Aplicación de métodos robustos y no paramétricos en selección de portafolios

A. Salazar – A. S. Gutiérrez – V. Movil

Modelación y simulación IV, Departamento de Ciencias Matemáticas, Escuela de Ciencias.

Universidad EAFIT

asalazara1@eafit.edu.co, asgutierrt@eafit.edu.co, vmovils@eafit.edu.co

***Resumen*- El modelo clásico de Markowitz es muy sensible a los errores de estimación de sus parámetros, generando grandes fluctuaciones de los pesos en cada rebalance y por lo tanto altos costos de transacción [1]. En el presente trabajo se evalúan técnicas no paramétricas y robustas, así como ventanas de tiempo; enfocadas al problema de selección de portafolios. De igual manera, los resultados que aquí reposan se presentan en términos del mejor Sharpe Ratio obtenido mediante la simulación de carteras con diferente cantidad de activos. Lo anterior, en aras de indagar más sobre la efectividad de los métodos planteados brevemente.**

***Palabras Clave*- Selección de Portafolio, Métodos robustos, Métodos No Paramétricos, Modelación, Simulación, Finanzas Cuantitativas.**

I. INTRODUCCIÓN

En 1952 Harry Markowitz planteó el problema de optimización de portafolios basado en los momentos estadísticos (media y varianza) de los retornos de un conjunto de activos financieros. El fundamento conceptual de dicho modelo es maximizar los retornos esperados del portafolio dado cierto nivel de riesgo, o del mismo modo, minimizar el nivel de riesgo dado un nivel de retornos esperados.

El modelo descrito ha presentado problemas prácticos, ya que para obtener una solución en la vida real se tiene que estimar los momentos de los datos, que en este caso son los retornos de un conjunto de acciones en algún mercado bursátil. Además, el modelo de Markowitz asume que los datos siguen una distribución normal, y en la práctica estimarlos retornos esperados a partir de la media poblacional supone un estimador de dichos datos que es muy sensible, lo que puede sesgar la respuesta a un portafolio que no sea realmente óptimo [1].

Por otro lado, para solucionar los problemas que ostenta el modelo de Markowitz, se sugiere en la literatura involucrar en dicho modelo técnicas robustas y no paramétricas para la obtención de un resultado mejorado. Es por ello que se revisan varios acercamientos al problema de selección de portafolios a través de estimaciones aplicadas a todos los datos históricos disponibles al momento de elegir la mejor distribución de una posible inversión en diferentes activos.

De ahí que, algunas de las estimaciones sugeridas usan los Métodos Naïve, el de Desviación estándar inversa o el Método de la Mínima Varianza de optimización. No obstante, es claro que los retornos de una cartera específica se caracterizan por su alta volatilidad, por lo que se hace imperativo utilizar métodos más robustos y comparar los resultados que vienen de una estimación estática y los que vienen de una dinámica como sigue en este documento.

En síntesis, el presente trabajo sigue la idea de que las técnicas robustas y no paramétricas pueden solucionar el problema de estimación o tener una mejor relación entre retorno y riesgo del portafolio (Sharpe-ratio). De manera que, se utilizan los coeficientes de correlación de Kendall y Spearman, la matriz de comedianas y un recorte por medio de una distancia de Mahalanobis robusta, para tener diferentes aproximaciones, las cuales, utilizando otras técnicas como las ventanas de tiempo, se puedan comparar y de este modo, sea posible indagar más sobre la efectividad que tienen los métodos descritos en la solución del problema de selección de portafolios.

II. MATERIALES Y MÉTODO

Para realizar este trabajo se tuvieron presente las siguientes técnicas robustas y no paramétricas.

MATERIALES

A. Acercamiento robusto y no paramétrico al método de MV

El modelo de mínima varianza es un problema de optimización cuadrática, que minimiza la varianza del portafolio, la cual se encuentra en la función objetivo a continuación:

$$\begin{aligned} &\min_{w} W\Sigma W \\ s.a. &\sum_{i} w_i = 1, \qquad \forall i = 1 \dots . N \\ &w_j \geq 0, \qquad \forall j \end{aligned} \tag{1}$$

Donde:

- w es el vector de pesos
- N es el número de activos
- Σ es la matriz de varianzas y covarianzas, la cual se estima así:

$$\sum_{x,y} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{T} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \qquad \forall x, y \tag{2}$$

Por otro lado, a pesar de que el método entrega buenas soluciones en términos de rentabilidad tiene un alto error de estimación. Dicho error se genera al suponer que los retornos provienen de una distribución normal, lo que influye en la estimación de un portafolio óptimo. Por añadidura, otro inconveniente que se observó es que, dado a la volatilidad de los retornos, utilizar medidas poco robustas como la media y la desviación estándar hace que las estimaciones sean sensibles a los datos raros y por lo tanto afecten la precisión de los cálculos.

De ahí, que los métodos siguientes sean robustos y no paramétricos.

B. Recorte de los datos

El primer método robusto consiste en recortar los datos más extremos con base a la métrica de Mahalanobis definida como:

$$d_i(x,y) = (x-y)^T \Sigma^{-1} (x-y) \tag{3}$$

Luego, se eliminan los datos cuya distancia supera la del percentil 95. De ahí que, se obtenga el nuevo set de datos para aplicarle la optimización usual MV descrita en la subsección A.

Por otro lado, se realiza un segundo recorte basado en la versión robusta de la norma Mahalanobis definida como:

$$RMD_i = \sqrt{(x_i - \mu_{MCD})\widehat{\Sigma_{\mathrm{MCD}}^{-1}}(x_i - \mu_{MCD})^T} \tag{4}$$

Donde:

- μ_{MCD} es el valor esperado calculado
- Σ_{MCD} es la matriz de covarianza

Ambos valores se calculan a través de la librería de Matlab robustcov que utiliza el algoritmo fast-MCD, este es basado en el determinante mínimo de la matriz de covarianza [2].

C. Variaciones en la matriz de covarianzas

En la solución habitual del problema de selección de portafolios por el método MV se utiliza la matriz de covarianzas definida según la correlación de Pearson. A continuación, se detallan dos métodos cuyas matrices de covarianza se definen con base al coeficiente de correlación de Kendall y el de Spearman, esto, con el fin de obtener dos aproximaciones no paramétricas [1].

Consecuentemente, una última variación de la matriz de covarianzas se realiza aplicando una versión robusta conocida como matriz de comediana, esta se define como:

$$COM(X,Y) = median\big(X - median(X)\big)\big(Y - median(Y)\big) \tag{5}$$

D. Índice Rendimiento-Riesgo

Una vez se obtienen las utilidades simuladas de cada posible portafolio (explicado brevemente), se puede comparar que tan buenos son los resultados según la rentabilidad y el riesgo logrado en cada simulación. Asimismo, dicha comparación de manera individual o conjunta se realiza mediante el Sharpe Ratio así:

$$SR = \frac{rentabilidad}{riesgo} \tag{6}$$

Posteriormente, para llevar a cabo la comparación de resultados se emplean dos medidas robustas muy utilizadas en la literatura. Dichas medidas, remplazan la media y la desviación estándar comúnmente empleadas para medir rentabilidad y riesgo respectivamente.

De forma que, la mediana para medir la rentabilidad y la desviación absoluta mediana (MAD) se define como sigue:

$$MAD(X) = median(|X - median(X)|) \tag{7}$$

MÉTODO

A partir de las técnicas robustas y no paramétricas indicadas, se procede a iniciar una simulación de portafolios con un set de p datos y n activos, esto con el objetivo de comparar la robustez de los métodos ya presentados. Por ejemplo, a continuación, se expone una simulación para sets de datos con 5 y 30 activos.

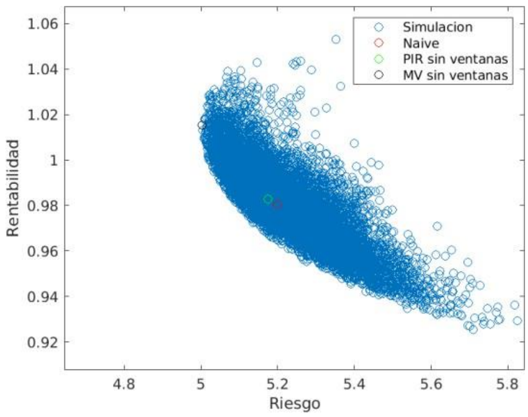
De manera consecuente, las primeras simulaciones se realizan de manera Naive usando simulación Montecarlo para 10000 portafolios aleatorios. En este, se genera un portafolio que asigna un peso de $\frac{1}{n}$ a cada activo. Luego, aplicaremos el método no paramétrico PIR (Ponderación inversa al riesgo) midiendo el riesgo a través de la desviación estándar y la técnica de minimización de la varianza MV usando la librería *quadprog* de Matlab.

Por otra parte, las últimas simulaciones que se presentan son variaciones del método de la mínima varianza que hacen que sea más acertada y menos sensible a los datos raros. Esto se consigue aplicando recortes a los datos, mediante el uso de la métrica Mahalanobis y su versión robusta al 15%. Luego se calcula la matriz de covarianzas usada en la optimización MV solo que usando su versión robusta o comediana, del mismo modo, con las correlaciones Kendall y Spearman.

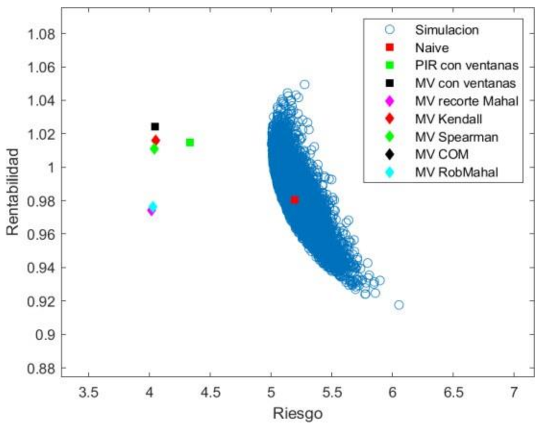
En resumen, al aplicar los métodos de estimación robustos y no paramétricos mencionados anteriormente se obtienen, en general, buenos resultados. Sin embargo, una forma de mejorar los valores de riesgo y rentabilidad que generan las elecciones de la inversión en el portafolio es por el método de ventanas de tiempo. Así las cosas, el último paso de este trabajo es agregar, con ventanas de 100 entradas, la aproximación de portafolios dinámica y comparar los resultados con los descritos previamente. Vale resaltar que, dichos resultados están en términos de un Sharpe Ratio calculado con mediana para la rentabilidad y MAD para el riesgo.

III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En primer lugar, se analizaron las diferencias de los resultados usando la presentación gráfica de las simulaciones. Es así como en el set de datos de 5 activos obtenido de la librería de datos Kenneth R. French; se puede visualizar considerablemente la mejora de los resultados de los portafolios, principalmente en reducción del riesgo, con y sin la estrategia de ventanas de tiempo (Véase Fig. 1.).



a) Simulación de métodos en Data 5 sin ventanas



b) Simulación de métodos en Data 5 con ventanas

Fig. 1. Simulación de métodos en Data 5.

En la figura 1, el riesgo y la rentabilidad fueron calculados mediante la desviación estándar y la media respectivamente. Para este caso se consideraron ventanas de tamaño 100. En la figura 1.b, observamos que las técnicas robustas resultan también en buenos resultados, principalmente en la considerable reducción del riesgo. Como se explicó en la sección de materiales y métodos, medir rentabilidad y riesgo por medio de la media y la desviación estándar hace que sea muy sensible a datos extremos, por lo que en la figura 2, se incluyen los resultados de las simulaciones en una gráfica donde estos mismos valores fueron calculados con la mediana y la MAD respectivamente.

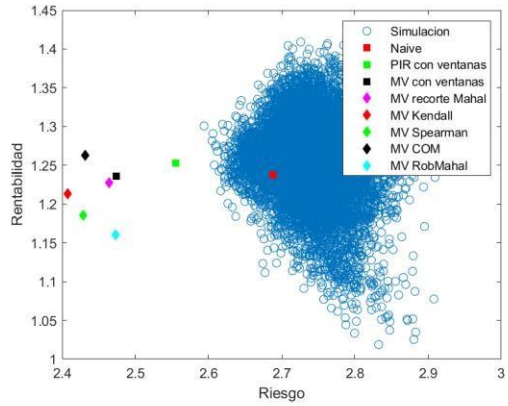
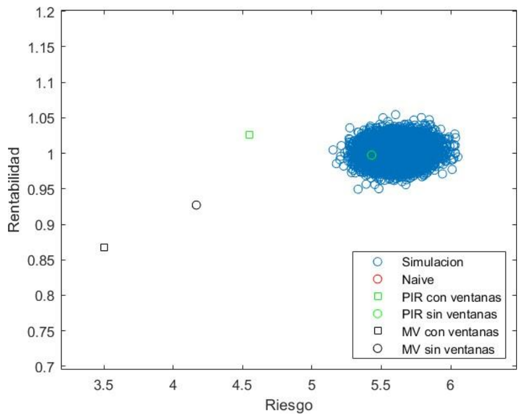


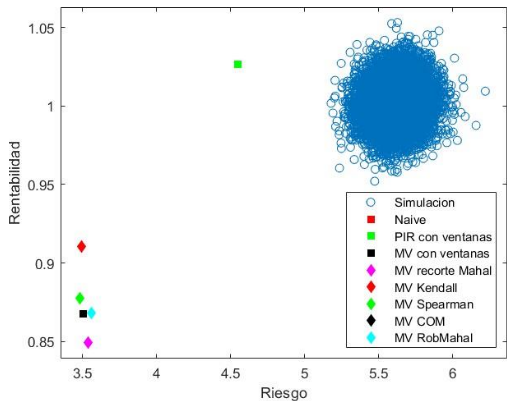
Fig. 2. Resultados sobre Data 5 utilizando Mediana y MAD.

Por lo que sigue, antes de analizar los resultados expresados como índice de Sharpe Ratio, deben observarse los resultados de las mismas simulaciones sobre un set de datos de 30 activos, los cuales se obtuvieron de la misma base de datos.

De ahí que, comparando las primeras técnicas aplicadas con y sin el método de ventanas de tiempo en graficas donde la rentabilidad y el riesgo se calculan por media y desviación estándar (no robustos) como evidencia la figura 3.



a) Simulación de métodos en Data 30 sin ventanas.



b)Simulación de métodos en Data 30 con ventanas.

Fig. 3. Simulación de métodos en Data 30

Los resultados que expone la figura 3 muestran una considerable reducción del riesgo, aunque los valores de rentabilidad también están por debajo de los de las simulaciones aleatorias. Además, observando los resultados de las simulaciones robustas y no paramétricas en una gráfica donde la rentabilidad y el riesgo se calculan con mediana y MAD respectivamente (Véase fig. 4.).

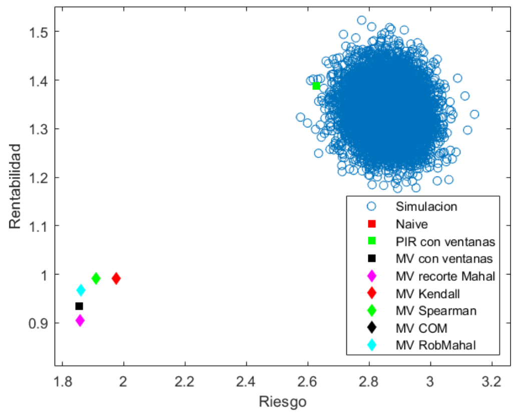


Fig. 4. Resultados sobre Data 30 usando mediana y MAD.

Así las cosas, se ve nuevamente que los valores de riesgo son menores a los calculados por desviación estándar y se puede identificar valores de riesgo más dispersos para los métodos por MV robustos y por ventanas que en el cálculo anterior (por desviación).

De manera semejante, se pueden comparar los resultados en términos del Sharpe Ratio. En la tabla 1, se presentan los datos del indicador calculados sobre las dos medidas de rentabilidad y riesgo expuestas en la sección II. Así, SR indica el cálculo usando media y desviación estándar y SRR indica el cálculo usando mediana y MAD. Igualmente, se presentan primero los valores sobre la base de datos de 30 activos.

TABLA I.
RESULTADOS PARA DATA 30.

Sin Ventanas	Data30	PIR	MV	Naive		
	SR	0.1837	0.2225	0.1791		
	SRR	0.1769	0.1791	0.1687		
Con Ventanas		PIR con ventanas	MV con ventanas			
	SR	0.2256	0.2478			
	SRR	0.2171	0.1865			
Con Ventanas		MV recorte Mahal	MV RobMahal	MV Kendall	MV Spearman	MV COM
	SR	0.2399	0.2439	0.2604	0.2518	0.0557
	SRR	0.1782	0.1844	0.1997	0.1936	0.0998

La fig. 5. muestra los Sharpe Ratios consignados en la tabla I.

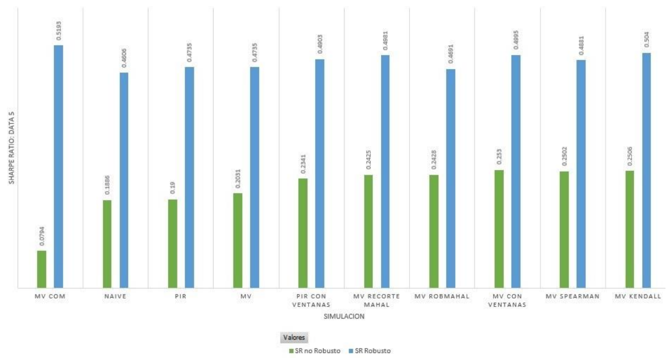


Fig. 5. Sharpe Ratios obtenidos de Data 5.

TABLA II.
RESULTADOS PARA DATA 5.

Sin Ventanas	Data5	PIR	MV	Naive		
	SR	0.19	0.2031	0.1886		
	SRR	0.4735	0.4735	0.4606		
Con Ventanas		PIR con ventanas	MV con ventanas			
	SR	0.2341	0.253			
	SRR	0.4903	0.4995			
Con Ventanas		MV recorte Mahal	MV RobMahal	MV Kendall	MV Spearman	MV COM
	SR	0.2425	0.2428	0.2506	0.2502	0.0794
	SRR	0.4981	0.4691	0.504	0.4881	0.5193

La fig. 6. muestra los Sharpe Ratios consignados en la tabla II.

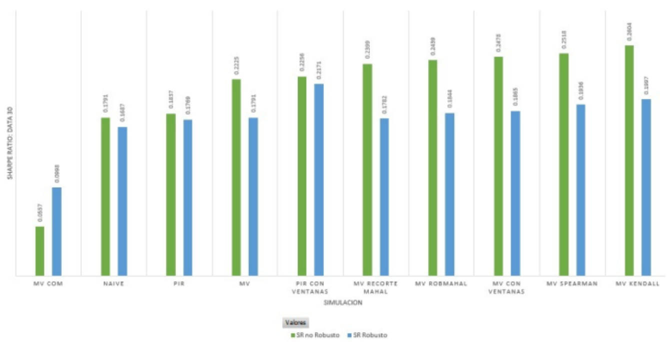


Fig. 6. Sharpe Ratios obtenidos de Data 30.

Finalmente, comparando los resultados de ambos sets de datos mediante el indicador Sharpe Ratio Robusto, se obtiene que la mejor simulación en el fichero de 5 activos fue la optimización MV con varianza basada en la Comedian y, en el fichero de 30 activos se logró con la ponderación inversa al riesgo PIR usando la técnica de ventanas (Véase Fig. 7.)

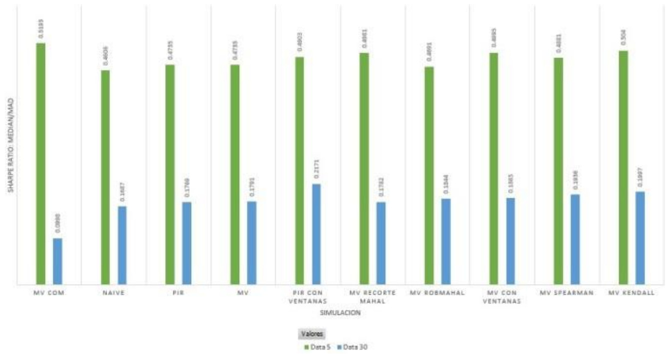


Fig. 7. Comparación de los Sharpe Ratios obtenidos en los dos sets (Data 5 y Data 30).

IV. CONCLUSIONES

Es posible ver que las técnicas no robustas PIR y MV mejoran considerablemente solo con considerar la técnica de asignación dinámica del portafolio. Con respecto al cálculo de rentabilidad y riesgo de manera robusta, lo primero que se nota es que el riesgo de todas las simulaciones está en un rango aproximado de $[2.4, 3]$ a diferencia del rango $[4, 6]$ que se maneja en el acercamiento no robusto (std). Los valores de rentabilidad se encuentran entre $[1, 1.4]$, un rango más amplio que el de $[0.9, 1]$.

Observando las gráficas donde se calcula la rentabilidad por la media, podemos notar que hay una distribución más dispersa de los valores de riesgo de las simulaciones al usar la MAD lo cual nos puede ayudar a determinar, con mayor precisión, cuál de los métodos proporciona mejores resultados.

REFERENCIAS

[1] Hubert, M. & Debruyne, M (2009) Minimum covariance determinant. Wiley Interdiscip. Reviews: Computational Statistics, 2(1), p.36, DOI: 10.1002/wics.61

[2] Cabana, E., Laniado, H. & Lillo, R. (2017) Multivariate outlier detection based on a robust Mahalanobis distance with shrinkage estimators. UC3M Working Papers. Madrid, España. ISSN 2387-0303

[3] Otálora, J. (2019) Selección de Portafolio: Estimación No Paramétrica y Robusta. Universidad EAFIT. Medellín, Colombia. URI: http://hdl.handle.net/10784/15337

[4] Rousseeuw, Peter & Driessen, Katrien. (1999). A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator. Technometrics. 41. 212-223. DOI: 10.1080/00401706.1999.10485670