



Vigilada Mineducación

**OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS: UN ANÁLISIS COMPARATIVO DE
ESTRATEGIAS CONVENCIONALES vs. ALGORITMOS GENÉTICOS PARA LOS
MERCADOS DE ESTADOS UNIDOS y COLOMBIA**

*Portfolio Optimization: A comparative analysis of conventional strategies vs. genetic
algorithms for the U.S. and Colombian markets*

JUAN JOSÉ VÉLEZ BUNZL

Tesis presentada como requisito para obtener el título de Magíster en Administración
Financiera

Asesor

Juan Carlos Botero Ramírez. M. Sc.

UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE ECONOMÍA Y FINANZAS
MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA - MAF
BOGOTÁ
2023

Dedicatoria

Para Jero:

A chuisle mo chroí (el pulso de mi corazón)

“Los sueños sin metas, son sólo sueños; y te llevarán a desilusiones. Las metas son el camino hacia tus sueños, pero no se pueden lograr sin disciplina y consistencia”.

Denzel Washington

“Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad”.

Albert Einstein

Agradecimientos

A mamá: “Quisiera dedicarte algunos versos, que valieran lo que para mí vale tu luz, pero no cabe en un folio el universo, tampoco en una frase cabe mi gratitud”. No hay palabras que expresen cuanto te amo, madre mía.

A mi familia por su apoyo incondicional desde el inicio, por enseñarme que la constancia es el camino hacia la victoria y por no dejarme caer cuando las fuerzas flaqueaban. Todo mi amor para ustedes hoy y siempre.

A mis compañeros de trabajo que tantas veces me cubrieron durante los turnos de los sábados aun sabiendo que eso les significaba más trabajo. Sin ustedes esto no habría sido posible.

Finalmente, a todos aquellos que siempre han creído en mí, cuyo calor, cariño y compañía puedo sentir incluso en la distancia y han sido sustento para aquellos días donde el camino se dibuja gris y las fuerzas flaquean.

Mil gracias.

Resumen

La optimización de portafolios de inversión es una cuestión de vital interés para los inversionistas; debido a que existen diferentes métodos para ello, surge la cuestión de cuál de estos permite obtener el portafolio más eficiente. El propósito de esta tesis es realizar una comparación entre diferentes aproximaciones tales como los modelos de Markowitz, de varianza inversa, entre otros, con una técnica de optimización usando algoritmos genéticos; a su vez, se pretende analizar los resultados obtenidos mediante estas metodologías en un mercado desarrollado como el americano y uno poco desarrollado como el colombiano. Se recolectaron datos históricos de diez de las principales acciones de los índices S&P500 y Colcap y usando Matlab y Python se construyeron los portafolios para comprobar si el uso de herramientas de inteligencia artificial como los algoritmos genéticos pueden generar portafolios con mejor desempeño que otras metodologías y también la influencia del tipo de mercado en el resultado final.

Palabras clave: Optimización de portafolios, algoritmos genéticos, mercado accionario, inteligencia artificial.

Abstract

Investment portfolio optimization is an aspect of vital interest for investors; considering there are different methods for achieving this goal, the question arises about which of them allows to obtain the optimal portfolio. The purpose of this thesis is to perform a comparison between different approaches such as Markowitz and inverse variance, among others, with an optimization technique using genetic algorithms. Furthermore, it is intended to analyze the results obtained by these methodologies in a developed market like the United States and in a less developed one like Colombia. To do this, historical data on 10 of the leading stocks from the S&P500 and Colcap indexes were collected, while portfolios were constructed using Matlab and Python; with this, it is expected to demonstrate whether the use of artificial intelligence (AI) techniques such as genetic algorithms, can generate portfolios with a better performance than those produced through other methodologies. Also, it is important to assess the influence of the type of market we are dealing with in this outcome.

Key words: Portfolio Optimization, Genetic Algorithms, Stock Market, Artificial Intelligence.

Tabla de contenidos

Lista de abreviaciones	vi
Lista de tablas	vii
Lista de figuras	viii
Lista de ecuaciones.....	ix
1. Introducción.....	1
2. Marco teórico.....	2
2.1. Precios de activos y retornos	2
2.1.1. Acciones	2
2.1.2. Precios y retornos	2
2.2. Teoría de portafolios.....	3
2.2.1. Trasfondo matemático	4
2.2.1.1. Optimización de Markowitz o media varianza	4
2.2.1.2. Portafolios de pesos iguales.....	7
2.2.1.3. Portafolios de máxima <i>ratio</i> de Sharpe	7
2.2.1.4. Medida de la diversificación.....	8
2.3. Algoritmos genéticos.....	8
2.3.1. Aplicación de los algoritmos genéticos a la teoría de portafolios	11
3. Metodología	13
4. Resultados.....	16
4.1. Diversificación de los portafolios.....	19
4.2. Caso 1: No existen costos de transacción	22
4.3. Caso 2: los costos de transacción fijos.....	24
4.4. Caso 3: los costos de transacción son variables.....	27
4.5. Análisis de resultados	29
5. Discusión	31
6. Conclusiones.....	32
7. Bibliografía	33
Anexo A: <i>Scripts</i> usados	36
Anexo B: Gráficas obtenidas mediante la <i>app</i> desarrollada.....	38

Lista de abreviaciones

AAPL: Ticker de la empresa Apple Inc.

CAL: Línea de asignación de capital (Capital Allocation Line)

CAPM: Modelo de valoración de activos financieros (Capital Asset Pricing Model)

CML: Línea del mercado de capitales (Capital Market Line)

GAs: Algoritmos genéticos (Genetic Algorithms)

SML: Línea de activos del mercado (Security Market Line)

Lista de tablas

Tabla 1. Resumen de los resultados obtenidos por De Greiff y Rivera (2018)	12
Tabla 2. Listado de acciones seleccionadas	14
Tabla 3. Criterios de clasificación de las estrategias	15
Tabla 4. Tasa libre de riesgo y retornos anuales promedios índices y tasa libre de riesgo.....	16
Tabla 5. Grado de concentración de portafolios medidos por el índice de Herfindahl	20
Tabla 6. Resumen de métricas para el mercado de Estados Unidos.....	22
Tabla 7. Resumen de métricas para el mercado colombiano	23
Tabla 8. Resumen métricas mercado Estados Unidos con costos de transacción fijos	25
Tabla 9. Resumen métricas mercado colombiano costos de transacción fijos	26
Tabla 10. Resumen métricas mercado de Estados Unidos con costos variables	28
Tabla 11. Resumen métricas mercado colombiano con costos variables	28

Lista de figuras

Figura 1. Precios de cierre ajustados de la acción de Apple	3
Figura 2. Proceso gráfico del funcionamiento de los algoritmos genéticos.	9
Figura 3. Función objetivo a optimizar usando algoritmos genéticos.....	10
Figura 4. Resultados de la optimización de la función objetivo usando GA.....	11
Figura 5. Generaciones y grado de ajuste de cada una de ellas.....	11
Figura 6. Resultados obtenidos por Lin (2008).....	12
Figura 7. Gráfica de precios acciones S&P 500.....	14
Figura 8. Inicio de la interfaz de usuario.....	17
Figura 9. Interfaz de usuario luego finalizar el backtesting por primera vez.....	17
Figura 10. Definición de estrategias para el motor de backtesting de Matlab.....	18
Figura 11. Función que optimiza la ratio de Sharpe mediante algoritmo genético	18
Figura 12. Mapa de calor de concentración de activos según la estrategia seleccionada.....	19
Figura 13. Posiciones de los activos portafolio de Markowitz.....	20
Figura 14. Posiciones de los activos portafolio de máxima ratio de Sharpe	21
Figura 15. Posiciones de los activos portafolio de pesos iguales.....	21
Figura 16. Posiciones de los activos portafolio GA	22
Figura 17. Valor de los portafolios sin costos de transacción	24
Figura 18. Valor de los portafolios para costos de transacción fijos.....	27
Figura 19. Función de costos de transacción variables	27
Figura 20. Valor de los portafolios para costos de transacción variables.....	30
Figura 21. Mapa de calor concentración de activos	38
Figura 22. Valor de los portafolios sin costos de transacción	38
Figura 23. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos.....	39
Figura 24. Valor de los portafolios con costos de transacción variables.....	39
Figura 25. Mapa de calor concentración de activos	40
Figura 26. Valor de los portafolios sin costos de transacción	40
Figura 27. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos.....	41
Figura 28. Valor de los portafolios con costos de transacción variables.....	41
Figura 29. Mapa de calor concentración de activos	42
Figura 30. Valor de los portafolios sin costos de transacción	42
Figura 31. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos.....	43
Figura 32. Valor de los portafolios con costos de transacción variables.....	43
Figura 33. Mapa de calor concentración de activos	44
Figura 34. Valor de los portafolios sin costos de transacción	44
Figura 35. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos.....	45
Figura 36. Valor de los portafolios con costos de transacción variables.....	45

Lista de ecuaciones

Ecuación 1. Retorno obtenido de una acción en el tiempo t	3
Ecuación 2. Retorno logarítmico para una acción en el tiempo t	3
Ecuación 3. Retorno esperado de un portafolio.....	4
Ecuación 4. Restricción de pesos de activos de un portafolio.....	4
Ecuación 5. Medida del riesgo de un portafolio.....	4
Ecuación 6. Riesgo de un portafolio de n activos	5
Ecuación 7. Desarrollo matemático del riesgo de un portafolio dado por la varianza de este.....	5
Ecuación 8. Varianza de un portafolio de dos activos.....	5
Ecuación 9. Restricción de pesos para un portafolio de dos activos	5
Ecuación 10. Riesgo de un portafolio de 2 activos en términos del peso del activo 1	5
Ecuación 11. Peso del activo 1 que minimiza el riesgo del portafolio	5
Ecuación 12. Peso del activo 2 que minimiza el riesgo del portafolio	5
Ecuación 13. Retorno esperado de un portafolio de dos activos	6
Ecuación 14. Riesgo de un portafolio de dos activos si uno de ellos se considera libre de riesgo	6
Ecuación 15. Retorno de un portafolio de dos activos donde uno de ellos es un activo libre de riesgo.....	6
Ecuación 16. Expresión matemática de la ratio de Sharpe.....	6
Ecuación 17. Problema de maximización de portafolios incluyendo el factor de apetito al riesgo λ	6
Ecuación 18. Retorno de un portafolio de n activos con pesos iguales	7
Ecuación 19. Varianza de un portafolio de pesos iguales	7
Ecuación 20. Función objetivo de un portafolio de máxima ratio de Sharpe.....	7
Ecuación 21. Fórmula general del índice de Herfindahl	8
Ecuación 22. Conversión de tasa efectiva anual a tasa efectiva diaria	16

1. Introducción

La asignación de activos es una tarea compleja que involucra una serie de decisiones importantes en términos de inversión. La teoría moderna de portafolios proporciona un marco conceptual para asignar recursos de manera efectiva entre diferentes activos y gestionar los riesgos de inversión (Markowitz, 1952; Markowitz, 1991). La aproximación estándar para resolver este problema se basa en maximizar el rendimiento para un nivel de riesgo dado o, lo que es lo mismo, minimizar el riesgo para un rendimiento esperado, lo que da lugar a una frontera eficiente de portafolios (Roudier, 2007). Además de la aproximación de Markowitz, existen otras metodologías, tales como la asignación igualitaria de pesos a los activos del portafolio y portafolios de *ratio* de Sharpe máxima, entre otras (Simonson, 1990; Sharpe, 1966).

Sin embargo, los métodos clásicos de optimización presentan algunas limitaciones, como la suposición de que los retornos de los activos siguen una distribución normal y que la función de utilidad del inversor es cuadrática (Markowitz, 1952). Por esta razón, se hace necesario el uso de técnicas computacionales que permitan superar estas debilidades y optimizar portafolios de manera más efectiva y eficiente (Kyong *et al.*, 2005; Lin & Liu, 2008). Una de estas técnicas son los algoritmos genéticos, que fueron introducidos por Holland (1975) y que han sido aplicados exitosamente a la optimización de portafolios (Arnone *et al.*, 1993). Debido a su flexibilidad, los algoritmos genéticos se han convertido en una herramienta popular para desarrollar portafolios eficientes en diferentes mercados financieros, tanto desarrollados como poco desarrollados (Lin & Liu, 2008).

En el capítulo 2 se amplía el marco teórico partiendo de la teoría clásica de portafolios, siguiendo por el desarrollo matemático de los métodos clásicos que se estudiarán y terminando con los conceptos generales de los algoritmos genéticos y la aproximación de diversos autores para su aplicación a la teoría de portafolios, lo cual constituye el objeto de esta tesis.

En el capítulo 3 se presenta la metodología de esta investigación, cuyo propósito es realizar una comparación entre diferentes aproximaciones de optimización de portafolios, incluyendo la metodología de Markowitz, la asignación igualitaria de pesos, los portafolios de *ratio* de Sharpe máxima y portafolios construidos utilizando algoritmos genéticos. Además, se pretende analizar los resultados obtenidos mediante estas metodologías en dos mercados financieros distintos: el mercado estadounidense y el mercado colombiano. Para ello, se recolectarán datos históricos de 10 de las principales acciones de los índices S&P500 y Colcap y se construirán los diferentes portafolios utilizando Matlab y Python.

Se espera que el uso de herramientas de inteligencia artificial tales como los algoritmos genéticos permita encontrar portafolios con mejor desempeño que otras metodologías, y se espera que esta investigación contribuya a una mejor comprensión de la eficacia de estas técnicas en diferentes mercados financieros.

2. Marco teórico

2.1. Precios de activos y retornos

Cuando los actores económicos (personas, empresas, etc.) se encuentran con un exceso de liquidez, se presentan varias opciones para disponer de dicho exceso, entre ellas la de asignar estos recursos en los mercados financieros; el término mercados financieros abarca una amplia gama de productos tales como acciones, bonos de deuda soberanos y privados, divisas y *commodities*, entre otros. En este trabajo se tratarán portafolios compuestos por acciones, por lo que es importante conocer qué es una acción, qué representa el precio de esta y qué son los retornos obtenidos por los inversores.

2.1.1. Acciones

Las acciones pueden definirse como un activo financiero que representa una parte del capital social de una empresa. Así, por ejemplo, si una empresa decide emitir 1000 acciones y un inversor adquiere 100 de estas, se convierte en el dueño del 10% de la compañía. Existen diferentes tipos de acciones que otorgan a sus poseedores distintos derechos y dependiendo de estos derechos, el inversor de nuestro ejemplo puede participar en las ganancias de la compañía vía dividendos y/o participar en las decisiones de la compañía con un porcentaje de voto igual a su participación y en algunos casos, en caso de liquidación de la empresa, puede encontrarse en una posición más alta para recibir la parte correspondiente si esta existiese.

Al tratarse de un activo financiero, el inversor puede decidir conservar las acciones adquiridas o venderlas a un determinado precio, para lo cual deberá encontrar un comprador que esté dispuesto a pagar el precio ofertado. Esto no siempre es fácil y en ocasiones el vendedor no puede conseguir un comprador que esté dispuesto a pagar el precio propuesto, por lo que, si el primero necesita liquidar su posición, deberá hacerlo a un precio menor. Esta situación se conoce como riesgo de liquidez y el trabajo de los mercados financieros es reducir este riesgo, juntando a los compradores y vendedores, con el fin de aumentar el número de transacciones y reducir sus costos.

2.1.2. Precios y retornos

Precio: Se define el precio de una acción en el tiempo t como P_t , el cual está dado por el valor al cual los compradores están dispuestos a pagar por las acciones de una compañía en dicho tiempo. Generalmente se toma el precio de cierre (valor de las acciones al final de la jornada de negociación) del día, la semana o el mes.

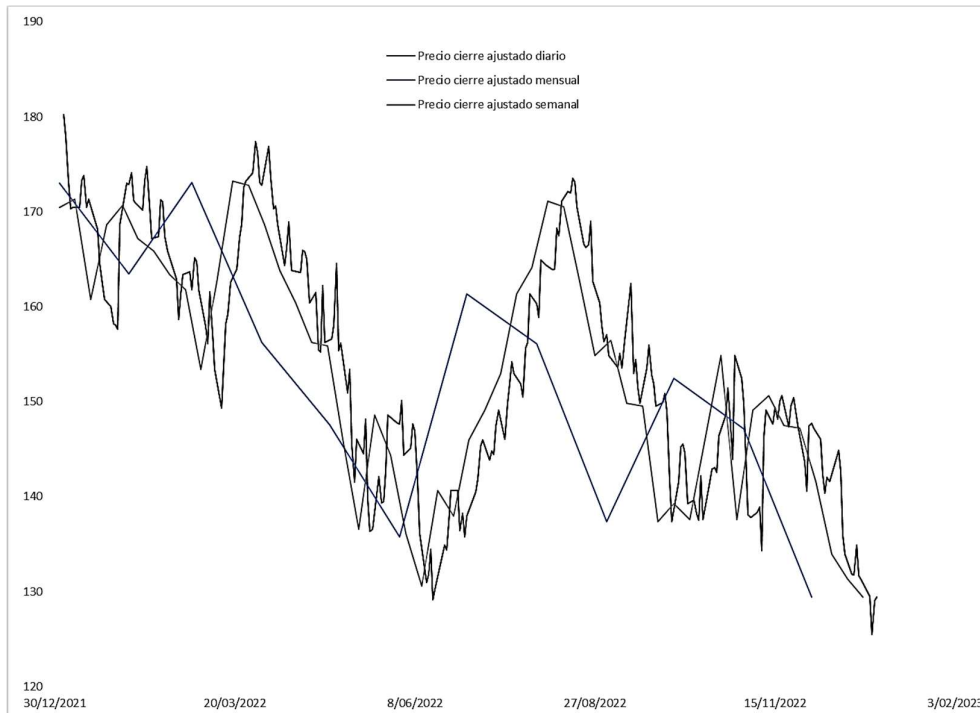
La figura 1 muestra los precios de la acción de Apple (AAPL) para diferentes escalas de tiempo durante el año 2022. Debido a que constantemente hay movimientos de compra y venta, los precios de las acciones varían día a día. Así las cosas, mientras más amplia sea la ventana de evaluación de los precios, más suave puede verse la gráfica, tal como se puede comprobar en la figura 1.

Retornos: Se definen los retornos de una acción entre el tiempo $t-1$ y el tiempo t como la diferencia del precio en el instante t (P_t) y el precio en el instante $t-1$ (P_{t-1}) dividido por el precio en el instante $t-1$, tal como se muestra en la ecuación 1.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Ecuación 1. Retorno obtenido de una acción en el tiempo t

Figura 1. Precios de cierre ajustados de la acción de Apple



Nota: Datos obtenidos para periodicidades diarias, semanales y mensuales.

En la práctica se suelen usar los retornos logarítmicos, ya que, a diferencia de los retornos aritméticos, son aditivos en el tiempo, lo que permite aplicar el teorema central del límite y reducir la complejidad algorítmica. La expresión para los retornos logarítmicos está dada por la ecuación 2, dadas pequeñas variaciones de precio.

$$\log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log\left(1 + \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1\right) \cong \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = R_t$$

Ecuación 2. Retorno logarítmico para una acción en el tiempo t

2.2. Teoría de portafolios

La teoría de portafolios tiene su origen en el trabajo clásico de Harry Markowitz (1952), que se basa en maximizar el rendimiento de un portafolio para un nivel de riesgo dado o minimizar el riesgo para un rendimiento esperado. Tobin (1958) amplía el marco de la media-varianza, añadiendo el comportamiento del inversor ante el riesgo; luego William Sharpe (1966) introduce la *ratio* que lleva su nombre, el cual permite medir el desempeño de un activo o un portafolio con relación al riesgo asumido, al invertir en dicho activo o portafolio. Inicialmente, este marco conceptual se aplicó a activos domésticos, hasta que Grubel (1968), Levy y Sarnat

(1970) y Solnic (1974), entre otros, comenzaron a aplicar esta estructura de portafolios a los mercados internacionales (Ghosh, 2010).

Por otra parte, muchos inversores admiten no conocer mucho sobre riesgos y retornos futuros y por tanto se refugian en portafolios indexados. Otros restringen su elección a acciones con los retornos esperados más altos. Esta falta de información sobre los retornos y el riesgo futuro lleva a estos inversores a una diversificación ingenua (Dirk, 1998). Dentro de este tipo de portafolios se encuentran los portafolios de pesos iguales o también llamados portafolios 1/N, en los que cada acción dentro del portafolio tiene un peso dado por 1 dividido el número total de acciones que componen la cartera. Por último, los portafolios de *ratio* de Sharpe máxima se derivan del trabajo de Sharpe (1966) y se basan en encontrar dentro de las combinaciones posibles de portafolios aquel que se encuentre sobre la frontera eficiente y sea tangente a la línea de asignación de capital (CAL, por su sigla en inglés).

2.2.1. Tránsito matemático

2.2.1.1. Optimización de Markowitz o media varianza

Consideremos un inversor que tiene una cantidad de dinero \$W\$ y decide invertir en n activos. Los retornos esperados para estos activos son $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, y la varianza de los retornos de cada activo es $\sigma^2_1, \sigma^2_2, \sigma^2_3, \dots, \sigma^2_n$, respectivamente. El retorno esperado del portafolio está dado por la ecuación 3.

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i * r_i$$

Ecuación 3. Retorno esperado de un portafolio

Donde w_i es la proporción de fondos invertidos en el activo i (o también llamado peso para $i = 1, 2, 3, \dots, n$) y el porcentaje de pesos de cada activo dentro del portafolio se determina por la ecuación 4.

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Ecuación 4. Restricción de pesos de activos de un portafolio

El riesgo del portafolio, medido por su varianza (σ^2_p) se muestra en la ecuación 5.

$$\sigma^2_p = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Ecuación 5. Medida del riesgo de un portafolio

Donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación, y σ_{ij} es la covarianza entre los retornos de los i -ésimo y j -ésimo activos. En este portafolio de n activos, existen n términos que involucran las varianzas de estos n activos, cada uno multiplicado por el cuadrado de su peso más $nC_2 = (n(n-1)/2)$ términos que involucran la covarianza (o el coeficiente de correlación). Entonces, la ecuación 5 puede escribirse como se muestra en las ecuaciones 6 y 7.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Ecuación 6. Riesgo de un portafolio de n activos

O:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = & [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_3^2 \sigma_3^2 + \dots + w_n^2 \sigma_n^2] \\ & + \{2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} + 2w_1 w_4 \sigma_1 \sigma_4 \rho_{14} + \dots \\ & + 2w_m w_n \sigma_m \sigma_n \rho_{mn}\} \end{aligned}$$

Ecuación 7. Desarrollo matemático del riesgo de un portafolio dado por la varianza de este

El término en corchetes ([]) en la primera parte de la ecuación 6 representa la porción del riesgo no removible en el portafolio. Si muchos de los términos ρ_{ij} en las llaves ({}) de la ecuación 7 son negativos, al sumarlos con la primera componente del riesgo del portafolio, entonces el riesgo total del portafolio disminuirá. Esto es lo que se entiende por diversificación y por qué es importante.

Analicemos ahora el caso especial de un portafolio compuesto por dos activos. En este caso el riesgo total del portafolio estará dado por la ecuación 8.

$$\sigma_p^2 = [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2] + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$$

Ecuación 8. Varianza de un portafolio de dos activos

Teniendo en cuenta la restricción que se plantea en la ecuación 4, se obtiene la ecuación 9.

$$w_1 + w_2 = 1$$

Ecuación 9. Restricción de pesos para un portafolio de dos activos

Reemplazando la ecuación 9 en la ecuación 8 se obtiene el riesgo del portafolio en términos del peso del activo 1, como se muestra en la ecuación 10.

$$\sigma_p^2 = [w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2] + 2w_1(1 - w_1) \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$$

Ecuación 10. Riesgo de un portafolio de 2 activos en términos del peso del activo 1

Si diferenciamos parcialmente σ_p^2 con respecto a w_1 e igualamos a cero, esto es:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_1} = 0$$

Se pueden obtener las proporciones a invertir en los activos 1 y 2 que minimizan el riesgo del portafolio, tal como se observa en la ecuación 11.

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

Ecuación 11. Peso del activo 1 que minimiza el riesgo del portafolio

Y de acuerdo con la ecuación 9, se tiene que el peso del activo 2 que minimiza el riesgo del portafolio está dado por la ecuación 12:

$$w_2^* = 1 - w_1^*$$

Ecuación 12. Peso del activo 2 que minimiza el riesgo del portafolio

El retorno total esperado del portafolio estaría dado por la ecuación 13.

$$R_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 = w_1 r_1 + (1 - w_1) r_2$$

Ecuación 13. Retorno esperado de un portafolio de dos activos

Supongamos en este punto que el activo 2 es un activo libre de riesgo ($r_2=r_f$, lo que implica que $\sigma_f=0$). En este caso, la ecuación 8 se reduce a la expresión que se muestra en la ecuación 14.

$$\sigma_p = w_1 \sigma_1$$

Ecuación 14. Riesgo de un portafolio de dos activos si uno de ellos se considera libre de riesgo

Si se sustituyen ahora las ecuaciones 12 y 14 en la ecuación 9 se obtiene que el retorno del portafolio que contiene un activo libre de riesgo es equivalente a la ecuación 15.

$$R_p = r_f + (r_1 - r_f) \frac{\sigma_p}{\sigma_1}$$

Ecuación 15. Retorno de un portafolio de dos activos donde uno de ellos es un activo libre de riesgo

La ecuación 15 representa una línea con intercepto vertical en r_f y pendiente:

$$\frac{(r_1 - r_f)}{\sigma_1}$$

Con el eje horizontal midiendo el riesgo total del portafolio, el punto tangente a la línea dada por la ecuación 15 en la frontera eficiente de media varianza de Markowitz, llamado la línea del mercado de capitales (CML), determina el portafolio de mercado óptimo. Si se iguala la pendiente de la frontera eficiente de Markowitz y se reemplaza el activo 1 por el retorno esperado de un portafolio, se deriva directamente la línea activos del mercado (SML) y a su vez la expresión del CAPM de William Sharpe (1964) como se muestra en la ecuación 16.

$$S = \frac{(R_p - r_f)}{\sigma_p}$$

Ecuación 16. Expresión matemática de la *ratio* de Sharpe

El trabajo de Tobin (1958) lleva esta aproximación un paso más allá al introducir la función de utilidad ($U=U(R_p, \sigma_p)$), y midiendo la aversión o apetito por el riesgo del inversor (λ). En este caso, para un portafolio de n activos, el problema está representado por la ecuación 17.

$$\max_w U(R_p) = w^t r - \frac{1}{2} \lambda w^t \Omega w$$

Ecuación 17. Problema de maximización de portafolios incluyendo el factor de apetito al riesgo λ

donde w y r son vectores columna de n elementos para los pesos (proporciones) y retornos de los activos respectivamente, y Ω es la matriz de covarianzas de tamaño $n \times n$, es decir:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ r_n \end{pmatrix}, y$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} & \dots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \sigma_{n4} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Y sujeto a las restricciones:

$w \geq 0$; que se traduce en que no está permitido prestar sobre activos

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0$$

2.2.1.2. Portafolios de pesos iguales

Como se mencionó en la sección 2.1, los portafolios de pesos iguales son un caso especial de diversificación ingenua donde el peso de cada activo este dado por:

$$w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_n = \frac{1}{N}$$

y el retorno esta dado igualmente por la ecuación 3 que puede reescribirse según la ecuación 18

$$R_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n r_i$$

Ecuación 18. Retorno de un portafolio de n activos con pesos iguales

Por su parte la varianza del portafolio puede determinarse a partir de la ecuación 6 como se muestra en la ecuación 19:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Ecuación 19. Varianza de un portafolio de pesos iguales

De igual forma, la ratio de Sharpe sigue determinada por la ecuación 16.

2.2.1.3. Portafolios de máxima *ratio* de Sharpe

Los portafolios de máxima *ratio* de Sharpe se construyen optimizando dicha *ratio* mediante la función que se presenta en la ecuación 20.

$$\omega S = \underset{w}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{w^t r}{\sqrt{w^t \Omega w}} \right\}$$

Ecuación 20. Función objetivo de un portafolio de máxima *ratio* de Sharpe

Sujeto a las restricciones

$$w_i \geq 0, \sum_1^N w_i = 1$$

Donde al igual que en los portafolios de media varianza w y r son vectores columna de n elementos para los pesos y retornos de los activos y Ω es la matriz de covarianzas. Mediante el uso de argmax se trata de buscar aquellas entradas (w) que permitan obtener la máxima salida (S).

2.2.1.4. Medida de la diversificación

Partiendo del modelo CAPM, se pueden identificar dos tipos de riesgo asociados a los portafolios de inversión: (i) el riesgo sistemático o no diversificable, que es inherente al mercado; y (ii) el riesgo no sistémico que puede mitigarse y eliminarse mediante la diversificación de los activos, ya sea mediante la mezcla de diferentes activos, el análisis de correlación de estos, etc. El índice de Herfindahl (1950) es una medida utilizada generalmente en economía para medir el grado de concentración industrial (Alvarado *et al.*, 2018), pero también puede ser usado para determinar el grado de concentración de un portafolio de inversión (Amenc *et al.*, 2012) y se define como se muestra en la ecuación 21.

$$HHI = \sum_{i=1}^n w_i^2$$

Ecuación 21. Fórmula general del índice de Herfindahl

Donde w_i es el peso del i -ésimo activo en el portafolio; para un portafolio totalmente concentrado el valor del índice es 1, pero en el caso del portafolio totalmente distribuido (pesos iguales) donde:

$$w_1 = w_2 = w_3 \dots = w_n = \frac{1}{n}$$

La expresión de la ecuación 21 se transforma en:

$$HHI = \sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = n * \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Dicha expresión indica que para un portafolio compuesto por n acciones, el valor mínimo del índice está dado por el caso particular del portafolio de pesos iguales, mientras que el máximo está dado por 1; sin embargo, con el fin de restringir el rango en valores de 0 a 1, se puede introducir la corrección que se muestra en la ecuación 22 (Chammas 2017).

$$cHHI = 1 - \frac{1 - HHI}{1 - \frac{1}{n}}$$

2.3. Algoritmos genéticos

Los principios matemáticos de los algoritmos genéticos (GAs) fueron establecidos por Holland (1975), basándose en los principios de evolución postulados por Darwin (1859). En términos generales, los GAs son métodos adaptativos que se usan para la resolución de problemas de

búsqueda y optimización, en donde la evolución de las soluciones hacia valores óptimos del problema depende en buena medida de una adecuada codificación de estas.

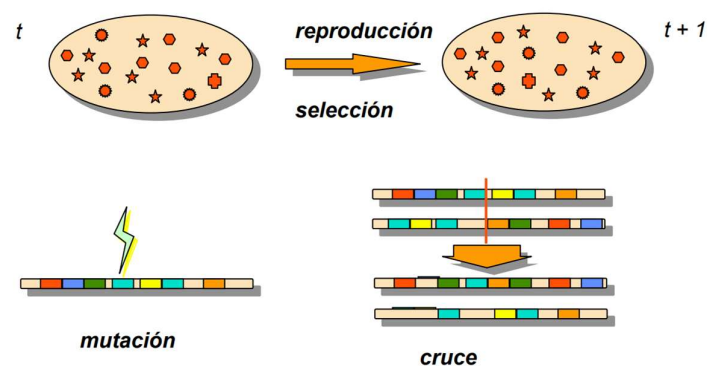
Los algoritmos genéticos tratan de imitar la evolución por selección natural, para lo cual parten de una población inicial de individuos, cada uno de los cuales representa una posible solución al problema; luego se asigna un puntaje a cada individuo, de acuerdo con la bondad de dicha solución, lo que equivale en la naturaleza a la capacidad de un organismo de competir por un recurso dado. Así, aquellos individuos que representan mejores soluciones son seleccionados para servir como padres a una nueva generación de individuos. De esta manera, la población inicial será reemplazada por una nueva que poseerá mejores características, y si el algoritmo está diseñado, eventualmente la población convergerá hacia una solución óptima del problema.

El pseudocódigo de un algoritmo genético puede escribirse como:

- 1: Generar población inicial
- 2: Evaluar funciones objetivo de la población inicial
- 3: Asignar *ranking* a individuos de acuerdo con función de dominancia
- 4: **Para** gen(1) **hasta** gen(*n*) **haga**
- 5: **Para** hijo(1) **hasta** hijo(*n*) **haga**
- 6: Operador de selección
- 7: Operador de cruce
- 8: **Si** aleatorio < probMutacion **entonces**
- 9: Operador de Mutación
- 10: **Fin si**
- 11: **Fin para**
- 12: Evaluar nueva población
- 13: Asignar *ranking* a individuos de acuerdo con función de dominancia
- 14: Actualizar población de acuerdo con función de hacinamiento
- 15: **Fin para**

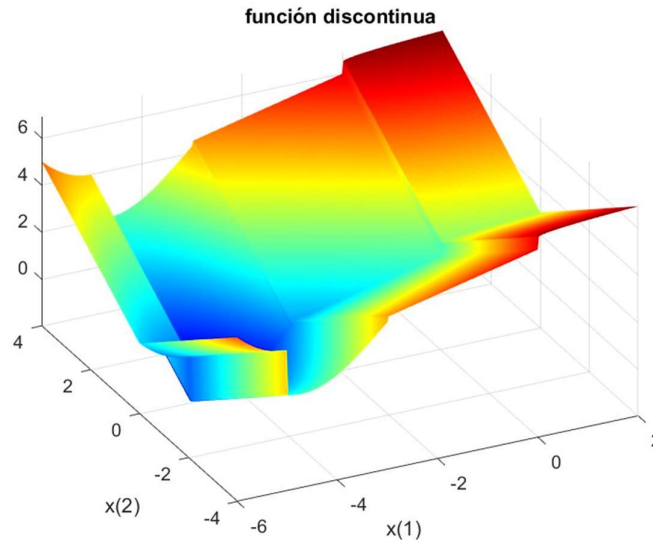
Este código puede representarse gráficamente como se muestra en a la figura 2:

Figura 2. Proceso gráfico del funcionamiento de los algoritmos genéticos.



En la figura 3 se presenta un ejemplo del uso de algoritmos genéticos para encontrar los mínimos de la función discontinua. Tanto la figura como el resultado hacen parte de los ejemplos de Matlab para el uso de GAs. Por su parte, en el anexo A se presenta el *script* 1 adaptado de dicha documentación para ilustrar este ejemplo.

Figura 3. Función objetivo a optimizar usando algoritmos genéticos



Nota: Este ejemplo hace parte de la documentación de Matlab para el uso de algoritmos genéticos.

Las restricciones del problema se enumeran a continuación:

- $x(1) + x(2) \geq 1$
- $x(2) = 5 + x(1)$

Al correr el *script* se obtiene la respuesta al problema de encontrar los valores $x(1)$ y $x(2)$ que minimizan la función, de acuerdo con las restricciones dadas. Los resultados se muestran en la figura 4, mientras que la figura 5 presenta el número de generaciones producidas y el grado de ajuste de las soluciones; el valor de ajuste de las soluciones, se mide de acuerdo a la función de objetivo definida para el algoritmo; por lo tanto, el valor de ajuste de cada individuo estará dado por el resultado arrojado por la función objetivo al ser evaluada usando cada individuo por separado. Por ejemplo:

Suponga que se desea encontrar el máximo de la función:

$$F(x) = x^2$$

En el intervalo de 0-31. Suponga además que se comienza con cuatro individuos generados al azar (13, 8, 19, 27); los valores de ajuste estarán dados por el resultado de evaluar cada uno de ellos según la función objetivo; en este caso, 169, 64, 361, 729, con un promedio de 330.75.

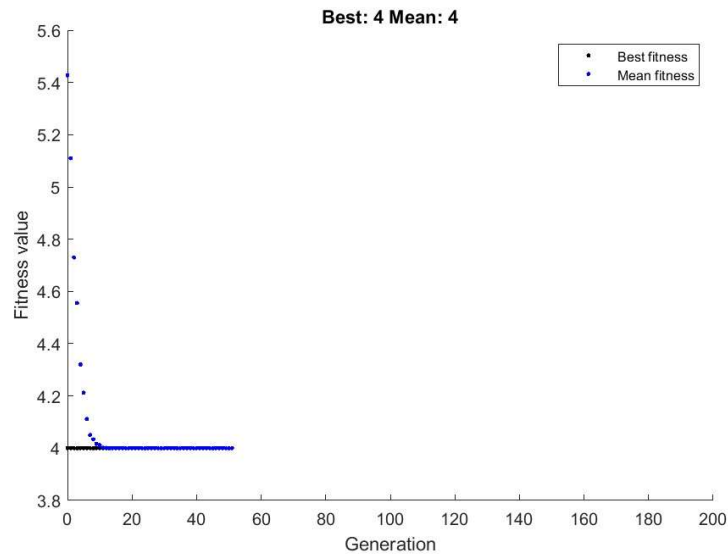
Con este promedio, se genera un umbral para clasificar los mejores individuos que pasaran a ser candidatos para el cruce, de acuerdo al método de selección asignado; uno de los métodos más usados es el método de torneo de selección; donde de acuerdo al umbral definido aquellos

individuos con mejor puntaje y que superen el umbral serán seleccionados como candidatos para el cruce.

Figura 4. Resultados de la optimización de la función objetivo usando GA

```
@ps_example
Optimization terminated: average change in the fitness value less than options.FunctionTolerance.
x =
-2.0000    3.0000
>>
```

Figura 5. Generaciones y grado de ajuste de cada una de ellas



2.3.1. Aplicación de los algoritmos genéticos a la teoría de portafolios

Como se mostró en el capítulo anterior, los GAs son una herramienta que permite encontrar, mediante la evolución de las poblaciones, una solución óptima a un problema de optimización dado. En el caso de la optimización de portafolios, se tratará de definir cuáles son las variables que se quieren optimizar. De Greiff y Rivera (2018) por ejemplo, utilizan un algoritmo genético multiobjetivo para encontrar portafolios con bajos costos de transacción y alta rentabilidad; la tabla 1 presenta un resumen de los resultados de su investigación. Roudier (2006) también utiliza un algoritmo multiobjetivo con el fin maximizar el retorno, reducir el riesgo, disminuir los costos de transacción y disminuir los costos de concentración. Por su parte Lin (2008) propone el uso de un algoritmo genético con el fin de obtener portafolios eficientes con bajos costos de transacción; parte de los resultados obtenidos por este autor se presentan en la figura 6.

Figura 6. Resultados obtenidos por Lin (2008)

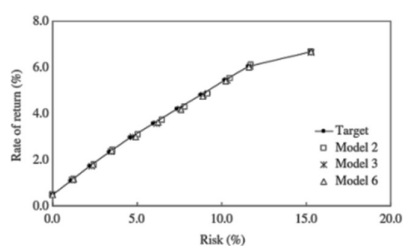


Fig. 3. Model performance with funds in 1997.

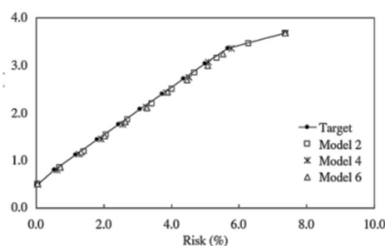


Fig. 4. Model performance with funds in 1998.

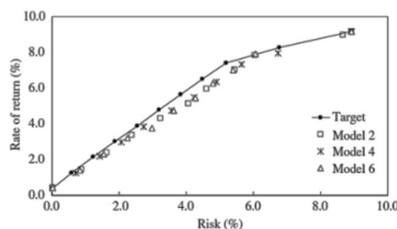


Fig. 5. Model performance with funds in 1999.

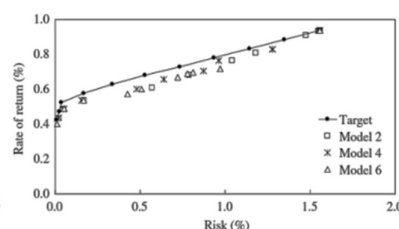


Fig. 6. Model performance with funds in 2000.

Tabla 1. Resumen de los resultados obtenidos por De Greiff y Rivera (2018)

Acción	Mínimo Riesgo		Mínimo Coeficiente de Variación		Máxima Rentabilidad	
	Markowitz	NSGA-II	Markowitz	NSGA-II	Markowitz	NSGA-II
ECOPETROL	5.45%	-	-	-	-	-
PFGROUPSURA	-	-	20.37%	-	-	-
PFBOLCOM	-	-	0.88%	-	-	-
GRUPOARGOS	-	-	4.95%	-	-	-
NUTRESA	-	-	4.43%	-	-	-
CEMARGOS	1.09%	4.99%	6.20%	-	-	-
ÉXITO	-	-	-	-	-	-
PREC	-	-	-	-	-	-
ISAGEN	2.08%	-	8.79%	-	100%	100%
PFAVAL	-	-	2.34%	-	-	-
CORFICOLCF	15.08%	26.57%	5.77%	-	-	-
BOGOTA	23.54%	25.13%	4.70%	-	-	-
CLH	-	-	0.40%	-	-	-
EEB	34.89%	43.31%	6.12%	-	-	-
CELSIA	-	-	-	-	-	-
PFAVH	2.40%	-	-	-	-	-
ISAGEN	-	-	5.65%	-	-	-
CNEC	-	-	7.79%	-	-	-
BVC	14.39%	-	4.23%	-	-	-
PFDVA	-	-	1.60%	-	-	-
GRUPOSURA	-	-	4.55%	-	-	-
PFCMARGOS	1.09%	-	6.20%	-	-	-
BCOLOMBIA	-	-	0.96%	-	-	-
PFGROUPARGO	-	-	4.06%	-	-	-
S	-	-	-	-	-	-
Comisiones \$	1,044,000	464,000	2,088,000	232,000.00	116,000	116,000
Rentabilidad	-5.80%	-2.18%	-5.43%	6.58%	16.17%	16.17%

En este trabajo se propone un algoritmo genético que permite encontrar portafolios que maximicen la *ratio* de Sharpe. El pseudocódigo para esta aproximación es como sigue:

```

1: Generar población inicial
2: Evaluar ratio de Sharpe ( $S$ ) de la población inicial
3: Asignar ranking a individuos de acuerdo con el valor de  $S$ 
4: Para gen(1) hasta gen( $n$ ) haga
5:     Para hijo(1) hasta hijo( $n$ ) haga
6:         Operador de selección
7:         Operador de cruce
8:         Si aleatorio < probMutacion entonces
9:             Operador de mutación
10:        Fin si
11:    Fin para
12: Evaluar nueva población
13: Asignar ranking a individuos de acuerdo con el valor de  $S$ 
14: Actualizar población
15: Fin para

```

3. Metodología

Para responder a la pregunta de esta investigación, se obtuvieron los precios de cierre ajustados (corrección del precio de cierre para reflejar el valor de la acción luego de decisiones corporativas) de 10 acciones que forman parte de los índices S&P 500 y Colcap, junto con los valores de los índices que serán usados como *benchmark* y la tasa libre riesgo representada por los bonos del tesoro americano a 10 años, comprendiendo un plazo de 10 años desde el 01/01/2013 hasta el 01/01/2023.

En el caso de las acciones del mercado americano se utilizó el *script 2* que aparece en el anexo A, que funciona realizando una búsqueda en Yahoo Finance con los *tickers* de las acciones y las fechas objetivos. Una vez cargados dentro del *dataframe*, se guardaron en un archivo de Excel para su posterior manipulación. La figura 7 muestra los precios de las acciones seleccionadas obtenidos mediante el *script 2*.

Debido a que muchas acciones del mercado colombiano y el índice Colcap en su mayoría no se encuentran en Yahoo Finance, la data se obtuvo desde Bloomberg. Las acciones seleccionadas para ambos mercados se presentan en la tabla 2.

Luego de ello la *data* se dividió en cinco grupos, tanto para las acciones de cada mercado como para el *benchmark* correspondiente, de la siguiente forma:

- Grupos 1-4: cada uno con precios de 2,5 años
- Grupo 5: Los precios de los 10 años completos.

Figura 7. Gráfica de precios acciones S&P 500



Esta división se realizó con el fin de aislar efectos y situaciones macroeconómicas particulares de la época y luego analizar toda la historia. Una vez definidos los grupos, se tomaron los primeros 63 días como *data* de entrenamiento (aproximadamente 10% de la *data*) de precios de los grupos 1 a 4 y 252 días (10% de la *data*) de precios del grupo 5 para calcular los pesos iniciales de todas las estrategias (Markowitz, *ratio* de Sharpe máxima, pesos iguales y algoritmos genéticos), y los restantes días se usaron como *data* de prueba para la realización del *backtesting*.

Tabla 2. Listado de acciones seleccionadas

S&P 500		Colcap	
Acción	Ticker	Acción	Ticker
Apple	AAPL	Preferencial Bancolombia	PFBCOLO
Amazon	AMZN	Interconexión Eléctrica S.A.	ISA
Berkshire Hathaway Class B	BRK-B	Ecopetrol	ECOPETL
Caterpillar	CAT	Grupo de Energía de Bogotá	GEB
Eli Lilly and Company	LLY	Bancolombia	BCOLO
McDonald's	MCD	Grupo Nutresa	NUTRESA
Microsoft	MSFT	Grupo Sura	GRUPOSUR
Procter & Gamble	PG	Preferencial Aval	PFAVAL
Visa Inc.	V	Grupo Argos	GRUPOARG
Exxon Mobile	XOM	Preferencial Davivienda	PFDVVND

Para las estrategias se tuvieron en cuenta las siguientes restricciones para la construcción de los portafolios iniciales:

- $\sum w_i = 1$; el 100% del capital debe estar invertido en los activos del portafolio.
- $w_i \geq 0$; No se permite prestar sobre los activos.

- $\lambda = 3$; el coeficiente de aversión al riesgo oscila entre 1 y 5; se definió en 3 para simbolizar un portafolio de riesgo moderado.

Tanto la construcción de los portafolios como el *backtesting* se realizaron utilizando una adaptación del código de Matlab (2020) para el uso del motor de *backtesting* de la *financial toolbox*. Para el *backtesting* se definió un periodo de rebalanceo de los portafolios de 21 días (aproximadamente 1 mes) de la data de prueba.

Los resultados del *backtesting* se analizaron teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Retorno total
- *Ratio* de Sharpe
- Volatilidad
- Retorno total vs. retorno del *benchmark*

Con la finalidad de analizar el efecto de los costos de transacción en los resultados, se realizaron pruebas definiendo los costos de transacción de la siguiente manera:

- No existen costos de transacción
- Los costos de transacción son fijos e iguales al 0,2%
- Los costos de transacción son variables y se definen así:
 - Para la compra entre 0 y 10000: 0,2%
 - Para la compra mayor a 10000: 0,15%
 - Para la venta entre 0 y 1000: 0,2%
 - Para la venta mayor a 1000: 0,15%

La evaluación de las estrategias se realizó de acuerdo con los criterios que se presentan en la tabla 3; los valores dentro de los corchetes se explican de la siguiente manera: si el portafolio cumple el criterio, el puntaje es 1; si presenta el peor resultado de acuerdo con el criterio es 0 y en caso contrario el puntaje es 0,66 para el segundo mejor y 0,33 para el tercer lugar; en el caso del criterio en que el retorno total vence al *benchmark* el puntaje es 1 en caso afirmativo y 0 en caso negativo.

Tabla 3. Criterios de clasificación de las estrategias

Criterio	Puntaje	Ponderación
Mayor retorno total	[0 - 0,33 - 0,66 - 1]	25%
Mayor <i>ratio</i> de Sharpe	[0 - 0,33 - 0,66 - 1]	25%
Menor volatilidad	[0 - 0,33 - 0,66 - 1]	25%
Retorno total vence al <i>benchmark</i>	[0, 1]	25%

En total se obtuvieron 60 portafolios (4 estrategias por cada grupo, 3 costos de transacción), lo que permitirá concluir sobre el efecto que tiene el número de datos disponibles, los efectos

externos que las acciones recogen, el desempeño de cada estrategia y la influencia de los costos de transacción.

4. Resultados

Si bien las tasas de los tesoros americanos presentan variaciones diarias, estas se presentan como una tasa efectiva anual. Por lo tanto, con el fin de obtener el promedio anual, se realizó la conversión a una tasa efectiva diaria utilizando la ecuación 22.

$$t_d = (1 + t_a)^{\frac{1}{252}} - 1$$

Ecuación 22. Conversión de tasa efectiva anual a tasa efectiva diaria

La tabla 4 muestra los promedios anuales para los diferentes rangos de fechas de la tasa libre de riesgo que se utilizaron durante el desarrollo de esta investigación para el cálculo de la *ratio* de Sharpe.

De acuerdo con la metodología planteada se presentan los resultados obtenidos para los diferentes escenarios de acuerdo con los periodos, estrategias, mercados seleccionados y costos de transacción; en todos los casos el portafolio con el mejor desempeño de acuerdo con los criterios establecidos en la tabla 3 se muestra en color verde. Por simplicidad, se presentan en las secciones subsiguientes las gráficas y tablas para el periodo que comprende toda la *data*, mientras que las demás pueden consultarse en el anexo B.

Tabla 4. Tasa libre de riesgo y retornos anuales promedios índices y tasa libre de riesgo

Fecha inicio	Fecha fin	R_f
1/01/2013	30/06/2015	2,33%
1/07/2015	31/12/2017	2,08%
1/01/2018	30/06/2020	2,20%
1/07/2020	31/12/2022	1,88%
1/01/2013	31/12/2022	2,12%

Fuente: elaboración propia a partir de los disponible para los bonos de 10 años del tesoro americano

Adaptando el código ejemplo de Matlab (2020), se diseñó una *app* de escritorio que permite generar los portafolios iniciales y realizar el *backtesting* de los mismos partiendo de un archivo de Excel donde se encuentran los precios diarios, tanto de las acciones como de los índices usados como *benchmark*, debidamente identificados en cada hoja del libro. Así mismo la *app* permite seleccionar el rango de fechas deseado, el coeficiente de aversión al riesgo y los costos de transacción asociados; una vez obtenidos los resultados, la *app* presenta un resumen de las acciones seleccionadas, los resultados del *backtesting* y las gráficas relevantes en cada iteración. La interfaz desarrollada se muestra en la figura 8.

Figura 8. Inicio de la interfaz de usuario

Los campos *acciones seleccionadas* y *resumen de backtesting* (ambos mercados) son tablas interactivas que al inicio de la aplicación se definen como invisibles, pero una vez se generen los resultados, se hacen visibles desplegando las acciones de ambos mercados y los resultados y permanecen visibles hasta que la aplicación sea cerrada; la visualización completa se muestra en la figura 9. Por último, el botón *generar resumen* crea un archivo de Excel con los resultados y en caso de existir, lo actualiza agregando estos en la siguiente fila disponible.

Figura 9. Interfaz de usuario luego finalizar el *backtesting* por primera vez

Date	AAPL	AMZN	BRK_B	CAT	LLY
02-Jan-2013	16.7912	12.8655	93.2000	69.8021	38.49
03-Jan-2013	16.5792	12.9240	93.6200	70.4740	38.66
04-Jan-2013	16.1174	12.9575	93.8500	70.8622	40.09
07-Jan-2013	16.0226	13.4230	93.4500	71.0787	40.03
08-Jan-2013	16.0657	13.3190	93.8100	70.1754	40.33
09-Jan-2013	15.8147	13.3175	93.3200	70.5039	41.18
10-Jan-2013	16.0107	13.2670	94.6500	70.9816	41.40
11-Jan-2013	15.9125	13.3970	94.3900	71.0638	41.29

Estrategia	Retorno Total	Ratio de Sharpe Anual	Vol
Pesos_Iguales	3.6945	0.9321	
Max_Ratio_de_Sharpe	4.6682	0.9122	
Markowitz	6.1816	0.9157	
Algoritmo_Genetic	6.8837	1.0640	

Estrategia	Retorno Total	Ratio de Sharpe Anual	Vol
Pesos_Iguales	0.3015	0.1372	
Max_Ratio_de_Sharpe	0.3397	0.1647	
Markowitz	0.2245	0.1316	
Algoritmo_Genetic	0.2325	0.1159	

La figura 10 muestra la creación de las estrategias que serán pasadas al motor de *backtesting*; la estructura de esta es como sigue: se define el nombre de la estrategia, la función que calcula los pesos de los activos en cada periodo de rebalanceo, la frecuencia de rebalanceo denotada por 'RebalanceFrequency', el tamaño de la ventana de observación ('LookbackWindow') o qué tantos días hacia el pasado se toman datos para los nuevos pesos en cada periodo de rebalanceo, en este caso se definió entre 40 y 126 días (entre dos y seis meses) con el fin de reducir los tiempos de cálculo, los costos de transacción (ninguno, fijo o variable) y finalmente los pesos iniciales.

Figura 10. Definición de estrategias para el motor de *backtesting* de Matlab

```
strat1 = backtestStrategy('Pesos Iguales', @equalWeightFcn, ...
    'RebalanceFrequency', rebalFreq, ...
    'LookbackWindow', 0, ...
    'TransactionCosts', @variableTransactionCosts, ...
    'InitialWeights', equalWeight_initial);

strat2 = backtestStrategy('Max Ratio de Sharpe', @maxSharpeRatioFcn, ...
    'RebalanceFrequency', rebalFreq, ...
    'LookbackWindow', lookback, ...
    'TransactionCosts', @variableTransactionCosts, ...
    'InitialWeights', maxSharpeRatio_initial);
```

Nota: En este caso se presentan dos estrategias con costos de transacción variables el @ antes de un nombre indica que se hará un llamado a una función.

Las funciones que permiten calcular los pesos de los activos poseen dos argumentos de entrada, los pesos actuales y los retornos desde la fecha definida en la ventana de observación, hasta la fecha en que sucede el rebalanceo en el caso del *backtesting*; para calcular los pesos iniciales, todos los pesos actuales se definen como 0 y se toman los retornos desde la fecha inicial del periodo hasta el número de días definido (252 periodo de 10 años y 63 para los demás periodos). En la figura 11 se presenta la función para calcular los pesos de los activos utilizando algoritmos genéticos, mientras que las demás funciones son adaptaciones a código de las ecuaciones presentadas en la sección de trasfondo matemático para cada estrategia.

Figura 11. Función que optimiza la *ratio* de Sharpe mediante algoritmo genético

```
function maxSharpeWeights = geneticMaxSharpePortfolio(current_weights,pricesTT)
% Parámetros del algoritmo genético
rng default; %para reproducibilidad
populationSize = 50;
generations = 30;
mutationRate = 0.01;
crossover_rate = 0.01;
stallGenLimit = 5;
libre_riesgo = app.annualRiskFreeRate;
% Tamaño del portafolio y número de activos
nAssets = size(pricesTT, 2);
% Función de aptitud para el algoritmo genético (maximizar Sharpe)
fitnessFunction = @(weights) -sharpeRatio(weights, pricesTT, libre_riesgo);
% Espacio de búsqueda: pesos entre 0 y 1 para cada activo
lb = zeros(1, nAssets);
ub = ones(1, nAssets);
% Restricción: la suma de los pesos debe ser igual a 1
A = [];
b = [];
Aeq = ones(1, nAssets);
beq = 1;
% Inicializar población aleatoria
initialPopulation = rand(populationSize, nAssets);
% Ejecutar el algoritmo genético con restricción de suma
options = optimoptions('ga', 'MaxGenerations', generations,...
    'MutationFcn', {@mutationadaptfeasible, mutationRate},...
    'CrossoverFcn',{@crossoverintermediate,crossover_rate},...
    'SelectionFcn',{@selectiontournament,4},...
    'StallGenLimit',stallGenLimit);
[maxSharpeWeights, ~, ~, ~] = ga(fitnessFunction, nAssets,...
    A, b, Aeq, beq, lb, ub, [], options);
end
```

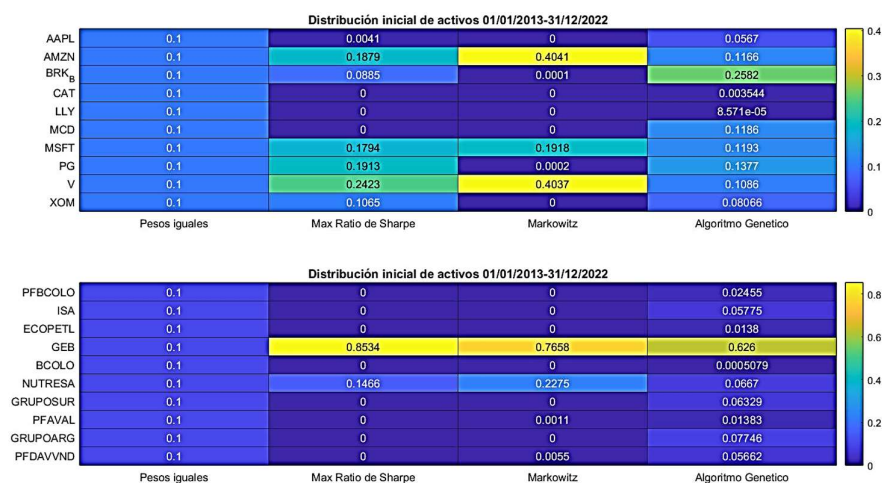
En esta función se definen el tamaño de la población, el número de generaciones, la tasa de mutación y cruce, así como el límite de generaciones sin cambio en el valor de ajuste (“StallGenLimit”) que se usa como condición de parada del algoritmo; también incluye una llamada a la función “sharpeRatio” que se encuentra definida como una adaptación a código de la ecuación 15. La selección de los individuos se realiza mediante el método de torneo de selección, en donde se toman de la población individuos al azar, se compara el valor de la función de ajuste de estos y se escoge el mejor para el cruce.

4.1. Diversificación de los portafolios

La figura 12 presenta los pesos de los activos en los portafolios iniciales para la totalidad de los datos donde, como se mencionó anteriormente, se tomó el primer año como datos de prueba para su construcción; dicho esto, es importante resaltar que esta selección es independiente de los costos de transacción y, por tanto, sin importar la metodología (costos 0, fijos o variables), los resultados serán siempre iguales. La tabla 5 presenta el grado de concentración de cada uno de los portafolios iniciales de acuerdo con el índice de Herfindahl corregido durante todos los periodos de estudio.

De acuerdo con los resultados, los portafolios obtenidos mediante el uso de algoritmos genéticos presentaron la mejor distribución de los activos respecto al índice utilizado en la mayoría de los periodos y en ambos mercados, contrario a los portafolios de Markowitz que se mostraron como aquellos más concentrados en la mayoría de los periodos de estudio. Es interesante observar el efecto del tipo de mercado en la concentración final de los portafolios; en Estados Unidos se presenta generalmente una menor concentración que en el mercado colombiano, lo que confirma el hecho que el mercado castiga a los emergentes mediante primas de riesgo mayores que sus contrapartes desarrolladas.

Figura 12. Mapa de calor de concentración de activos según la estrategia seleccionada



Nota: El mapa de calor se genera automáticamente al correr la aplicación desarrollada según el periodo elegido.

No se incluyen en el análisis de concentración de los portafolios aquellos obtenidos mediante la ponderación equitativa, ya que, como se mencionó en el capítulo 2, estos portafolios por la naturaleza del índice presentan siempre una distribución de 0 en el índice corregido.

Tabla 5. Grado de concentración de portafolios medidos por el índice de Herfindahl

Fecha	Mercado	Máx ratio de Sharpe		Markowitz		Algoritmo genético	
		HHI	cHHI	HHI	cHHI	HHI	cHHI
Ene 2013-dic 2022	EE.UU	0.18	0.09	0.36	0.29	0.15	0.05
	Colombia	0.75	0.72	0.64	0.60	0.41	0.35
Ene 2013-jun 2015	EE.UU	0.35	0.27	0.77	0.75	0.29	0.22
	Colombia	0.36	0.29	1.00	1.00	0.24	0.16
Jul 2015-dic 2017	EE.UU	1.00	1.00	0.59	0.55	0.39	0.33
	Colombia	1.00	1.00	0.89	0.88	1.00	1.00
Ene 2018-jun 2020	EE.UU	1.00	1.00	1.00	1.00	0.28	0.20
	Colombia	0.25	0.17	1.00	1.00	0.18	0.09
Jul 2020-dic 2022	EE.UU	0.40	0.33	0.43	0.37	0.30	0.22
	Colombia	0.35	0.28	0.37	0.30	0.29	0.21

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos.

La figura 13 presenta los cambios en las posiciones de los activos en los diferentes portafolios, durante todos los periodos de rebalanceo para las fechas comprendidas entre enero del 2013 y diciembre de 2022 y para el caso específico donde no existen costos de transacción, ya que como se mencionó anteriormente, la distribución de los activos es independiente de ellos, pero sí tiene efecto tanto sobre el retorno total del portafolio como sobre su riesgo. Como puede observarse, los gráficos de área muestran que la concentración tiende a mantenerse, con un portafolio más distribuido para la estrategia de GAs y más concentrado en general para las estrategias de Markowitz y máxima *ratio* de Sharpe.

Figura 13. Posiciones de los activos portafolio de Markowitz

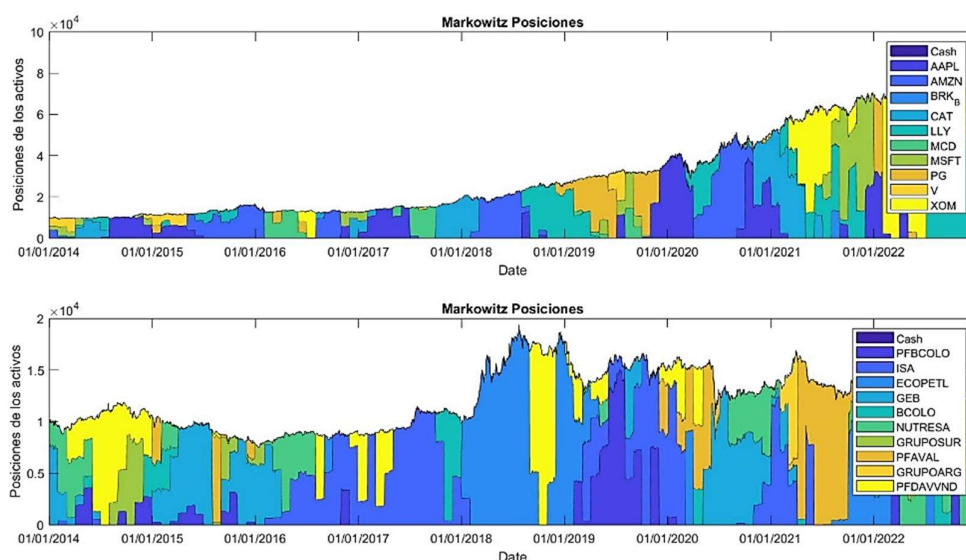


Figura 14. Posiciones de los activos portafolio de máxima *ratio* de Sharpe

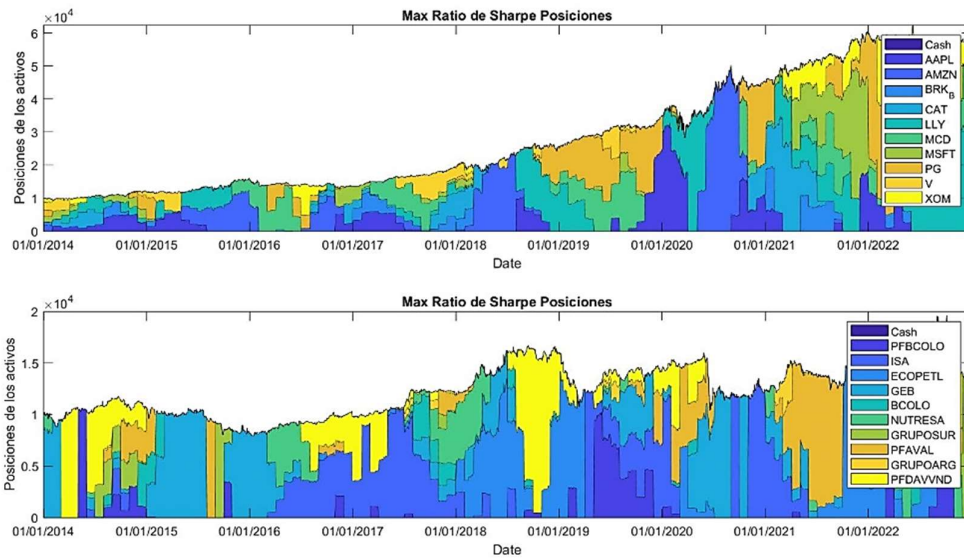


Figura 15. Posiciones de los activos portafolio de pesos iguales

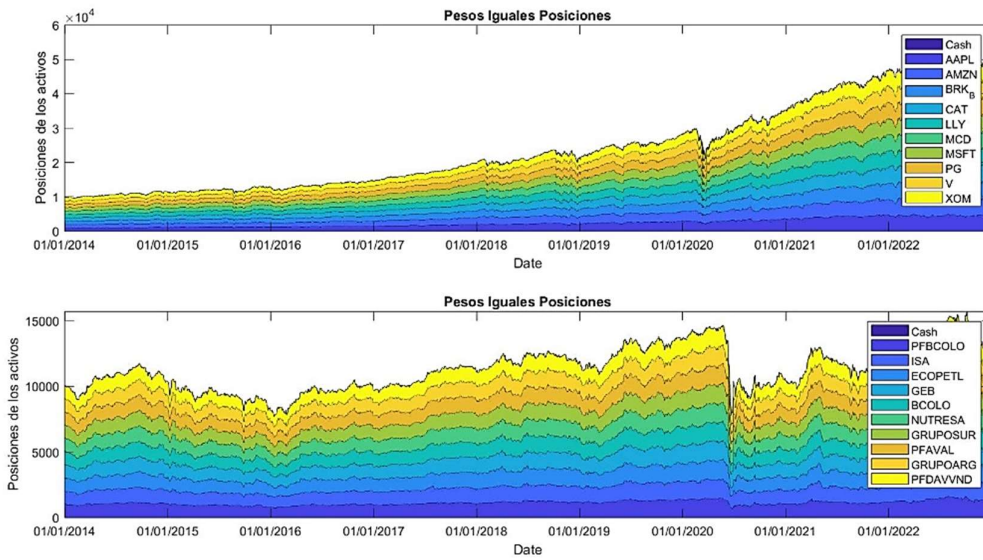
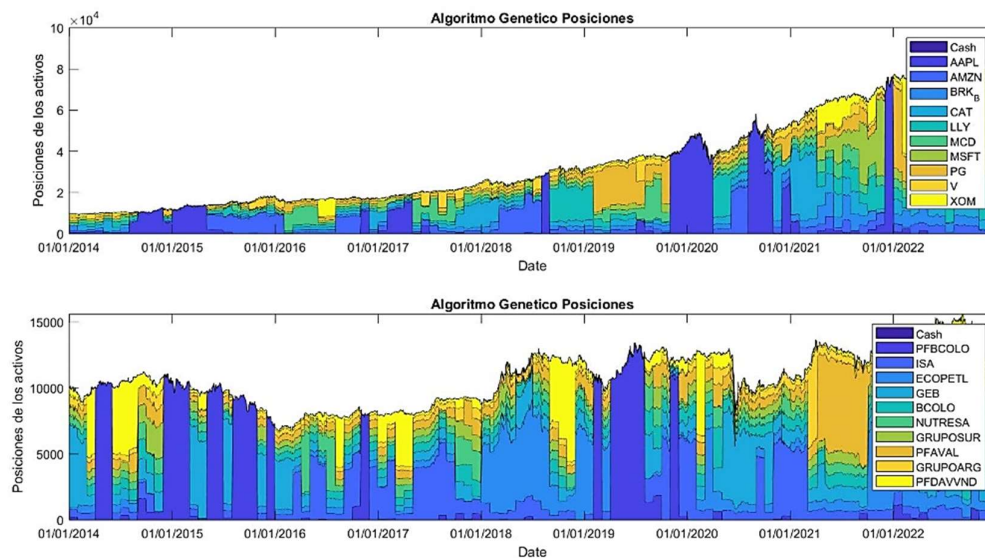


Figura 16. Posiciones de los activos portafolio GA



4.2. Caso 1: No existen costos de transacción

Las tablas 5 y 6 muestran un resumen de los resultados obtenidos para ambos mercados en los periodos de estudio. En el mercado de Estados Unidos no puede observarse una estrategia que se imponga frente a las otras, puesto que tanto los portafolios de pesos iguales como los portafolios de GAs, se erigieron como las mejores estrategias en dos periodos cada una, de acuerdo con el puntaje total obtenido. Por otra parte, al comparar la estrategia de GAs con las estrategias de Markowitz y máxima *ratio* de Sharpe se observa que en términos generales las dos últimas arrojan mejores resultados que los GAs desde el punto de vista del índice de concentración corregido.

Situación similar se presenta en el mercado colombiano, donde las estrategias de máxima *ratio* de Sharpe y de pesos iguales arrojan los mejores resultados entre todas las estrategias y solo en una ocasión se imponen los portafolios de GAs sobre los demás. En el contexto de este mercado, se observa que dichos portafolios al ser comparados con las estrategias cuyas funciones objetivo buscan la minimización del riesgo y la maximización del retorno no resultan tan eficientes, todo esto porque la volatilidad intrínseca del mercado puede ser un condicionante para que la solución no converja hacia un valor óptimo.

Tabla 6. Resumen de métricas para el mercado de Estados Unidos

Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	3.6945	0.9321	0.1791	0.6650	Enero 2013 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	4.6682	0.9122	0.2133	0.4975	
Markowitz	6.1816	0.9157	0.2508	0.4975	
Algoritmo genético	6.9415	1.0695	0.2180	0.8325	
Benchmark	1.0772	0.4220	0.1818		
Pesos iguales	0.4067	1.1502	0.1182	0.9150	

Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3669	0.8631	0.1471	0.5800	
Markowitz	0.2833	0.5566	0.1908	0.0000	Enero 2013 /
Algoritmo genético	0.5785	1.1319	0.1725	0.7475	junio 2015
<i>Benchmark</i>	0.3279	0.9530	0.1153		
Pesos iguales	0.7384	1.9828	0.1167	0.9150	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.7538	1.5479	0.1554	0.7475	Julio 2015 /
Markowitz	0.7324	1.2121	0.2007	0.3325	diciembre 2017
Algoritmo genético	0.6743	1.5216	0.1434	0.4975	
<i>Benchmark</i>	0.4190	1.2744	0.1103		
Pesos iguales	0.5099	0.7826	0.2453	0.5000	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	1.1312	1.3166	0.2668	0.9150	Enero 2018 /
Markowitz	1.0453	1.1537	0.2957	0.4975	junio 2020
Algoritmo genético	0.9943	1.1806	0.2743	0.5800	
<i>Benchmark</i>	0.1858	0.3421	0.2493		
Pesos iguales	0.4692	0.9457	0.1773	0.7475	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.4110	0.7953	0.1915	0.3325	Julio 2020 /
Markowitz	0.6264	0.9367	0.2415	0.5825	diciembre 2022
Algoritmo genético	0.6103	1.1462	0.1826	0.8300	
<i>Benchmark</i>	0.1511	0.3238	0.1912		

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados mostrados por la aplicación desarrollada.

Tabla 7. Resumen de métricas para el mercado colombiano

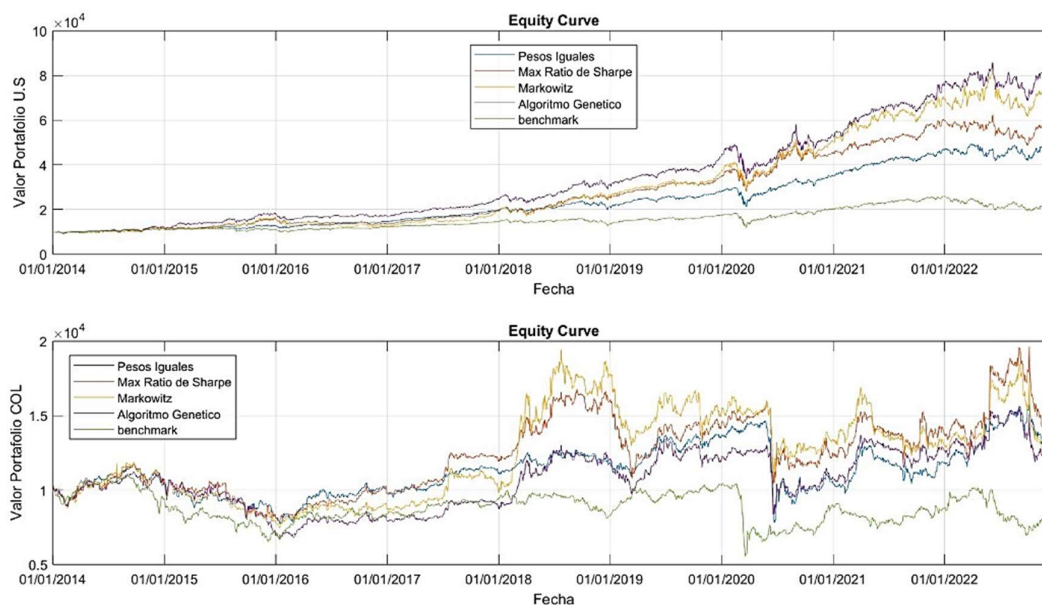
Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	0.3015	0.1372	0.1871	0.8300	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3397	0.1647	0.2360	0.8325	Enero 2013/
Markowitz	0.2245	0.1316	0.2578	0.4150	diciembre
Algoritmo genético	0.1587	0.0830	0.2113	0.4150	2022
<i>Benchmark</i>	-0.1994	-0.1536	0.1860		
Pesos iguales	-0.1487	-0.6129	0.1393	0.6650	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.0897	-0.2958	0.1710	0.8325	Enero 2013 /
Markowitz	-0.1615	-0.4685	0.1821	0.4975	Junio 2015
Algoritmo genético	-0.1657	-0.5270	0.1701	0.4975	
<i>Benchmark</i>	-0.2379	-0.9429	0.1424		
Pesos iguales	0.3624	0.9666	0.1290	1.0000	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3362	0.8136	0.1455	0.6625	Julio 2015 /
Markowitz	0.1958	0.4542	0.1555	0.1650	Diciembre
Algoritmo genético	0.1243	0.2962	0.1370	0.1650	2017
<i>Benchmark</i>	0.2590	0.7395	0.1198		
Pesos iguales	-0.1627	-0.2964	0.2419	1.0000	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.2517	-0.4772	0.2505	0.5800	Enero 2018 /
Markowitz	-0.2836	-0.4034	0.3065	0.1650	Junio 2020
Algoritmo genético	-0.2663	-0.4230	0.2837	0.2475	
<i>Benchmark</i>	-0.2552	-0.5007	0.2456		

Pesos iguales	0.2838	0.5824	0.1884	0.8300	
Máx ratio de Sharpe	0.2830	0.4558	0.2915	0.4975	Julio 2020 /
Markowitz	0.0215	0.1203	0.3152	0.0000	Diciembre
Algoritmo genético	0.3899	0.6140	0.2633	0.9150	2022
<i>Benchmark</i>	0.1032	0.2228	0.2025		

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados mostrados por la aplicación desarrollada.

Por último, la figura 17 muestra el valor total del portafolio para ambos mercados y estrategias, donde se puede observar el efecto de los choques macroeconómicos como la pandemia del COVID 19 y cómo un mercado emergente es afectado en comparación con uno desarrollado, donde la caída del primero es significativamente mayor que la del segundo durante esta crisis; pueden observarse también el crecimiento durante el 2014 y 2015 para el S&P500 y la explosión del retorno durante el 2017 y 2018 en Estados Unidos, año que, como se mencionó anteriormente, fue el mejor para el mercado estadounidense desde la crisis de 2008 y la recuperación económica post COVID. Por su parte, en el mercado colombiano puede verse el efecto generado por las elecciones presidenciales en julio de 2022 (Medina & Vizcaino, 2022) y también el efecto de la firma de los acuerdos de paz con la guerrilla de las FARC en el 2016 (Mejía *et al.*, 2022).

Figura 17. Valor de los portafolios sin costos de transacción



Nota: la imagen comprende toda la *data* disponible.

4.3. Caso 2: los costos de transacción fijos

Los efectos de costos de transacción a 0,2% (20 pbs) del valor de compra o venta, pueden observarse en las tablas 8 y 9. Es interesante observar que en el mercado de Estados Unidos, dichos costos tienen un impacto sobre el retorno total de los portafolios y en términos generales no lo tienen sobre el puntaje final obtenido por ellos; como puede observarse en la tabla 8, la tendencia de los portafolios con mejor desempeño se mantiene igual que en el caso donde no existen costos de transacción asociados y donde no se observa un portafolio que se erija como superior entre aquellos obtenidos mediante las estrategias de ponderación equitativa y GAs.

Por otra parte, en el mercado colombiano el efecto de los costos de transacción muestra que en dos de los periodos analizados se dio un cambio en la estrategia ganadora, donde puede observarse que los portafolios de pesos iguales se erigen como la mejor opción al obtener un mejor resultado en la mayoría de los periodos, en contraste con el caso donde no hay costos de transacción en el cual no hay un ganador claro entre las estrategias de máxima *Ratio* de Sharpe y la de pesos iguales.

Al igual que en el caso anterior, si se realiza la comparación excluyendo los portafolios de pesos iguales y se comparan solamente aquellos con funciones objetivo similares, se puede apreciar que en el mercado de Estados Unidos los portafolios obtenidos mediante el algoritmo genético propuesto obtienen mejores resultados en la mayoría de los periodos de estudio, mientras que los portafolios de media-varianza muestran los peores resultados; sin embargo, al analizar el mercado colombiano son los portafolios de GAs aquellos con los peores resultados, mientras que los portafolios de máxima *ratio* de Sharpe entre las funciones de optimización presentan los mejores.

Tabla 8. Resumen métricas mercado Estados Unidos con costos de transacción fijos

Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	3.6540	0.9267	0.1791	0.6650	Enero 2013 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	3.9538	0.8416	0.2134	0.4975	
Markowitz	5.1614	0.8471	0.2510	0.4975	
Algoritmo genético	5.8925	0.9965	0.2182	0.8325	
<i>Benchmark</i>	1.0772	0.4220	0.1818		
Pesos iguales	0.4042	1.1436	0.1182	0.9150	Enero 2013 / junio 2015
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3189	0.7540	0.1472	0.3300	
Markowitz	0.2297	0.4559	0.1915	0.0000	
Algoritmo genético	0.5273	1.0451	0.1728	0.7475	
<i>Benchmark</i>	0.3279	0.9530	0.1153		
Pesos iguales	0.7353	1.9766	0.1167	1.0000	Julio 2015 / diciembre 2017
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.6932	1.4470	0.1555	0.6625	
Markowitz	0.6565	1.1092	0.2015	0.3325	
Algoritmo genético	0.6098	1.4002	0.1434	0.4975	
<i>Benchmark</i>	0.4190	1.2744	0.1103		
Pesos iguales	0.5069	0.7791	0.2453	0.5000	Enero 2018 / junio 2020
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	1.0786	1.2753	0.2667	0.9150	
Markowitz	0.9785	1.1037	0.2957	0.4975	
Algoritmo genético	0.9360	1.1324	0.2742	0.5800	
<i>Benchmark</i>	0.1858	0.3421	0.2493		
Pesos iguales	0.4653	0.9390	0.1773	0.7475	Julio 2020 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3628	0.7139	0.1918	0.3325	
Markowitz	0.5603	0.8595	0.2418	0.5825	
Algoritmo genético	0.5556	1.0598	0.1831	0.8300	
<i>Benchmark</i>	0.1511	0.3238	0.1912		

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos por la aplicación desarrollada.

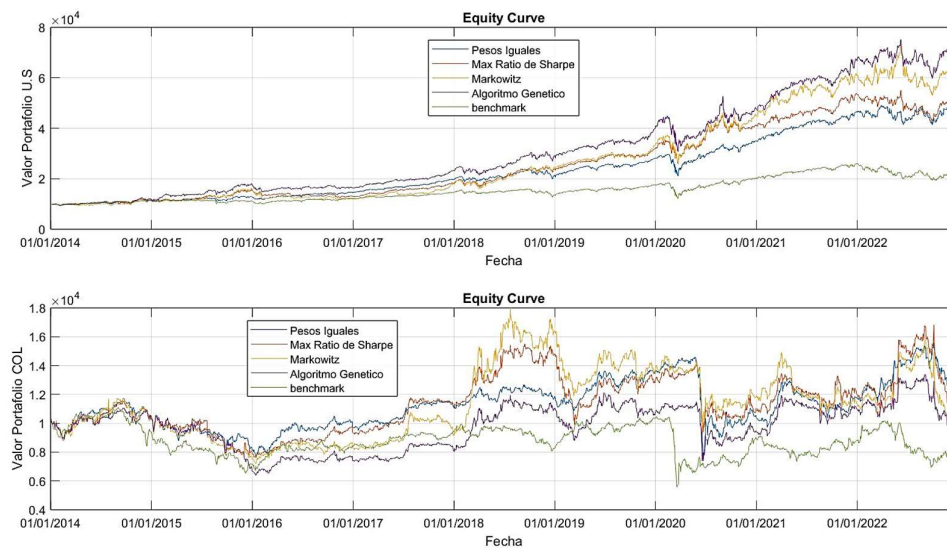
Finalmente, en la figura 18 se muestra el efecto de los costos de transacción sobre el valor total de los portafolios para el periodo completo.

Tabla 9. Resumen métricas mercado colombiano costos de transacción fijos

Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	0.2912	0.1325	0.1871	1.0000	Enero 2013 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.1397	0.0885	0.2360	0.6625	
Markowitz	0.0410	0.0616	0.2579	0.4150	
Algoritmo genético	-0.0140	-0.0018	0.2114	0.4150	
<i>Benchmark</i>	-0.1994	-0.1536	0.1860		
Pesos iguales	-0.1500	-0.6179	0.1393	0.7475	Enero 2013 / junio 2015
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.1274	-0.4053	0.1713	0.8325	
Markowitz	-0.1936	-0.5628	0.1824	0.4975	
Algoritmo genético	-0.2014	-0.6396	0.1705	0.4150	
<i>Benchmark</i>	-0.2379	-0.9429	0.1424		
Pesos iguales	0.3603	0.9612	0.1290	1.0000	Julio 2015 / diciembre 2017
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.2897	0.7045	0.1459	0.6625	
Markowitz	0.1466	0.3336	0.1560	0.1650	
Algoritmo genético	0.0748	0.1502	0.1370	0.1650	
<i>Benchmark</i>	0.2590	0.7395	0.1198		
Pesos iguales	-0.1641	-0.2995	0.2418	1.0000	Enero 2018 / junio 2020
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.2846	-0.5571	0.2505	0.3300	
Markowitz	-0.3121	-0.4624	0.3064	0.1650	
Algoritmo genético	-0.3001	-0.4970	0.2838	0.2475	
<i>Benchmark</i>	-0.2552	-0.5007	0.2456		
Pesos iguales	0.2806	0.5765	0.1884	0.9150	Julio 2020 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.2382	0.4019	0.2913	0.4975	
Markowitz	-0.0195	0.0623	0.3148	0.0000	
Algoritmo genético	0.3425	0.5556	0.2632	0.8300	
<i>Benchmark</i>	0.1032	0.2228	0.2025		

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos por la aplicación desarrollada.

Figura 18. Valor de los portafolios para costos de transacción fijos



4.4. Caso 3: los costos de transacción son variables

Para el caso de los costos de transacción variables se realizó una adaptación de la función utilizada en el ejemplo propietario de Matlab (2020) para el uso del motor de *backtesting*; dicha función se presenta en la figura 19.

Figura 19. Función de costos de transacción variables

```
function [buy, sell] = variableTransactionCosts(deltaPositions)
    buy = zeros(1,numel(deltaPositions));
    sell = zeros(1,numel(deltaPositions));

    % Buys
    idx = 0 < deltaPositions & deltaPositions < 1e4;
    buy(idx) = 0.002 * deltaPositions(idx); % 20 puntos basicos
    idx = 1e4 <= deltaPositions;
    buy(idx) = 0.0015 * deltaPositions(idx); % 15 puntos basicos
    buy = sum(buy);

    % Sells
    idx = -1e3 < deltaPositions & deltaPositions < 0;
    sell(idx) = 0.002 * -deltaPositions(idx); % 20 puntos basicos
    idx = deltaPositions <= -1e3;
    sell(idx) = 0.0015 * -deltaPositions(idx); % 15 basis points
    sell = sum(sell);

end
```

Los resultados para ambos mercados se presentan en las tablas 10 y 11. En el caso del mercado de Estados Unidos, nuevamente se puede observar que las estrategias ganadoras son las mismas que en el caso donde no existen costos de transacción y el efecto de estos tiene un impacto

significativo sobre el retorno total y marginal sobre el riesgo asumido, lo que conlleva a los cambios que se observan en la *ratio* de Sharpe.

Tabla 10. Resumen métricas mercado de Estados Unidos con costos variables

Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	3.6541	0.9267	0.1791	0.6650	Enero 2013 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	4.0551	0.8522	0.2134	0.4975	
Markowitz	5.3387	0.8599	0.2510	0.4975	
Algoritmo genético	6.0445	1.0078	0.2182	0.8325	
<i>Benchmark</i>	1.0772	0.4220	0.1818		
Pesos iguales	0.4042	1.1436	0.1182	0.9150	Enero 2013 / junio 2015
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3241	0.7661	0.1472	0.3300	
Markowitz	0.2360	0.4679	0.1914	0.0000	
Algoritmo genético	0.5313	1.0520	0.1727	0.7475	
<i>Benchmark</i>	0.3279	0.9530	0.1153		
Pesos iguales	0.7353	1.9766	0.1167	1.0000	Julio 2015 / diciembre 2017
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.7002	1.4589	0.1555	0.6625	
Markowitz	0.6680	1.1254	0.2013	0.3325	
Algoritmo genético	0.6168	1.4138	0.1434	0.4975	
<i>Benchmark</i>	0.4190	1.2744	0.1103		
Pesos iguales	0.5069	0.7791	0.2453	0.5000	Enero 2018 / junio 2020
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	1.0853	1.2806	0.2667	0.9150	
Markowitz	0.9887	1.1114	0.2957	0.4975	
Algoritmo genético	0.9438	1.1389	0.2742	0.5800	
<i>Benchmark</i>	0.1858	0.3421	0.2493		
Pesos iguales	0.4653	0.9390	0.1773	0.7475	Julio 2020 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.3678	0.7223	0.1917	0.3325	
Markowitz	0.5692	0.8700	0.2418	0.5825	
Algoritmo genético	0.5599	1.0667	0.1831	0.8300	
<i>Benchmark</i>	0.1511	0.3238	0.1912		

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos por la aplicación desarrollada.

En el mercado colombiano, sin embargo, se repite la misma situación que en el caso donde los costos de transacción son fijos. Nuevamente, el efecto más importante se observa sobre el retorno total, debido a los menores precios de compra y venta cuando se superan los umbrales definidos en la función de costos variables.

Tabla 11. Resumen métricas mercado colombiano con costos variables

Estrategia	Retorno total	Ratio de Sharpe anual	Volatilidad anual	Puntaje	Periodo
Pesos iguales	0.2912	0.1325	0.1871	1.0000	Enero 2013 / diciembre 2022
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.1397	0.0885	0.2360	0.6625	
Markowitz	0.0410	0.0616	0.2579	0.4150	

Algoritmo genético	-0.0140	-0.0018	0.2114	0.4150	
<i>Benchmark</i>	-0.1994	-0.1536	0.1860		
Pesos iguales	-0.1500	-0.6179	0.1393	0.7475	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.1274	-0.4053	0.1713	0.8325	
Markowitz	-0.1936	-0.5628	0.1824	0.4975	Enero 2013 / junio 2015
Algoritmo genético	-0.2014	-0.6396	0.1705	0.4150	
<i>Benchmark</i>	-0.2379	-0.9429	0.1424		
Pesos iguales	0.3603	0.9612	0.1290	1.0000	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.2897	0.7045	0.1459	0.6625	
Markowitz	0.1466	0.3336	0.1560	0.1650	Julio 2015 / diciembre 2017
Algoritmo genético	0.0748	0.1502	0.1370	0.1650	
<i>Benchmark</i>	0.2590	0.7395	0.1198		
Pesos iguales	-0.1641	-0.2995	0.2418	1.0000	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	-0.2846	-0.5571	0.2505	0.3300	
Markowitz	-0.3121	-0.4624	0.3064	0.1650	Enero 2018 / junio 2020
Algoritmo genético	-0.3001	-0.4970	0.2838	0.2475	
<i>Benchmark</i>	-0.2552	-0.5007	0.2456		
Pesos iguales	0.2806	0.5765	0.1884	0.9150	
Máx <i>ratio</i> de Sharpe	0.2382	0.4019	0.2913	0.4975	
Markowitz	-0.0195	0.0623	0.3148	0.0000	Julio 2020 / diciembre 2022
Algoritmo genético	0.3425	0.5556	0.2632	0.8300	
<i>Benchmark</i>	0.1032	0.2228	0.2025		

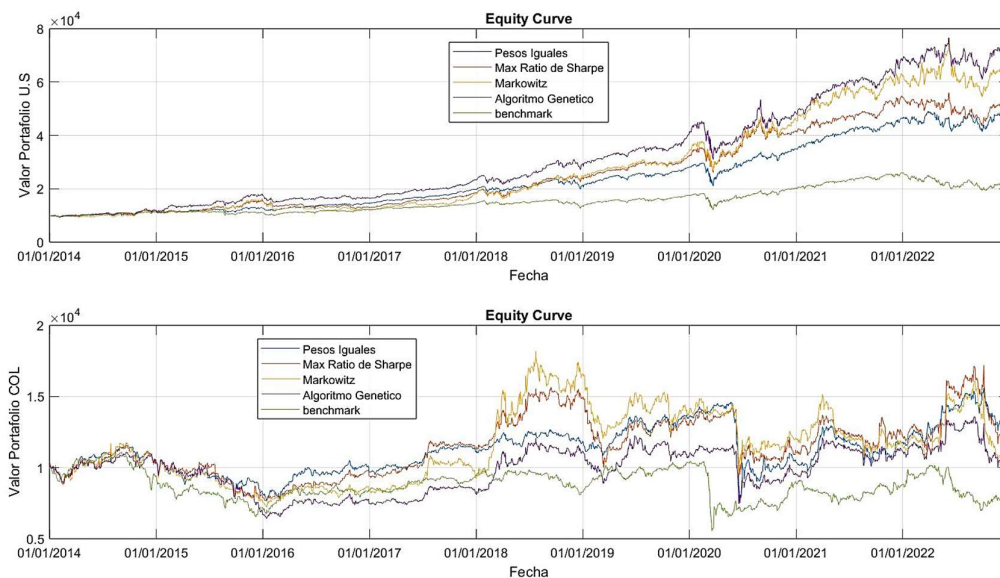
Finalmente, los resultados para el periodo que comprende toda la data donde se observa el valor de los portafolios en el tiempo y el efecto de los costos de transacción variables sobre este se presentan en la figura 20.

4.5. Análisis de resultados

Durante el periodo de estudio en el mercado de Estados Unidos se observa que la estrategia de Markowitz, fundamentada en la diversificación para minimizar la varianza del portafolio (Markowitz, 1952), no se desempeñó de manera esperada, al ser la estrategia que presentó en términos generales los resultados más pobres. Sin embargo, es crucial considerar el contexto macroeconómico que abarcó este periodo. Factores como cambios en las tasas de interés, políticas gubernamentales y eventos geopolíticos, pueden haber influido en la eficacia de esta estrategia, lo que destaca la importancia de integrar el análisis macroeconómico en la toma de decisiones de inversión (Fama & French, 1993).

La estrategia de pesos iguales, a pesar de su simplicidad, se muestra competitiva en ciertos periodos. Este hallazgo respalda la noción de que en momentos de incertidumbre o cambios rápidos en las condiciones del mercado estrategias más simples pueden ofrecer mayor estabilidad (Chammas, 2017; Plyakha *et al.*, 2012). Además, como señalan Plyakha *et al.* (2012) los portafolios de pesos iguales poseen por lo general un alfa de Jensen (exceso de retorno del portafolio ajustado al riesgo) positivo que surge del rebalanceo necesario para mantener la distribución equitativa del portafolio.

Figura 20. Valor de los portafolios para costos de transacción variables



El uso de algoritmos genéticos para la optimización de portafolios, considerando los costos de transacción variables, revela adaptabilidad a las condiciones cambiantes del mercado estadounidense. Estos resultados concuerdan con estudios previos que destacan la capacidad de los enfoques algorítmicos para lidiar con la complejidad del mercado (Chang *et al.*, 2009; The AI Quant, 2023). Los resultados obtenidos muestran que entre las estrategias cuyo objetivo es la maximización del retorno reduciendo el riesgo, la estrategia de GAs se erige como una opción viable. El alto grado de diversificación alcanzado, como se muestra en la tabla 5, ayuda a explicar el porqué de este resultado.

En el caso del mercado colombiano, nuevamente los portafolios de pesos iguales muestran ser una alternativa interesante, tanto por su facilidad de implementación como por los resultados obtenidos. Una vez más se resalta la importancia de analizar el entorno macroeconómico al momento de tomar decisiones de inversión, puesto que la incertidumbre generalizada del mercado muestra que incluso el índice de referencia presenta pobres resultados.

Al analizar las demás estrategias en su conjunto, los portafolios obtenidos mediante algoritmos genéticos no logran destacar de la misma forma que lo hacen en el mercado de Estados Unidos. Aquí por el contrario los portafolios de máxima *ratio* de Sharpe se presentan como la estrategia de optimización más efectiva, lo que implica que en entornos de volatilidad, esta estrategia puede captar y sortear mejor los efectos macro que otras estrategias cuyo objetivo sea la optimización de una función particular.

En cuanto al efecto de los costos de transacción, tal como se mencionó anteriormente, el mayor impacto sobre los resultados obtenidos se presenta en el retorno total, mientras que en la métrica de volatilidad su efecto es marginal y en la *ratio* de Sharpe anual está directamente correlacionado con el retorno. Es importante mencionar que la función de costos variables utilizada puede no corresponder a la realidad de los mercados financieros y por tanto los efectos en el riesgo podrían no ser marginales sino considerables.

5. Discusión

Durante la presente investigación se ha explorado la dinámica de los portafolios de inversión considerando la influencia de los costos de transacción, proporcionando valiosas perspectivas sobre la optimización de inversiones en mercados financieros disímiles como son el de Estados Unidos y el colombiano. Los resultados obtenidos reflejan la compleja interacción entre la estructura de los portafolios y los impactos de los costos de transacción. Este análisis se alinea con estudios previos que destacan la importancia de considerar estos costos al diseñar estrategias de inversión (Chang *et al.*, 2009; Lin & Liu, 2008).

Al considerar la literatura existente sobre la diversificación internacional de portafolios, se observa que la investigación respalda la premisa de que la diversificación geográfica puede contribuir a la reducción del riesgo (Grubel, 1968; Levy & Sarnat, 1970; Solnik, 1974). No obstante, la presente investigación proporciona una perspectiva adicional al mostrar cómo los costos de transacción, especialmente en mercados menos desarrollados y profundos, pueden contrarrestar parcialmente estos beneficios.

Es esencial destacar que el enfoque adoptado en este estudio, utilizando algoritmos genéticos para la optimización de portafolios, encuentra respaldo en la literatura financiera (Arnone *et al.*, 1993; Lwin *et al.*, 2014). La capacidad de los algoritmos genéticos para abordar problemas de optimización complejos ha sido demostrada en diversos contextos financieros, ofreciendo soluciones eficientes y adaptativas (Holland, 1992; Roudier, 2006). Como puede concluirse de los resultados, el enfoque de GAs probó ser una estrategia recomendable en el mercado de Estados Unidos mas no en el mercado colombiano. ¿Por qué sucede esto?, ¿es debido al riesgo inherente de ser un país subdesarrollado? O, por el contrario, ¿el mercado no está valorando de manera justa las acciones del Colcap? Los datos parecen indicar que es una combinación de ambas, pues durante los últimos años el entorno macroeconómico y político se ha caracterizado por la constante incertidumbre: reformas tributarias que ejercen presión adicional sobre las empresas (Celis, 2021), escándalos de corrupción que salpican a algunas empresas del Colcap, etc., pero como lo resalta el periódico Portafolio en su artículo de 2023 (Portafolio, 6 de septiembre de 2023), al analizar los fundamentales de muchas de las empresas que componen el índice Colcap, es evidente que el mercado no las está valorando de manera objetiva.

Por último, la complejidad de la implementación del algoritmo genético, los altos tiempos de cálculo (en un computador estándar) pese al uso de computación en paralelo, tal como se diseñó en la aplicación y los pobres resultados obtenidos en el mercado colombiano, muestran que a pesar de la factibilidad, el esfuerzo adicional no se ve compensado y menos aún cuando se tiene una opción simple como son los portafolios de pesos iguales, alternativa esta que cualquier inversionista del común puede fácilmente implementar.

Esta investigación presenta un contexto general, que puede servir de base para futuras investigaciones que incluyan: otras métricas como la *ratio* de información, el *turnover* promedio del portafolio, entre otras; más acciones, de modo que se puede evitar una sobreconcentración en algún sector específico; el efecto del coeficiente de aversión al riesgo y funciones de costos de transacción más cercanas a la realidad de los mercados. Todas ellas, variables que permitan conclusiones más certeras sobre el desempeño de las estrategias, sin perder de vista que el *backtesting* sigue siendo una mirada retrospectiva que no garantiza el desempeño futuro.

6. Conclusiones

En este estudio se exploraron diversas estrategias de optimización de portafolios en los mercados financieros de Estados Unidos y Colombia, considerando factores como el contexto macroeconómico, el efecto de los costos de transacción y la aplicabilidad de enfoques algorítmicos. Los resultados ofrecen valiosas perspectivas que contribuyen a la comprensión de la dinámica de los mercados y proporcionan orientación práctica para la toma de decisiones de inversión.

También se mostró la factibilidad de usar herramientas de inteligencia artificial para resolver problemas de optimización de portafolios y cómo en mercados desarrollados, pese a su dificultad de implementación, pueden constituir una alternativa interesante frente a otras estrategias con funciones objetivo similares.

Finalmente, se mostró cómo una estrategia simple que en ocasiones se llama diversificación ingenua, puede superar a estrategias más elaboradas, lo que reafirma la frase que en ocasiones se le atribuye a Einstein: “Todo debe ser tan simple como sea posible, pero no más simple”, lo que otorga a los inversionistas del común, que por lo general no tienen acceso a *software* avanzado, una poderosa herramienta para la construcción de sus portafolios de inversión.

7. Bibliografía

- Alvarado, J. E. P., Paredes, L. E. R. & Cárdenas, R. A. A. (2018). Estimación del Índice de Herfindahl-Hirschman para la Comunidad Andina de Naciones 1995–2015. *Revista Territorio y Desarrollo*, 2(02), 58-74.
- Amenc, N., Goltz, F. & Lodh, A. (2012). Choose your betas: Benchmarking alternative equity index strategies. *The Journal of Portfolio Management*, 39(1), 88-111.
- Arnone, S., Loraschi, A. & Tettamanzi, A. (1993). A genetic approach to portfolio selection. *Neural Network World*, 3(6), 597-604.
- Bekaert, G., Erb, C. B., Harvey, C. R. & Viskanta, T. E. (1998). Distributional characteristics of emerging market returns and asset allocation. *Journal of Portfolio Management*, 24(2), 102-+.
- Celis, J. F. G. (2021). Reformas tributarias en Colombia 1990-2020 y su papel en la configuración de la crisis fiscal del Estado. *Revista Kavilando*, 13(2), 227-244.
- Chammas, G. (2017). Portfolio concentration (No. EPS-2017-410-F&A).
- Chang, T. J., Yang, S. C. & Chang, K. J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(7), 10529-10537.
- Darwin, C. & Mayr, E. (1859). On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life. John Murray, London. On the Origin of Species by Means of Natural Selection, 204-8.
- De Greiff, S. & Rivera, J. C. (2018). Optimización de portafolios de inversión con costos de transacción utilizando un algoritmo genético multiobjetivo: caso aplicado a la Bolsa de Valores de Colombia. *Estudios Gerenciales*, 34(146), 74-87.
- De Wit, D. P. M. (1998). Naive Diversification. *Financial Analysts Journal*, 54(4), 95–100.
- Fama, E. F. & French, K. R. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3-56.
- Fraze, G. (2018, December). 6 factors that fueled the stock market dive in 2018. PBS. <https://www.pbs.org/newshour/economy/making-sense/6-factors-that-fueled-the-stock-market-dive-in-2018>
- Ghosh, D. (2010). Asset Acquisition, Diversification, and Revision-Theoretic Exercises in Portfolio Theory. *Quarterly Journal of Finance and Accounting*, 49(1), 19–38.
- Grubel, H. G. (1968). Internationally diversified portfolios: welfare gains and capital flows. *The American Economic Review*, 58(5), 1299-1314.
- Herfindahl, O. C. (1950). *Concentration in the US steel industry*. Nueva York: Ann Arbor, University Microfilms.

- Holland, J. H. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT Press.
- Isidore, C. (2018, December 31). 2018 was the worst for stocks in 10 years. CNN Business. <https://edition.cnn.com/2018/12/31/investing/dow-stock-market-today/index.html>
- Levy, H. & Sarnat, M. (1970). International diversification of investment portfolios. *The American Economic Review*, 60(4), 668-675.
- Lin, C. C. & Liu, Y. T. (2008). Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 185(1), 393-404.
- Lwin, K., Qu, R. & Kendall, G. (2014). A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization. *Applied Soft Computing*, 24, 757-772.
- Markowitz, H (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91
- Markowitz, H (1991). Foundations of portfolio theory. *The Journal of Finance*, 46(2), 469-477
- Medina, O. & Vizcaino, M, (2022, June). Colombian Markets Sink After Leftist Wins Presidential Election. Bloomberg Markets. <https://www.bnnbloomberg.ca/colombian-markets-sink-after-leftist-wins-presidential-election-1.1781803>
- Mejía-Posada, F., Restrepo-Ochoa, D. C. & Isaza, J. E. (2022). Do Investors React to Terrorism and Peace in Colombia? *Emerging Markets Finance and Trade*, 58(6), 1550-1565.
- Mittal, S. K. & Srivastava, N. (2021). Mean-variance-skewness portfolio optimization under uncertain environment using improved genetic algorithm. *Artificial Intelligence Review*, 1-22.
- Oh, K. J., Kim, T. Y. & Min, S. (2005). Using genetic algorithm to support portfolio optimization for index fund management. *Expert Systems with Applications*, 28(2), 371-379.
- Plyakha, Y., Uppal, R. & Vilkov, G. (2012). Why does an equal-weighted portfolio outperform value-and price-weighted portfolios?. Available at SSRN 2724535.
- Portafolio (2020, 13 de octubre). Bolsa de Colombia: cada vez menos emisores de acciones. <https://www.portafolio.co/economia/finanzas/bolsa-de-colombia-cada-vez-menos-emisores-de-acciones-545607>.
- Portafolio (2023, 6 de septiembre). Precios en bolsa, en niveles de hace 15 años, cuando inició el Colcap. <https://www.portafolio.co/economia/finanzas/que-pasa-con-los-niveles-en-los-precios-de-las-acciones-colombianas-en-bolsa-588566>.
- Roudier, F (2006). *Portfolio Optimization and Genetic Algorithms. Master's thesis, Department of Management, Technology and Economics, Swiss Federal Institute of Technology (ETM), Zurich.*
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *Journal of Business*, 39(1), 119-138.

- Simonson, I. (1990). The effect of purchase quantity and timing on variety-seeking behavior. *Journal of Marketing Research*, 27(2), 150–162.
- Solnik, B. H. (1974). Why not diversify internationally rather than domestically?. *Financial analysts journal*, 30(4), 48-54.
- Swade, A., Nolte, S., Shackleton, M. & Lohre, H. (2023). Why do equally weighted portfolios beat value-weighted ones?. *The Journal of Portfolio Management*, 49(5), 167-187.
- The AI Quant. (March, 2023). Unleashing the Power of Genetic Algorithms: Boost Your Portfolio Performance with Python. Medium. <https://medium.com>
- The MathWorks Inc. (2020). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>
- The MathWorks Inc. (2020). Financial Toolbox Documentation, Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://la.mathworks.com/help/finance/backtest-investment-strategies.html#d124e24546>
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, 25(2), 65-86.
- Vasiani, V. D., Handari, B. D. & Hertono, G. F. (2020). Stock portfolio optimization using priority index and genetic algorithm. In *Journal of physics: conference series* (Vol. 1442, No. 1, p. 012031). IOP Publishing.
- Wang, Z. (2023). Analysis of the Limitations of Portfolio Theory. *Highlights in Business, Economics and Management*, 5, 43-47.

Anexo A: *Scripts* usados

```

% Generaciòn de la funciòn discontinua
% linspace(x,y,n) Crea un vector columna desde x hasta y con n columnas
xi = linspace(-6,2,300);

yi = linspace(-4,4,300);
[X,Y] = meshgrid(xi,yi);
Z = ps_example([X(:),Y(:)]);
Z = reshape(Z,size(X));
%Gràfica de la funciòn
surf(X,Y,Z,'MeshStyle','none')
colormap 'jet'
view(-26,43)
xlabel('x(1)')
ylabel('x(2)')
title('funciòn discontinua')
%{
Restricciones del problema
x(1) + x(2) >= 1 y x(2) == 5 + x(1)
Es necesario cambiar las restricciones de forma que sean siempre <= o
exactamente igual quedando:
-x(1)-x(2)<=-1
-x(1)+x(2)== 5
%}

A= [-1 -1]; % Restricciòn A en forma vectorial
b = -1;
Aigual= [-1 1]; % Restricciòn estrictamente igual en forma vectorial
bigual = 5;

% Se definen las opciones de optimizaciòn
options = optimoptions('ga','ConstraintTolerance',1e-6,'PlotFcn',
@gaplotbestf);

rng default % definiciòn de la semilla
fun = @ps_example % Se define z como una funciòn
%{
se crea la variable para almacenar los resultados de acuerdo con las
restricciones y opciones definidas
%}
x = ga(fun,2,A,b,Aigual,bigual,[],[],[],options)

```

Script 1. Script en Matlab uso de GA para resolver problemas de optimizaciòn

```

import yfinance as yf
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Crear y descargar Los precios diarios de Las acciones e indices seleccionados
datos = ['^GSPC', 'AAPL', 'MSFT', 'AMZN', 'GOOGL', 'NVDA', 'JNJ', 'JPM', 'BAC',
'GS', 'MS'] # acciones e indice
stocks = ['AAPL', 'MSFT', 'AMZN', 'GOOGL', 'NVDA', 'JNJ', 'JPM', 'BAC', 'GS',
'MS'] # solo acciones
fecha_inicial = '2013-01-01'
fecha_final = '2023-01-01'
data = yf.download(datos, start=fecha_inicial, end=fecha_final)['Adj Close']
acciones = yf.download(stocks, start=fecha_inicial, end=fecha_final)['Adj
Close']
# Visualizar Los precios de Las acciones
sns.set_style('darkgrid')
acciones.plot(figsize=(12, 6))
plt.title('Precios de las acciones seleccionadas del S&P500')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
data.to_excel('Acciones_benchmark_sp500.xlsx')

```

Script 2. Script en Python para obtener datos de acciones desde Yahoo finance

Anexo B: Gráficas obtenidas mediante la *app* desarrollada

Enero 2014-junio 2015

Figura 21. Mapa de calor concentración de activos

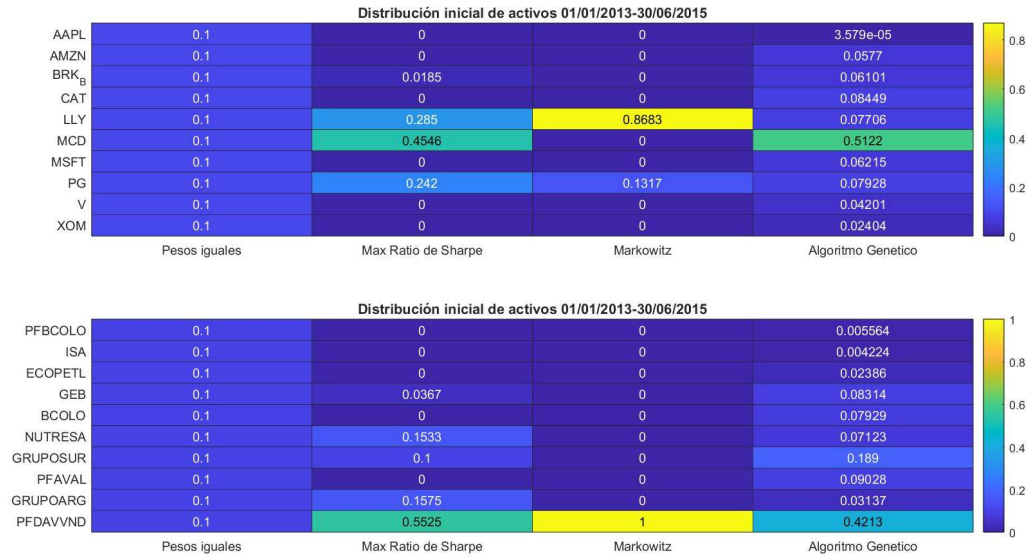


Figura 22. Valor de los portafolios sin costos de transacción

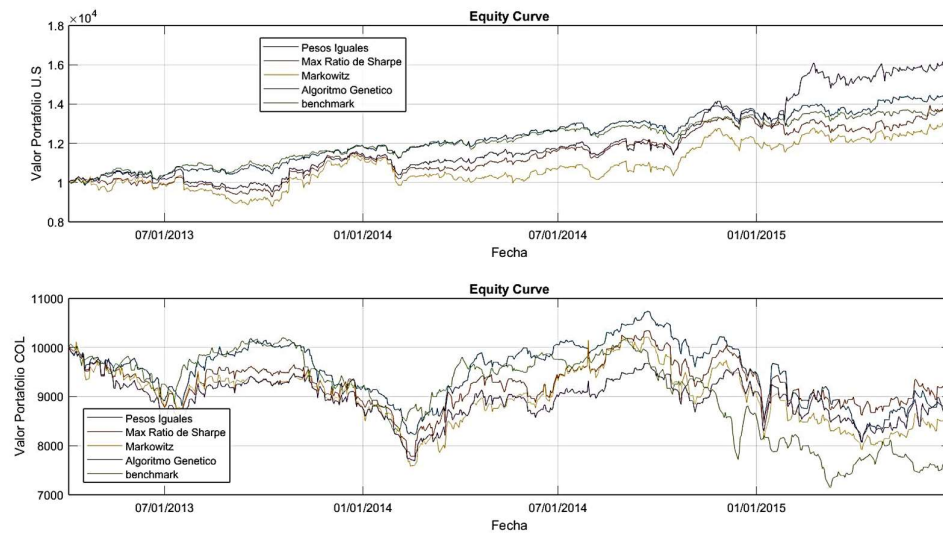


Figura 23. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos

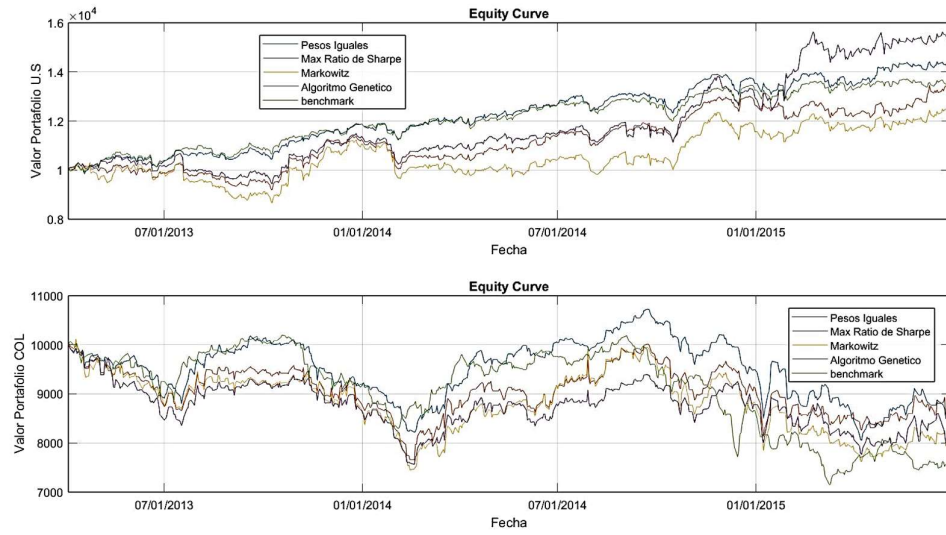
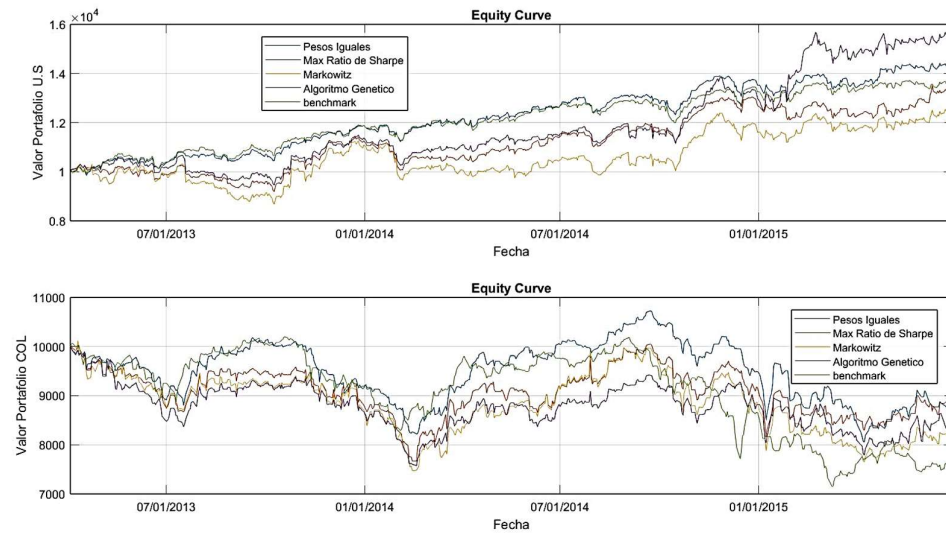


Figura 24. Valor de los portafolios con costos de transacción variables



Julio 2015-diciembre 2017

Figura 25. Mapa de calor concentración de activos

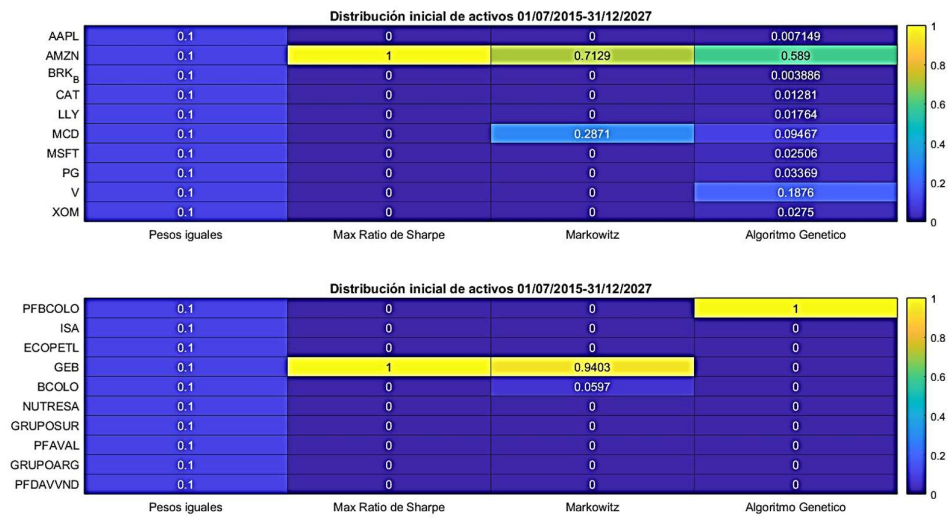


Figura 26. Valor de los portafolios sin costos de transacción

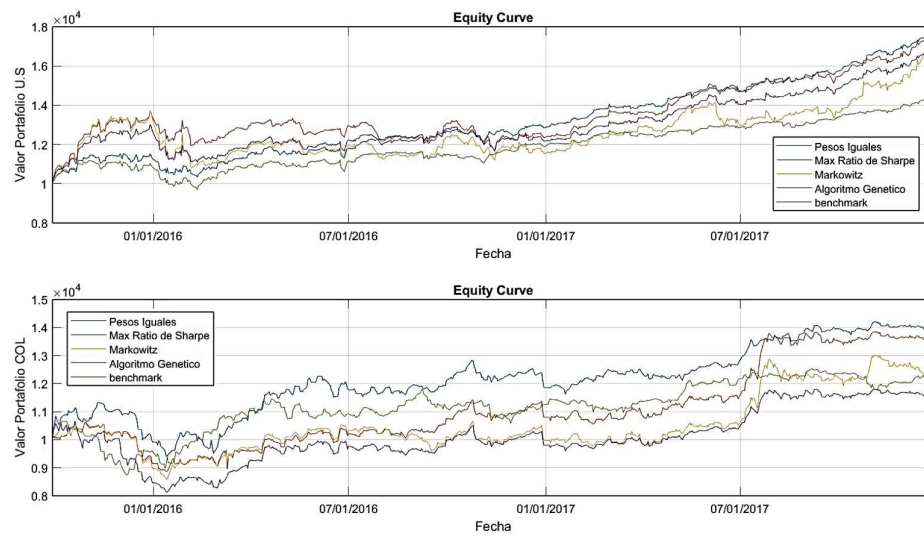


Figura 27. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos

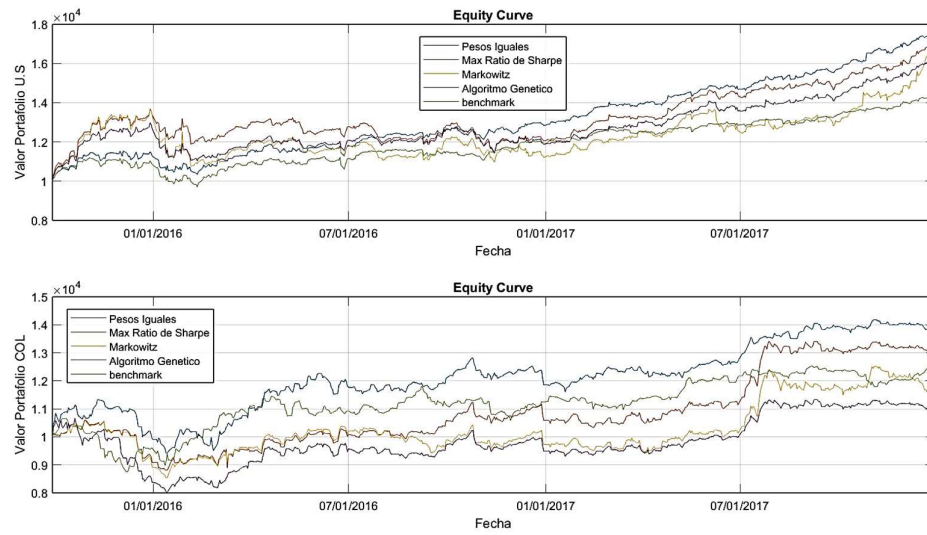
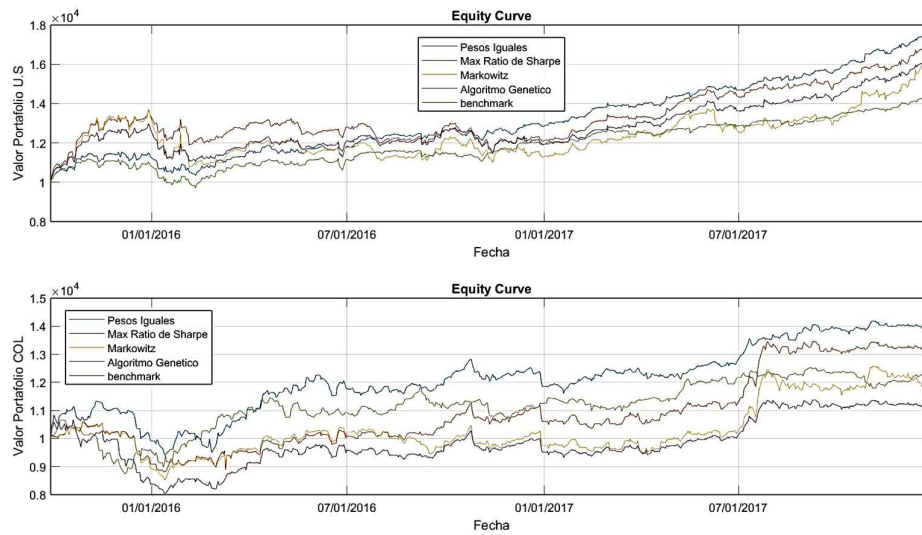


Figura 28. Valor de los portafolios con costos de transacción variables



Enero 2018-junio 2020

Figura 29. Mapa de calor concentración de activos

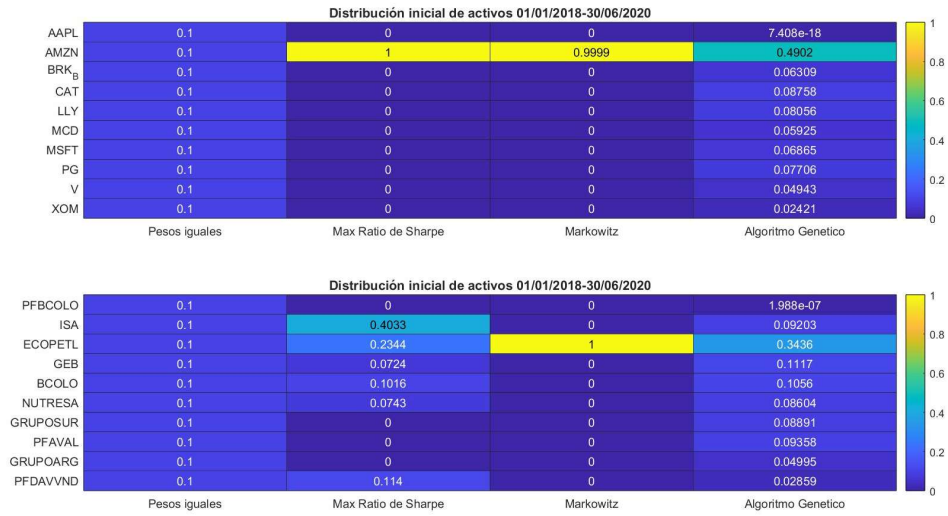


Figura 30. Valor de los portafolios sin costos de transacción

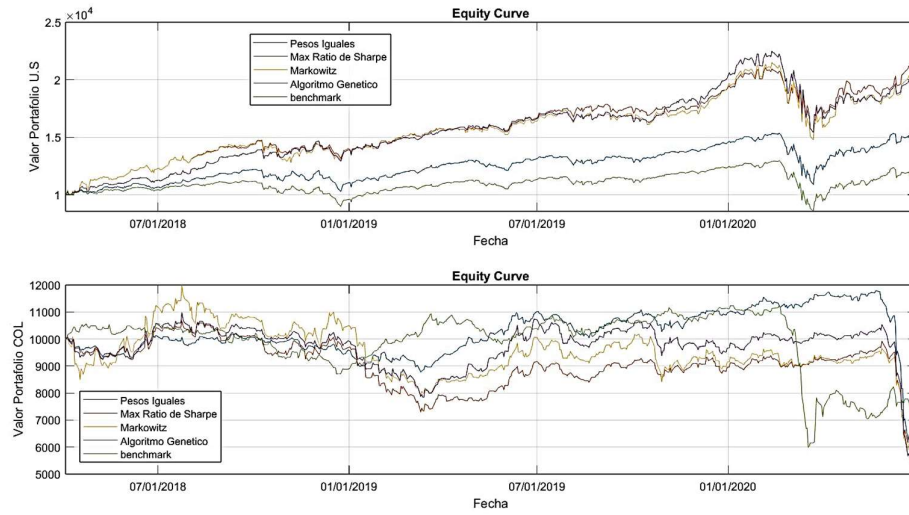


Figura 31. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos

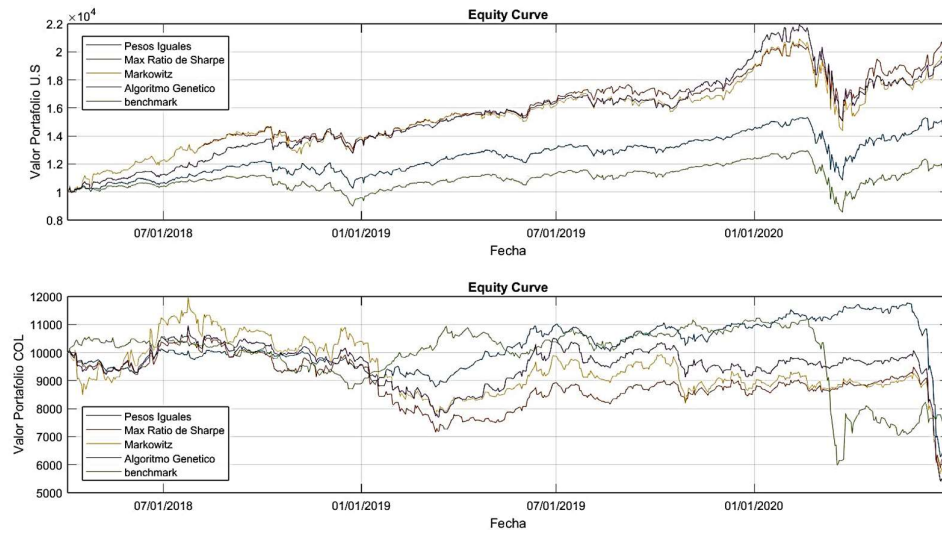
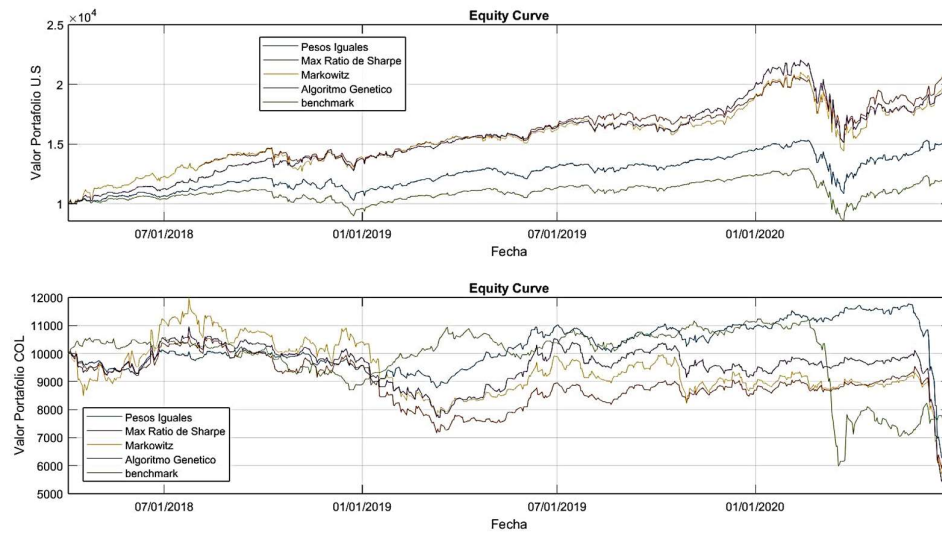


Figura 32. Valor de los portafolios con costos de transacción variables



Julio 2020-diciembre 2022

Figura 33. Mapa de calor concentración de activos

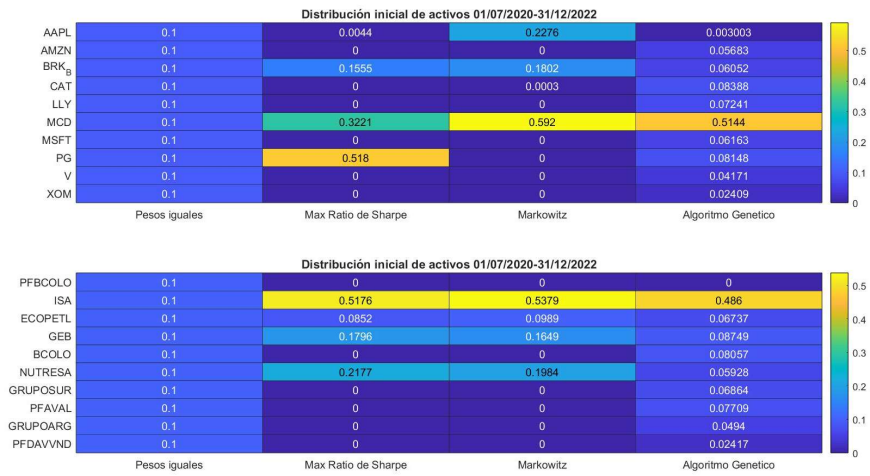


Figura 34. Valor de los portafolios sin costos de transacción

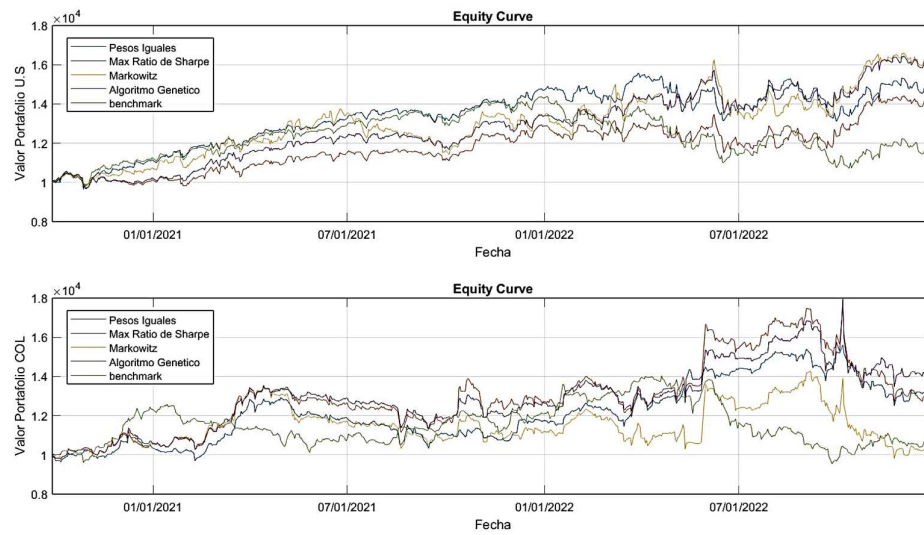


Figura 35. Valor de los portafolios con costos de transacción fijos

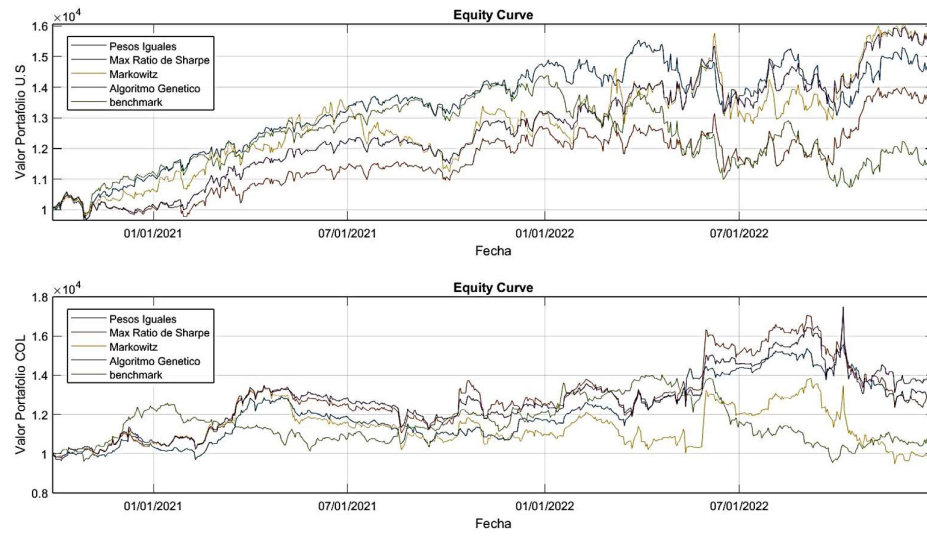


Figura 36. Valor de los portafolios con costos de transacción variables

