base en $\ell_H(\Gamma_i)$, si

$$S(\chi_\Omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} w_{rs} e_{i(r)g(s)},$$

entonces $\{e_{i(r)g(s)} : r, s \in \mathbb{N}\}$ es una base en el espacio imagen. De lo anterior, el enunciado equivale a que cualquier operador positivo

$$S : L_\infty(\mu) \rightarrow \ell_1\{\ell_H\}$$

sea $H\sigma$ -nuclear, lo cual está garantizado por resultado de la proposición 5.0.1. En consecuencia, El operador T es $H\sigma$ -nuclear. \square

Conclusiones

De acuerdo a [7], dada una función de Orlicz H , con la propiedad Δ_2 en cero, normalizada ($H(1) = 1$), con función de Orlicz complementaria H^* y dado un número real $0 \leq \sigma < 1$, se puede considerar una norma tensorial $g_{H\sigma}$ definida como sigue: Para cada par de espacios de Banach E y F y para cada $z \in E \otimes F$, $g_{H\sigma}(z; E, F) = \inf \sum_{i=1}^n \pi_H((x_{i,j})) \delta_{H^*\sigma}((y_{i,j}))$, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de la forma $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \otimes y_{i,j}$ donde, para cada sucesión (x_i) en un espacio de Banach se define $\pi_H((x_i)) = \inf \{ \rho > 0 : \sum_{i=1}^{\infty} H(\frac{\|x_i\|}{\rho}) \leq 1 \}$ y $\delta_{H\sigma}((x_i)) = \sup_{x' \in B_{E'}} \|(\langle x_i, x' \rangle |^{1-\sigma} \|x_i\|^\sigma)\|_H$, siendo $\|\cdot\|_H$ la norma de Orlicz en ℓ_H .

Todo elemento z de $E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F$ admite una representación de la forma

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) < \infty \quad (1)$$

además, $g_{H\sigma}(z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_H \left((x_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \delta_{H^*\sigma} \left((y_{i,j})_{j=1}^{\infty} \right) \right\}$.

tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de z que cumplan la condición (1).

Dados dos espacios de Banach E y F , un operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice que es $H\sigma$ -absolutamente sumante si existe un número real $C > 0$, tal que para toda sucesión (x_i) de elementos de E , con $\delta_{H\sigma}((x_i)) < \infty$, se cumple que $\|((T(x_i)))\|_H \leq C_T \delta_{H\sigma}((x_i))$

También se cuenta con un ideal normado de operadores $\mathcal{P}_{H\sigma}$, donde para cada par de espacios de Banach E y F la respectiva componente del ideal es el espacio $\mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$, de los operadores $H\sigma$ -absolutamente sumantes de E en F , con norma definida para cada $T \in \mathcal{P}_{H\sigma}(E, F)$ por

$$\mathbf{P}_{H\sigma}(T) = \inf C_T.$$

Además, para todo par de espacios de Banach E y F , $(E \widehat{\otimes}_{g_{H\sigma}} F)' = \mathcal{P}_{H^*\sigma}(F, E')$ isométricamente.

Lo anterior fué estudiado en [7] y el estudio se continuó en el presente trabajo obteniendo los resultados que se mencionan a continuación.

El ideal minimal normado de operadores, asociado a la tensornorma $g_{H\sigma}$ y denotado por $\mathcal{N}H\sigma$, admite la siguiente caracteriación para los elementos de sus componentes.

Sean, E, F dos espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en cero, tal que $H(1) = 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1) T es $H\sigma$ -nuclear

2) T factoriza según el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F \\
 A \downarrow & & \uparrow C \\
 \ell_\infty\{\ell_\infty\} & \xrightarrow{B} & \ell_1\{\ell_H\}
 \end{array}$$

donde A y C son continuas, B es el operador diagonal multiplicación por una sucesión positiva $((b_{ij}))$ de $\ell_1\{\ell_H\}$.

Además, $\mathbf{N}_{H\sigma}(T) = \inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$, tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles según las condiciones establecidas en (2).

También se tienen los dos siguientes resultados, que plantean ejemplos no triviales de elementos de componentes de $\mathcal{N}_{H\sigma}$.

1. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Todo operador positivo

$$S : L_\infty(\mu) \rightarrow \ell_1\{\ell_H\}$$

es $H\sigma$ -nuclear.

2. Sea G un espacio M -abstracto, y sea H una función de Orlicz con la propiedad Δ_2 en 0. Entonces todo homomorfismo de retículos

$$T : G \rightarrow \ell_1\{\ell_H(\Gamma_i)\}$$

es $H\sigma$ -nuclear.

La introducción de la norma tensorial $g_{H\sigma}$ en [7] y con la caracterización, dada en el presente trabajo, de $\mathcal{N}_{H\sigma}$, dejan problemas que pueden ser objeto de futuros proyectos, como los que se mencionan a continuación en la sección de problemas abiertos.

Problemas abiertos

Dada la norma tensorial $g_{H\sigma}$, existen ciertos ideales normados de operadores asociados a ella en el sentido de [1]. El conocimiento de las propiedades de las componentes de dichos ideales son asunto de interés que enriquecen la teoría de normas tensoriales e ideales de operadores. En este sentido, en [7] se caracterizó el ideal $\mathcal{P}_{H\sigma}$ y en el presente trabajo, el ideal minimal $\mathcal{N}_{H\sigma}$ asociado a la norma tensorial $g_{H\sigma}$. Queda por caracterizar un importante ideal de operadores; el ideal maximal asociados a $g_{H\sigma}$. Al respecto, como problemas abiertos se pueden abordar los siguientes:

1. caracterizar los elementos de las componentes del ideal maximal asociado a $g_{H\sigma}$. Las componentes de dicho ideal, se pueden denominar operadores $H\sigma$ -integrales.
2. ¿qué condiciones se deben cumplir para que los operadores $H\sigma$ -nucleares coincidan con los operadores $H\sigma$ -integrales?.
3. encontrar propiedades métricas y topológicas de $g_{H\sigma}$.

Estos problemas pueden formularse incluso para un proyecto de tesis a nivel de Doctorado, ya que este tipo de problemas generalmente implica dificultades considerables y la solución ha requerido del uso de técnicas de la teoría local de espacios de Banach, tales como ultraproductos de espacios de Banach, representabilidad finita de espacios (retículos) de Banach y estructura incondicional local de espacios (retículos) de Banach entre otras.

Bibliografía

- [1] Defant, A. and Floret, K.: *Tensor norms and operator ideals*. North Holland Math. Studies. Amsterdam. 1993.
- [2] Grothendieck. A. *Resumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo (1956), 1-79.
- [3] Grothendieck. A. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
- [4] Lacey, H. Elton.: *The isometric theory of classical Banach spaces*. Springer-Verlag, Berlin et al. 1974.
- [5] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg.1977
- [6] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II*. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg.1979.
- [7] Loaiza, G., Acevedo , W., *Sobre un ideal de operadores con parámetros, una función de Orlicz y un número real*. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol XIV no.1, (2006) 45–58
- [8] Matter U. . *Absolutely continuous operators and super-reflexivity*. Inagural dissertation. Zurich. (1985).
- [9] Matter U. . *Factoring through interpolation spaces and super-reflexive Banach spaces*. Rev. Roumane Matht. Pures Appl. 34, (1989) 147-156.
- [10] Meyer-Nieberg, P. *Banach lattices*. Springer Verlag, Berlin et al. 1991.
- [11] Nicolescu, C.P. *Absolute continuity and weak compactness*. Bulletin of the American Mathematical Society, 81 1064-1066. 1975
- [12] Pietsch, A.: *Operator Ideals*. North Holland Math. Library. Amsterdam, New York. 1980.
- [13] Rao, M. M. y Ren, Z.D.:*Theory of Orlicz spaces*. Marcel Dekker Inc. 1991.
- [14] Sánchez Pérez, E. A. :*Ideales de operadores absolutamente continuos y normas tensoriales asociadas*. Tesis doctoral. Universidad politècnica de Valencia, Valencia. 1997.
- [15] Schaefer, H. H.:*Banach lattices and positive operators*. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1974.

- [16] Young. W.H. On classes of summable functions and their Fourier series. Proc. Roy. Soc. 87 (1912), 225-229.
- [17] Zaanen. A.C. Linear Analysis. North Holland Pub. Co. Amsterdam, 1953.
- [18] Zygmund. A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press, London 1959 (segunda edición).