



Vigilada Mineducación

Construcción de un Portafolio en el Mercado Brasileño: un Enfoque Basado en el Modelo de Black-Litterman

Construction of a Portfolio in the Brazilian Market: A Black-Litterman Approach

Lizeth Carolina Palacios Racines  
Genner Enrique Miller Rengifo

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Administración Financiera

Asesor  
M.Sc. Juan Carlos Botero Ramírez

UNIVERSIDAD EAFIT  
Escuela de Finanzas, Economía y Gobierno  
Maestría en Administración Financiera  
Santiago de Cali  
2024

## **Resumen**

El mercado de renta variable representa un gran volumen de negociación, modelando la formación de precios y representando buenas oportunidades de inversión en el mercado nacional e internacional. Bajo este contexto, con el interés de desarrollar un portafolio de inversión en Brasil, la presente investigación busca la construcción de un portafolio compuesto por activos de renta variable a partir del modelo Black-Litterman (BL), con el propósito de evaluar sus resultados frente a otros modelos como Markowitz y CAPM. Se modelan portafolios a partir de retornos con periodicidad semanal y un horizonte de tiempo superior a 10 años, a fin de comparar las rentabilidades de BL con las obtenidas a través de los modelos mencionados anteriormente. De esa forma, se concluye que el modelo de Markowitz ofrece oportunidades de inversión más diversificadas, mientras que BL es más concentrado, pero apuntando a las expectativas de retorno más altas.

## **Palabras Clave:**

Modelo de Black-Litterman, Portafolio de Inversión, Renta Variable, Optimización de Portafolios, Expectativas de Retorno.

## **Clasificación JEL:**

C11, D81, F65, G11, G15

**Abstract**

The equity market represents a significant trading volume, modeling price formation and offering good investment opportunities in both national and international markets. In this context, and with the aim of developing an investment portfolio in Brazil, this research focuses on constructing a portfolio composed of equity assets using the Black-Litterman (BL) model to evaluate its performance compared to other models such as Markowitz and CAPM. Portfolios with weekly periodicity and a time horizon exceeding 10 years will be modeled to compare the returns of BL and the aforementioned models. The findings indicate that the Markowitz model provides more diversified investment opportunities, while BL is more concentrated but aligns with higher return expectations.

**Key Words:**

Black-Litterman Model, Investment Portfolio, Equity Market, Portfolio Optimization, Expected Returns.

**Tabla de Contenido**

- 1. Introducción ..... 7
  - 1.1. Situación de Estudio ..... 8
  - 1.2. Contribuciones Esperadas ..... 8
  - 1.3. Pregunta de Investigación ..... 9
  - 1.4. Objetivos ..... 9
    - 1.4.1 Objetivo General ..... 9
    - 1.4.2 Objetivos Específicos ..... 9
- 2. Marco Teórico ..... 10
  - 2.1. Modelo de Markowitz ..... 14
  - 2.2. Modelo del CAPM ..... 16
  - 2.3. Modelo de Black- Litterman ..... 17
  - 2.4. Medidas de Desempeño ..... 21
- 3. Metodología ..... 22
  - Recolección de Datos: ..... 23
  - Detalle de Activos del Portafolio: ..... 24
  - Modelo Matemático: ..... 27
  - Simulación de Portafolios: ..... 27
  - Evaluación de Desempeño: ..... 27
- 4. Resultados ..... 27
  - 4.1. Modelo de Markowitz ..... 27
  - 4.2. Modelo Black Litterman ..... 33
- 5. Conclusiones y Recomendaciones ..... 40
- 6. Referencias Bibliográficas ..... 43

## Lista de Tablas

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Descripción Acciones del Portafolio.....              | 26 |
| Tabla 2. Retornos Promedio.....                                | 27 |
| Tabla 3. Matriz de Varianza - Covarianza .....                 | 28 |
| Tabla 4. Resultados Portafolio usando la Media.....            | 29 |
| Tabla 5. Resultados Portafolio usando la Mediana .....         | 31 |
| Tabla 6. Resultados Modelo CAPM por Acción.....                | 32 |
| Tabla 7. Resultados Ponderados por Activo .....                | 33 |
| Tabla 8. Resultados Factor Lambda.....                         | 35 |
| Tabla 9. Retornos de Equilibrio .....                          | 35 |
| Tabla 10. Comparativo de Retornos.....                         | 35 |
| Tabla 11. Expectativas de Retorno modelo Black-Litterman ..... | 38 |
| Tabla 12. Portafolios de Inversión por Modelo.....             | 39 |

## **Lista de Gráficos**

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 1. Retornos Históricos Bovespa .....    | 23 |
| Gráfico 2. Retornos Históricos Bono Brasil..... | 26 |

## **Lista de Ecuaciones**

|   |    |
|---|----|
| Ecuación 1. Retornos del Modelo CAPM.....               | 16 |
| Ecuación 2. Retornos Implícitos en Equilibrio .....     | 18 |
| Ecuación 3. Retornos Esperados BL .....                 | 20 |
| Ecuación 4. Varianza de los Retornos Esperados BL ..... | 20 |
| Ecuación 5. Ratio de Sharpe .....                       | 21 |
| Ecuación 6. Factor Lambda.....                          | 34 |
| Ecuación 7. Factor Omega .....                          | 37 |

## **1. Introducción**

La globalización ha permitido que los inversionistas puedan expandirse a mercados internacionales. El mercado de capitales tiene un rol importante en la economía mundial, puesto que permite invertir en diferentes mercados, además de aprovechar y beneficiarse de los instrumentos de cobertura. Dentro de este mercado, tanto el mercado de renta variable como de renta fija ofrecen buenas oportunidades para obtener altas rentabilidades a través de los portafolios de inversión o creación de carteras.

En el ámbito de las finanzas, la gestión de inversiones y la construcción de carteras representan áreas de estudio cruciales para maximizar los rendimientos y minimizar los riesgos asociados a las inversiones. La gestión eficiente de carteras de inversión es un desafío que lleva a una mejora continua de los modelos existentes de optimización de carteras, debido a que cada día el entorno financiero es más dinámico e incierto.

En ese sentido, Markowitz (1952) presenta un modelo dentro de la teoría moderna de las carteras para crear portafolios de inversión eficientes, el cual parte de la media-varianza para evaluar y comparar el rendimiento y el riesgo de diferentes carteras de inversión. La aplicación de este modelo arroja resultados poco diversificados e intuitivos, con parámetros inestables y sensibles en la práctica (Drobtz, 2001); por lo anterior, generalmente, este se complementa con el cálculo de algunas medidas de desempeño que permiten obtener una estimación más robusta.

El Modelo de Black-Litterman, por su parte, representa una evolución significativa en la teoría de carteras. Este modelo aborda algunas de las limitaciones del Modelo de Markowitz, como la sensibilidad a las estimaciones de parámetros y la falta de consideración de información subjetiva del inversionista (Black y Litterman, 1990). Al incorporar opiniones subjetivas del inversionista y ajustar las estimaciones de rendimiento, ofrece una herramienta más completa

y práctica para la construcción de carteras, al incluir las percepciones de futuras rentabilidades de los inversionistas. Esto último se incluye mediante el enfoque bayesiano, el cual incorpora el razonamiento probabilístico y la actualización de creencias en la toma de decisiones de inversión (Bayes y Price, 1763).

Considerando el contexto global, es relevante destacar la importancia de mercados emergentes como el mercado accionario de Brasil. Este país es, sin duda, una de las economías más grandes y dinámicas de América Latina y ofrece oportunidades únicas y desafíos particulares para los inversionistas. Analizar la aplicación de modelos como el de Markowitz y Black-Litterman en el contexto del mercado accionario brasileño proporciona una perspectiva valiosa sobre cómo estos enfoques pueden adaptarse a entornos financieros diversos y heterogéneos.

En esta tesis, se explora en profundidad el Modelo de Black-Litterman, abordando el mercado de renta variable de las acciones que cotizan en la bolsa de São Paulo. Para ello, se analizan los fundamentos teóricos, las metodologías de aplicación y los casos de estudio relevantes en el ámbito de la gestión de inversiones; además, se examina la relación entre este modelo y su impacto en la práctica de la gestión de activos, en un entorno financiero dinámico y complejo.

### **1.1. Situación de Estudio**

Este trabajo permitirá entender mejor cómo las percepciones del mercado y los datos históricos pueden integrarse para mejorar las decisiones de inversión en mercados emergentes. Asimismo, ofrecerá una visión sobre la adaptabilidad del modelo BL en un contexto económico y financiero distinto al de los mercados desarrollados, con lo cual se pretende contribuir al cuerpo académico de la gestión de inversiones y a la práctica financiera en Brasil.

### **1.2. Contribuciones Esperadas**

- Desarrollo de una metodología adaptada para la implementación del modelo BL en el mercado brasileño.

- Análisis comparativo que pueda servir de guía para inversores interesados en mercados emergentes.
- Propuesta de recomendaciones para la gestión de portafolios en contextos de alta volatilidad e incertidumbre económica.

Este estudio no solo pretende enriquecer la literatura existente sobre la gestión de portafolios en mercados emergentes, sino también proporcionar herramientas prácticas para los inversores interesados en cuanto a optimizar sus estrategias de inversión en Brasil.

### **1.3. Pregunta de Investigación**

¿Qué tan eficiente es el modelo Black-Litterman ajustado a las expectativas de los inversores y las condiciones específicas de un mercado emergente, como el mercado de Brasil?

### **1.4. Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo General**

Construir un portafolio de activos de renta variable por medio de la aplicación del modelo de Black-Litterman y comparar los resultados obtenidos con el modelo de Markowitz y CAPM.

#### **1.4.2 Objetivos Específicos**

- Identificar y definir las acciones del Bovespa implementadas en la realización del modelo.
- Explicar la funcionalidad y los parámetros de los modelos que se utilizarán.
- Explicar y definir las medidas de desempeño utilizadas en la elaboración y la evaluación del modelo.
- Evaluar y analizar los resultados obtenidos con el modelo de Black-Litterman.
- Comparar los resultados obtenidos del modelo de Black-Litterman con el Modelo de Markowitz y el CAPM.

## 2. Marco Teórico

La estructuración adecuada de un portafolio ha sido, durante muchos años, uno de los principales retos a los que se enfrentan los inversionistas, dado que hay una gran cantidad de factores relevantes que estos deben tener en cuenta. Como lo menciona Yamim et al. (2023), elegir de manera óptima un portafolio es un problema que viene desde el nacimiento de los mercados, razón por la cual surgen muchas inquietudes acerca de las consideraciones que se deben tener en un portafolio de inversiones y la ponderación que se debe asignar a las variables y parámetros para obtener el resultado esperado. Según Bodie et al. (2014), el objetivo de un portafolio de inversiones es encontrar la combinación óptima de activos que ofrezca el mayor rendimiento esperado posible para un nivel de riesgo asumido o, lo que es lo mismo, encontrar el menor riesgo posible para un nivel de retorno asumido. Esto implica seleccionar activos individuales y asignar pesos a cada uno, de manera que la cartera maximice el rendimiento esperado y minimice la volatilidad o el riesgo de pérdida.

Ahora bien, Markowitz (1952) explica la relación entre el riesgo y el retorno de los activos y manifiesta que se puede minimizar y maximizar, respectivamente, con la elaboración de un portafolio que permita no solo invertir en una acción individual sino en crear un conjunto de inversiones simultáneas, con el objetivo de generar un retorno superior a un riesgo menor. Esta idea conlleva pensar en la importancia de la diversificación de los portafolios de inversiones, dado que se puede distribuir el riesgo de los activos que lo componen, reduciendo así el riesgo total de la cartera. “La diversificación es el único almuerzo gratis en Wall Street. La diversificación, combinada con una asignación adecuada de activos, es la piedra angular de la inversión prudente” (Malkiel, 2021).

Con el fin de abordar esta problemática, Markowitz (1952) elaboró un modelo para la creación de carteras óptimas que maximizaran el rendimiento mientras reducían su riesgo desde el concepto de diversificación y correlación, a través de una matriz de covarianza para medir cómo

dichos activos se comportaban conjuntamente en un periodo determinado y generar una frontera eficiente de inversión. Este modelo introdujo el concepto de eficiencia en la asignación de activos, al destacar la importancia de considerar tanto el rendimiento esperado como la volatilidad de los activos en la toma de decisiones de inversión y se presenta el concepto de la curva de indiferencia entre riesgo y rendimiento, que muestra cómo los inversionistas pueden elegir entre diferentes carteras en función de sus preferencias personales de riesgo y rendimiento.

Por otro lado, este modelo ha sido objeto de numerosas críticas a lo largo de los años. Algunos expertos argumentan que el modelo simplifica en exceso la naturaleza del riesgo y la relación entre rendimiento y riesgo. Por ejemplo, Haugen (1999) sostiene que la teoría de Markowitz falla al no considerar adecuadamente la capacidad de algunos inversionistas para identificar y aprovechar oportunidades de inversión infravaloradas; asimismo, argumenta que esta incapacidad para reconocer activos infravalorados resulta en una subestimación del potencial de ganancias. Por su parte, Taleb (2008) argumenta que el Modelo de Markowitz no considera los eventos extremos o “cisnes negros”, es decir, eventos altamente improbables pero impactantes que pueden tener consecuencias significativas en el mercado; según este mismo autor Haga clic o pulse aquí para escribir texto., la incapacidad del modelo para anticipar tales eventos lo hace inadecuado para la gestión de riesgos en un mundo caracterizado por la incertidumbre extrema.

Complementando la teoría del valor de riesgo, William Sharpe (1964) desarrolla el Capital Asset Pricing Model, más conocido como CAPM. Este modelo es una herramienta de evaluación entre el riesgo y el rendimiento de los activos financieros desde una fórmula cuantitativa, que permite relacionar dicho rendimiento esperado con su medida de volatilidad o riesgo sistémico conocido como Beta, enfatizando que el riesgo sistémico no podría ser eliminado si se desarrolla la diversificación, debido a la incertidumbre propia del mercado. El

CAPM se basa en la premisa de que los inversionistas son racionales y buscan maximizar su utilidad, teniendo en cuenta el riesgo y el rendimiento de sus inversiones.

Entre tanto, una de las principales críticas de este modelo proviene de Fama y French (1992), quienes cuestionan la capacidad del CAPM para explicar las diferencias en los rendimientos de las acciones. Afirman que las características de las acciones, como el tamaño de la empresa y las *ratios* de valoración, tienen un impacto significativo en los rendimientos, lo que sugiere que el CAPM podría no capturar completamente el riesgo sistemático. Haga clic o pulse aquí para escribir texto.. Del mismo modo, Merton (1973) realiza una crítica desde una dimensión temporal, sosteniendo que el CAPM no tiene en cuenta adecuadamente el efecto del horizonte temporal en la evaluación del riesgo y el rendimiento de los activos financieros; este autor indica que la falta de consideración de la dinámica temporal puede llevar a una subestimación del riesgo real asociado con los activos.

En línea con lo anterior, Cover (1991) complementa la teoría de rendimiento y riesgo con el diseño de un modelo basado en la teoría de la información, para lograr rendimientos positivos en entornos desconocidos, midiendo la incertidumbre de las inversiones. Cabe agregar, sobre la teoría del CAPM, que Fama y French (2004) profundizaron en un modelo de activos de capital basado en tres factores que superan las limitaciones del CAPM, al ampliar las diferencias que existen en el rendimiento de las acciones. Este modelo plantea que el factor de Rendimiento del Mercado mide la diferencia del mercado y la tasa libre de riesgo, el factor Tamaño de la Capitalización considera que las acciones de empresas grandes o pequeñas tienen un rendimiento diferente debido al factor riesgo y, finalmente, el factor Value/Growth relaciona la diferencia entre los ratios de valor de las acciones, medido como BV/P (Book Value o Valor en Libros, dividido por el precio de la acción), enfocándose en su valoración relativa.

Por otra parte Black y Litterman (1992) presentan su modelo de optimización de cartera global, el cual incorpora las opiniones del inversor y las estimaciones de los analistas. Según estos autores Haga clic o pulse aquí para escribir texto., el modelo permite a los inversores aprovechar sus conocimientos especializados y sus perspectivas únicas sobre el mercado para mejorar las estimaciones de mercado de los rendimientos de los activos. Al combinar estas opiniones con las estimaciones de mercado, el modelo proporciona una forma más robusta y precisa de construir carteras eficientes; igualmente, se relaciona el enfoque bayesiano basado en el teorema de Bayes, en el cual se describe cómo actualizar las creencias sobre los rendimientos de los activos a medida que se dispone de nueva información, es decir, se va generando nueva información y creencias de acuerdo con lo que va sucediendo en el mercado.

“El teorema de Bayes proporciona un marco formal para actualizar las creencias sobre los rendimientos de los activos a medida que se disponen de nuevas observaciones” (Hastie, 2009). El enfoque bayesiano puede utilizarse para medir las estimaciones de mercado en el Modelo de Black-Litterman, lo que permite a los inversionistas ajustar las estimaciones de rendimiento basadas en información subjetiva adicional. Esto mejora la precisión de las creencias actualizadas y, por ende, la construcción de carteras eficientes que reflejen tanto las perspectivas del inversor como las condiciones del mercado. Es de señalar que “la gestión de carteras basada en el enfoque bayesiano permite una actualización dinámica de las creencias sobre los rendimientos de los activos, lo que permite a los inversores adaptarse a las condiciones cambiantes del mercado” (Chib y Greenberg, 1998).

El mercado de renta variable brasileño, representado principalmente por la Bolsa de Valores de São Paulo (B3), es uno de los mercados financieros más grandes y dinámicos de América Latina. Con una economía en desarrollo y un sector empresarial diversificado, ofrece una amplia gama de oportunidades de inversión para los inversionistas nacionales e internacionales. Este mercado ha experimentado períodos de alta volatilidad debido a factores económicos,

políticos y externos; sin embargo, estas fluctuaciones han creado, al mismo tiempo, oportunidades de inversión para los inversionistas que pueden aprovechar las tendencias a largo plazo y los fundamentos sólidos de las empresas brasileñas. La estabilidad económica, las reformas estructurales y los flujos de inversión extranjera han contribuido al desarrollo y la maduración del mercado de valores brasileño a lo largo del tiempo.

En el presente trabajo se evalúa la aplicación del Modelo de Black-Litterman al mercado de renta variable brasileño, como una oportunidad para los inversionistas y gestores de activos para aprovechar las perspectivas locales y globales en la construcción de carteras. De esa forma, al incorporar las opiniones propias de los inversionistas sobre la economía brasileña, las industrias específicas y las empresas individuales, este modelo puede ayudar a mejorar las estimaciones de mercado de los rendimientos de los activos y optimizar la asignación de activos en el contexto brasileño. Además, estudios recientes, como el de Saita y Venezia (2019), han explorado específicamente la aplicación del modelo al mercado de renta variable brasileño, proporcionando retrospectivas valiosas sobre cómo adaptar y calibrar el modelo para las condiciones locales.

## **2.1. Modelo de Markowitz**

El modelo de Markowitz es una de las contribuciones pioneras en el campo de las finanzas, pertenece a la llamada Teoría Moderna de Portafolios y fue propuesto por Harry Markowitz en 1952 y representa un avance en la teoría de la gestión y optimización de carteras. El modelo establece que los inversionistas pueden maximizar el rendimiento de sus inversiones por medio de la diversificación del portafolio, lo que implica combinar activos con diferentes niveles de retorno y correlación, con el objetivo de minimizar el riesgo total. No solo son importantes los rendimientos individuales del portafolio, sino también la relación entre ellos, medida a través de la covarianza. Para lograr esta diversificación eficiente, el modelo emplea la varianza o la

desviación estándar como medida del riesgo, de modo que propone que una combinación adecuada de activos no correlacionados puede reducir significativamente el riesgo de una cartera (Fabozzi et al., 2002).

Como afirma Markowitz (1952), los inversionistas racionales deberían construir una “frontera eficiente”, que representa un conjunto de portafolios óptimos que ofrecen el máximo retorno esperado para un nivel dado de riesgo o el mínimo riesgo para un nivel dado de retorno esperado. En otras palabras, cualquier portafolio que no se encuentre en esta frontera se considera ineficiente, pues existe otra combinación de activos que puede ofrecer un mejor rendimiento para el mismo nivel de riesgo (Markowitz, 1959).

Uno de los supuestos del modelo es que los inversionistas son racionales y aversos al riesgo, es decir, prefieren minimizar el riesgo de sus retornos para un nivel dado de retorno. El modelo de Markowitz demostró que la diversificación no solo reduce el riesgo no sistemático o idiosincrático, sino que también optimiza la relación riesgo-rendimiento, al tener en cuenta la covarianza de los activos. La diversificación eficiente se logra combinando activos que no estén perfectamente correlacionados, lo que disminuye la varianza global de la cartera (Fabozzi et al., 2002).

### *Críticas al Modelo de Markowitz*

Es importante mencionar que este modelo presenta algunas limitaciones que podrían afectar los resultados y han sido objeto de críticas en las finanzas, tal como se expone a continuación.

- 1. Dependencia de los supuestos básicos:** (racionalidad y aversión al riesgo), puesto que algunos estudios han demostrado que los inversionistas no siempre se comportan de manera racional debido a factores como las emociones, la sobreconfianza y los sesgos cognitivos (Bodie et al., 2014).

**2. Dependencia en los datos:** el modelo utiliza la varianza y la covarianza de los retornos históricos para estimar el riesgo y la diversificación, asumiendo que tendrán un comportamiento semejante en el futuro. Sin embargo, de acuerdo con Merton (1980), los mercados financieros son inherentemente volátiles y están sujetos a cambios estructurales, lo que limita la validez de estas proyecciones.

## 2.2. Modelo del CAPM

El Capital Asset Pricing Model (CAPM) fue desarrollado por William Sharpe en 1964 y busca explicar la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo. Este modelo proporciona una fórmula para estimar el rendimiento que los inversionistas deberían exigir en función del riesgo sistemático del activo, también conocido como su beta (Sharpe, 1964).

El modelo en mención parte de la premisa de que los inversionistas pueden dividir el riesgo en dos tipos: el riesgo sistemático o sistémico (que afecta a todo el mercado, como las recesiones económicas) y el riesgo no sistemático o idiosincrático (específico de una empresa o industria). Mientras que el riesgo no sistemático puede eliminarse mediante la diversificación, el riesgo sistemático no se puede diversificar y, por tanto, los inversionistas deben ser compensados por asumirlo. El CAPM introduce el concepto del beta, que mide la sensibilidad de un activo en relación con los movimientos del mercado en general; un activo con un beta superior a 1 es más volátil que el mercado, mientras que uno con un beta inferior a 1 es menos volátil (Fama & French, 2004). La fórmula central del CAPM es la siguiente:

Ecuación 1. Retornos del Modelo CAPM

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

Donde:

- $E(R_i)$  es el rendimiento esperado del activo  $i$ .
- $R_f$  es la tasa libre de riesgo.

- $\beta_i$  es la beta del activo  $i$ , que mide su sensibilidad al mercado.
- $E(R_m)$  es el rendimiento esperado del mercado.
- $E(R_m) - R_f$  es la prima de riesgo del mercado, que representa el rendimiento adicional que los inversionistas exigen por asumir el riesgo del mercado.

A pesar de que este modelo ha sido ampliamente utilizado para evaluar activos y carteras en los mercados financieros, presenta algunas limitaciones, como su incapacidad para explicar algunos comportamientos observados en los mercados (Fama y French, 1992).

### ***Críticas al Modelo del CAPM***

1. El modelo asume que todos los inversionistas tienen acceso a la misma información y que los mercados son perfectos. En concordancia con Fama (1970), existen inversionistas con información privilegiada y las ineficiencias del mercado pueden provocar desviaciones significativas en los precios de los activos.
2. El modelo supone que la relación entre el riesgo y el rendimiento es lineal; no obstante, Roll (1977) afirma que diversos estudios han demostrado que en ciertos periodos de tiempo o en mercados menos desarrollados, la relación riesgo-rendimiento puede ser no lineal, lo que lleva a predicciones incorrectas.
3. La estimación de la tasa libre de riesgo y el rendimiento esperado del mercado puede ser difícil. Frente a ello, Bodie et al. (2014) establecen que en economías inestables se dificulta definir una tasa libre de riesgo a largo plazo y los rendimientos del mercado están sujetos a variaciones, lo que introduce incertidumbre en los resultados del modelo.

### **2.3. Modelo de Black-Litterman**

El modelo de Black-Litterman (BL), propuesto por Fischer Black y Robert Litterman en 1992, constituye un avance en la teoría de optimización de portafolios al integrar las expectativas implícitas del mercado con las perspectivas subjetivas del inversionista. Este modelo busca

mejorar las estimaciones de rendimiento esperadas en los portafolios de inversión, abordando las limitaciones del modelo de Markowitz.

La estructura del modelo combina los retornos implícitos del mercado con las expectativas del inversionista, ponderando ambos a través de un enfoque bayesiano. Esto resulta en un vector de retornos ajustados, donde los activos se ponderan no solo por su relación de riesgo-retorno, sino también por la confianza que los inversionistas tienen en sus proyecciones. De esta manera, el modelo crea un portafolio más robusto y diversificado que es menos susceptible a los errores de estimación (Fabozzi et al., 2002). Este enfoque da lugar a una solución de optimización más robusta y estable, menos propensa a los problemas de extrema sensibilidad que caracterizan a los portafolios derivados exclusivamente de estimaciones de media y varianza (Idzorek, 2005).

#### **a. Retornos Esperados de Equilibrio del Mercado:**

El modelo BL inicia estimando el retorno de equilibrio de mercado, que representa la expectativa implícita de retornos basada en una cartera de mercado ponderada. Esta es una aproximación de lo que el mercado espera en términos de rendimiento y se calcula a través de la siguiente fórmula:

#### Ecuación 2. Retornos Implícitos en Equilibrio

$$\Pi = \lambda \Sigma w$$

Donde:

- $\lambda$  es el coeficiente de aversión al riesgo del inversionista.
- $\Sigma$  es la matriz de varianza-covarianza de los retornos de los activos.
- $w$  es el vector de ponderaciones por capitalización de mercado.
- $\Pi$  es el vector que representa los retornos implícitos del mercado en equilibrio.

El coeficiente de aversión al riesgo ( $\lambda$ ) representa la retribución esperada riesgo- retorno. Según Idzorek (2004), es la tasa a la cual un inversionista está dispuesto a renunciar a cierto nivel de rentabilidad para tener menor riesgo. De acuerdo con Walters (2014), este parámetro se puede calcular o asumir: generalmente el parámetro utilizado está entre 0 y 3, donde 3 es asumido por un inversionista con un nivel mayor de aversión al riesgo.

**b. Nivel de Confianza en los Retornos de Equilibrio ( $\tau$ ):**

El escalar  $\tau$  hace referencia al nivel de incertidumbre en los retornos de equilibrio que tiene el inversionista. Como lo indica Valencia (2018), un valor igual a 0 significa que el inversionista no tiene certeza sobre las expectativas del mercado, por lo que el retorno esperado del portafolio es el retorno de equilibrio; mientras que un valor pequeño implica mayor confianza y ponderación a los *views*, más probabilidades de su ocurrencia.

**c. Incorporación de los Puntos de Vista del Inversionista (*views*):**

El modelo permite al inversionista agregar sus propias perspectivas u opiniones, considerados *views* sobre los retornos de todos o algunos activos del portafolio. La inclusión de estas opiniones representa el aporte más significativo e innovador del modelo BL (Luna y Tamayo, 2015). Estas opiniones descansan bajo el supuesto de que se basan en información relevante y que la confianza en estas puede variar según la perspectiva del inversionista (Satchell y Scowcroft, 2007). Las matrices  $P$  y  $Q$  fueron definidas por Black y Litterman (1992) para expresar las expectativas de los inversionistas, donde  $P$  es la matriz de los *views* del mercado y  $Q$  es la matriz de los retornos esperados del portafolio.

**d. Nivel de Confianza de los *views* ( $\Omega$ ):**

Los valores de la diagonal de la matriz  $\Omega$  representan el nivel de confianza del inversionista sobre las expectativas de los activos que la componen. De acuerdo con Valencia (2018), si la

confianza del inversionista en los *views* es baja, la composición del portafolio tenderá al equilibrio. Mientras tanto, si la confianza en los *views* es alta, la composición dependerá más de los *views*.

#### e. Retornos esperados BL:

Dado lo anterior, se puede definir la rentabilidad esperada del portafolio  $[E(R)]$  y la varianza de los retornos  $M$ , así:

Ecuación 3. Retornos Esperados BL

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

Donde:

$\tau$ : es un escalar, se utiliza el recomendado por Idzorek, en *Step by step guide to the Black-Litterman model*, fijado en 0,025.

$\Sigma$ : es la matriz de Varianza-Covarianza de las acciones analizadas.

$P$ : es la matriz  $k \times n$  que representa las acciones para las cuales se tiene una expectativa de retorno según los analistas, donde  $k$  representa el número de *views* y  $n$  el número de acciones.

$\Omega$ : es la diagonal de errores de la matriz de covarianza de las expectativas obtenidas por los inversores representados en una matriz  $k \times k$ .

$\Pi$ : es el retorno de equilibrio implícito expresado en un vector de  $n \times 1$ .

$Q$ : es la matriz de los retornos esperados de las acciones según los analistas.

Ecuación 4. Varianza de los Retornos Esperados BL

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$$

#### ***Críticas al Modelo de Black-Litterman***

A pesar de sus innovaciones, el modelo de Black-Litterman ha sido criticado en varios aspectos.

1. Como lo manifiesta Meucci (2005), es considerado un modelo complejo y con requisitos técnicos que dificultan su implementación práctica para aquellos inversionistas que no tienen conocimiento en estadística avanzada y optimización bayesiana.
2. Por su parte, Idzorek (2005) considera que el modelo depende fuertemente de una matriz de varianza-covarianza fija, lo cual no refleja las condiciones dinámicas y volátiles del mercado, por lo cual no se podrían prever épocas de crisis.
3. Se considera que el modelo no siempre se adapta bien a mercados emergentes o aquellos con estructuras no tan eficientes, debido a que suponer un mercado en equilibrio puede no ser aplicable en entornos donde la información no está completamente distribuida (Bodie et al., 2014).

## 2.4. Medidas de Desempeño

### 2.4.1. *Sharpe Ratio*

Es la medida que evalúa el exceso de retorno de una inversión por cada unidad de riesgo asumido. En consonancia con Sharpe (1964), esto permite comparar diferentes activos o estrategias de inversión en función de su eficiencia en la generación de retornos en relación con el riesgo. Un *Ratio de Sharpe* alto indica que el portafolio o inversión ha obtenido rendimientos superiores en comparación con su nivel de volatilidad o riesgo asumido, lo que significa que hay una mejor compensación entre riesgo y retorno (Bodie et al., 2014). El cálculo matemático de esta medida de desempeño es:

Ecuación 5. *Ratio de Sharpe*

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde:

- $R_p$  es el rendimiento promedio del portafolio.

- $R_f$  es el rendimiento de un activo libre de riesgo.
- $\sigma_p$  es la desviación estándar del rendimiento del portafolio.

### 3. Metodología

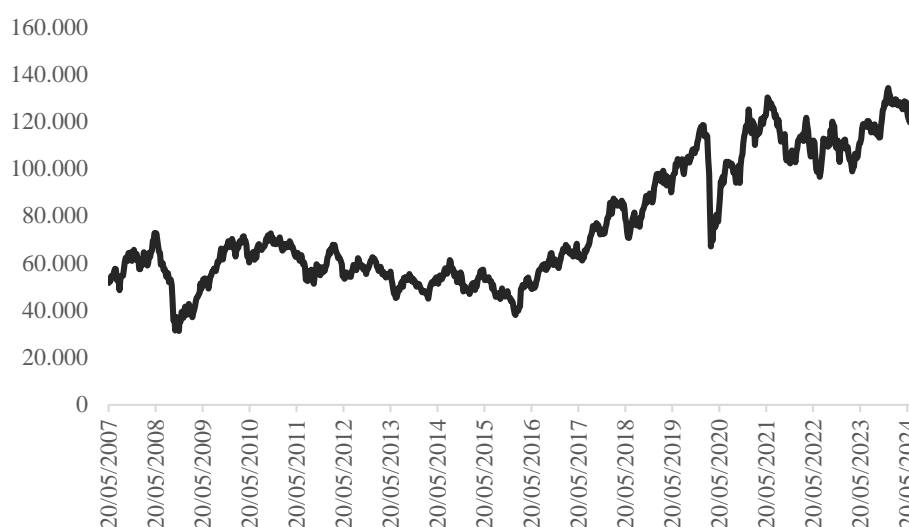
Teniendo en cuenta que el Modelo Black-Litterman es un modelo que brinda las herramientas necesarias para combinar de manera efectiva las expectativas del mercado, junto a las opiniones de los inversores. Todo esto con el fin de construir portafolios adecuados, se utilizó el documento *A step-by-step guide to the Black-Litterman model*, por Thomas M. Idzorek, para la construcción del portafolio, el cual consta de los siguientes pasos:

#### Selección de activos

En la selección de activos para la aplicación del modelo de Black-Litterman, se trabajó con los activos que componen el índice BOVESPA, teniendo en cuenta que este era uno de los más representativos del mercado. Esta elección se basó en la necesidad de contar con un conjunto de activos diversificado y respaldado por datos consistentes y continuos a lo largo del tiempo, factores que son de gran importancia a la hora de lograr implementación eficaz del modelo. Teniendo en cuenta que la diversificación es un criterio esencial en la selección de activos, pues permite mitigar riesgos y mejorar el equilibrio del portafolio se buscó la incorporación de activos de diferentes sectores y con distintos perfiles de rendimiento, en búsqueda de la estabilidad del portafolio.

El índice BOVESPA, con su representación de las principales empresas de Brasil, ofrece una muestra variada, la cual garantiza la diversificación necesaria para implementar el modelo Black-Litterman; esto permite derivar rendimientos implícitos que fundamenten la optimización inversa. De esta forma, se logra una base que respalda la estimación de retornos de equilibrio del mercado, sobre los cuales se construye la etapa de integración de opiniones del modelo. A continuación, se presenta un gráfico con los retornos históricos desde el 2007.

Gráfico 1. Retornos Históricos Bovespa



Fuente: elaboración propia con datos de Investing, 2024.

Después de seleccionar los activos que harían parte del modelo, se utilizaron datos de los precios históricos obtenidos de Investing ([www.investing.com](http://www.investing.com)), en los periodos desde el 1 de junio de 2007 hasta el 24 de agosto de 2024, con periodicidad semanal. Se consideran los años 2020 y 2021 para incluir el impacto de la crisis bursátil causada por el COVID-19 en 2020 y la recuperación que siguió en 2021. Esto fortalece el modelo al abarcar periodos de crisis en los mercados financieros, aportando mayor solidez al análisis.

Para la tasa libre de riesgo se enfrentaron dificultades al intentar utilizar el bono soberano a 10 años de Brasil, debido a inconsistencias en su información. La ausencia de datos consistentes podría afectar la confiabilidad de los cálculos y, por este motivo, se optó por utilizar como referencia el bono de Brasil a 1 año, cuya información era más completa y homogénea en el periodo comprendido entre el 1 de junio de 2007 y el 24 de agosto de 2024.

### **Recolección de Datos**

Para la recolección de los datos usamos fuentes financieras como Investing y Yahoo Finance. Los datos históricos del precio de las acciones del Bovespa y la rentabilidad del bono de Brasil

a 1 año se obtuvieron de Investing. Las opiniones de analistas sobre rentabilidades futuras se obtuvieron de Investing y de Yahoo Finance, definida como el target de precio a 1 año de cada una de las acciones seleccionadas.

### **Detalle de Activos del Portafolio**

Como se mencionó, las acciones utilizadas para la creación del portafolio de inversión son acciones pertenecientes al Índice Bovespa. En un principio, el proceso de selección se basó en las 10 empresas con mayor capitalización bursátil del mercado; se inició el proceso de verificación de datos y se evidenció que algunas acciones no contaban con precios históricos desde el 2007 (año elegido para construir el portafolio y tener un periodo antes de la crisis del 2008), por lo que debieron ser excluidas del portafolio y en su lugar, se seleccionaron empresas de otros sectores para diversificar el portafolio. Seguidamente, se presenta un breve resumen de las 12 empresas que componen el portafolio de inversión realizado en el modelo a presentar:

**Alpargatas S. A.:** es una importante empresa de calzado en América Latina. Fue fundada en 1907, es conocida a nivel mundial por su icónica marca de sandalias Havaianas, tiene presencia a nivel internacional y fábricas en Brasil y Argentina.

**Embraer:** es una importante empresa dedicada a la fabricación de aviones y tecnología aeroespacial. Fue fundada en 1969 y es una de las principales fabricantes de aviones, especializada en tres segmentos: aviones de defensa, comercial y ejecutivos.

**Natura:** es una importante empresa reconocida en América Latina, dedicada a la producción y la venta de cosméticos con enfoque sostenible y responsabilidad social. Promueve el uso de ingredientes naturales y renovables.

**Petrobras:** es una de las compañías petroleras más importantes del mundo. Fue fundada en 1953 y su actividad principal es la exploración, producción, refinación y distribución de petróleo, gas natural y sus derivados.

**Totvs:** es una importante empresa tecnológica en América Latina. Es conocida por el desarrollo de software empresarial especializado en sistemas ERP (Planificación de Recursos Empresariales), que ayudan a la automatización y la optimización de procesos en áreas financieras, de recursos humanos, ventas y manufactura.

**Vale:** es una de las principales minerías a nivel mundial. Fue fundada en 1942 y su actividad principal es la extracción y producción de minerales como hierro, níquel y cobre, recursos fundamentales para la producción de acero.

**Weg:** es una importante empresa dedicada a la fabricación de equipos electrónicos. Fue fundada en 1961 y su enfoque es brindar soluciones para la industria a través de la generación y la distribución de energía.

**Bradesco:** es una de las principales entidades financieras de Brasil. Fue fundada en 1943 y se enfoca en la banca corporativa y personal, administración de inversiones y venta de seguros.

**Brasil:** el Banco do Brasil es la principal institución financiera de Brasil. Fue fundado en 1808 y juega un papel esencial en la contribución al desarrollo económico de este país. Tiene una importante participación en los mercados de capitales y operando en la bolsa de Nueva York.

**Ambev:** es una productora de bebidas alcohólicas. Fue fundada en 1999, a partir de la fusión de las empresas brasileras Companhia Antartica Paulista y Brahma.

**Lojas Renner:** es una cadena de almacenes especializado en artículos de moda. Fue fundada en 1922 y su enfoque es en el sector minorista, basa su modelo de negocio en marcas propias y ventas en línea.

**Companhia Energética de Minas Gerais:** es una de las empresas más grandes del país en el sector energético. Fue fundada en 1952, opera diversos segmentos de energía y tiene una diversificación enfocada en telecomunicaciones y gas natural.

Tabla 1. Descripción Acciones del Portafolio

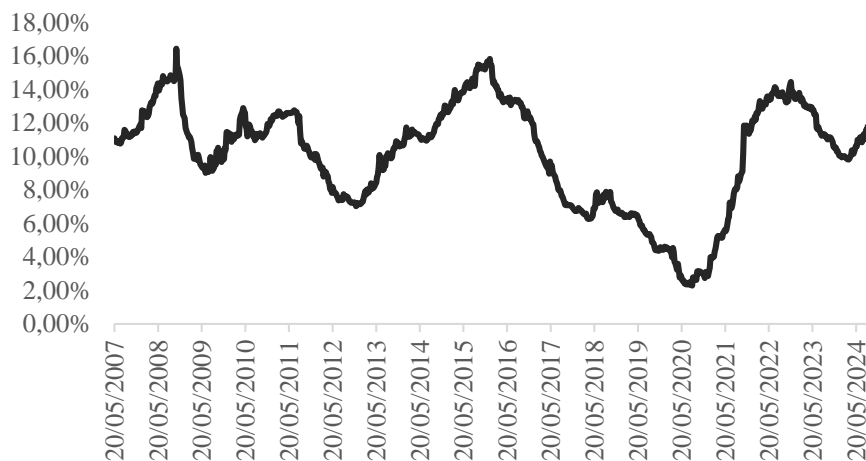
| Nombre          | Vol. promedio | Cap. mercado | Ingresos | Sector Económico |
|-----------------|---------------|--------------|----------|------------------|
| Alpargatas      | 2,53M         | 5,52B        | 3,85B    | Textil           |
| Embraer         | 7,22M         | 31,81B       | 28,32B   | Aeronáutico      |
| Natura          | 6,69M         | 22,82B       | 26,37B   | Belleza          |
| Petrobras       | 10,21M        | 491,78B      | 499,07B  | Petróleo         |
| Totvs           | 3,41M         | 17,77B       | 4,89B    | Tecnología       |
| Vale            | 20M           | 241,5B       | 210,09B  | Mineral Hierro   |
| Weg             | 7,37M         | 211,87B      | 33,94B   | Energía          |
| Bradesco        | 6,9M          | 146,07B      | 69,52B   | Banco            |
| Brasil          | 16,45M        | 154,51B      | 110,96B  | Banco            |
| Ambev           | 30,15M        | 195,32B      | 80,63B   | Cerveza          |
| Lojas Renner    | 17,15M        | 15,11B       | 13,80B   | Retail online    |
| Energy of Minas | 11,78M        | 32,56B       | 37,26B   | Energía          |

Fuente: elaboración propia con datos de Investing, 2024.

### Definición Tasa libre de Riesgo:

Inicialmente, se seleccionó para la tasa libre de riesgo la tasa de los bonos soberanos de Brasil a 10 años; después de revisar la información, se encontró carencia de periodicidad en los datos semanales registrados para el periodo del 13 de diciembre de 2009 hasta el 23 de mayo de 2010. Al ser un periodo extenso con poca información, se decidió de evaluar el modelo con los bonos soberanos de Brasil a 1 año, los cuales sí tenían continuidad en la información. A continuación, se presenta un gráfico con los retornos históricos desde el 2007.

Gráfico 2. Retornos Históricos Bono Brasil



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing, 2024.

### **Modelo Matemático:**

Implementación del modelo BL ajustado a las condiciones del mercado brasilero, lo que incluirá la estimación de la matriz de covarianza de los retornos de los activos y la utilización de un parámetro de aversión al riesgo adecuado para reflejar las condiciones de mercado.

### **Simulación de Portafolios:**

Creación de un portafolio evaluado en diferentes modelos: Markowitz, CAPM y BL, incluyendo cómo las expectativas de los inversores pueden interferir en los resultados del modelo BL.

### **Evaluación de Desempeño:**

Comparación del portafolio construido con el modelo de BL con los resultados obtenidos del portafolio construido mediante los modelos de Markowitz y CAPM, en términos de rendimiento ajustado por riesgo y diversificación.

## **4. Resultados**

### **4.1. Modelo de Markowitz**

Para evaluar el modelo, se empezó con el proceso de elaboración. De tal manera, se obtuvo la tasa libre de riesgo, los retornos semanales de cada una de las acciones y los retornos del mercado (Bovespa) para el periodo de tiempo mencionado anteriormente de Investing. Después, se realizó el cálculo del promedio de estos retornos y los datos fueron anualizados.

Para ello, se extrajeron los retornos semanales de cada uno de los activos, seleccionando esta periodicidad debido a la consistencia en los datos; cada uno de ellos presentaba más información en los retornos semanales y, por tanto, podían ser evaluados en las mismas frecuencias. La información obtenida se puede evidenciar en la siguiente tabla:

Tabla 2. Retornos Promedio

| <b>Empresa</b> | <b>Retornos Semanales Promedio</b> | <b>Retornos Anuales Promedios</b> |
|----------------|------------------------------------|-----------------------------------|
|----------------|------------------------------------|-----------------------------------|

|                 |        |         |
|-----------------|--------|---------|
| Alpargatas      | 0,42 % | 21,82 % |
| Embraer         | 0,36 % | 18,95 % |
| Natura          | 0,21 % | 10,89 % |
| Petrobras       | 0,24 % | 12,64 % |
| Totvs           | 0,99 % | 51,53 % |
| Vale            | 0,46 % | 23,69 % |
| Weg             | 1,49 % | 77,67 % |
| Bradesco        | 0,40 % | 20,81 % |
| Brasil          | 0,80 % | 41,75 % |
| Ambev           | 0,66 % | 34,24 % |
| Lojas Renner    | 0,67 % | 35,03 % |
| Energy of Minas | 0,84 % | 43,56 % |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Posteriormente, para continuar con el proceso de construcción de un portafolio de inversión siguiendo el enfoque propuesto por Markowitz, se debe analizar la interdependencia entre los activos seleccionados, lo cual se logra mediante la creación de una matriz de varianza-covarianza. Dicha matriz permite cuantificar la variabilidad de los rendimientos de cada activo y de cómo estos interactúan entre sí en términos de su correlación, es decir, el grado de relación lineal entre las variables y cómo los movimientos conjuntos de los activos afectan la volatilidad del portafolio. Por lo anterior, este paso facilita tanto la medición del riesgo total del portafolio, además de establecer una base para optimizar la combinación de activos, obteniendo como resultado la relación entre riesgo y rendimiento.

Entonces, al obtener los retornos anualizados, se procedió a calcular la matriz de Varianza-Covarianza. Estos dos insumos se utilizan para calcular el ratio de Sharpe, con el fin de lograr una maximización en el portafolio de inversión. Igualmente, esta matriz de Varianza-Covarianza se utiliza como base fundamental para los portafolios simulados, de los cuales se habla más adelante:

Tabla 3. Matriz de Varianza - Covarianza

|                   | <i>Alpargatas</i> | <i>Embraer</i> | <i>Natura</i> | <i>Petrobras</i> | <i>Totvs</i> | <i>Vale</i> | <i>Weg</i> | <i>Bradesco</i> | <i>Brasil</i> | <i>Ambev</i> | <i>Lojas Renner</i> | <i>Energy of Minas</i> |
|-------------------|-------------------|----------------|---------------|------------------|--------------|-------------|------------|-----------------|---------------|--------------|---------------------|------------------------|
| <i>Alpargatas</i> | 65,6 %            | 12,8 %         | 23,5 %        | 22,9 %           | 24,2 %       | 13,5 %      | 17,0 %     | 20,8 %          | 21,8 %        | 10,5 %       | 32,4 %              | 17,2 %                 |
| <i>Embraer</i>    | 12,8 %            | 69,9 %         | 16,3 %        | 13,1 %           | 12,1 %       | 11,1 %      | 13,2 %     | 15,8 %          | 14,7 %        | 10,9 %       | 17,8 %              | 11,3 %                 |

|                        |        |        |        |         |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Natura</i>          | 23,6 % | 16,3 % | 62,4 % | 22,1 %  | 26,2 % | 9,2 %  | 17,0 % | 20,9 % | 19,3 % | 9,5 %  | 28,8 % | 19,9 % |
| <i>Petrobras</i>       | 22,9 % | 13,1 % | 22,1 % | 101,3 % | 20,3 % | 31,5 % | 18,4 % | 35,8 % | 48,4 % | 10,5 % | 30,5 % | 29,1 % |
| <i>Totvs</i>           | 24,2 % | 12,1 % | 26,2 % | 20,3 %  | 45,0 % | 10,9 % | 19,9 % | 16,5 % | 16,7 % | 11,5 % | 23,8 % | 14,5 % |
| <i>Vale</i>            | 13,5 % | 11,1 % | 9,2 %  | 31,5 %  | 10,9 % | 58,3 % | 11,5 % | 16,3 % | 24,8 % | 8,3 %  | 13,2 % | 15,4 % |
| <i>Weg</i>             | 17,0 % | 13,2 % | 17,0 % | 18,4 %  | 19,9 % | 11,5 % | 42,3 % | 14,7 % | 16,3 % | 9,7 %  | 20,5 % | 7,2 %  |
| <i>Bradesco</i>        | 20,8 % | 15,8 % | 20,9 % | 35,8 %  | 16,5 % | 16,3 % | 14,7 % | 40,0 % | 32,5 % | 12,5 % | 32,3 % | 22,5 % |
| <i>Brasil</i>          | 21,8 % | 14,7 % | 19,3 % | 48,4 %  | 16,7 % | 24,8 % | 16,3 % | 32,5 % | 64,3 % | 14,5 % | 29,8 % | 34,3 % |
| <i>Ambev</i>           | 10,5 % | 10,9 % | 9,5 %  | 10,5 %  | 11,5 % | 8,3 %  | 9,7 %  | 12,5 % | 14,5 % | 21,9 % | 13,3 % | 10,3 % |
| <i>Lojas Renner</i>    | 32,4 % | 17,8 % | 28,8 % | 30,5 %  | 23,8 % | 13,2 % | 20,5 % | 32,3 % | 29,8 % | 13,3 % | 56,5 % | 17,5 % |
| <i>Energy of Minas</i> | 17,2 % | 11,3 % | 19,9 % | 29,1 %  | 14,5 % | 15,4 % | 7,2 %  | 22,5 % | 34,3 % | 10,3 % | 17,5 % | 58,0 % |

Fuente: elaboración propia, 2024.

#### 4.1.1. Modelo utilizando la Media

Para el siguiente paso, se procede a la formulación del problema de optimización, por lo que se implementa el modelo de Markowitz, con el propósito de realizar un análisis posterior. Para esto, se debe establecer una función objetivo que permita maximizar el rendimiento esperado del portafolio para un nivel de riesgo determinado, de manera que, en primera instancia, el modelo se planteó para realizarse con la media y a cada acción se le asigna el mismo peso:

Adicionalmente, se calcula la varianza y la desviación estándar del portafolio considerando como tasa libre de riesgo el resultado del promedio de los bonos de Brasil del periodo comprendido. Por medio de la herramienta de solver (en Excel), se maximiza el ratio de Sharpe, estableciendo la condición en la cual la sumatoria total del peso de las acciones del portafolio debe ser igual al 100 %. Es así como se obtiene el resultado siguiente:

Tabla 4. Resultados Portafolio usando la Media

| <b>Empresa</b> | <b>Retornos Prom Semanales</b> | <b>Retorno Prom Anuales</b> | <b>Ponderación Portafolio</b> |
|----------------|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| Alpargatas     | 0,42 %                         | 21,82 %                     | 0,00 %                        |
| Embraer        | 0,35 %                         | 18,95 %                     | 0,00 %                        |
| Natura         | 0,21 %                         | 10,89 %                     | 0,00 %                        |
| Petrobras      | 0,24 %                         | 12,64 %                     | 0,00 %                        |
| Totvs          | 0,99 %                         | 51,53 %                     | 5,55 %                        |
| Vale           | 0,45 %                         | 23,69 %                     | 0,00 %                        |
| Weg            | 1,49 %                         | 77,67 %                     | 67,19 %                       |
| Bradesco       | 0,40 %                         | 20,81 %                     | 0,00 %                        |

|                 |        |         |         |
|-----------------|--------|---------|---------|
| Brasil          | 0,80 % | 41,75 % | 0,00 %  |
| Ambev           | 0,65 % | 34,24 % | 11,91 % |
| Lojas Renner    | 0,67 % | 35,03 % | 0,00 %  |
| Energy of Minas | 0,84 % | 43,55 % | 15,35 % |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Los resultados de la tabla anterior demuestran que maximizando la ratio de Sharpe, el portafolio más eficiente sería concentrando la inversión en las acciones de Totvs, Weg, Ambev y Energy of Minas. Sin embargo, es común que, dentro del modelo de Markowitz, el portafolio resultante se concentre en un número reducido de activos (ver Tabla 4); incluso cuando la selección inicial de activos incluya un portafolio altamente diversificado, esto se debe a que la estructura matemática del modelo tiende a priorizar los activos que presentan una mejor combinación de rendimiento esperado y baja varianza. Aunado a ello, la optimización busca minimizar el riesgo total del portafolio basándose en la correlación entre los activos, lo que deja como resultado que las ponderaciones se concentren para ciertos activos que ofrecen el máximo beneficio y pueda llegar a excluir otros como se presenta en este caso. Por ende, el modelo asigna gran parte del capital a un número limitado de acciones, lo cual puede representar una desventaja, dado que estaría reduciendo la diversificación real del portafolio.

#### **4.1.2. Modelo utilizando la Mediana**

Tratando de mejorar el panorama del resultado del portafolio obtenido a través del modelo de Markowitz utilizando la media y de lograr una mejor diversificación, se tomó la decisión de realizarlo con la mediana, pues el promedio es influenciado de manera significativa por valores extremos, los cuales son comunes en mercados financieros, sobre todo en tiempos de crisis económicas o incertidumbre. Por su parte, la mediana refleja de forma más precisa la tendencia central de los rendimientos de los activos, lo cual permite minimizar el impacto de fluctuaciones atípicas de los mercados financieros. Como resultado, el portafolio generado con datos de la mediana es más equilibrado y permite mejorar la concentración excesiva en pocos activos. Seguidamente, se muestran los resultados del modelo utilizando la mediana:

Tabla 5. Resultados Portafolio usando la Mediana

| <b>Empresa</b>  | <b>Retornos Mediana Semanal</b> | <b>Retornos Mediana Anual</b> | <b>Ponderación Portafolio</b> |
|-----------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Alpargatas      | 0,53 %                          | 27,72 %                       | 0,00 %                        |
| Embraer         | 0,65 %                          | 34,35 %                       | 7,67 %                        |
| Natura          | 0,45 %                          | 23,25 %                       | 0,00 %                        |
| Petrobras       | 0,83 %                          | 43,25 %                       | 0,00 %                        |
| Totvs           | 1,38 %                          | 71,89 %                       | 4,85 %                        |
| Vale            | 0,90 %                          | 46,65 %                       | 5,78 %                        |
| Weg             | 1,75 %                          | 91,60 %                       | 26,54 %                       |
| Bradesco        | 0,32 %                          | 16,75 %                       | 0,00 %                        |
| Brasil          | 0,75 %                          | 39,61 %                       | 0,00 %                        |
| Ambev           | 0,95 %                          | 49,65 %                       | 40,87 %                       |
| Lojas Renner    | 1,08 %                          | 56,35 %                       | 0,00 %                        |
| Energy of Minas | 1,07 %                          | 55,43 %                       | 14,29 %                       |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Los resultados obtenidos al maximizar el radio de Sharpe, a través del uso como retorno esperado de la mediana, arrojan un portafolio de inversión con menos concentración, lo cual se podría traducir en un portafolio más diversificado, dado que este nuevo portafolio está compuesto por seis acciones, lo que evidencia que la mediana permite llegar a una menor concentración de activos dentro del portafolio y mejora su diversificación. Lo anterior gracias a que no toma en cuenta los extremos, los cuales son comunes en mercados altamente volátiles.

### 4.3. Modelo CAPM

En este punto, se realiza el modelo del CAPM, el cual permite estimar el rendimiento esperado de un activo considerando su riesgo sistemático en relación con el mercado general, lo cual se representa por medio del coeficiente beta. Este modelo es utilizado para evaluar si un activo individual ofrece una compensación adecuada por el riesgo asumido, mediante una prima de riesgo de mercado y la tasa libre de riesgo. Esto lo diferencia del modelo de Markowitz, pues mientras este último busca optimizar la composición completa de un portafolio, el CAPM se enfoca únicamente en el riesgo sistemático y su impacto en el rendimiento.

#### Variables:

- a. **Tasa libre de Riesgo ( $R_f$ ):** el resultado del promedio de los bonos del tesoro de Brasil a 1 año del periodo analizado (10,09 %).
- b. **Rendimiento esperado del mercado ( $R_m$ ):** es el rendimiento promedio esperado del mercado, representado como el promedio del índice Bovespa del mercado de Brasil.
- c. **Beta de los activos ( $\beta_i$ ):** es el coeficiente que permite medir el riesgo sistemático de un activo que no puede ser diversificado; es decir, mide la sensibilidad de un activo ante los cambios que se presentan en el mercado.

Tabla 6. Resultados Modelo CAPM por Acción

| Acciones        | $R_f$ Promedio | $R_m - R_f$ | Beta | CAPM   |
|-----------------|----------------|-------------|------|--------|
| Alpargatas      | 10,09 %        | -0,825 %    | 1,45 | 8,90 % |
| Embraer         | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,58 | 9,61 % |
| Natura          | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,78 | 9,45 % |
| Petrobras       | 10,09 %        | -0,825 %    | 1,45 | 8,90 % |
| Totvs           | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,72 | 9,50 % |
| Vale            | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,78 | 9,45 % |
| Weg             | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,66 | 9,55 % |
| Bradesco        | 10,09 %        | -0,825 %    | 1,02 | 9,25 % |
| Brasil          | 10,09 %        | -0,825 %    | 1,07 | 9,21 % |
| Ambev           | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,39 | 9,77 % |
| Lojas Renner    | 10,09 %        | -0,825 %    | 1,03 | 9,24 % |
| Energy of Minas | 10,09 %        | -0,825 %    | 0,68 | 9,53 % |

Fuente: Elaboración propia, 2024.

En este caso específico, se observa que la prima de riesgo del mercado ( $R_m - R_f$ ) es un valor negativo, lo que se debe a que la tasa libre de riesgo es superior al rendimiento esperado del mercado; esta situación puede estar influenciada por diversos factores macroeconómicos y financieros propios del entorno brasileño. Brasil ha experimentado, de manera histórica, tasas de interés elevadas, las cuales han sido utilizadas como una herramienta para controlar la inflación y mejorar la estabilidad económica, situación que puede dar como resultado que los activos sin riesgo, en este caso los bonos del Tesoro de Brasil, tengan rendimientos más altos que el mercado en sí.

Infortunadamente, los mercados bursátiles en Latinoamérica tienden a ser más pequeños, menos líquidos y más vulnerables, lo que genera rendimientos volátiles que se pueden evidenciar al tener una tasa libre de riesgo más alta que el retorno esperado del mercado, por factores como las fluctuaciones en los precios de las materias primas y las crisis económicas recurrentes, las cuales generan un entorno donde el mercado de acciones no es consistente.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, al ser la tasa libre de riesgo superior al retorno esperado del mercado, la construcción de un portafolio utilizando el modelo del CAPM es conceptualmente inviable o poco práctica, dado que este modelo asume que el inversionista buscar maximizar el rendimiento ajustado al riesgo, seleccionando activos con una prima de riesgo superior a la tasa libre de riesgo; empero, al no existir una prima de riesgo positiva, el inversionista seleccionaría instrumentos libres de riesgo y no construir un portafolio de renta variable, lo cual destaca la relevancia de adoptar enfoques alternativos para mercados altamente volátiles que puedan mejorar las toma de decisiones de inversión.

#### 4.2. Modelo Black-Litterman

A partir de esta base, se implementa el modelo de Black-Litterman para incorporar las expectativas propias sobre los rendimientos esperados, ajustando el portafolio de manera que se combinen eficientemente las opiniones subjetivas y la información implícita del mercado, logrando un enfoque más robusto y adaptado a proyecciones de inversión. La ponderación fue realizada de la siguiente manera:

$$Ponderacion\ de\ cada\ activo = \frac{Capitalizacion\ del\ mercado\ del\ activo}{Capitalizacion\ del\ mercado\ total\ del\ portafolio}$$

Tabla 7. Resultados Ponderados por Activo

| Nombre     | Capitalización de mercado | Ponderación |
|------------|---------------------------|-------------|
| Alpargatas | 5,52                      | 0,35 %      |
| Embraer    | 31,81                     | 2,03 %      |
| Natura     | 22,82                     | 1,45 %      |
| Petrobras  | 491,78                    | 31,39 %     |

|                 |                |              |
|-----------------|----------------|--------------|
| Totvs           | 17,77          | 1,13 %       |
| Vale            | 241,5          | 15,42 %      |
| Weg             | 211,87         | 13,52 %      |
| Bradesco        | 146,07         | 9,32 %       |
| Brasil          | 154,51         | 9,85 %       |
| Ambev           | 195,32         | 12,47 %      |
| Lojas Renner    | 15,11          | 0,95 %       |
| Energy of Minas | 32,56          | 2,08 %       |
| <b>Total</b>    | <b>1566,64</b> | <b>100 %</b> |

Fuente: Elaboración propia, 2024.

En primera medida, se calcula optimización inversa en el modelo de Black-Litterman, lo que es un paso crucial porque permite inferir los rendimientos implícitos del mercado, para este caso del Bovespa, basados en las ponderaciones observadas en la capitalización de mercado, ilustradas en la Tabla 7. Este proceso permite calcular los rendimientos esperados de cada activo, en lugar de asumirlos basándose en dichas ponderaciones.

Al realizar la optimización inversa proporciona una base sólida de expectativas de mercado ajustables con opiniones de los analistas. Una vez obtenidos estos rendimientos implícitos, se logra una combinación equilibrada entre la información cuantitativa del mercado y las expectativas subjetivas, lo cual optimiza la precisión y la aplicabilidad del modelo para construir una cartera bien ajustada al perfil de riesgo y retorno deseado.

Ahora bien, para calcular la optimización inversa se utilizó la ecuación 2 (Retornos implícitos en equilibrio) mencionada, donde el retorno de equilibrio está sujeto a Lambda, que multiplica a la matriz de varianza-covarianza y a las ponderaciones de capitalización de mercado de todos los activos. Para esto, el primer paso es calcular el Lambda a través de la siguiente fórmula:

Ecuación 6. Factor Lambda

$$\lambda = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m^2}$$

Donde:

- $R_m$  es el rendimiento esperado del mercado
- $R_f$  la tasa libre de riesgo
- $\sigma_m^2$  es la varianza del mercado.

Siguiendo los parámetros indicados en el modelo de Black-Litterman, se obtiene el siguiente resultado:

Tabla 8. Resultados Factor Lambda

|              |         |
|--------------|---------|
| $R_f$        | 10,09 % |
| $\sigma_m^2$ | 0,312   |
| $\lambda$    | 0,67    |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Seguidamente, se procede a calcular el vector de retornos de equilibrio ( $\Pi$ ), para las acciones analizadas:

Tabla 9. Retornos de Equilibrio

| Nombre          | Retorno de Equilibrio |
|-----------------|-----------------------|
| Alpargatas      | 0,13                  |
| Embraer         | 0,09                  |
| Natura          | 0,12                  |
| Petrobras       | 0,34                  |
| Totvs           | 0,11                  |
| Vale            | 0,18                  |
| Weg             | 0,12                  |
| Bradesco        | 0,17                  |
| Brasil          | 0,23                  |
| Ambev           | 0,08                  |
| Lojas Renner    | 0,16                  |
| Energy of Minas | 0,14                  |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Finalmente, se construye una tabla con los promedios de los retornos históricos del CAPM y de los retornos de equilibrio, a fin de comparar y analizar sus resultados:

Tabla 10. Comparativo de Retornos

| Nombre     | Retorno Promedio Histórico | Retorno CAPM (Bovespa) | Retorno de Equilibrio |
|------------|----------------------------|------------------------|-----------------------|
| Alpargatas | 21,82 %                    | 8,90 %                 | 12,5 %                |

|                 |         |        |        |
|-----------------|---------|--------|--------|
| Embraer         | 18,95 % | 9,61 % | 9,5 %  |
| Natura          | 10,89 % | 9,45 % | 12,1 % |
| Petrobras       | 12,64 % | 8,90 % | 33,7 % |
| Totvs           | 51,53 % | 9,50 % | 11,5 % |
| Vale            | 23,69 % | 9,45 % | 17,7 % |
| Weg             | 77,67 % | 9,55 % | 12,5 % |
| Bradesco        | 20,81 % | 9,25 % | 17,3 % |
| Brasil          | 41,75 % | 9,21 % | 22,9 % |
| Ambev           | 34,24 % | 9,77 % | 8,1 %  |
| Lojas Renner    | 35,03 % | 9,24 % | 16,1 % |
| Energy of Minas | 43,55 % | 9,53 % | 14,3 % |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Al comparar los rendimientos históricos con los rendimientos obtenidos por medio del modelo de valoración de activos de capital (CAPM) y los retornos de equilibrio, se observa que estos últimos dos tienden a ser menores a los históricos. Lo anterior se debe a que los rendimientos históricos reflejan todas las fluctuaciones del mercado ocurridos en el periodo evaluado y, por ende, este incluye episodios de alta volatilidad que elevan el promedio. Se aplica la fórmula mencionada en la ecuación 3, correspondiente a los retornos en el modelo de BL, donde se puede ilustrar la variable P:

P =

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

El resultado de la matriz P es una matriz 9×12, dado que al no contar con expectativa de retorno por parte de los analistas en las acciones de Embraer, Vale y Energy of Minas, se excluyen de del cálculo. Posteriormente, se calcula la variable Omega, la cual es fundamental debido a que permite asignar un nivel de confianza específico a las opiniones del inversionista en comparación con el mercado; este actúa como una matriz de varianza y covarianza reflejando la incertidumbre de cada opinión, influenciando directamente la combinación entre las expectativas del inversionista y las expectativas de mercado.

Cabe resaltar que este ajuste es fundamental, pues evita el exceso de confianza generado a partir de opiniones de los analistas, las cuales pueden llegar a distorsionar la asignación de activos, utilizando la variable Omega, el modelo realiza un balance entre los promedios históricos y las percepciones actuales del inversionista. Es preciso recordar que Omega está definida así:

#### Ecuación 7. Factor Omega

$$\Omega = \tau \cdot P \cdot \Sigma \cdot P^T$$

Donde:

- $\tau$  es el parámetro de escala de incertidumbre del mercado.
- P es la matriz de opiniones.
- $\Sigma$  es la matriz de covarianzas del mercado.
- $P^T$  es la transpuesta de P.

El resultado se puede ilustrar de la siguiente manera:

OMEGA =

$$\begin{bmatrix} 1.5 \% & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \% & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \% & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1 \% & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \% & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[ 0 0 0 0 0 1.0 % 0 0 0 ]  
 [ 0 0 0 0 0 0 0.5 % 0 0 ]  
 [ 0 0 0 0 0 0 0 1.4 % 0 ]  
 [ 0 0 0 0 0 0 0 0 1.4 % ]

Adicionalmente, se ilustra Q, que es la expectativa de crecimiento de cada acción según los analistas. Para este caso, se utilizan las expectativas de precio de mercado objetivo por Investing, la cual arroja como resultado un vector Q:

Q = [52,1 % Alpargatas]  
 [25,8 % Natura]  
 [8,4 % Petrobras]  
 [32,4 % Totvs]  
 [2,2 % Weg]  
 [32,5 % Bradesco]  
 [34,5 % Brasil]  
 [19,9 % Ambev]  
 [15,1 % Lojas Renner]

Luego, teniendo todas las variables y aplicando la fórmula del modelo BL, se obtiene el siguiente resultado que representa el vector que combina de forma óptima las creencias del mercado y las opiniones subjetivas ponderadas.

Tabla 11. Expectativas de Retorno modelo Black-Litterman

|                 |        |
|-----------------|--------|
| Alpargatas      | 0,3251 |
| Embraer         | 0,1453 |
| Natura          | 0,2234 |
| Petrobras       | 0,2896 |
| Totvs           | 0,2350 |
| Vale            | 0,1995 |
| Weg             | 0,1189 |
| Bradesco        | 0,2496 |
| Brasil          | 0,2963 |
| Ambev           | 0,1550 |
| Rojas Renner    | 0,2366 |
| Energy of Minas | 0,2214 |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Para terminar, utilizando Solver en Excel, se procede a recrear la ponderación del portafolio teniendo en cuenta los excesos de retornos generados por el modelo de Black-Litterman, y comparar con los otros:

Tabla 12. Portafolios de Inversión por Modelo

|                 | <b>Portafolio Retorno Histórico</b> | <b>Portafolio Modelo Markowitz (media)</b> | <b>Portafolio Modelo Markowitz (mediana)</b> | <b>Portafolio Modelo BL</b> |
|-----------------|-------------------------------------|--|--|-----------------------------|
| Alpargatas      | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 40,90 %                     |
| Embraer         | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 7,67 %                                       | 0,00 %                      |
| Natura          | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 0,00 %                      |
| Petrobras       | 85 %                                | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 2,93 %                      |
| Totvs           | 0 %                                 | 5,55 %                                     | 4,85 %                                       | 14,21 %                     |
| Vale            | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 5,78 %                                       | 1,04 %                      |
| Weg             | 0 %                                 | 67,19 %                                    | 26,54 %                                      | 0,00 %                      |
| Bradesco        | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 14,33 %                     |
| Brasil          | 15 %                                | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 26,60 %                     |
| Ambev           | 0 %                                 | 11,91 %                                    | 40,87 %                                      | 0,00 %                      |
| Lojas Renner    | 0 %                                 | 0,00 %                                     | 0,00 %                                       | 0,00 %                      |
| Energy of Minas | 0 %                                 | 15,35 %                                    | 14,29 %                                      | 0,00 %                      |
|                 | 100 %                               | 100 %                                      | 100 %  | 100 %                       |

Fuente: elaboración propia, 2024.

Como se puede observar en la Tabla 12, los resultados pueden no demostrar similitudes entre ellos. Si se compara el portafolio utilizando el modelo de BL, que está influenciado con las expectativas de los analistas, este incluye acciones con ponderaciones altas que son excluidas de los portafolios utilizando el modelo de Markowitz. Un ejemplo de esto es el caso de Alpargatas y del Banco de Brasil, lo que se debe a que en mercados altamente volátiles las opiniones de los inversores son una clave fundamental para la creación de portafolios de inversión, donde el resultado netamente matemático puede ser influenciado por variaciones.

Si bien, el modelo de Black-Litterman no es un modelo utilizado para diversificación, se constituye como un modelo robusto para la creación de portafolios que incluyen variables cualitativas y cuantitativas. Al ser incluidas variables cualitativas, el modelo ofrece un enfoque más dinámico que puede facilitar la toma de decisiones en mercados altamente volátiles, como lo es el caso del mercado de Brasil, puesto que su capacidad de integrar información le permite

adaptarse a dinámicas complejas que otros modelos podrían pasar por alto, demostrando la eficiencia del modelo en estos mercados.

## **5. Conclusiones y Recomendaciones**

El análisis realizado a los distintos modelos de creación de portafolios demuestra cómo la selección de estos modelos y parámetros influye en la composición y el desempeño de un portafolio de inversión, planteado desde el modelo de Markowitz. A través del uso de la media como medida del retorno esperado, el modelo arrojó una concentración inadecuada en pocas acciones. Esto surge debido al enfoque en la maximización de la rentabilidad esperada y la minimización del riesgo que es el fundamento en la teoría de Markowitz; no obstante, el portafolio puede inclinarse hacia activos con características extremas, lo que limita la diversificación, generando controversias al mismo modelo cuando se utiliza en mercados altamente volátiles y, desafortunadamente, en la práctica puede no ser adecuado para mercados como el brasileño, donde la volatilidad y las correlaciones entre activos son altas.

Posteriormente, al emplear la mediana como medida central en el modelo de Markowitz, se observó una mejora considerable en la diversificación del portafolio, lo cual se observa mediante el resultado, el cual incluye un conjunto más amplio de activos, reduciendo la dependencia de unos pocos activos, debido a que la mediana concentra la información en los datos, y no como un valor promedio. Este hallazgo es especialmente relevante para inversionistas que buscan minimizar el riesgo y construir portafolios más robustos frente a fluctuaciones individuales en el mercado, debido a que la mediana, al ser menos sensible a valores extremos, se presenta como una alternativa viable en mercados de alta volatilidad como el Bovespa.

El análisis CAPM reveló una situación particular en el mercado brasileño, pues la diferencia entre el retorno del mercado detallado como  $R_M$  y la tasa libre de riesgo detallada como  $R_f$ ,

arroja un resultado negativo, una consecuencia de que la tasa libre de riesgo es mayor que el rendimiento del mercado, algo usual en mercados latinoamericanos, pero que refleja un entorno donde las tasas de interés locales elevadas afectan las decisiones en la creación de portafolios de inversión. Tal situación destaca la necesidad de adaptar los modelos a las particularidades de cada mercado, con el propósito de evitar conclusiones sesgadas.

Por último, aunque el modelo de Black-Litterman no fue desarrollado como un modelo para lograr una mayor diversificación per se que el original de Markowitz, permitió incorporar opiniones de analistas y ajustó los resultados obtenidos en los modelos previos, por lo que se enfatiza que su enfoque mostró cómo incluir las expectativas subjetivas de un analista a un portafolio de inversión, puede alterar significativamente la composición este, diferenciándose entre resultados cuantitativos y cualitativos de un mercado. En este resultado, el modelo ofreció un portafolio equilibrado, pero alejado de los otros, pues refleja las perspectivas del mercado y las preferencias del inversionista.

Por lo anterior, los resultados demuestran la importancia de evaluar múltiples enfoques a través de diferentes modelos, en la creación de portafolios de inversión. Esto se hace aún más necesario cuando se trata de portafolios de mercados con alta volatilidad, dado que cada modelo tiene fortalezas, pero también tiene limitaciones que deben ser consideradas en el contexto de las características del mercado que se esté analizando. Lo anterior con el objetivo de que los inversionistas puedan tomar decisiones mejor informadas y alineadas con los objetivos estratégicos de ellos.

Con base en los resultados obtenidos en este análisis, se plantean las siguientes recomendaciones para la construcción de portafolios de inversión en mercados emergentes o volátiles, como lo es el contexto del mercado brasileño:

1. Dado que el análisis CAPM mostró un desempeño negativo, debido a que la tasa libre de riesgo es mayor al rendimiento del mercado, se podría ajustar el modelo de tal forma que refleje las características del mercado. Una sugerencia adecuada sería analizar el modelo seleccionando una tasa libre de riesgo con activos alternativos como un bono corporativo de bajo riesgo. Esto podría generar una tasa diferente que logre ayudar a obtener evaluaciones con un enfoque de desempeño de los activos más robusto.
2. Se recomienda el uso continuo del modelo Black-Litterman como una herramienta en la creación de portafolios, especialmente cuando se gestionan portafolios en mercados con alta incertidumbre, en donde la información cualitativa, como la opinión o las expectativas de los analistas, puede agregar valor.
3. En mercados de alta volatilidad, las correlaciones y riesgos sistemáticos pueden cambiar de manera considerable con el tiempo, por lo que el monitoreo y la alineación de los datos es fundamental para evitar riesgos potenciales.
4. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos con la mediana, se recomienda el uso de medidas estadísticas menos sensibles a valores extremos cuando se evalúen mercados financieros de alta volatilidad.

## 6. Referencias Bibliográficas

- Bayes, M. & Price, M. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, frs communicated by mr. price, in a letter to john canton, amfrs. *Philosophical Transactions (1683-1775)*, pages 370–418.
- Black, F., & Litterman, R. (1990). Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. *Goldman Sachs Fixed Income Research*, 115(1), 7–18.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28–43.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2014). *Ebook: Investments-global edition*. McGraw Hill.
- Chib, S., & Greenberg, E. (1998). Análisis de Bayes Empírico de Modelos de Series de Tiempo Multivariados. *Journal of Econometrics*, 90(1), 25-46.
- Cover, T. M. (1991). Universal portfolios. *Mathematical Finance*, 1(1), 1–29.
- Drobtz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work. *Financial Markets and Portfolio Management*, 15(1), 59.
- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. M. (2002). The legacy of modern portfolio theory. *The Journal of Investing*, 11(3), 7–22.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets. *Journal of Finance*, 25(2), 383–417.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. *The Journal of Finance*, 47(2), 427–465.
- Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25–46.
- Hastie, T. (2009). *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer.
- Haugen, R. A. (1999). The inefficient stock market: What pays off and why. (*No Title*).

- Idzorek, T. M. (2004). A step-by-step guide to the Black-Litterman model incorporating user-specified confidence levels. <https://www.cis.upenn.edu/~mkearns/finread/idzorek.pdf>
- Malkiel, B. (2021). *A Random Walk Down Wall Street The Time-Tested Strategy for Successful Investing*. WW Norton&Company Ltd.
- Markowitz, H. M (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
- Markowitz, H. M. (1959). Portfolio selection: Efficient diversification of investments. Wiley.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 867–887.
- Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, 8(4), 323–361.
- Meucci, A. (2005). *Risk and asset allocation* (Vol. 1). Springer.
- Nicholas, N. (2008). The black swan: the impact of the highly improbable. *Journal of the Management Training Institute*, 36(3), 56.
- Richard, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests. *Journal of Financial Economics*, 4, 129–176.
- Saita, F., & Venezia, I. (2019). Exploring the Application of the Black-Litterman Model to the Brazilian Equity Market. *Journal of Financial Research*, 42(3), 305-321.
- Satchell, S., & Scowcroft, A. (2007). A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. In *Forecasting expected returns in the financial markets* (pp. 39–53). Elsevier.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19 (3), 425–442.

Valencia García, J. A. (2018). Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con views obtenidos por modelación de volatilidad (Doctoral dissertation, Universidad EAFIT).

Walters, C. F. A. (2014). The Black-Litterman model in detail. *Available at SSRN 1314585*.

Yamim, J. D. M., Borges, C. C. H., & Neto, R. F. (2023). Portfolio Optimization Via Online Gradient Descent and Risk Control. *Computational Economics*, 62(1), 361–381.