

ANALISIS DE ESFUERZOS HERTZIANOS DE ELEMENTOS DE MAQUINAS EN
MATLAB

JAIRO MAURICIO CASTRO GUZMAN

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
AREA DE DISEÑO
MEDELLIN
2005

ANALISIS DE ESFUERZOS HERTZIANOS DE ELEMENTOS DE MAQUINAS EN
MATLAB

JAIRO MAURICIO CASTRO GUZMAN

Trabajo de grado para optar por el
título de Ingeniería Mecánica

Jorge Luis Restrepo Ochoa
Ingeniero Mecánico

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA
AREA DE DISEÑO
MEDELLÍN
2005

AGRADECIMIENTOS

Detrás del trabajo de un hombre, se oculta la presencia de sus seres queridos y el conocimiento adquirido durante el transcurso de la vida.

El cumplimiento de esta meta es resultado del esfuerzo y dedicación personal, sumado al apoyo, calidad y visión humanista transmitida por la Universidad Eafit durante el transcurso de mi carrera.

Nota de aceptación:

Firma del Jefe de Proyecto de Grado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Medellin, 14 de Enero de 2005

TABLA DE CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCION	1
1. ANTECEDENTES.....	2
2. OBJETO DEL PROYECTO.....	3
3. FORMULACION DEL PROBLEMA.....	3
4. JUSTIFICACION.....	4
5. OBJETIVO GENERAL	5
6. OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	5
7. MARCO TEORICO	6
7.1 EN EL AREA DE INGENIERIA.....	6
7.2 CASOS PARTICULARES DE ESFUERZOS DE CONTACTO.....	7
7.2.1 ESFUERZOS DE CONTACTO ENTRE DOS ESFERAS.....	7
7.2.2 ESFUERZOS DE CONTACTO CILINDRICOS.....	10
7.2.3 ESFUERZOS DE CONTACTO EN ENGRANAJE.....	14
7.3 COLISIONES	16
7.3.1 EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	16
7.3.2 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DURANTE LAS COLISIONES	18
7.3.3 LAS COLISIONES EN UNA DIMENSION	22
7.3.4 CASOS PARTICULARES DE COLISIONES.....	25
8. ALCANCES Y PRODUCTOS A ENTREGAR	30
9. METODOLOGIA EMPLEADA.....	30
10. INVESTIGACION EN AREAS DE INGENIERIA MECANICA	31
11. FUENTES DE INFORMACION.....	31
12. USUARIOS POTENCIALES	32
13. ASPECTOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONTACTO	32
13.1 TIPO DE MATERIAL DE LOS CUERPOS EN CONTACTO.....	32

13.2	FORMA DE LAS SUPERFICIES ANALIZADAS	33
13.3	AREA DE CONTACTO	34
14.	MODELO MATEMATICO DE ESFUERZOS DE CONTACTO	35
14.1	ESFUERZOS DE CONTACTO EN SUPERFICIES CURVAS.....	36
14.2	ESFUERZOS DE CONTACTO EN SUPERFICIES CILINDRICAS	47
15.	ALGORITMO EN MATLAB PARA CALCULO DE ESFUERZOS DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES.....	52
16.	MODELACION EN ELEMENTOS FINITOS DE CASOS PARTICULARES DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES.....	62
16.1	DESCRIPCION DEL PROBLEMA.	62
16.2	DEFINICION DE GEOMETRIA.....	63
16.3	SOLUCION DEL PROBLEMA	69
16.4	ANALISIS DE RESULTADOS.....	76
17.	APLICACION DE TEORIA DE HERTZ A PROBLEMAS DE CONTACTO.....	78
17.1	DESCRIPCION DEL PROBLEMA.	78
17.2	DEFINICION DE GEOMETRIA.....	81
17.3	SOLUCION DEL PROBLEMA	86
17.4	ANALISIS DE RESULTADOS.....	90
17.5	ANALISIS EN PROGRAMA MATLAB.....	90
18.	RECOMENDACIONES	92
19.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	93
19.1	LIBROS	93
19.2	FUENTES ELECTRONICAS	94

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Esfuerzos de contacto entre 2 esferas.....	7
Figura 2. Esfuerzos de contacto entre 2 Cilindros.	11
Figura 3. Contacto entre superficies cilíndricas.	12
Figura 4. Fuerza vs. tiempo durante colisión.	16
Figura 5. Colisión entre dos partículas.....	18
Figura 6. Colisión entre dos esferas.	23
Figura 7. Esfuerzos de contacto entre superficies esféricas.....	33
Figura 8. Esfuerzos de contacto entre superficies cilíndricas.	34
Figura 9. Area de región de contacto elíptico.	35
Figura 10. Angulo entre planos de curvatura principal.....	38
Figura 11. Región de máxima presión de contacto.....	40
Figura 12. Solución No lineal.....	69
Figura 13. Gráfica de esfuerzos en dirección (Y).....	70
Figura 14. Gráfica de Tamaño de malla.....	70
Figura 15. Tabla de Esfuerzos.....	71
Figura 16. Deformación en dirección Y.....	72
Figura 17. Tabla de desplazamientos.....	72
Figura 18. Malla refinada.....	73
Figura 19. Solución con malla refinada.....	74
Figura 20. Gráfica de esfuerzos en malla refinada.	74
Figura 21. Gráfica de desplazamientos en malla refinada.	76
Figura 22. Fuerza en elementos GAP en contacto superficial.	86
Figura 23. Estado de esfuerzos en sujetador neumático en dirección (Z).	87
Figura 24. Esfuerzos en sujetador neumático.....	87
Figura 25. Deformación en sujetador neumático en dirección (Z).....	88
Figura 26. Desplazamientos en sujetador neumático.	89
Figura 27. Solución en Matlab.	91

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Datos de entrada para superficies curvas.....	37
Tabla 2. Datos de entrada para superficies cilíndricas.....	48

INTRODUCCION

El estudio de las tensiones causadas por el contacto entre cuerpos elásticos es importante en el diseño de vías de tren, rodamientos de bolas y rodillos, juntas de expansión de estructuras de acero, etc. Debido a que las tensiones que se desarrollan en el área de contacto pueden alcanzar el límite elástico del material, provocando en la superficie grietas, picaduras, hendiduras que pueden terminar en la fractura de la pieza o elemento de máquina.

A raíz de la presencia de estos fenómenos en las superficies de los elementos de máquinas, Hertz en 1881 desarrolló sobre la base de resultados experimentales la teoría matemática sobre tensiones y deformaciones producidas por la presión entre cuerpos curvos. De acuerdo con esta teoría la máxima tensión de compresión ocurre en el centro de las superficies de contacto y la máxima tensión cortante ocurre en el interior de los cuerpos a compresión.

La aplicación del modelo matemático de Hertz, para conocer los esfuerzos principales, esfuerzos cortantes y deflexión entre cuerpos en contacto, son de gran importancia para el diseño y análisis de fallas en elementos de máquinas, debido a la información que estos datos pueden suministrar al ingeniero o diseñador de maquinaria, a fin de definir o reconsiderar la geometría, tipo de material o carga aplicada a los cuerpos en contacto superficial.

1. ANTECEDENTES

En la actualidad es frecuente encontrar en el área de ingeniería, fallas en los elementos de máquinas causados por la incidencia de los esfuerzos hertzianos entre superficies en contacto, los cuales son difíciles de cuantificar rápidamente por desconocimiento de las teorías hertzianas para superficies en contacto; y la complicación y tiempo requerido para hallar los esfuerzos y deflexiones sufridas por los cuerpos cuando se aplica una carga.

Teniendo en cuenta las razones citadas, muchos autores han adaptado el modelo matemático de hertz a casos específicos, como son el contacto entre esferas (contacto en un punto) y contacto entre cilindros (contacto a lo largo de una línea). La formulación matemática para el cálculo de esfuerzos y deformaciones en estos dos casos, se encuentran en la mayoría de los libros de Diseño de Máquinas que existen en la actualidad.

Sin embargo, algunos autores profundizan en el tema y proponen modelos de cálculo tendientes a encontrar los esfuerzos de contacto entre superficies, donde pese a algunas diferencias en las ecuaciones empleadas, se llegan a resultados aproximadamente iguales. Las diferencias de los métodos empleados en los cálculos, radican generalmente en el tipo de lenguaje de programación utilizado (visual Basic; Fortran, Hojas de cálculo, Matlab) y las ecuaciones empleadas para tal fin.

2. OBJETO DEL PROYECTO

El proyecto consiste en la elaboración de un programa en Matlab, que permita determinar de manera general la incidencia de los esfuerzos hertzianos en elementos de máquinas que presenten contacto superficial, con base en los modelos matemáticos planteados en los textos de diseño de máquinas, a fin de contar con una herramienta precisa, que permitan realizar un diagnóstico apropiado de las causas que originan las fallas de estos elementos y realizar las labores correctivas correspondientes, con el fin de disminuir el desgaste, la fricción, la adhesión, lubricación y fractura de estos.

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

La realización del proyecto parte de la necesidad de conocer y evaluar dentro de altos rangos de precisión, la repercusión de los esfuerzos hertzianos en las superficies de algunos elementos de máquinas, provocados por las fuerzas de contacto que actúan sobre estos, cuando se encuentran en interacción dinámica o estática con otros elementos durante su normal funcionamiento.

El programa en Matlab, permite calcular la magnitud de los esfuerzos hertzianos y las deformaciones que se presentan durante la interacción entre superficies en contacto, permitiendo modificar la geometría, tipo de material e intensidad de la carga aplicada, con el fin de reducir las consecuencias derivadas de estos, como el desgaste, la fricción, la adhesión y la lubricación.

4. JUSTIFICACION

Es frecuente en ingeniería encontrar fallas en las superficies de los elementos de máquinas, tales como grietas, cuarteaduras, hendiduras o desprendimiento de partículas¹. Estos problemas son causados en su gran mayoría por esfuerzos de contacto en la superficie y se evidencian generalmente en los siguientes casos:

- Contacto entre una rueda y un riel
- Contacto entre una leva y su seguidor o contra leva,
- Ajuste entre dientes de engranajes,
- Contacto entre bolas o agujas de rodamientos y sus carcasas.

Estos casos, derivan en dos planteamientos generales empleados para determinar los esfuerzos de contacto en superficies, los cuales se conocen como:

- Contacto superficial en un punto,
- Contacto superficial a lo largo de una línea o generatriz.

En la actualidad la aplicación de la teoría hertziana, no se limita solamente a elementos de máquinas, sino que se extiende a otras aplicaciones o áreas de la ciencia, por ejemplo:

- Cálculo de esfuerzos de contacto entre articulaciones humanas,
- Construcción de carreteras de acuerdo a los esfuerzos y deformaciones, generadas por el contacto entre una llanta y el pavimento.

¹ SHIGLEY, J.E. y MISCHKE, L.D. Diseño en ingeniería mecánica. 5 ed. España. McGraw Hill, 1990. p. 145

Determinación de los materiales para los empaques de frutas, con base en las deformaciones causadas por las cargas estáticas presentes durante el almacenamiento.

Estos casos, son una pequeña muestra de la infinidad de aplicaciones e importancia de los esfuerzos de contacto en distintas áreas del conocimiento.

Debido a lo expuesto anteriormente, se pretende elaborar un programa que permita evaluar de manera rápida y con alto grado de precisión los esfuerzos de contacto en superficies, con el fin de facilitar los cálculos y el análisis de ingeniería tendientes a disminuir las fallas en dichos elementos.

5. OBJETIVO GENERAL

El proyecto consiste en la construcción de un algoritmo en Matlab, que permita calcular la magnitud de los esfuerzos hertzianos en las superficies de elementos de máquinas, que interactúen por medio de contacto dinámico o estático con otros elementos mecánicos.

6. OBJETIVOS ESPECIFICOS.

- Planteamiento analítico generalizado de las ecuaciones que permitan calcular la magnitud de los esfuerzos hertzianos en elementos de máquinas sometidos a contacto superficial.
- Identificación de elementos de máquinas en los cuales se pueda aplicar los casos generalizados de contacto superficial.

- Elaboración de algoritmo en Matlab, que permita calcular la magnitud de los esfuerzos de contacto presentes en elementos de máquina, sometidos a contacto dinámico o estático en la superficie.
- Proponer un procedimiento de modelación en elementos finitos del caso en estudio, con el fin de obtener una buena aproximación de los efectos de los esfuerzos de contacto entre las superficies de los elementos analizados.

7. MARCO TEORICO

7.1 EN EL AREA DE INGENIERIA.

Los esfuerzos de contacto o esfuerzos hertzianos, se presentan en la vecindad de la superficie de dos objetos elásticos sometidos al efecto de una fuerza externa que comprime la geometría de los cuerpos, permitiendo hacer contacto en un punto o a lo largo de una línea, si fueran perfectamente rígidos².

En estos casos, el contacto lineal o puntual cambia a un área de contacto, desarrollándose esfuerzos tridimensionales en los dos cuerpos, los cuales permiten.

El caso más general de esfuerzo de contacto, se desarrolla cuando cada cuerpo en contacto tiene un radio de curvatura doble, es decir cuando el radio de curvatura en el plano de rodamiento es diferente del radio de curvatura en un plano perpendicular, y ambos planos pasan por el eje de la fuerza de contacto³.

² ORTHWEIN, William C. Diseño de componentes de Maquinas. México: Continental S. A, 1996, p. 111.

³ SHIGLEY, Op. cit., p.145

7.2 CASOS PARTICULARES DE ESFUERZOS DE CONTACTO.

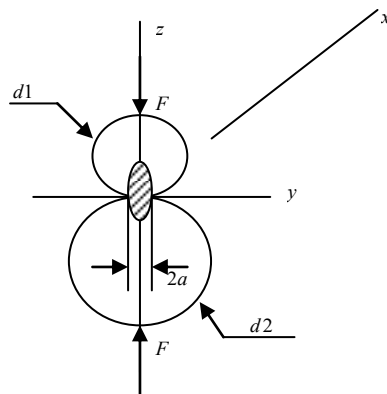
Los casos que frecuentemente se plantean en ingeniería son los equivalentes a dos cilindros en contacto a lo largo de una generatriz, y los de dos esferas con contacto en un punto.

Con el fin de plantear una formulación general, se analizan estos dos casos particulares de contacto superficial, buscando adecuarlos a un sin número de elementos de máquinas, que presenten características similares a los dos casos descritos a continuación.

7.2.1 Esfuerzos de contacto entre dos esferas.

Los esfuerzos de contacto puntuales, se presentan cuando existe contacto superficial entre dos cuerpos sólidos esféricos.

Figura 1. Esfuerzos de contacto entre 2 esferas.



Diseño en Ingeniería Mecánica Shigley, 1990

En el caso de dos cuerpos sólidos esféricos que entran en contacto superficial, con diámetros d_1 y d_2 , que se presionan con una fuerza F , se obtiene un área de contacto circular⁴. La presión ejercida por la fuerza F dentro de cada esfera presenta una distribución semi-elíptica, donde la presión máxima P_{max} ocurre en el centro del área de contacto y cuyo valor se puede calcular así:

$$P_{max} = \frac{3F}{2a^2} \quad \text{Ec. 1}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

P_{max} : Presión máxima sobre área de contacto [Pa]

F : Fuerza ejercida sobre las superficies en contacto [N]

a : Área circular de contacto entre las superficies [m]

Donde (a) se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$a = \sqrt{\frac{3F}{8} \cdot \frac{(1 - \nu_1^2) \left(\frac{1}{E_1} \right) + (1 - \nu_2^2) \left(\frac{1}{E_2} \right)}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}} \quad \text{Ec. 2}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

F : Fuerza ejercida sobre las esferas [Pa]

d_1 y d_2 : Diámetro de esferas [m]

ν_1, ν_2 : Módulo de poisson para cada esfera sólida []

E_1 y E_2 : Módulo de elasticidad de cada material de la esfera sólida [Pa]

⁴ SHIGLEY, Op. cit., p.145

Las ecuaciones anteriores también se pueden aplicar en superficies en contacto con las siguientes características:

Esfera sólida y superficie plana, donde d_2 tiende a infinito⁵,

Esfera sólida y superficie esférica interna, donde d_2 se expresa negativamente.

Los esfuerzos principales ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) correspondientes a los ejes coordenados y que se encuentran a una distancia z de la superficie de contacto; pueden calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P_{max} \left[\frac{z}{a} \tan^2 \nu + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right] \quad \text{Ec. 3}$$

$$\sigma_z = \frac{P_{max}}{1 - \frac{z^2}{a^2}} \quad \text{Ec. 4}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

P_{max} : Presión máxima sobre área de contacto [Pa]

a : Área circular de contacto entre las superficies [m]

z : Distancia a superficie de contacto [m]

ν_1, ν_2 : Módulo de poisson para cada esfera sólida []

Donde el máximo esfuerzo de compresión se presenta en el eje z ⁶, que corresponde al valor del esfuerzo principal σ_z (ver Ec. 4).

⁵ SHIGLEY, Op. cit., p.145

⁶ Ibid., p. 145.

El calculo de los esfuerzos cortantes ($\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$) generados por estos tipos de superficies en contacto se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{dado que } \sigma_x = \sigma_y$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \sin 2\theta$$

Ec. 5

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

σ_x : Esfuerzo principal en el eje X [Pa]

σ_y : Esfuerzo principal en el eje Y [Pa]

σ_z : Esfuerzo principal en el eje Z [Pa]

La opinión de muchos expertos, es que este esfuerzo constante máximo es responsable de la fatiga superficial de los elementos en contacto, y la explicación consiste en que una grieta se origina en el punto del esfuerzo cortante máximo debajo de la superficie y progresa paulatinamente hacia la superficie⁷.

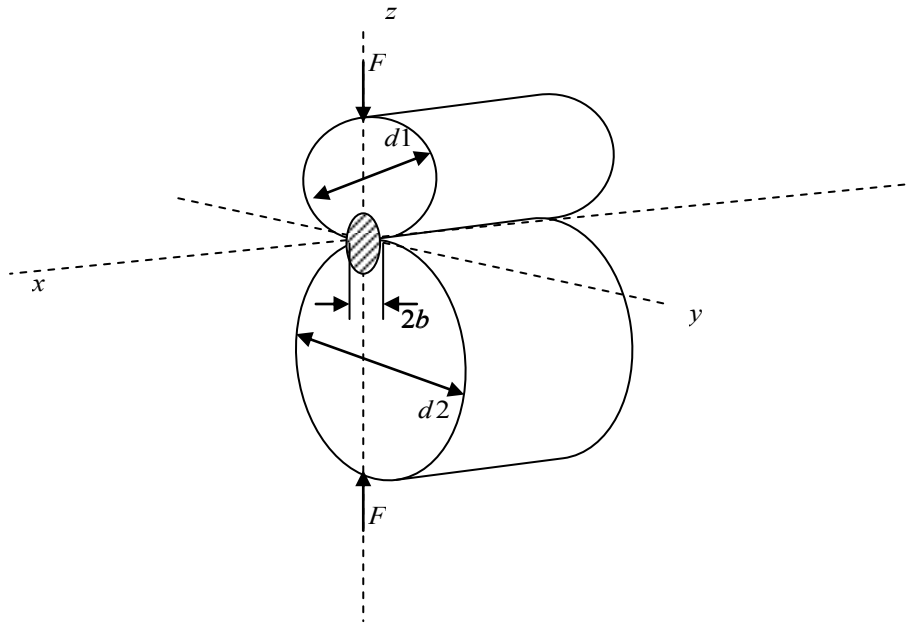
7.2.2 Esfuerzos de contacto cilíndricos.

Los esfuerzos hertzianos a lo largo de una línea de contacto, se presentan cuando existe contacto superficial entre dos cuerpos sólidos cilíndricos.

En el caso de encontrarse dos cuerpos cilíndricos de longitud L en contacto superficial, con diámetros d_1 y d_2 , que se presionan con una fuerza F , se obtiene un área de contacto rectangular de ancho $2b$ y longitud L , donde la distribución de la presión ejercida por la fuerza F es elíptica.

⁷ SHIGLEY, Op. cit., p. 146.

Figura 2. Esfuerzos de contacto entre 2 Cilindros.



Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 147

La presión máxima que actúa sobre los cilindros es:

$$P_{\max} = \frac{2F}{\pi b L} \quad \text{Ec. 6}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

P_{\max} : Presión máxima sobre área de contacto [Pa]

F : Fuerza ejercida sobre las superficies cilíndricas en contacto [N]

b : Ancho del área de contacto entre las superficies [m]

L : Longitud de contacto entre las superficies [m]

Donde b se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$b = \sqrt{\frac{2F}{L} \frac{(1 - \nu_1^2) \frac{1}{E_1} + (1 - \nu_2^2) \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}} \quad \text{Ec. 7}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

F : Fuerza ejercida sobre las superficies cilíndricas en contacto [Pa]

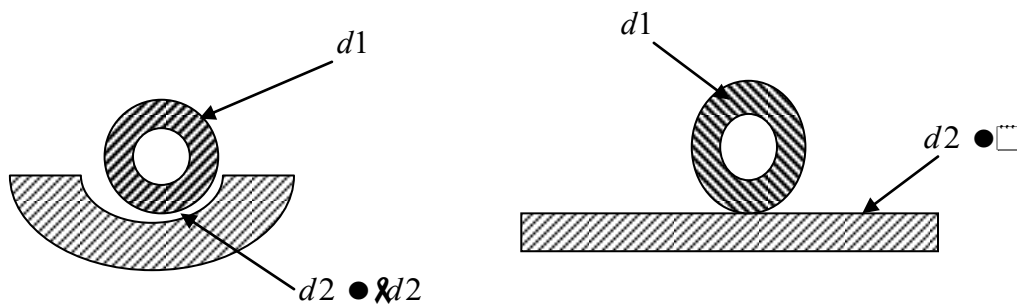
d_1 y d_2 : diámetro de las superficies cilíndricas [m]

ν_1 y ν_2 : Módulo de poisson para cada superficie cilíndrica []

E_1 y E_2 : Módulo de elasticidad de cada superficie cilíndrica [Pa]

Las ecuaciones anteriores también se pueden aplicar en superficies en contacto con las siguientes características; superficie cilíndrica y superficie plana (como un riel), donde d_2 tiende a infinito, o en los casos en que el contacto es entre un cilindro y una superficie cilíndrica interna, d_2 que se expresa negativamente⁸.

Figura 3. Contacto entre superficies cilíndricas.



Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 145

⁸ SHIGLEY, Op. cit., p. 147.

Los esfuerzos principales ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) correspondientes a los ejes coordenados, se presentan a una distancia z de la superficie de contacto; sus valores se pueden calcular mediante las siguientes ecuaciones.

$$\sigma_x = \lambda P \max \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} - \frac{z}{b} \right] \quad \text{Ec. 8}$$

$$\sigma_y = \lambda P \max \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} + \frac{z}{b} \right] \quad \text{Ec. 9}$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda P \max}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} \quad \text{Ec. 10}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 146

P_{max} : Presión máxima sobre área de contacto [Pa]

b : Área circular de contacto entre las superficies [m]

z : Distancia a superficie de contacto [m]

ν_1, ν_2 : Módulo de poisson para cada esfera sólida []

El calculo de los esfuerzos cortantes (τ_x, τ_y, τ_z) generados por estos tipos de superficies en contacto se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_x = 0 \quad \text{dado que } \tau_y = \tau_z$$

$$\tau_y = \tau_z = \frac{\lambda P \max}{2} \left[\frac{z}{b} \right] \quad \text{Ec.11}$$

Diseño en Ingeniería Mecánica; Shigley, 1990, p 146

7.2.3 ESFUERZOS DE CONTACTO EN ENGRANAJE.

Una de las aplicaciones más frecuentes en ingeniería, de los esfuerzos de contacto en superficies se desarrolla en el diseño de engranajes, debido a que los dientes de los engranajes, deben asegurarse contra fallas por fractura, y deben ser capaces de operar durante su vida útil sin que exista corrosión significativa de la forma del diente⁹.

Se entiende por corrosión, el fenómeno por el cual pequeñas partículas se desprenden de la superficie de los dientes, debido a altas fuerzas de contacto que se presentan entre los dientes de engrane¹⁰.

A fin de obtener una formula para calcular el esfuerzo real de compresión que se tiene en la superficie de los dientes de dos engranes, se utiliza la ecuación de hertz para calcular el esfuerzo en la superficie de los dos cilindros en contacto rodante.

La AGMA especifica que el valor del esfuerzo calculado deberá ser menor o igual al esfuerzo por contacto admisible, con el fin de determinar si los engranajes son o no adecuados en lo que a desgaste concierne.

Es importante resaltar que el esfuerzo de contacto admisible, es función de factores como el material del piñón y del engranaje, el número de ciclos de aplicación de la carga, el tamaño de los engranajes, temperatura y el tipo de tratamiento térmico a los cuales han sido sujetos.

⁹ MOTT, Robert L. Diseño de elementos de maquinas. 2 ed. México, Ed. Prentice Hall, 1992. p. 430.

¹⁰ *Ibíd.*, p. 430.

Al aplicar la ecuación de hertz para el caso específico de engranajes, se encuentra la siguiente formula que permite calcular el esfuerzo de contacto σ_c :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{W_t}{F \cdot D_p} \cdot \frac{1}{E_p \cdot \left(\frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_g^2}{E_g} \right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos \phi \cdot m_g}} \quad \text{Ec. 12}$$

Diseño de elementos de maquinas; Mott, 1992, p 431

Donde, los términos definidos en la ecuación son los siguientes:

W_t : Carga tangencial [N]

D_p : Diámetro de paso del piñón [m]

ν_p : Razón de poisson para material del piñón []

ν_g : Razón de poisson para material del engrane []

E_p : Módulo de elasticidad para material del piñón [Pa]

E_g : Módulo de elasticidad para material del engrane [Pa]

m_g : Relación del engrane []

F : Fuerza transmitida [N]

En general, el diseñador debe especificar un material que tenga un numero de tensión debida al contacto permisible, S_{ac} , mayor que la tensión debida al contacto que se calculo σ_c ; esto es $\sigma_c < S_{ac}$ ¹¹.

¹¹ MOTT, Op. cit., p. 435

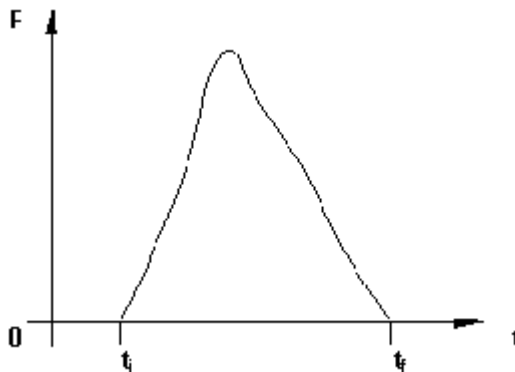
7.3 COLISIONES

Durante un choque actúa una fuerza relativamente grande sobre las partículas que impactan, aunque solo lo hacen durante un intervalo de tiempo más o menos pequeño. Básicamente en una colisión el movimiento de las partículas que chocan (por lo menos, el de una de ellas) cambia en forma muy brusca y estableciendo una separación bastante definida entre los tiempos que transcurren "antes de la colisión" y los que lo hacen "después de ella".

En las colisiones se verifica el principio de acción y reacción, en el caso de las colisiones estas fuerzas actúan durante lapso de tiempo muy pequeño y se denominan fuerzas instantáneas o impulsivas¹².

7.3.1 EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Figura 4. Fuerza vs. Tiempo durante colisión.



Física; Zemansky, 1979, p. 856

¹² SEARS, Francis W y ZEMANSKY, Mark W. Física. Madrid: Aguilar S.A., 1979.

La figura (4) muestra la magnitud de la fuerza ejercida sobre un cuerpo durante una colisión, dicha fuerza tiene una dirección constante.

La colisión comienza en el instante t_i y termina en t_f , y la fuerza es nula antes y después del choque. El cambio de la cantidad de movimiento o ímpetu Δp de un cuerpo, en el intervalo de tiempo Δt durante el cual ha estado actuando una fuerza F sobre él puede escribirse como:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \quad \text{Ec. 13}$$

El cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo durante una colisión, se obtiene integrando sobre el tiempo que dura dicha colisión, es decir; la integral de una fuerza sobre el intervalo de tiempo en que actúa se llama impulso (I) de la fuerza. Por lo tanto el cambio de la cantidad de movimiento (p) de un cuerpo movido por una fuerza impulsiva, es igual al impulso. Tanto el impulso como la cantidad de movimiento son vectores y ambos tienen las mismas unidades y dimensiones¹³.

Para el impulso:

$$I = F \cdot t \quad \text{Ec. 14}$$

siendo:

$$I : \text{Impulso } [I] = [\text{kg.m/s}]$$

para la cantidad de movimiento:

$$p = m \cdot v \quad \text{Ec. 15}$$

siendo:

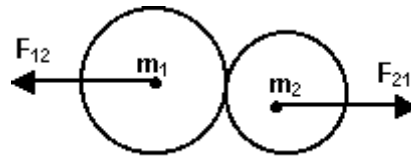
$$p : \text{cantidad de movimiento } [p] = [\text{kg.m/s}]$$

¹³ SEARS, Francis W y ZEMANSKY, Mark W. Física. Madrid: Aguilar S.A., 1979. p. 181-184.

7.3.2 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DURANTE LAS COLISIONES

Considerando ahora una colisión entre dos partículas, tales como las de la masa m_1 y m_2 (figura 5), durante la breve colisión, las partículas ejercen fuerzas internas entre sí. Donde F_{12} es la fuerza ejercida por la partícula (2) sobre la partícula (1) y F_{21} es la fuerza ejercida por la partícula (1) sobre la partícula (2). Por la tercera ley de Newton, estas fuerzas son, en cualquier instante, de igual magnitud pero de sentido contrario (acción y reacción).

Figura 5. Colisión entre dos partículas.



Física; Zemansky, 1979, p. 857

El cambio de la cantidad de movimiento de la partícula (1) como resultado del choque es:

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} F_{12} dt = F_{12m} \Delta t \quad \text{Ec. 16}$$

Δp_1 : Cambio de cantidad de movimientos de la partícula (1) [kg.m/s]

F_{12m} : Valor medio de la fuerza durante el intervalo de tiempo [N]

$\Delta t = t_f - t_i$: Intervalo de tiempo que dura la colisión. [s]

El cambio de la cantidad de movimiento de la partícula (2) como resultado del choque es:

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} F_{12} dt = F_{12m} \Delta t \quad \text{Ec. 17}$$

Δp_2 : Cambio de cantidad de movimientos de la partícula (2) [kg.m/s]

F_{12m} : Valor medio de la fuerza durante el intervalo de tiempo

$\Delta t = t_f - t_i$: Intervalo de tiempo que dura la colisión. [s]

Si sobre las partículas no actúan otras fuerza, el cambio total en la cantidad de movimiento de cada una de ellas es Δp_1 y Δp_2 . Se encuentra que en cada instante, $F_{12} = -F_{21}$, de modo que $F_{12m} = -F_{21m}$ y, por lo tanto:

$$\Delta p_1 = - \Delta p_2 \quad \text{Ec. 18}$$

Δp_1 : Cambio de cantidad de movimientos de la partícula (1) [kg.m/s]

Δp_2 : Cambio de cantidad de movimientos de la partícula (2) [kg.m/s]

Si se considera que las dos partículas forman un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema es:

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{Ec. 19}$$

p_1 : Cantidad de movimientos de la partícula (1) [kg.m/s]

p_2 : Cantidad de movimientos de la partícula (2) [kg.m/s]

Y el cambio total en la cantidad de movimiento del sistema provocado por la colisión es cero, o sea que:

$$p = p_1 + p_2 = 0 \quad \text{Ec. 20}$$

p_1 : Cantidad de movimientos de la partícula (1) [kg.m/s]

p_2 : Cantidad de movimientos de la partícula (2) [kg.m/s]

Por lo tanto si no hay fuerzas externas, la colisión no altera la cantidad de movimiento total del sistema. Las fuerzas impulsivas que actúan durante la colisión son fuerzas internas que no producen ningún efecto sobre la cantidad de movimiento total del sistema.

Se define un choque como una interacción que tiene lugar en un tiempo (Δt) que es despreciable comparado con el tiempo durante el cual se observa el sistema.

También se puede caracterizar a una colisión como un suceso en el que las fuerzas externas que pueden estar actuando sobre el sistema sean despreciables comparadas con las fuerzas impulsivas de la colisión. Cuando un bate golpea a una pelota de béisbol también actúan fuerzas externas sobre el sistema, por ejemplo la gravedad o la fuerza rozamiento del aire.¹⁴

Estas fuerzas externas pueden no ser las mismas para todos los cuerpos que intervengan en la colisión ni tienen que ser necesariamente equilibradas por otras fuerzas externas.

¹⁴ RESNICK, Robert y HALLIDAY, David. Física para estudiantes de Ciencias e Ingenierías. 13 ed. Barcelona: C.E.C.S.A, 1969. p. 345

Aún así las fuerzas externas pueden ignorarse, sin mucho riesgo, durante la colisión y se puede suponer la validez de la conservación de la cantidad de movimiento, ya que, como sucede casi siempre, las fuerzas externas son despreciables comparadas con las fuerzas impulsivas de la colisión. De esto resulta que durante una colisión, el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula, proveniente de una fuerza externa, es despreciable comparado con el cambio en la cantidad de movimiento de dicha partícula debido a la fuerza impulsiva de la colisión¹⁵.

Por ejemplo, cuando un bate golpea a una pelota de béisbol, la colisión solo dura una pequeña fracción de segundo. Como el cambio en la cantidad de movimiento es grande y el tiempo de la colisión es pequeño, resulta que la fuerza impulsiva promedio (F_m) es relativamente grande, comparada con ésta, la fuerza de la gravedad es despreciable. Al determinar el cambio del movimiento de la pelota, durante la colisión, es posible ignorar, sin riesgo alguno, a esta fuerza externa. Mientras menor sea la duración del choque mejor será el resultado obtenido¹⁶.

Por lo tanto, en la práctica es posible aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento durante las colisiones, con tal de que el tiempo que dura la colisión sea suficientemente pequeño, pudiendo establecer que la cantidad de movimiento de un sistema de partículas justo antes de que choquen, es igual a la cantidad de movimiento del sistema inmediatamente después de que ello ocurra.

¹⁵ EISBERG, Robert y LERNER, Lawrence S. Física, Fundamentos y aplicaciones. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1983. p.606.

¹⁶ RESNICK, Robert y HALLIDAY, David. Op. cit. p. 347.

7.3.3 LAS COLISIONES EN UNA DIMENSION

Los movimientos de los cuerpos después de una colisión pueden calcularse siempre, a partir de sus movimientos anteriores a la misma, si se conoce la fuerza que actúa durante ella y si se pueden resolver las ecuaciones de movimiento. A menudo estas fuerzas no se conocen. Sin embargo, el principio de la conservación de la cantidad de movimiento debe ser válido durante la colisión. Se sabe que el principio de la conservación de la energía es válido, aunque no se conozcan los detalles de la interacción, en muchos casos se utiliza para predecir los resultados de la colisión.

Por lo común, las colisiones se clasifican según que se conserve o no la energía cinética durante el choque. Cuando la energía cinética se conserva, se dice que la colisión es elástica, en caso contrario, se dice que la colisión es inelástica.

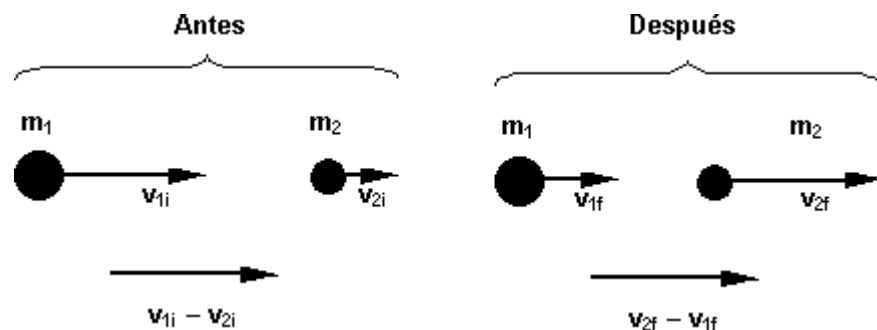
Las colisiones entre las partículas atómicas, nucleares y fundamentales algunas veces son elásticas (pero no siempre). En realidad, estas son las únicas colisiones verdaderamente elásticas que se conocen. Las colisiones entre cuerpos grandes siempre tienen algún grado de inelasticidad. Sin embargo a menudo se tratan dichas colisiones como si fuesen aproximadamente elástica, como sucede, por ejemplo, en las colisiones entre bolas de marfil o de vidrio. Cuando dos cuerpos se adhieren juntándose después de una colisión, se dice que tal colisión es completamente inelástica.

El término completamente inelástico no significa que se pierda toda la energía cinética; más bien significa que la pérdida de ella es tan grande como lo pueda permitir el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Aún cuando se desconozcan las fuerzas de la colisión es posible encontrar los movimientos de las partículas después de que ocurra, a partir de sus movimientos antes de la misma, siempre que la colisión sea completamente inelástica, o cuando la colisión sea elástica y en una dimensión. En una colisión unidimensional, el movimiento relativo después de una colisión está sobre la misma línea recta que el movimiento relativo antes de que ocurriera.

Considerando una colisión elástica en una dimensión, es posible imaginar a dos esferas lisas que inicialmente se mueven sin girar a lo largo de la línea que une a sus centros, después chocan frontalmente, pasando la colisión, se mueven sin girar sobre la misma línea recta (figura 6). Durante la colisión, estos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas que están sobre la línea inicial del movimiento, de manera que el movimiento final también ocurre sobre dicha línea.

Figura 6. Colisión entre dos esferas.



Física; Zemansky, 1979, p. 859

Sean (m_1) y (m_2) las masas de las esferas, (v_{1i}) y (v_{2i}) las componentes de sus velocidades (escalares) antes de la colisión y (v_{1f}) y (v_{2f}) las mismas después de la colisión.

La dirección positiva de la cantidad de movimiento y de la velocidad es hacia la derecha, a no ser que se especifique de otra forma, las velocidades de las partículas que chocan no son tan grandes como para requerir del uso de las expresiones relativistas de la cantidad de movimiento y de la energía cinética. Entonces, por la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f} \quad \text{Ec. 21}$$

m_1 : Masa de esfera (1) [kg.]

m_2 : Masa de esfera (2) [kg.]

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

v_{2i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

v_{1f} : Velocidad final de esfera (1) [m/s]

v_{2f} : Velocidad final de esfera (2) [m/s]

Como la colisión es elástica, la energía cinética se conserva por definición, de modo que:

$$m_1 \cdot \frac{v_{1i}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{v_{2i}^2}{2} = m_1 \cdot \frac{v_{1f}^2}{2} + m_2 \cdot \frac{v_{2f}^2}{2} \quad \text{Ec. 22}$$

Está claro, desde luego, que si se conocen las masas y las velocidades iniciales, se puede calcular las velocidades finales (v_{1f}) y (v_{2f}) a partir de estas dos ecuaciones (Ec.21 y Ec. 22). Donde la ecuación de la cantidad de movimiento puede escribirse como:

$$m_1 \cdot (v_{1f} - v_{1i}) = m_2 \cdot (v_{2f} - v_{2i}) \quad \text{Ec. 23}$$

Y la de la energía cinética se puede escribir como:

$$m_1 \cdot \left(\frac{v_{1f}^2}{2} - \frac{v_{1i}^2}{2} \right) = m_2 \cdot \left(\frac{v_{1f}^2}{2} - \frac{v_{2i}^2}{2} \right) \quad \text{Ec. 24}$$

Dividiendo (Ec. 24) entre (Ec. 23) se obtiene:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{21i} \quad \text{Ec. 25}$$

después de un reajuste en (Ec. 25) se encuentra:

$$v_{1i} - v_{21i} = v_{2f} - v_{1f} \quad \text{Ec. 26}$$

Lo que indica que, en una colisión elástica en una dimensión, la velocidad relativa de acercamiento antes de la colisión es igual a la velocidad relativa de alejamiento luego de la misma.

7.3.4 CASOS PARTICULARES DE COLISIONES

Hay varios casos de interés específico.

Las partículas que chocan tienen la misma masa, es decir:

$$m_1 = m_2 \quad \text{Ec. 27}$$

Entonces resulta:

$$v_{1f} = v_{21i} \text{ y } v_{2f} = v_{1i} \quad \text{Ec. 28}$$

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

v_{21i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

v_{1f} : Velocidad final de esfera (1) [m/s]

v_{2f} : Velocidad final de esfera (2) [m/s]

En una colisión elástica unidimensional de dos partículas de igual masa, las partículas tan sólo intercambian sus velocidades durante la colisión.

Una de las partículas está en reposo, por ejemplo:

$$v_{21i} = 0 \quad \text{Ec. 29}$$

v_{21i} : Velocidad inicial de esfera (2). [m/s]

Entonces resulta:

$$v_{1f} = v_{2i} \text{ y } v_{2f} = v_{1i} \quad \text{Ec. 30}$$

$$v_{1f} = (m_1 - m_2) \cdot \frac{v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad \text{Ec. 31}$$

$$v_{2f} = 2 \cdot m_1 \cdot \frac{v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad \text{Ec. 32}$$

m_1 : Masa de esfera (1) [kg.]

m_2 : Masa de esfera (2) [kg.]

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

v_{21i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

v_{1f} : Velocidad final de esfera (1) [m/s]

v_{2f} : Velocidad final de esfera (2) [m/s]

Las partículas que chocan tienen la misma masa y una de ellas está inicialmente en reposo:

$$m_1 = m_2 \quad \text{Ec. 33}$$

$$v_{2i} = 0 \quad \text{Ec. 34}$$

Entonces resulta:

$$v_{1f} = 0 \quad \text{y} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad \text{Ec. 35}$$

La primera partícula se detiene mientras que la segunda inicia su trayectoria con la misma velocidad que traía la primera. Es el caso de las bolas de billar.

Las partículas que chocan tienen masas muy distintas y una de ellas está inicialmente en reposo:

$$m_1 \lll m_2 \quad \text{Ec. 36}$$

$$v_{2i} = 0 \quad \text{Ec. 37}$$

m_1 : Masa de esfera (1) [kg.]

m_2 : Masa de esfera (2) [kg.]

v_{21i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

Se tiene que:

$$v_{1f} \neq -v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \neq 0 \quad \text{Ec. 38}$$

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

v_{21i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

v_{1f} : Velocidad final de esfera (1) [m/s]

v_{2f} : Velocidad final de esfera (2) [m/s]

La velocidad de la partícula ligera se invierte, aproximadamente, mientras que la partícula de mayor masa queda casi en reposo. Es el caso de una bola de billar que rebota contra la banda.

Las partículas que chocan tienen masas muy distintas y la más liviana está inicialmente en reposo:

$$m_1 \ll m_2 \quad \text{Ec. 39}$$

$$v_{1i} = 0 \quad \text{Ec. 40}$$

m_1 : Masa de esfera (1) [kg.]

m_2 : Masa de esfera (2) [kg.]

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

Se tiene que :

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx 2 \cdot v_{1i} \quad \text{Ec. 41}$$

La velocidad de la partícula de mayor masa casi no es alterada por la colisión con la partícula ligera, pero la partícula ligera adquiere una velocidad aproximadamente del doble de la partícula pesada.

Si una colisión es inelástica, entonces, por definición, no se conserva la energía cinética. La energía cinética final puede tener un valor menor que el inicial, en última instancia, la diferencia queda convertida, por ejemplo, en energía calorífica, o en energía potencial de la deformación en la colisión; también puede ocurrir que el valor final de la energía cinética sea superior al valor inicial, como sucede cuando se libera energía potencial en la colisión.

En todo caso, la conservación de la cantidad de movimiento sigue siendo válida, así como la conservación de la energía total.

Colisión totalmente inelástica.

Las dos partículas se adhieren permaneciendo juntas después de la colisión, de manera que habrá una velocidad final común v_f :

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f \quad \text{Ec. 42}$$

v_{1f} : Velocidad final de esfera (1) [m/s]

v_{2f} : Velocidad final de esfera (2) [m/s]

No es necesario restringir la discusión al movimiento en una dimensión. Usando solamente el principio de conservación de la cantidad de movimiento se encuentra que :

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = (m_1 + m_2) \cdot v_f \quad \text{Ec. 43}$$

m_1 : Masa de esfera (1) [kg.]

m_2 : Masa de esfera (2) [kg.]

v_{1i} : Velocidad inicial de esfera (1) [m/s]

v_{2i} : Velocidad inicial de esfera (2) [m/s]

Lo cual determina la velocidad final conociendo las velocidades iniciales.

8. ALCANCES Y PRODUCTOS A ENTREGAR

El estudio de las tensiones causadas por el contacto entre cuerpos elásticos es importante en el diseño de elementos de maquinas, debido a que las tensiones que se desarrollan en el área de contacto pueden alcanzar el límite elástico del material, dando como resultado problemas de desgaste, fricción, grietas, cuarteaduras, hendiduras o desprendimiento de partículas.

Con el fin de contar con una herramienta que permita conocer de forma rápida y altamente aproximada la magnitud y efectos de los esfuerzos hertzianos, presentes en las superficies en contacto, se desarrollara un programa en Matlab que facilite los cálculos y una aplicación en elementos finitos que permita modelar los casos en estudio.

9. METODOLOGIA EMPLEADA.

- 🎬 Recolección de información acerca de esfuerzos hertzianos entre superficies en contacto.
- 🎬 Análisis de información y procesamiento de información recolectada.
- 🎬 Planteamiento analítico de casos generales de esfuerzos de contacto.
- 🎬 Desarrollo de programa en Matlab.
- 🎬 Desarrollo en elementos finitos de herramienta que permita simular incidencia de esfuerzos hertzianos de superficies en contacto.

10. INVESTIGACION EN AREAS DE INGENIERIA MECANICA

El proyecto es de gran importancia dentro de la formación profesional en ingeniería mecánica, porque permite aplicar los conocimientos teórico-prácticos obtenidos durante la carrera, especialmente los relacionados con las siguientes áreas:

- 🎬 Ecuaciones diferenciales
- 🎬 Física
- 🎬 Programación de computadores
- 🎬 Ciencia de los materiales
- 🎬 Estática
- 🎬 Dinámica
- 🎬 Mecánica de Sólidos
- 🎬 Diseño de máquinas
- 🎬 Diseño de máquinas 2
- 🎬 Anteproyecto
- 🎬 Sistemas CAD-CAM
- 🎬 Elementos Finitos

11. FUENTES DE INFORMACION

La elaboración del siguiente proyecto, hace necesario la recopilación y análisis de información disponible en las siguientes fuentes:

- 🎬 Consulta bibliografía existente acerca del tema esfuerzos hertzianos entre superficies en contacto.
- 🎬 Información de Internet, sobre herramientas en elementos finitos aplicados a determinar esfuerzos de contacto en elementos de máquinas.

12. USUARIOS POTENCIALES

El siguiente proyecto pretende proporcionar una herramienta de análisis ingenieril, en el tema de esfuerzos de contacto en elementos de máquinas, con el fin de aplicarlo a casos específicos de contacto dinámico o estático entre superficies.

- 🎬 Teniendo en cuenta este enfoque el proyecto se dirige principalmente a:
- 🎬 Estudiantes del área de ingeniería.
- 🎬 Diseñadores de máquinas o elementos de maquinas.
- 🎬 Personal de encargado del mantenimiento de maquinaria.
- 🎬 Fabricantes de maquinaria o elementos de máquinas.

13. ASPECTOS BASICOS DE LA TEORIA DE CONTACTO

El calculo de los esfuerzos y deformaciones entre cuerpos en contacto, requiere una análisis previo que permita recolectar información indispensable en el planteamiento y desarrollo del modelo matemático de Hertz, con el fin de poder obtener resultados acertados que permitan tomar decisiones tendientes a corregir los efectos causados por la interacción dinámica y estática de los cuerpos en contacto.

13.1 TIPO DE MATERIAL DE LOS CUERPOS EN CONTACTO

Uno de los aspectos importantes en calculo de los esfuerzos y deformaciones producidas por la interacción de dos cuerpos en contacto bajo una carga, es el tipo de material con el que están contruidos, debido a la información que proporciona sobre las propiedades mecánicas de cada material.

La principal información consiste en conocer los módulos elásticos y coeficientes de poisson requeridos por el modelo de calculo planteado por hertz, y que describen la homogeneidad, isotropía y elasticidad de los materiales empleados.

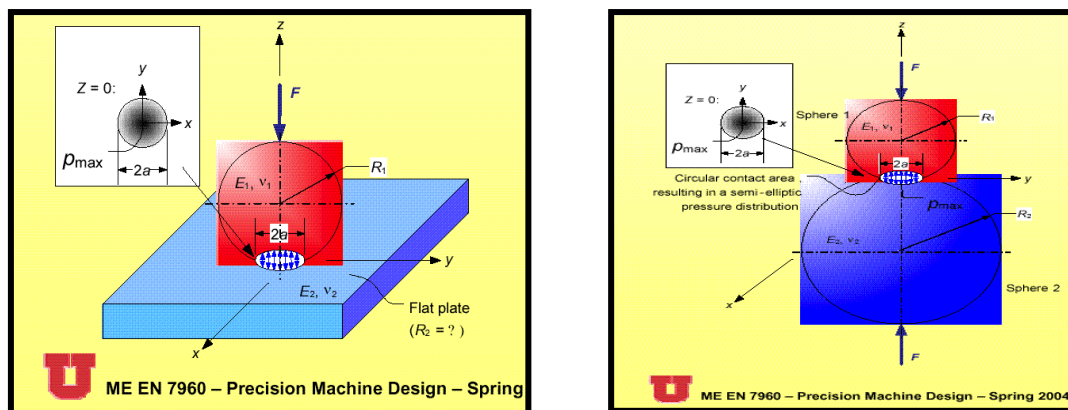
13.2 FORMA DE LAS SUPERFICIES ANALIZADAS

La aplicación del modelo matemático de hertz, requiere que se defina adecuadamente la geometría de las superficies analizadas, a fin hacer un uso correcto de las ecuaciones descritas en su teoría.

El calculo de los esfuerzos hertzianos y las deformaciones de los cuerpos en contacto, requieren un planteamiento separado de acuerdo a la forma geométrica de cada cuerpo.

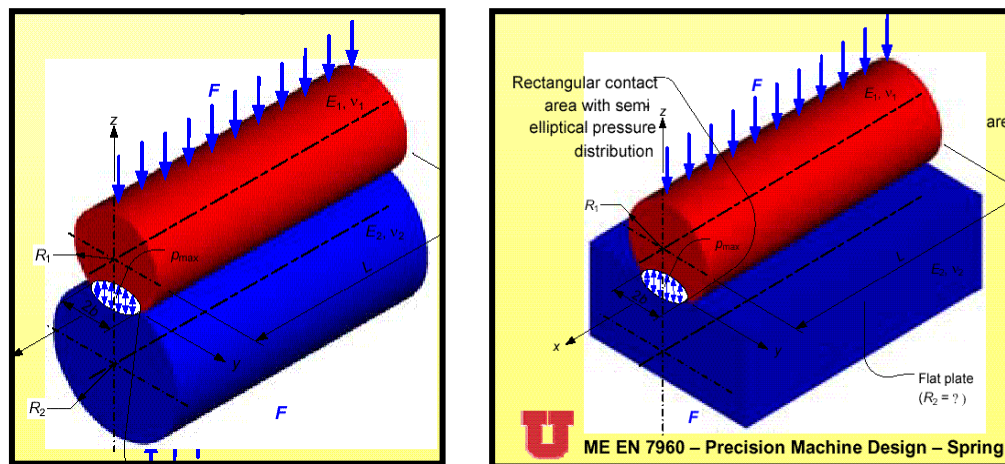
Cuando se consideran superficies curvas, Hertz lo analiza como "contacto en un punto", debido a que este se presenta en un plano tangente común a las superficies en un punto de contacto y la carga aplicada es normal al plano tangente y en dirección del eje perpendicular a dicho plano (ver Figura. 7).

Figura 7. Esfuerzos de contacto entre superficies esféricas.



El otro planteamiento propuesto por Hertz, es aplicado a superficies cilíndricas, donde el contacto se produce a lo largo de la línea de contacto entre los dos cuerpos, recibiendo el nombre de "contacto lineal". En este caso es importante tener en cuenta que la carga aplicada, se distribuye a lo largo de la línea de contacto entre los dos cuerpos (ver Figura 8). Este planteamiento también es aplicado al contacto entre una superficie cilíndrica y una plana (ver Figura 8).

Figura 8. Esfuerzos de contacto entre superficies cilíndricas.



Precision Machine Design

ME EN 7960 – Precision Machine Design – Spring

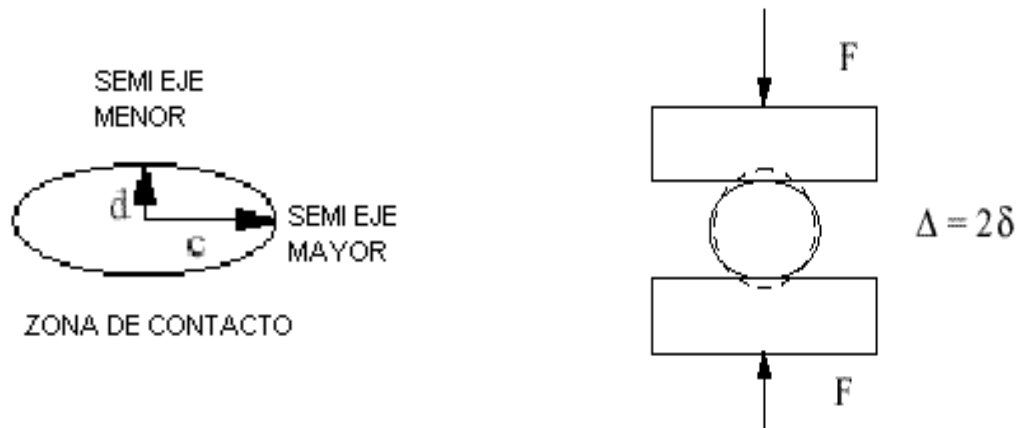
13.3 AREA DE CONTACTO

Una de las características importantes a tener en cuenta cuando se analizan los esfuerzos de contacto entre cuerpos, es la región elíptica que se forma entre ellos producto de la deformación superficial bajo la acción de una carga.

Las dimensiones de esta área de contacto (ver Figura 9), es uno de los aspectos importantes a determinar con el modelo de calculo, ya que sus dimensiones dependen tanto del las propiedades mecánicas de los materiales de los cuerpos en contacto, como de las dimensiones geométricas de los mismos.

Estas dimensiones a su vez son determinantes en la cuantificación de los esfuerzos hertzianos, y participan activamente en las ecuaciones formuladas por Hertz para calcular las deformaciones en cada una de las superficies.

Figura 9. Área de región de contacto elíptico.



Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H; 1994

14. MODELO MATEMATICO DE ESFUERZOS DE CONTACTO

A continuación se describe un planteamiento que permite obtener los esfuerzos y deformaciones ocurridas entre dos cuerpos que se encuentran en contacto, bajo la acción de una carga. Para esto se utiliza la teoría de hertz y los diferentes planteamientos hechos por autores acerca del tema, con el fin de facilitar y acelerar los métodos de cálculo.

14.1 ESFUERZOS DE CONTACTO EN SUPERFICIES CURVAS

En el caso de esfuerzos hertzianos entre cuerpos con superficies curvas, la teoría de hertz plantea un modelo matemático que permite calcular los esfuerzos y deformaciones derivados del contacto.

Este tipo de contacto entre superficies curvas, Hertz los denomina esfuerzos de contacto en un "punto", debido a que el contacto entre las superficies se presenta un punto que esta sobre el plano tangente a los dos cuerpos¹⁷.

Estos esfuerzos y deformaciones, son causados por la carga normal que actúa en la dirección del eje que pasa por el punto de contacto, dando como resultado una región elíptica que representa el área de contacto entre las superficies.

En el caso de analizar el contacto en un punto, con el fin de conocer los esfuerzos, y deformaciones que ocurren en la región en contacto es necesario contar los datos de entrada, que están supeditados al caso particular que se desea analizar y que definen características intrínsecas de los cuerpos en contacto. Los datos iniciales requeridos para empezar el análisis contienen información de propiedades mecánicas de los materiales, características geométricas y cantidad de carga aplicada (ver tabla 1).

¹⁷ ROARK, Raimond J y otros. Formulas for Stress and Strain. 5 ed. Mc Graw Hill Book Company, 1982,

Tabla 1. Datos de entrada para superficies curvas.

Datos de entrada	Símbolo en Teoría	Símbolo en Matlab
Radio Mayor de curvatura en cuerpo 1	$R_{1,mayor}$	R11
Radio menor de curvatura en cuerpo 1	$R_{1,menor}$	r11
Radio Mayor de curvatura en cuerpo 2	$R_{2,mayor}$	R22
Radio menor de curvatura en cuerpo 2	$R_{2,menor}$	r22
Módulo de elasticidad de cuerpo 1	E_1	E1
Módulo de elasticidad de cuerpo 2	E_2	E2
Módulo de Poisson para cuerpo 1	ν_1	V1
Módulo de Poisson para cuerpo 2	ν_2	V2
Angulo entre planos de curvatura principal entre los dos cuerpos en contacto	ϕ	fi
Carga aplicada sobre cuerpos en contacto	F	F

Una vez definidos los datos de entrada, que describen las características de los cuerpos en contacto, se maneja el contacto superficial como un conjunto, para lo cual se calcula el radio equivalente del sistema R_e (ver tabla 1).

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_{1,mayor}} + \frac{1}{R_{1,menor}} + \frac{1}{R_{2,mayor}} + \frac{1}{R_{2,menor}}} \quad \text{Ec. 44}$$

Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H ; 1994

De manera similar, es necesario conocer el modulo elástico equivalente E_e del sistema, teniendo en cuenta los módulos elásticos y coeficientes de poisson de cada material de los cuerpos en contacto (ver tabla 1).

$$E_e = \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \quad \text{Ec. 45}$$

Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H

Para continuar con el modelo de cálculo, es necesario conocer un ángulo auxiliar ψ planteado en la teoría de hertz, como el ángulo entre los planos que contienen la curvatura principal de los dos cuerpos en contacto (ver Figura 10).

Figura 10. Angulo entre planos de curvatura principal



Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H

Una vez conocido el ángulo ψ se procede a calcular el ángulo auxiliar ϕ que permite unificar la geometría de los dos sistemas y es uno de los valores fundamentales para hallar los demás parámetros del planteamiento matemático.

El calculo del ángulo ψ requiere algunos datos geométricos de los cuerpos en contacto (ver tabla 1).

Ec.46

Bodies under Direct Bearing and Shear Stress; ROARK, Raymond J ; 1982

$R_{1,mayor}$: Radio mayor de curvatura en cuerpo 1 [m]

$R_{1,menor}$: Radio menor de curvatura en cuerpo 1 [m]

$R_{2,mayor}$: Radio mayor de curvatura en cuerpo 2 [m]

$R_{2,menor}$: Radio menor de curvatura en cuerpo 2 [m]

ψ : Angulo entre planos de curvatura principal entre los dos cuerpos en contacto

Re: Radio equivalente del sistema [m]

El ángulo auxiliar ψ permite calcular los factores α , β e γ indispensables para la obtención de las dimensiones de la superficie elíptica de contacto.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 1.939e^{85.26\psi} - 0.78e^{81.09\psi} + \frac{0.723}{\psi} - 0.221 \\
 \beta &= 35.228e^{80.98\psi} - 32.424e^{81.0475\psi} - 0.486\psi - 2.634 \\
 \gamma &= 0.214e^{84.95\psi} - 0.179\psi^3 - 0.555\psi - 0.319
 \end{aligned}$$

Ec.47

Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H

Los factores α , β e γ permiten calcular las dimensiones de los semi-ejes mayor (c) y menor (d) de la región elíptica de contacto (ver Figura 11).

Semi eje mayor (c):

$$c = \sqrt{\frac{3FRe}{2Ee}}$$

Ec. 48

Semi eje menor (d):

$$d = \sqrt{\frac{3FRe}{2Ee}}$$

Point and line contact between surfaces & Kinematics coupling design; Slocum Alexander. H ; 1994

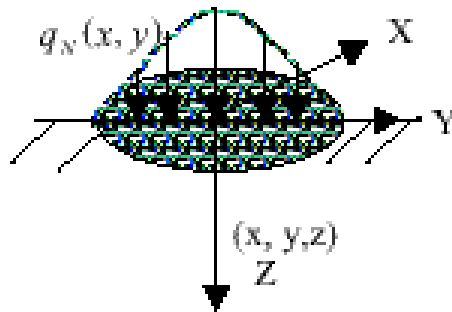
Re : Radio equivalente del sistema [m]

Ee : Modulo elástico equivalente del sistema [N/m²]

F : Carga aplicada sobre los cuerpos en contacto [N]

Estos dos datos, son de gran importancia por que permiten conocer las dimensiones reales de la región elíptica de contacto entre los dos cuerpos, para así determinar el valor de la presión máxima que actúa en esta región y que incide en la deformación total de los cuerpos en el punto de contacto.

Figura 11. Región de máxima presión de contacto



General Solution for Hertz Contact Loading; X. Lu, D. Pugh, and J. Scheetz; 2000

El cálculo de la presión en la superficie de contacto q , se obtiene a partir de la siguiente ecuación.

$$q = \frac{3 * F}{2 * \pi * c * d} \quad \text{Ec. 49}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

F : Fuerza total aplicada sobre los cuerpos [N]

c y d : Dimensiones del área elíptica en el punto de contacto. [m]

Antes de proseguir con los cálculos, es necesario definir las variables geométricas K y k , que relaciona las dimensiones de la región elíptica de contacto; la cual se determina de la siguiente manera:

$$K = \cos(\varphi) \cdot \frac{d}{c} \quad \text{Ec. 50}$$

$$k = \sin(\varphi)$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

c y d : Dimensiones del área elíptica en el punto de contacto. [m]

φ : Angulo auxiliar (Ec. 46). [Rad.]

Los valores de K y k son necesarios para calcular las variables (M, n, ν) , que permiten evaluar las integrales de la elipse $(F(k), H(k), K(k), E(k))$, cuyo resultado permite calcular los esfuerzos principales de contacto $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ en la dirección X, Y, Z, al igual que los esfuerzos cortante y octaédrico¹⁸.

¹⁸ ROARK, Raymond J y otros. Formulas for Stress and Strain. 5 ed.1982, Mc Graw Hill Book Company, p 527,

Para obtener los valores de (M, n, φ) , es necesario conocer las constantes geométrica (A, B) , que relaciona el radio de curvatura de los dos cuerpos en el punto de contacto y el ángulo entre los planos de curvatura principal (19).

$$A = \frac{1}{2R_e} \sin^2 \varphi \quad B = \frac{1}{2R_e} \cos^2 \varphi \quad \text{Ec. 51}$$

New Algorithms for Calculating Hertzian Stresses, Deformations, and Contact Zone Parameters. DEEG Emil W.

R_e : Radio equivalente del sistema [m]

φ : Angulo auxiliar (Ec. 46) [Rad.]

Con los valores de (A, B) y las variables K y k (ver Ec. 50), es posible obtener las constantes:

$$M = \frac{2 * K}{k^2 * E(k)}$$

$$n = \sqrt{\frac{K^2 * \frac{E}{b^2}}{1 + K^2 * \frac{E}{b^2}}} \quad \text{Ec. 52}$$

$$\frac{1}{A * B} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

E_1 y E_2 : Módulo de elasticidad de cuerpo (1) y (2). [Pa]

ν_1 y ν_2 : Módulo de poisson de cuerpo (1) y (2). [Pa]

b : Semi eje menor del área elíptica de contacto (ver Ec. 48). [m]

¹⁹ BORES, Arthur P y otros. Advances Mechanics of Materials. 3 ed. New York: Jhon Wiley and Sons, 1978. p. 589.

Otras de las variables necesarias para calcular el valor de los esfuerzos principales en los tres ejes coordenados son:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \frac{\lambda n}{K} \frac{z}{b} \left[F(\phi, k) - H(\phi, k) \right] \\ \sigma'_x &= \frac{n}{K^2} \frac{z}{b} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \left[H(\phi, k) - F(\phi, k) \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{2n} \frac{1}{2} \frac{n}{K^2} \frac{z}{b} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \left[H(\phi, k) - F(\phi, k) \right] \\ \sigma'_y &= \frac{1}{K} \frac{z}{b} \left[F(\phi, k) - H(\phi, k) \right] \end{aligned}$$

Ec. 53

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Para evaluar las ecuaciones anteriores, es necesario conocer el valor de las integrales de la elipse $F(\phi, k)$, $H(\phi, k)$, $K(k)$, $E(k)$, las cuales son evaluadas a través de un algoritmo en Matlab, empleado para la solución aproximada de integrales, por el método de la regla de Simpson compuesto.

Las integrales de la elipse, dependen del ángulo auxiliar ϕ obtenido de la relación geométrica mostrada por la siguiente ecuación.

$$\cot \phi = k \frac{z}{b} \quad \text{Ec. 54}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

k : variable de relación de la región elíptica.

z : distancia con respecto al plano tangente común a las dos superficies.

b : semi - eje menor del área de contacto.

Cuando se realizan los cálculos de los esfuerzos de contacto, por medio del programa en Matlab, se recomienda un valor de (z) cercano a cero pero no igual, debido a que se puede presentar una división por cero en el procesamiento de los datos, generando una inconsistencia o la suspensión del programa.

Una vez calculado el ángulo α (ver Ec. 54), se procede a calcular el valor de las integrales de la elipse, por el método numérico de simpson compuesto.

$$F(\alpha, k) = \int_0^{\alpha} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

Ec. 55

$$H(\alpha, k) = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Es de anotar, que la solución de estas integrales, se encuentra tabulada en Mathematical Handbook.

Los esfuerzos principales, se presentan en un punto sobre el eje Z, que se encuentra a una distancia (z) del origen. Es de anotar que los esfuerzos principales dependen de las variables $A, B, K, k, \nu_1, \nu_2, E_1, E_2, b, z$, (ver Tabla 1), donde las primeras cuatro variables (A, B, K, k) son determinadas por la forma de las superficies que interactúan en un punto.

El otro grupo de variables ($\nu_1, \nu_2, E_1, E_2, b, z$), depende de las propiedades físicas de los cuerpos en contacto y están en función del tipo de material. (Ver Tabla 1).

Los esfuerzos principales $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ toman los valores de las variables obtenidas en (Ec. 53) y (Ec. 55), y se calculan de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{M}{\pi b^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{M}{\pi b^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{M}{\pi b^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 56}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Los esfuerzos principales (ver Ec. 39), permiten conocer los valores de máximo esfuerzo cortantes y el valor del máximo esfuerzo octahedral, que se presenta en el punto de contacto.

En teoría, el máximo esfuerzo cortante τ_{max} se puede calcular de la siguiente manera:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad \text{Ec. 57}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Se considera que el esfuerzo cortante máximo τ_{max} , es el responsable de la fatiga superficial de los elementos en contacto. La explicación consiste en que si una grieta se origina en el punto donde ocurre el esfuerzo cortante máximo, debajo de

la superficie y progresa hacia la superficie, la presión del lubricante afloja y desprende las partículas²⁰.

El último de los esfuerzos a considerar es el esfuerzo cortante octahedral τ_{oct} , el cual se presenta en un punto a lo largo del eje perpendicular a la superficie de contacto y por debajo de esta. Este esfuerzo cortante se considera importante para el análisis de fatiga debido a que a partir de este valor se inicia el punto de cedencia del material²¹.

Su valor es calculado con base en los esfuerzos principales (ver Ec. 56), con la siguiente ecuación:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} * \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx}} \quad \text{Ec. 58}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Por último, se hallan los valores correspondientes a la deflexión (δ) en cada uno de los cuerpos en contacto. Para el cálculo de la deflexión es necesario conocer algunas variables, propuestas por Hertz en su teoría.

²⁰ SHIGLEY. Op. cit. p. 81.

²¹ ROARK. Op. cit., p. 513

Coeficientes de Hertz para cada cuerpo

$$\frac{1}{C_i} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}$$

Deflexion en cada cuerpo:

Ec. 59

$$\delta_i = \frac{3P}{8C_i c} F(k)$$

Deflexion total:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

P : Carga aplicada a cuerpos en contacto y su valor es igual a F , (ver Tabla 1).

c : Semi-eje mayor del área de contacto (ver Ec. 48)

$F(k)$: Integral de la elipse (ver Ec. 55)

Es de anotar, que una vez culminados los cálculos y analizados los resultados de los esfuerzos principales y las deformaciones en cada uno de los cuerpos en contacto, se pueden comparar dichos valores con los esfuerzos de contacto permisibles para cada material. Si se desconocen estos valores, se puede comparar con los valores del limite elástico de los materiales analizados, ya que uno de los objetivos, es evitar que el material exceda su resistencia al impacto como su limite elástico.

14.2 ESFUERZOS DE CONTACTO EN SUPERFICIES CILINDRICAS

Otro de los casos analizados por Hertz, en su teoría sobre esfuerzos de contacto entre superficies, es el caso de superficies cilíndricas, los cuales requieren una serie de datos iniciales que conduzcan a determinar los esfuerzos principales y

deformaciones en los cuerpos. La tabla (2) contiene los datos iniciales, empleados en el modelo matemático.

Cuando se han determinado, las propiedades mecánicas y geométricas de las superficies cilíndricas en contacto contenidas en la tabla (2), que hacen referencia a las condiciones iniciales del problema, se hace necesario establecer las dimensiones del área elíptica de contacto (b) y la variable que relaciona geoméricamente los radios de curvatura de los cuerpos con las propiedades del material (ν). Estas dos variables son indispensables para iniciar el procedimiento de calculo, tendiente a determinar los esfuerzos principales en los tres ejes coordenados y las deformaciones que se causan en cada uno de los cuerpos en contacto.

Tabla 2. Datos de entrada para superficies cilíndricas.

Datos de entrada	Símbolo en Teoría	Símbolo en Matlab
Radio del cuerpo cilíndrico 1	R_1	R1
Radio del cuerpo cilíndrico 2	R_2	R2
Módulo de elasticidad de cuerpo 1	E_1	E1
Módulo de elasticidad de cuerpo 2	E_2	E2
Módulo de Poisson para cuerpo 1	ν	V1
Módulo de Poisson para cuerpo 2	ν	V2
Coeficiente de fricción entre los dos cuerpos	μ	Beta
Longitud de contacto entre superficies cilíndricas	L	L
Carga aplicada sobre cuerpos en contacto	P	P

Una vez conocidos los datos de las condiciones iniciales del problema, es preciso conocer (ν), que relaciona geoméricamente los radios de curvatura de los cuerpos con las propiedades del material.

Ec. 60

CONTAC STRESS, BORES, Arthur P.

Una vez conocido el valor de $\left(\frac{P}{L}\right)$, es necesario determinar la carga distribuida a lo largo de la línea de contacto (w), para determinar el semi-eje menor del área de contacto (b)²².

$$w = \frac{P}{L}$$

Ec. 61

CONTAC STRESS, BORES, Arthur P.

w : Carga distribuida a lo largo de línea de contacto [N/m]

P : Carga aplicada sobre cuerpos en contacto [N]

L : Longitud de contacto entre superficies cilíndricas [m]

$$b = \sqrt{\frac{2 * w * \left(\frac{P}{L}\right)}{E^*}}$$

Ec. 62

CONTAC STRESS, BORES, Arthur P.

b : Longitud de semi-eje menor del área de contacto. [m]

w : Carga distribuida a lo largo de línea de contacto [N/m]

$\left(\frac{P}{L}\right)$ Relación geométrica de radios de curvatura. [m³/N]

Conocidos los valores de $\left(\frac{P}{L}\right)$ y b , se calculan las variables de Hertz (M, N, σ_1, σ_2), necesarias para encontrar el valor de los esfuerzos principales.

²² BORES, Op. cit., p 614.

$$M = \sqrt{b^2 z^2 + x^2}$$

$$N = \sqrt{b^2 x^2 + z^2}$$

Ec. 63

$$\sigma_x = \frac{M^2 N}{M^2 N \sqrt{2 M^2 N^2 x^2 + z^2} + 2 b^2}$$

$$\sigma_y = \frac{M^2 N}{M^2 N \sqrt{2 M^2 N^2 x^2 + z^2} + 2 b^2}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Este grupo de ecuaciones auxiliares (ver Ec. 63), y los valores de (b) y (w) , son fundamentales en los cálculos de los esfuerzos principales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, descritos a continuación:

$$\sigma_x = \frac{b^2 z^2 + x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b}$$

Ec. 64

$$\sigma_y = \frac{b^2 z^2 + x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b}$$

Ec. 65

$$\sigma_z = \frac{b^2 z^2 + x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b} + \frac{2 x^2}{b}$$

Ec. 66

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Conocidos los esfuerzos principales, se procede a determinar los valores del esfuerzo cortante máximo (τ_{max}) y el esfuerzo octaédrico (τ_{et}).

$$\tau_{max} = 0.30 * \tau_{et} \quad \text{Ec. 67}$$

$$\tau_{et} = 0.27 * \tau_{et} \quad \text{Ec. 68}$$

CONTACT STRESS, BORES, Arthur P.

Los valores de 0.30 en el esfuerzo cortante máximo y el de 0.27 en el esfuerzo octaédrico, son constantes aproximadas correspondientes a rangos donde ocurren los esfuerzos máximos²³.

Los últimos cálculos, consisten en definir el desplazamiento o deflexión (w) en las superficies cilíndricas en contacto, este valor se puede obtener, a partir de la siguiente ecuación.

$$w = \frac{2 * w * (1 + \nu^2)}{E} \left[\frac{4 * R_1}{b} + \frac{4 * R_2}{b} \right] \quad \text{Ec. 69}$$

Precisión Machine Desing;2004

E : es el modulo de elasticidad de cada uno de los materiales de los cuerpos en contacto (ver Tabla 2). [Pa]

w : es la carga distribuida a lo largo de la línea de contacto. (ver Ec. 61) [N/m]

b : es la dimensión del área de contacto (ver Ec. 62) [m]

²³ BORES. Op. cit., p. 615.

15. ALGORITMO EN MATLAB PARA CALCULO DE ESFUERZOS DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES.

El objetivo principal del proyecto, consiste en realizar un algoritmo en MATLAB, que permita calcular los esfuerzos de contacto entre superficies, de forma rápida y precisa.

A continuación se presentara el algoritmo realizado, con le fin de facilitar los cálculos y poder emplearse como herramienta de trabajo.

```
%Programa principal para el calculo de esfuerzos de contacto "menu.m"
opcion=5;
while opcion>4 | opcion<1
clc
clear all
disp(' ')
disp('                BIENVENIDO AL PROGRAMA  DE CALCULO DE ESFUERZOS
HERTZIANOS ');
disp(' ');
disp('                Autor:  Jairo Castro Guzmán ');
disp(' ');
disp('                Versión: 1.0 - 20\05\2004');
disp(' ');
disp('                1.Propiedades mecánicas de algunos materiales                ');
disp(' ');
disp('                2.Calculo de esfuerzos de contacto en cuerpos esfericos                ');
disp(' ');
disp('                3.Calculo de esfuerzos de contacto en superficies cilindricas');
disp(' ');
disp('                4.Aspectos de interes para la utilización del programa');
disp(' ');
opcion=input('                Escoja la opcion deseada: ');
end
```

```

%Escogencia de procedimientos según órbitas
if opcion==1
    materiales
end
if opcion==2
    contac_esferico
end
if opcion==3
    contac_cilindrico
end
if opcion==4
    teoria
end

% Lista de Propiedades mecánicas de materiales
clc
disp(' Propiedades mecánicas de algunos materiales, necesaria para los cálculos del programa ')
fprintf('\n');
fprintf('\n');
disp('Material-----Modulo elasticidad-----Coeficiente de poisson ')
fprintf('\n');
disp('
                Gpa      PSI
Acero (ASTM-A36)      200  2.90E+07      0.30
Acero (ASTM-A242)    200  2.90E+07      0.30
Acero (ASTM-A441)    200  2.90E+07      0.30
Acero (ASTM-A572)    200  2.90E+07      0.30
Acero (ASTM-A514)    200  2.90E+07      0.30
Acero AISI-302 Laminado en frio  190  2.80E+07      0.27
Acero AISI-302 Recosido  190  2.80E+07      0.27
Fundicion Gris 4.5% C ASTM A-48  69  1.00E+07      0.23
Hierro Fundido 2% C 1% Si ASTM A-47  165  2.40E+07      0.27
Aluminio 1100-H14 (99% Al)  70  1.01E+07      0.35
Aleacion Aluminio 2014-T6  75  1.09E+07      0.39
Aleacion Aluminio 2024-T4  73  1.06E+07      0.35
Aleacion Aluminio 5656-H116  72  1.04E+07      0.33
Aleacion Aluminio 6061-T6  70  1.01E+07      0.35
')

```

```

disp('Aleacion Aluminio 7075-T6           72  1.04E+07           0.29      ')
disp('Cobre Recosido                       120  1.70E+07           0.36      ')
disp('Cobre Endurecido                     120  1.70E+07           0.36      ')
disp('Laton Amarillo (65%Cu-35%ZN)        105  1.50E+07           0.35      ')
disp('Laton Amarillo Recosido              105  1.50E+07           0.35      ')
disp('Laton Rojo (85%Cu-15%ZN)            120  1.70E+07           0.36      ')
disp('Laton Rojo Recosido                  120   1.70E+07           0.36      ')
%-----
%Programa para calcular los esfuerzos de contacto entre dos superficies.
%-----
% Datos de entrada necesarios para funcionar el programa.
clc
v1=input('  Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 1:  ');
v2=input('  Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 2:  ');
E1=input('  Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 1:  ');
E2=input('  Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 2:  ');
P=input('  Ingrese la carga aplicada a los cuerpos en contacto: ');
R1=input('  Ingrese el radio mayor para el cuerpo 1:          ');
r1=input('  Ingrese el radio menor para el cuerpo 1:          ');
R2=input('  Ingrese el radio mayor para el cuerpo 2:          ');
r2=input('  Ingrese el radio menor para el cuerpo 2:          ');
fi=input('  Ingrese el angulo de desviación con respecto a Y de los 2 cuerpos: ');
%-----
% Calculo de constantes A y B para ecuación de elipse Z=AX^2+BY^2
Factor_1=(((1/R1)-(1/r1))+((1/R2)-(1/r2)))^2;
Factor_2=4*((1/R1)-(1/r1))*((1/R2)-(1/r2))*((sin(fi*pi/180))^2);
A=((1/4)*((1/R1)+(1/R2)+(1/r1)+(1/r2)))-((1/4)*sqrt(Factor_1-Factor_2));
B=((1/4)*((1/R1)+(1/R2)+(1/r1)+(1/r2)))+((1/4)*sqrt(Factor_1-Factor_2));
%-----
% Calculo de coeficiente de hertz para cada cuerpo
h_1=4*(1-v1^2)/E1;
h_2=4*(1-v2^2)/E2;
%-----
%Calculo de Radio de curvatura equivalente para cada cuerpo
R_1=(((1/R1)-(1/r1)));
R_2=(((1/R2)-(1/r2)));

```

```

R_12=((1/R1)+(1/r1)+(1/R2)+(1/r2));
%-----
%Calculo de Radio de curvatura equivalente para el sistema
R_e=1/R_12;
% Calculo de modulo elástico equivalente de materiales en contacto
E_e=1/(((1-v1^2)/E1)+((1-v2^2)/E2));
%Calculo de angulo auxiliar
teta=acos((sqrt(R_1^2+R_2^2+2*R_1*R_2*(1-2*(sin(fi*pi/180))^2)))/R_12);
%-----
% Calculo de coeficientes de ajuste a curvas de contacto.
ang_alfa=0.99672+1.2786*cos(teta)-6.7201*(cos(teta)^2)+27.379*(cos(teta)^3)-
41.827*(cos(teta)^4)+23.472*(cos(teta)^5);
ang_beta=1-0.68865*cos(teta)+0.58909*(cos(teta)^2)-1.3277*(cos(teta)^3)+1.7706*(cos(teta)^4)-
0.99887*(cos(teta)^5);
ang_landa=0.75018-0.042126*cos(teta)+0.29526*(cos(teta)^2)-
1.7567*(cos(teta)^3)+2.6781*(cos(teta)^4)-1.5533*(cos(teta)^5);
%La longitud [mm] del semi eje mayor del area de contacto es:
c=ang_alfa*(1.5*P*R_e/E_e)^(1/3); % semi-eje mayor
%La longitud [mm] del semi eje menor del area de contacto es
d=ang_beta*(1.5*P*R_e/E_e)^(1/3); % semi-eje menor
%-----
%Calculo de presión en superficie de contacto
q=3*P/(2*pi*c*d);
% La deformación de las dos superficies en el punto de contacto
Deflexion=ang_landa*(((2*P^2)/(3*R_e*E_e^2))^(1/3));
%-----
%Calculo de Relación de semiejes de contacto
z=input(' Ingrese distancia a linea de contacto: ');
K=d/c;
k=sqrt(1-K^2);
delta=(1/(A+B))*(((1-v1.^2)/E1)+((1-v2.^2)/E2));
n=((K^2+K^2*(z/d)^2)/(1+K^2*(z/d)^2))^(1/2);
ang=acot(k*z/d);
%-----
%Calculo de variables para calculo de esfuerzos
%-----

```

```

%Programa para calcular integral
%Regla de simpson compuesta.
x=0:0.001:pi/2;
y=1./sqrt(1-k.^2.*(sin(x).^2));
a=0;
b=pi/2;
r=length(x);
M=r-1;
h=(b-a)/(M);
s1=0;
s2=0;
for w=1:M/2;
    x=(2*w-1);
    s1=s1+y(1,x);
end
for w=1:(M/2)
    x=2*w;
    s2=s2+y(1,x);
end
KK=h*(y(1,1)+y(1,r)+4*s1+2*s2)/3;
%_____
%Programa para calcular integral
%Regla de simpson compuesta.
x=0:0.001:ang;
y=1./sqrt(1-k.^2.*(sin(x).^2));
a=0;
b=ang;
r=length(x);
M=r-1;
h=(b-a)/(M);
s1=0;
s2=0;
for w=1:M/2;
    x=(2*w-1);
    s1=s1+y(1,x);
end

```

```

for w=1:(M/2)
    x=2*w;
    s2=s2+y(1,x);
end
FF=h*(y(1,1)+y(1,r)+4*s1+2*s2)/3;
%


---


%Programa para calcular integral
%Regla de simpson compuesta.
x=0:0.001:pi/2;
y=(sqrt(1-k.^2.*(sin(x).^2)));
a=0;
b=pi/2;
r=length(x);
M=r-1;
h=(b-a)/(M);
s1=0;
s2=0;
for w=1:M/2;
    x=(2*w-1);
    s1=s1+y(1,x);
end
for w=1:(M/2)
    x=2*w;
    s2=s2+y(1,x);
end
EE=h*(y(1,1)+y(1,r)+4*s1+2*s2)/3;
%


---


%Programa para calcular integral
%Regla de simpson compuesta.
x=0:0.001:ang;
y=(sqrt(1-k.^2.*(sin(x).^2)));
a=0;
b=ang;
r=length(x);
M=r-1;
h=(b-a)/(M);

```

```

s1=0;
s2=0;
for w=1:M/2;
    x=(2*w-1);
    s1=s1+y(1,x);
end
for w=1:(M/2)
    x=2*w;
    s2=s2+y(1,x);
end
HH=h*(y(1,1)+y(1,r)+4*s1+2*s2)/3;
%-----
% Calculo de variables para calcular esfuerzos principales
%-----
MM=((2*K)/(EE*k^2));
epsilon_X=-((1-n)/2)+(k*z/d)*(FF-HH);
epsilon_x=-((n/K.^2)+1)+(k*z/d)*((1/K^2)*HH-FF);
epsilon_Y=((1)/(2*n))+((1/2)-(n/K^2)+(k*z/d)*((1/K^2)*HH-FF));
epsilon_y=-1+n+(k*z/d)*(FF-HH);
%-----
% Calculo de esfuerzos principales
Ef_xx=(MM*(epsilon_X+epsilon_x*v1))*(d/delta);
Ef_yy=(MM*(epsilon_Y+epsilon_y*v1))*(d/delta);
Ef_zz=-((MM/2)*((1/n)-n))*(d/delta);
%-----
% Calculo de max esfuerzo cortante octaedrico.
T_oct=(1/3)*(sqrt(((Ef_xx-Ef_yy).^2)+((Ef_yy-Ef_zz).^2)+((Ef_zz-Ef_xx).^2)));
%-----
% Calculo de max deformacion.
def_max=((3*K*P*KK)/(2*pi))*((A+B)/(d/delta));
cortante=0.5*(Ef_zz-Ef_yy);
cortante_1=0.31*q;
%-----
def_1=(3*P*h_1*FF)/(8*pi*c);
def_2=(3*P*h_2*FF)/(8*pi*c);
def_total=def_1+def_2;

```

```

%-----
% RESULTADOS OBTENIDOS:
fprintf('\n');
fprintf('\nLa longitud [mm] del semi eje mayor del area de contacto es [mm]: %g',c)
fprintf('\n');
fprintf('\nLa longitud [mm] del semi eje menor del area de contacto es [mm]: %g',d)
fprintf('\n');
fprintf('\nPresión en el area de contacto es [N]: %g',q)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje X es [Mpa]: %g',Ef_xx)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje Y es [Mpa]: %g',Ef_yy)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje Z es [Mpa]: %g',Ef_zz)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl maximo esfuerzo cortante es [Mpa]: %g',cortante_1)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo cortante octaedrico es [Mpa]: %g',T_oct)
fprintf('\n');
fprintf('\nLa deformación maxima sufrida por el cuerpo 1 es [mm]: %g',def_1)
fprintf('\n');
fprintf('\nLa deformación maxima sufrida por el cuerpo 2 [mm]: %g',def_2)
fprintf('\n');
fprintf('\nLa deformación maxima sufrida por los cuerpos es [mm]: %g',def_total)
fprintf('\n');
%-----
%Programa para calcular los esfuerzos de contacto entre dos superficies cilindricas.
%-----
% Datos de entrada necesarios para funcionar el programa.
clc
v1=input(' Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 1: ');
v2=input(' Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 2: ');
E1=input(' Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 1: ');
E2=input(' Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 2: ');
P=input(' Ingrese la carga aplicada a los cuerpos en contacto: ');
L=input(' Ingrese la longitud de los cilindros en contacto: ');

```

```

R1=input('   Ingrese el radio para el cuerpo 1:       ');
R2=input('   Ingrese el radio para el cuerpo 2:       ');
beta=input('   Ingrese el coeficiente de fricción entre los cuerpos si hay F tangencial:  ');
x=0.0001;      z=0.0001;
%-----
%Calculo de carga por unidad de longitud
w=P/L;
%-----
%Calculo del delta
delta=(1/(((1/(2*R1)))+(1/(2*R2))))*(((1-v1.^2)/E1)+((1-v2.^2)/E2));
%-----
%Calculo del ancho del area de contacto
b=sqrt((2*w*delta)./pi);
%-----
% Calculo de constantes de hertz
M=sqrt((b+x).^2+z.^2);
N=sqrt((b-x).^2+z.^2);
%-----
gamma_1=(pi*(M+N))/(M*N*sqrt(2*M*N+2*x.^2+2*z.^2-2*b.^2));
gamma_2=(pi*(M-N))/(M*N*sqrt(2*M*N+2*x.^2+2*z.^2-2*b.^2));
%-----
% Calculo de esfuerzo en X
factor_1=(z*(((b.^2+2*x.^2+2*z.^2)*gamma_1)/b)-(2*pi/b)-(3*x*gamma_2));
factor_2= beta*((gamma_2*(2*x.^2-2*b.^2-3*z.^2))+(2*x*pi/b)+((2*x*gamma_1/b)*(b.^2-x.^2-z.^2)));
Exx=(-b/(pi*delta))*(factor_1+factor_2);
%-----
% Calculo de esfuerzo en Y
factor_1=(z*(((b.^2+x.^2+z.^2)*gamma_1)/b)-(pi/b)-(2*x*gamma_2));
factor_2= beta*((gamma_2*(x.^2-b.^2-z.^2))+(x*pi/b)+((x*gamma_1/b)*(b.^2-x.^2-z.^2)));
Eyy=(-2*v1*b)/(pi*delta)*(factor_1+factor_2);
%-----
% Calculo de esfuerzo en Y
Ezz=(-b/(pi*delta))*(z*((b*gamma_1-x*gamma_2)+(beta*z.^2*gamma_2)));
%-----
% Calculo de maximo esfuerzo conrtante
tao_2=0.3*(b/delta);

```

```

%-----
% Calculo de maximo esfuerzo octahedral
tao_oct=0.27*(b/delta);

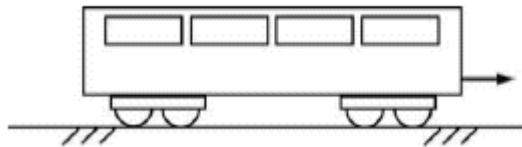
%-----
E_xy=(-b/(pi*delta))*((gamma_2*z.^2)+(beta*(((b.^2+2*x.^2+2*z.^2)*(z*gamma_1/b))-(2*pi*z/b)-
(3*x*z*gamma_2))));
%-----
% Calculo de maximo deflexión entre las superficies cilindricas
Deflexion=((2*w*(1-v1.^2))/(pi*E1))*((2/3)+(log(4*R1/b))+(log(4*R2/b)));
%-----
% RESULTADOS OBTENIDOS:
fprintf('\n');
fprintf('\nLa longitud [mm] del semi eje mayor del area de contacto es [mm]: %g',b)
fprintf('\n');
fprintf('\nPresión en el area de contacto es [mm]: %g',delta)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje X es [Mpa]: %g',Exx)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje Y es [Mpa]: %g',Eyy)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo principal en dirección del eje Z es [Mpa]: %g',Ezz)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl maximo esfuerzo en dirección XY es [Mpa]: %g',E_xy);
fprintf('\n');
fprintf('\nEl maximo esfuerzo cortante es [Mpa]: %g',tao_2)
fprintf('\n');
fprintf('\nEl esfuerzo cortante octaedrico es [Mpa]: %g',tao_oct)
fprintf('\n');
fprintf('\nLa maxima deflexion en la linea de contacto es [mm]: %g',Deflexion)

```

16. MODELACION EN ELEMENTOS FINITOS DE CASOS PARTICULARES DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES.

16.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

Se desean conocer las condiciones de contacto rueda-riel durante la marcha del vagón de ferrocarril que se muestra en la figura.



El vagón tiene un peso de 400 Tm, cuando esta cargado de carbón, y se apoya en ocho ruedas cilíndricas iguales de 1 m de diámetro, y un espesor útil (que apoya sobre el riel) de 100 mm. Se fabricaron de un acero tratado térmicamente, con una dureza Brinell de 148, y que presenta un diagrama de fatiga frente a presión superficial que se hace horizontal (es decir, que alcanza la zona de vida infinita) en 108 ciclos. Tanto el raíl como las ruedas son de acero, con módulo elástico de 21000 [Kg/mm²], y módulo de Poisson 1/4.

La carga soportada por las ocho ruedas es de 400 Ton, las cuales se deben distribuir en el número de ruedas del vagón.

$$\text{Peso en cada rueda} \bullet \frac{400000 \text{ Kg}}{8} \bullet 50000 \text{ Kg}$$

$$\text{Fuerza en cada rueda} \bullet 50000 \text{ Kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \bullet 490000 \text{ N}$$

Con los datos suministrados por el problema y el análisis anterior se procede a modelar en cosmos una situación aproximada del problema planteado.

16.2 DEFINICION DE GEOMETRIA

La definición geométrica del problema, empieza con el dibujo de la rueda y riel del vagón por medio de puntos y curvas generadas por el programa cosmos. En el caso de la rueda se utilizaron dos regiones para definir la geometría de la misma, con el fin de ubicar los elementos de contacto en una pequeña región con ángulo de 4° en la parte inferior de la rueda.

Especificación del plano de trabajo.

Geometry>Grid>Plane

PLANE,Z,0,1

Especificación de puntos para generar geometría de la rueda.

Geometry>Points>Define

PT,1,0,0,0

PT,2,0,0.5,0

Generación de círculo por medio de curvas con ángulos de 2° , 356° y 2° con centro en P2(0,0.5,0) y extremos en puntos 1,3, 7 respectivamente.

Geometry>Curves>Circle in plane

CRPCIRCLE,1,2,1,0.5,2,1

CRPCIRCLE,2,2,3,0.5,356,4

CRPCIRCLE,6,2,7,0.5,2,1

Generación de curva para definir región de contacto.

Geometry>Curves>Line with 2 Points

CRLINE,7,2,7

CRLINE,8,2,3

Definición de contornos de regiones que conforman la rueda.

Geometry> Contour> Define

CT,1,0,0.004,4,6,1,8,7,0

CT,2,0,0.04,6,2,3,4,5,7,8,0,2

Definición de regiones que componen la rueda del vagón.

Geometry> Region> Define

RG,1,1,1,0

RG,2,1,2,0

La modelación del riel se realizo por medio de puntos, curvas y se dividió la geometría del riel en dos regiones a fin de facilitar el contacto entre los dos elementos modelados.

Generación de puntos para dibujar el riel.

Geometry>Points>Define

PT,8,0.5,0,0

PT,9,0.5,-0.1,0

PT,10,-0.5,-0.1,0

PT,11,-0.5,0,0

PT,12,0,-0.1,0

Generación de curvas que dan forma a la geometría del riel.

Geometry>Curves>Line with 2 Points

CRLINE,9,1,8

CRLINE,10,8,9

CRLINE,11,9,12

CRLINE,12,12,10

CRLINE,13,10,11

CRLINE,14,11,1

CRLINE,15,1,12

Definición de contornos de regiones que conforman el riel.

Geometry> Contour> Define

CT,3,0,0.04,4,15,9,10,11,0

CT,4,0,0.04,4,15,12,13,14,0,1

Definición de regiones que componen el riel.

Geometry> Region> Define

RG,3,1,3,0

RG,4,1,4,0

Una vez modelado el problema se establecen las propiedades del material empleado. Por tratarse de un análisis bidimensional se emplearon elementos SHELL3, cuyo espesor es 0.1m, y el material empleado es Acero.

PropSets> ElementGroup

EGROUP,1,SHELL3,0,0,0,0,0,0,0,0

PropSets>Real Constants

RCONST,1,1,1,6,0.1,0,0,0,0,0

Propiedades del material

PropSets >Pick >Material Lib.

PICK_MAT,1,A_STEEL,SI

C* MATL:A_STEEL : ALLOY STEEL

C* EX 0.21E+12 Pascals

C* NUXY 0.28

C* GXY 0.79E+11 Pascals

C* ALPX 0.13E-04 /Kelvin

C* DENS 0.77E+04 Kgm/m**3

C* KX 50. W/m/K

C* C (Cp) 0.46E+03 J/kgm/K

Mallado de región 1 y 2 correspondientes a la rueda.

Meshing> Auto_Mesh> Region

MA_RG,1,2,1,3,1,0

En el caso del riel se establecen las mismas propiedades del material, y se procede a mallar las regiones de cada uno de los elementos.

PropSets >Pick >Material Lib.

PICK_MAT,2,A_STEEL,SI

C* MATL:A_STEEL : ALLOY STEEL

C* EX 0.21E+12 Pascals

C* NUXY 0.28

C* GXY 0.79E+11 Pascals

C* ALPX 0.13E-04 /Kelvin

C* DENS 0.77E+04 Kgm/m**3

C* KX 50. W/m/K

Mallado de región 3 y 4 correspondientes a la rueda.

```
Meshing> Auto_Mesh> Region
```

```
MA_RG,3,4,1,3,1,0
```

```
SCALE,0
```

Eliminación de nodos repetidos generados durante el mallado de las regiones.

```
Meshing> Nodes> Merge
```

```
NMERGE,1,2068,1,0.000001,0,1,0
```

```
NCOMPRESS,1,2068
```

Establecidas las propiedades de los elementos de análisis y el material, se establecen las restricciones de frontera y se asigna la fuerza aplicada en el problema.

Se ubican restricciones en la base del riel por encontrarse fijo al piso.

```
LoadsBC> Structural> Displacement> Define by curves
```

```
DCR,11,AL,0,12,1
```

Se aplica una carga de 490000 Newton en el punto 5 en dirección Y

```
LoadsBC> Structural> Force> Define by points
```

```
FPT,5,FY,-490000,5,1
```

Una vez definida la geometría, desplazamientos y fuerzas que actúan sobre los cuerpos en contacto, se ubican los elementos Gap que permiten medir los esfuerzos, deformaciones y fuerzas de contacto entre las superficies de los cuerpos analizados.

Selección de elementos GAP (nodo - línea) para problemas de contacto.

```
PropSets> ElementGroup  
EGROUP,2,GAP,1,0,0,1,2,1,0,0
```

Asignación de constante asociada a elementos GAP, donde la distancia relativa entre nodos es cero.

```
PropSets>Real Constants  
RCONST,2,2,1,1,0
```

Selección de líneas de contacto entre rueda y riel.

```
        Análisis> non lineal> contact > NL_GSAUTO  
NL_GSAUTO,0,1,0,9,9,1,1  
NL_GSAUTO,0,6,0,14,14,1,1
```

Asignación de parámetros para análisis no lineal.

```
ACTECLR,1,MP,1  
TIMES,0,1,0.02  
CURDEF,TIME,1,1,0,0,1,1  
NL_PLOT,1,50,1,0
```

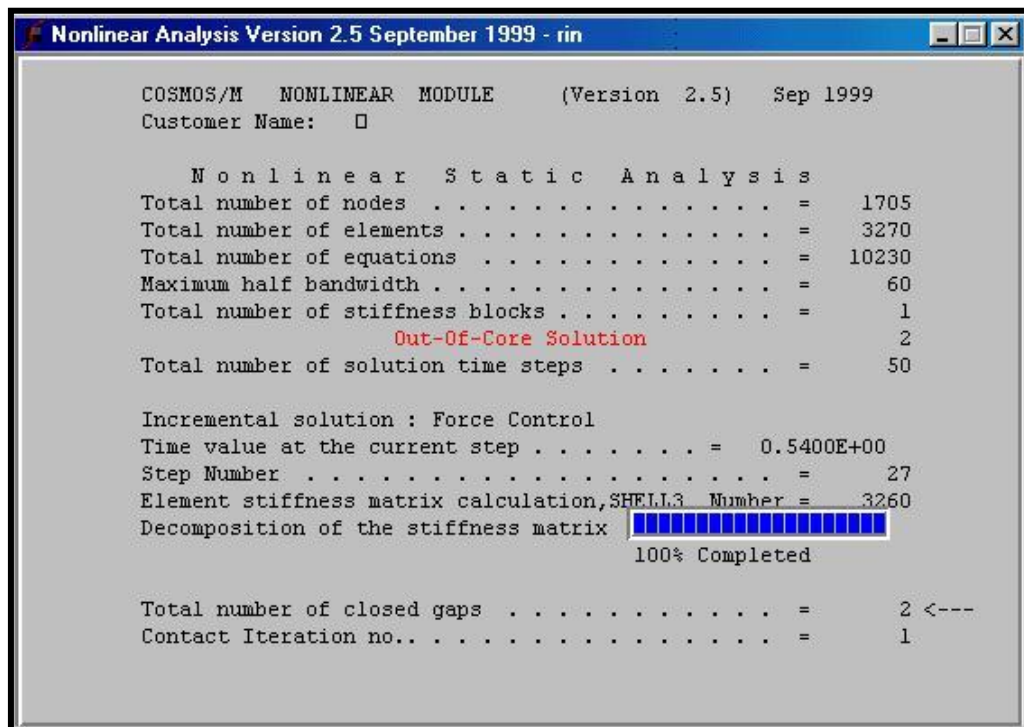
Para la ejecución correcta del programa, es necesario eliminar el elemento que coincide con el nodo de contacto entre las figuras analizadas y ejecutarlo.

```
Meshing> Element> Delete  
EDELETE,3453,3453,  
R_NONLINEAR
```

16.3 SOLUCION DEL PROBLEMA

La solución del problema, utilizando el programa COSMOS/M, muestra que solo dos de los elementos GAP se cierran durante el procesamiento de los datos introducidos en la modelación del problema.

Figura 12. Solución No lineal



```
Nonlinear Analysis Version 2.5 September 1999 - rin
COSMOS/M  NONLINEAR  MODULE      (Version 2.5)  Sep 1999
Customer Name:  □

      N o n l i n e a r  S t a t i c  A n a l y s i s
Total number of nodes . . . . . = 1705
Total number of elements . . . . . = 3270
Total number of equations . . . . . = 10230
Maximum half bandwidth . . . . . = 60
Total number of stiffness blocks . . . . . = 1
      Out-Of-Core Solution . . . . . = 2
Total number of solution time steps . . . . . = 50

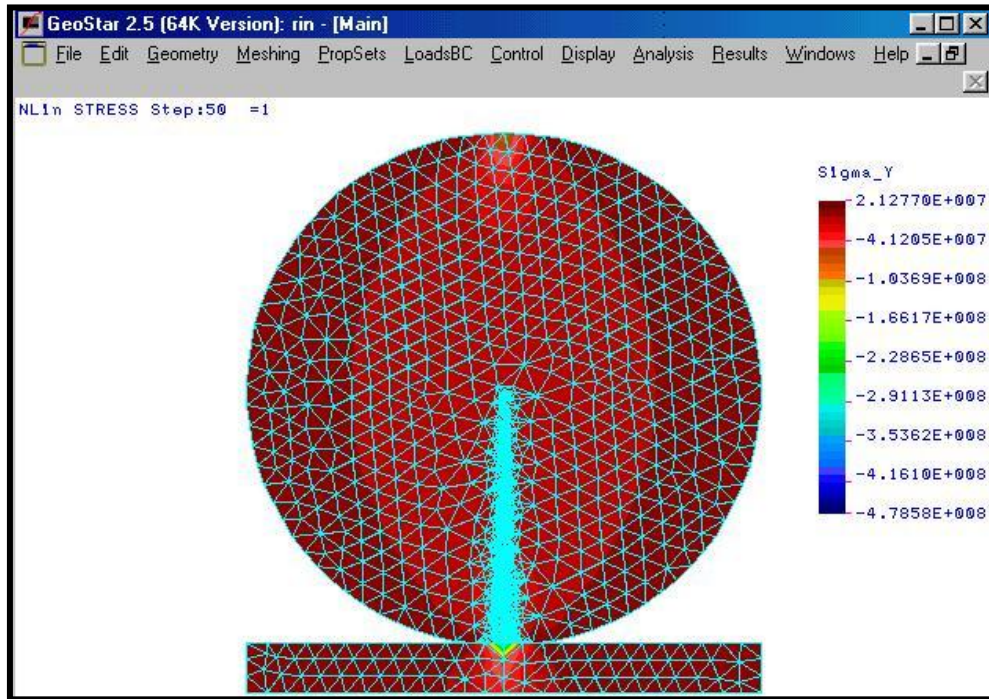
Incremental solution : Force Control
Time value at the current step . . . . . = 0.5400E+00
Step Number . . . . . = 27
Element stiffness matrix calculation, SHELL3 Number = 3260
Decomposition of the stiffness matrix ██████████
      100% Completed

Total number of closed gaps . . . . . = 2 <---
Contact Iteration no. . . . . = 1
```

Programa COSMOS/M

El análisis no lineal estático entrega los siguientes resultados de los esfuerzos en la dirección (Y) que actúan sobre los nodos (5) y (7), que hacen parte de los elementos GAP sobre la línea de contacto entre los dos cuerpos (rueda- riel).

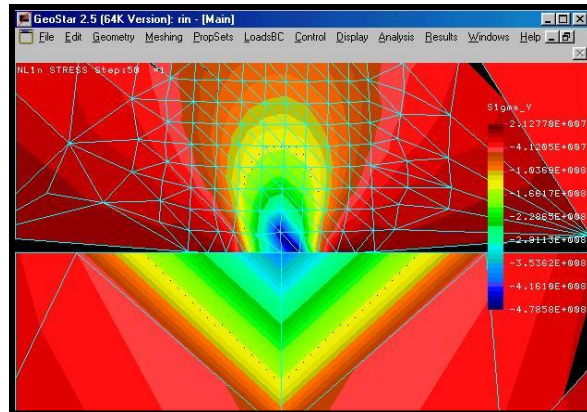
Figura 13. Gráfica de esfuerzos en dirección (Y)



Programa COSMOS/M

Los resultados arrojados por el programa indican un esfuerzo en Y (Sigma Y) de $-2.808e008$ [Pa] en el nodo (5) y de $-4.786e008$ [Pa] en el nodo (7).

Figura 14. Gráfica de Tamaño de malla



Programa COSMOS/M

Los resultados de los esfuerzos en los nodos pertenecientes a los elementos de contacto (nodo-línea) entre los dos cuerpos es el siguiente:

Figura 15. Tabla de Esfuerzos

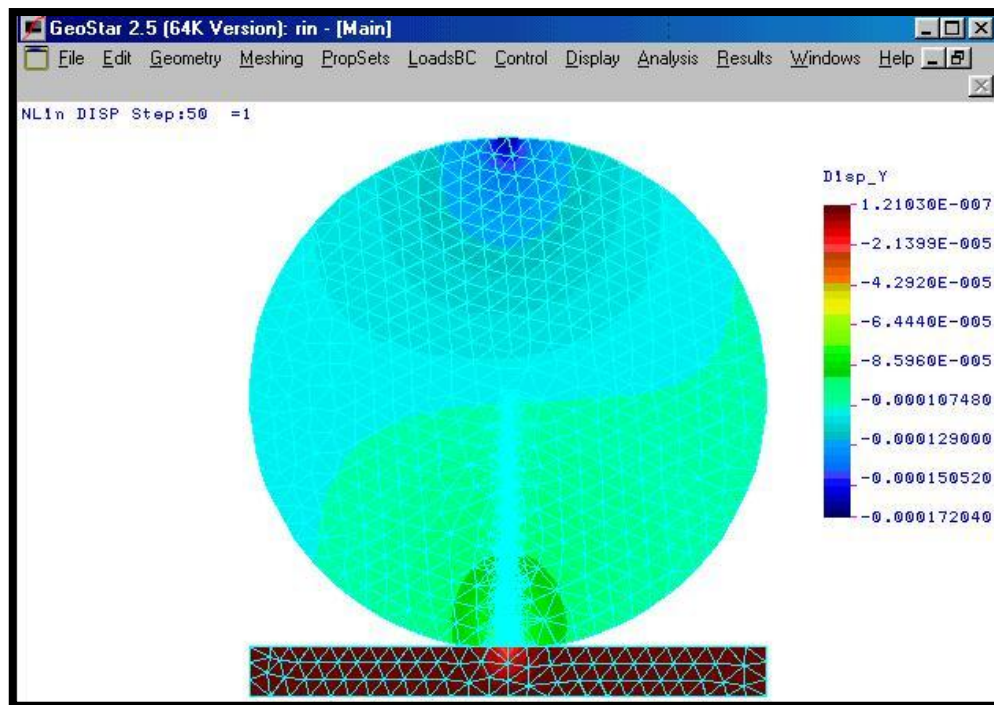
Node	SIG_X	SIG_Y	SIG_Z	Step	50 Top Face TAU_XY	Layer 1 TAU_XZ	TAU_YZ
1	-9.931e+006	7.800e+004	0.000e+000	50	4.692e+006	0.000e+000	0.000e+000
2	-4.048e+006	1.523e+007	0.000e+000	50	5.769e+006	0.000e+000	0.000e+000
3	-3.010e+007	1.650e+006	0.000e+000	50	1.530e+007	0.000e+000	0.000e+000
4	-1.038e+008	-7.543e+007	0.000e+000	50	6.609e+007	0.000e+000	0.000e+000
5	-3.230e+008	-2.808e+008	0.000e+000	50	1.035e+008	0.000e+000	0.000e+000
6	-2.734e+008	-3.837e+008	0.000e+000	50	1.713e+007	0.000e+000	0.000e+000
7	-3.223e+008	-4.786e+008	0.000e+000	50	-1.128e+008	0.000e+000	0.000e+000
8	-1.123e+008	-8.854e+007	0.000e+000	50	-7.903e+007	0.000e+000	0.000e+000
9	-2.904e+007	1.949e+007	0.000e+000	50	-1.988e+007	0.000e+000	0.000e+000
10	-4.195e+006	2.128e+007	0.000e+000	50	-1.153e+007	0.000e+000	0.000e+000
11	-6.722e+006	8.979e+006	0.000e+000	50	-4.283e+006	0.000e+000	0.000e+000
12	-4.278e+007	9.019e+005	0.000e+000	50	-1.432e+007	0.000e+000	0.000e+000
13	-5.458e+007	-1.748e+007	0.000e+000	50	-2.937e+007	0.000e+000	0.000e+000
14	-5.149e+007	-3.467e+007	0.000e+000	50	-4.043e+007	0.000e+000	0.000e+000
15	-4.477e+007	-4.554e+007	0.000e+000	50	-4.264e+007	0.000e+000	0.000e+000
16	-3.599e+007	-5.617e+007	0.000e+000	50	-4.215e+007	0.000e+000	0.000e+000
17	-2.707e+007	-6.031e+007	0.000e+000	50	-3.851e+007	0.000e+000	0.000e+000
18	-1.953e+007	-6.244e+007	0.000e+000	50	-3.360e+007	0.000e+000	0.000e+000
19	-1.463e+007	-5.867e+007	0.000e+000	50	-2.980e+007	0.000e+000	0.000e+000
20	-8.992e+006	-6.016e+007	0.000e+000	50	-2.521e+007	0.000e+000	0.000e+000

Programa COSMOS/M

La tabla anterior muestra que los nodos pertenecientes a los elementos GAP (3271) y (3262) pertenecientes a las líneas de contacto entre los cuerpos, contienen los nodos (5) y (7) respectivamente. Para conocer los esfuerzos que se desarrollan en estos elementos de contacto se busca la información contenida en los nodos que los conforman, obteniendo el estado de esfuerzos en cada uno de los elementos generados por el método de contacto (nodo-línea). Ver Fig. (15)

Si se desean conocer las deformaciones causadas en los elementos de contacto se puede observar la (Fig. 16) de desplazamientos en la dirección (Y). Y luego observar la tabla que contiene los desplazamientos en cada uno de los nodos que forman parte de los elementos de contacto. (Ver Fig. 17)

Figura 16. Deformación en dirección Y



Programa COSMOS/M

Figura 17. Tabla de desplazamientos

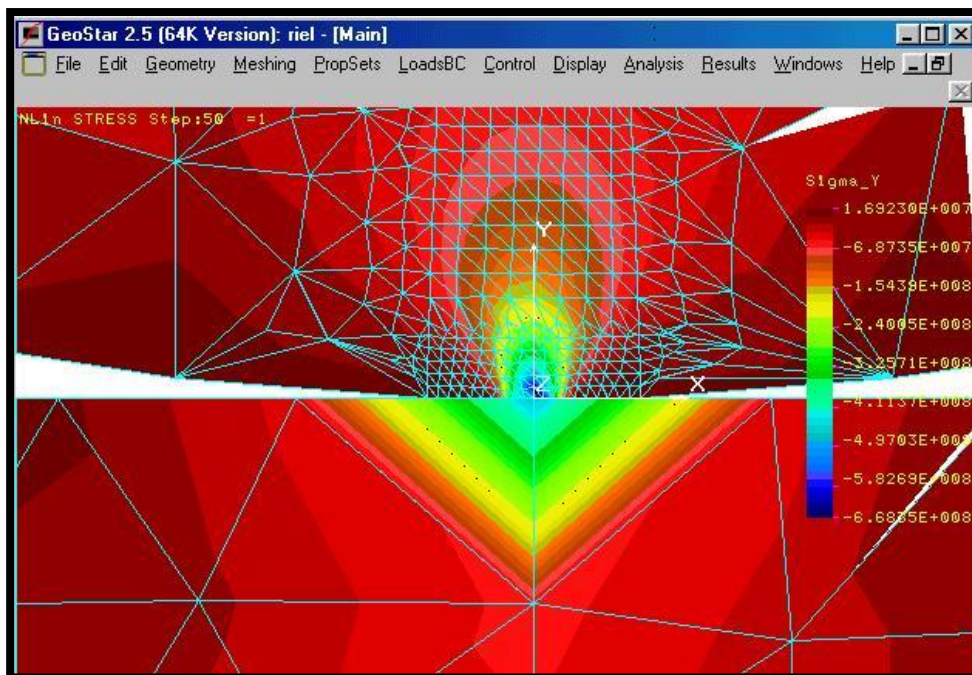
Node	UX	UY	UZ	Step	50	RX	RY	RZ
1	8.027e-006	-6.802e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.445e-004
2	8.328e-006	-6.449e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	2.529e-004
3	8.376e-006	-5.993e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	6.111e-004
4	8.227e-006	-5.310e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	1.362e-003
5	6.262e-006	-4.067e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	1.352e-003
6	1.816e-007	-3.031e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-5.113e-005
7	-5.357e-006	-4.066e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-3.587e-003
8	-7.186e-006	-5.318e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-3.571e-003
9	-7.420e-006	-5.990e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-2.643e-003
10	-7.365e-006	-6.448e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-2.262e-003
11	-7.003e-006	-6.797e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.790e-003
12	-4.068e-006	-6.761e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.829e-003
13	-1.613e-006	-6.735e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.785e-003
14	-6.607e-009	-6.744e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.676e-003
15	9.240e-007	-6.783e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.533e-003
16	1.409e-006	-6.848e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.413e-003
17	1.687e-006	-6.932e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.315e-003
18	1.814e-006	-7.026e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.232e-003
19	1.900e-006	-7.126e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.172e-003
20	1.890e-006	-7.229e-005	0.000e+000			0.000e+000	0.000e+000	-1.129e-003

Programa COSMOS/M

Estas dos figuras (16 y 17), nos indican que la deformación sufrida por la rueda, cuando se aplica la carga es aproximadamente de $-4.067e005$ [m] en el nodo (5) y (7) que hacen parte de los elementos GAP (3262) y (3271) respectivamente, que se cierran o entran en contacto con el riel por causa de la fuerza aplicada.

Con el fin de encontrar una mejor aproximación del problema, se redefine la malla para generar un numero mayor de elementos de contacto, y así determinar hacia adonde converge la solución. (Ver Fig. 18)

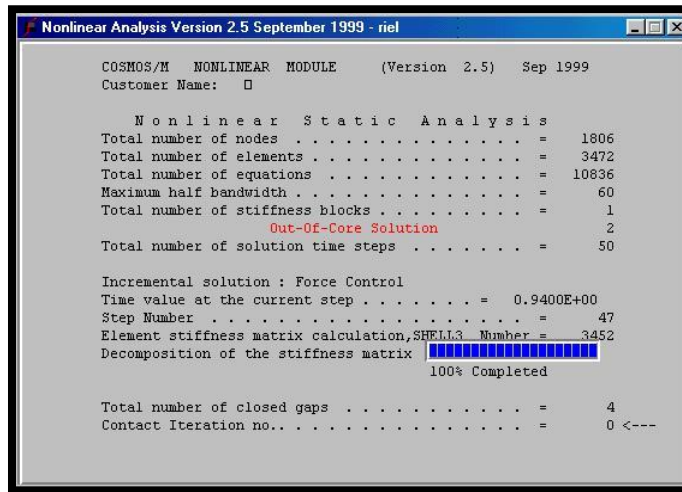
Figura 18. Malla refinada



Programa COSMOS/M

Al redefinir la malla, se encuentra que los elementos GAP, que se cierran cuando los dos cuerpos entran en contacto son cuatro.

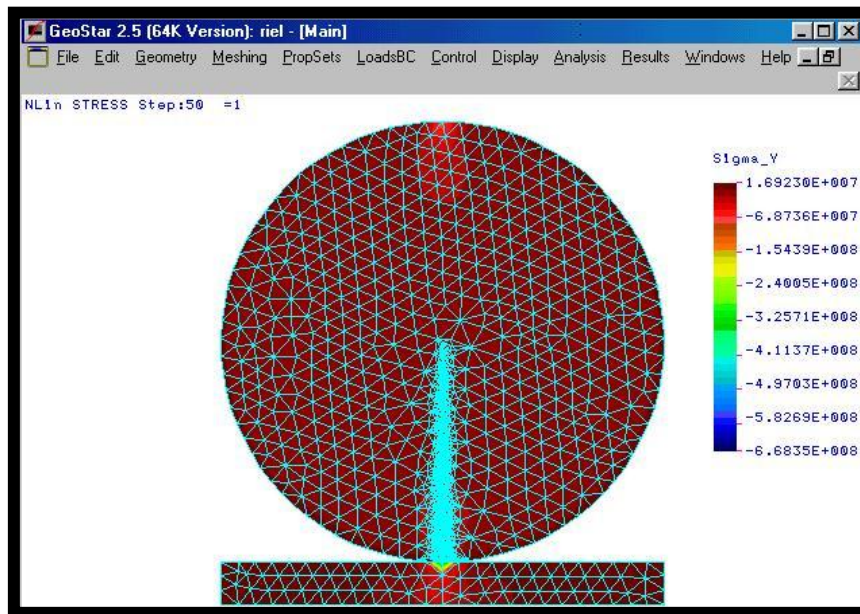
Figura 19. Solución con malla refinada



Programa COSMOS/M

Este análisis proporciona una mayor cantidad de datos que permiten determinar la convergencia de la solución. Si se observa tanto la (Figura. 20), como la tabla que contiene los nodos pertenecientes a los elementos GAP ubicados sobre la línea de contacto.

Figura 20. Gráfica de esfuerzos en malla refinada.



Programa COSMOS/M

STRLIST_50.1.1.0.1.1.1806.1.0						
Node	SIG_X	SIG_Y	Step SIG_Z	50 Top Face TAU_XY	Layer 1 TAU_XZ	TAU_YZ
1	-1.250e+006	3.205e+006	0.000e+000	7.361e+006	0.000e+000	0.000e+000
2	-2.651e+006	1.491e+006	0.000e+000	3.852e+006	0.000e+000	0.000e+000
3	-1.229e+007	3.877e+006	0.000e+000	3.532e+006	0.000e+000	0.000e+000
4	-4.065e+007	6.202e+006	0.000e+000	2.006e+007	0.000e+000	0.000e+000
5	-3.549e+008	-4.044e+008	0.000e+000	8.164e+007	0.000e+000	0.000e+000
6	-3.613e+008	-4.794e+008	0.000e+000	1.382e+007	0.000e+000	0.000e+000
7	-3.192e+008	-4.116e+008	0.000e+000	-8.935e+007	0.000e+000	0.000e+000
8	-3.686e+007	1.692e+007	0.000e+000	-1.488e+007	0.000e+000	0.000e+000
9	-1.305e+007	6.599e+006	0.000e+000	-2.714e+006	0.000e+000	0.000e+000
10	-1.299e+006	2.695e+006	0.000e+000	-2.559e+006	0.000e+000	0.000e+000

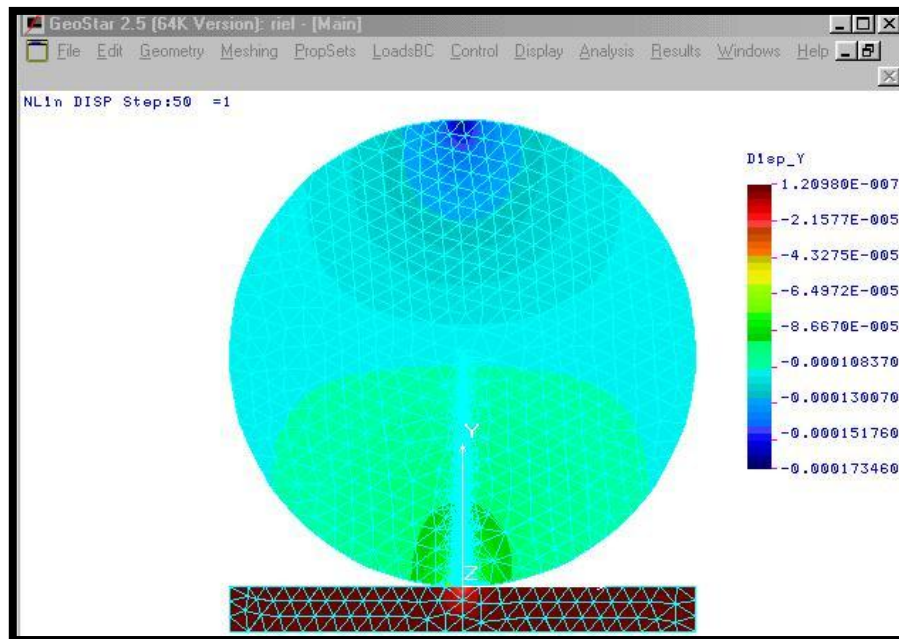
STRLIST_50.1.1.0.1.1.1806.1.0						
Node	SIG_X	SIG_Y	Step SIG_Z	50 Top Face TAU_XY	Layer 1 TAU_XZ	TAU_YZ
1628	-7.125e+007	-7.418e+007	0.000e+000	7.446e+007	0.000e+000	0.000e+000
1629	-4.721e+008	-4.955e+008	0.000e+000	6.271e+007	0.000e+000	0.000e+000
1630	-3.121e+008	-5.062e+008	0.000e+000	1.115e+008	0.000e+000	0.000e+000
1631	-9.116e+007	-2.553e+008	0.000e+000	1.254e+008	0.000e+000	0.000e+000
1632	-7.966e+007	-1.623e+008	0.000e+000	1.051e+008	0.000e+000	0.000e+000
1633	-6.885e+007	-1.156e+008	0.000e+000	8.635e+007	0.000e+000	0.000e+000
1634	-6.054e+007	-9.154e+007	0.000e+000	7.031e+007	0.000e+000	0.000e+000
1635	-2.818e+008	-6.506e+008	0.000e+000	1.187e+007	0.000e+000	0.000e+000
1636	-1.359e+008	-4.245e+008	0.000e+000	1.108e+008	0.000e+000	0.000e+000
1637	-6.646e+007	-3.614e+008	0.000e+000	8.771e+007	0.000e+000	0.000e+000
1638	-5.191e+007	-1.663e+008	0.000e+000	9.048e+007	0.000e+000	0.000e+000
1639	-5.225e+008	-6.683e+008	0.000e+000	-6.875e+007	0.000e+000	0.000e+000
1640	-2.750e+008	-5.414e+008	0.000e+000	-9.257e+007	0.000e+000	0.000e+000

Se encuentra que los elementos GAP que entran en contacto son (3454), (3459), (3468) y (3476). Estos a su vez están compuestos por los nodos (7), (1639), (5) y (1629) respectivamente. De igual forma es posible analizar la variación en la deformación de cada uno de los elementos GAP, por medio de la gráfica y tabla de deformación en dirección (Y).

DISLIST_50.1.1.1806.1.0						
Node	UX	UY	Step UZ	50 RX	RY	RZ
1	7.904e-006	-6.937e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	6.227e-006
2	8.300e-006	-6.588e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	4.481e-004
3	8.445e-006	-6.141e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	7.412e-004
4	8.517e-006	-5.479e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.537e-003
5	7.063e-006	-4.056e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.962e-003
6	1.792e-007	-3.018e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-5.066e-005
7	-6.216e-006	-4.054e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-3.972e-003
8	-7.610e-006	-5.485e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-3.233e-003
9	-7.588e-006	-6.145e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-2.360e-003
10	-7.464e-006	-6.595e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-2.150e-003

DISLIST_50.1.1.1806.1.0						
Node	UX	UY	Step UZ	50 RX	RY	RZ
1626	3.852e-006	-4.382e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	2.333e-003
1627	3.221e-007	-5.493e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	4.511e-004
1628	4.044e-008	-6.202e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	6.828e-006
1629	4.362e-006	-3.537e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.249e-003
1630	1.550e-006	-3.940e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.360e-003
1631	-2.647e-007	-5.058e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	4.136e-004
1632	-4.203e-007	-5.570e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	1.497e-004
1633	-4.064e-007	-5.941e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.309e-005
1634	-3.181e-007	-6.159e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.534e-005
1635	4.871e-007	-3.624e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	6.845e-004
1636	1.638e-007	-4.367e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	7.447e-004
1637	-2.019e-007	-4.732e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	3.104e-004
1638	-6.575e-007	-5.685e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-3.292e-005
1639	-3.512e-006	-3.536e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-3.396e-003
1640	-3.453e-007	-3.892e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	-1.451e-003

Figura 21. Gráfica de desplazamientos en malla refinada.



Programa COSMOS/M

16.4 ANALISIS DE RESULTADOS.

Con el fin de analizar los resultados obtenidos en las dos soluciones, y determinar hacia donde converge la solución, se presentan los resultados en la siguiente tabla. Una buena aproximación para efectos de diseño, consiste en tomar el valor más grande de esfuerzos y deformaciones, con el fin de contar con un factor de seguridad mayor.

La tabla contiene la magnitud de los esfuerzos de contacto y desplazamientos en cada uno de los elementos GAP ubicados sobre la superficie de la rueda; Inicialmente se presentan los resultados de los 2 elementos GAP que entran en contacto con la superficie del riel y en la segunda parte de la tabla se presentan los resultados de cuatro elementos GAP ubicados sobre la superficie de la rueda y que entran en contacto con la superficie del riel, una vez redefinida la malla.

Solución N° 1			
Elemento GAP Que se cierra	Nodo que conforma elemento GAP	Esfuerzo en dirección (Y) [Pa]	Deformación en dirección (Y) [m]
3262	7	-4.786e008	-4.066e-005
3271	5	-2.808e008	-4.067e-005
Solución N° 2			
Elemento GAP Que se cierra	Nodo que conforma elemento GAP	Esfuerzo en dirección (Y) [Pa]	Deformación en dirección (Y) [m]
3454	7	-4.116e008	-4.054e-005
3459	1639	-6.683e008	-3.536e-005
3468	5	-4.044e008	-4.056e-005
3473	1629	-4.955e008	-3.537e-005

Para efectos de diseño, se aconseja tomar el valor mas critico, en este caso se tomara el mayor valor de esfuerzos de contacto, con el fin de garantizar que si se llegara a presentar un esfuerzo de esta magnitud en la rueda, esta resista la deformación causada.

Los datos obtenidos en COSMOS/M son verificados con los datos arrojados por el programa Matlab, que permite conocer los esfuerzos de contacto entre superficies.

```

File Edit Window Help
[Icons]
Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 1: 0.28
Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 2: 0.28
Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 1: 210e9
Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 2: 210e9
Ingrese la carga aplicada a los cuerpos en contacto: 490000
Ingrese la longitud de los cilindros en contacto: 0.1
Ingrese el radio para el cuerpo 1: 0.5
Ingrese el radio para el cuerpo 2: 0
Ingrese el coeficiente de fricción entre los cuerpos si hay F tangencial: 0

La longitud [mm] del semi eje mayor del area de contacto es [mm]: 0.00523257
Presión en el area de contacto es [mm]: 5.96158e+008
El esfuerzo principal en dirección del eje X es [Mpa]: -3.33785e+008
El esfuerzo principal en dirección del eje Y es [Mpa]: -5.9593e+008
El esfuerzo principal en dirección del eje Z es [Mpa]: -5.96158e+008
El maximo esfuerzo cortante es [Mpa]: 1.78847e+008
El esfuerzo cortante octaedrico es [Mpa]: 1.60963e+008
La maxima deflexion en la linea de contacto es [mm]: 3.72775e-005»

```

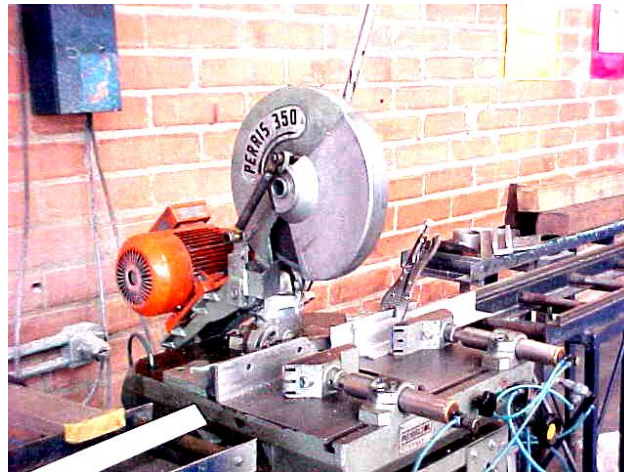
Según los datos obtenidos en Matlab, el máximo esfuerzo de contacto en la dirección de la carga (Eje Z), es de -596.158 Mpa. Comparando los resultados obtenidos en Matlab (-596.158 Mpa) y el máximo valor obtenido en COSMOS/M (-668.3 Mpa) nos indica que el programa en Matlab presenta una variación del 10.79% con respecto a los datos obtenidos en COSMOS/M, lo que nos indica un porcentaje de error relativamente bajo.

Para efectos de cálculos, se observa que los resultados obtenidos con el programa Matlab, son bastante aproximados teniendo en cuenta el tiempo invertido en la modelación y análisis de un problema de contacto en el software COSMOS/M.

17. APLICACION DE TEORIA DE HERTZ A PROBLEMAS DE CONTACTO

17.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

En el diseño de un sistema de sujeción de tubería de aluminio, similar al mostrado en la foto, se selecciono un sistema neumático que moviera los topes de sujeción hacia la tubería.



Cortadora de Banco EMMA Y CIA.

Para evitar el aplastamiento de la misma se instalaron un compuesto de goma en la superficie de los topes.

Tomando como referencia el catalogo de la Festo, se selecciona el cilindro neumático adecuado para la aplicación requerida. En este caso es necesario seleccionar un cilindro de doble efecto y amortiguado en el final de carrera, con el fin de evitar que el accionamiento del mismo, maltrate o deforme el material cuando lo sujeta contra la superficie de corte.

El cilindro escogido para esta aplicación es el siguiente:

Tipo DNC-Ø32-250mm-PPV-K5

Roca en vástago M10 x 1.25

Se desea determinar los esfuerzos de contacto, que se presentan en la superficies de la tubería de aluminio, con el fin de conocer el grado de deformación que este sistema pueda causar sobre el material.

La presión suministrada por en la planta es de 70 psi = 482633.01Pa

Con estos datos, calculamos la fuerza suministrada por el sistema:

$$p \bullet \frac{F}{A} \bullet \frac{F}{(\pi \bullet D^2)/4}$$

$$F \bullet \frac{P \bullet (\pi \bullet D^2)}{4} \bullet \frac{482633.01 \text{ Pa} \bullet (\pi \bullet 0.032^2)}{4} \bullet 388.156 \text{ N}$$


F : Fuerza suministrada por el sistema de sujeción [N]

A : Area del embolo del cilindro neumático

P : Presión neumática suministrada por la planta. [Pa]

El tipo de tubería escogida para el análisis en elementos finitos fue la que presenta mayor diámetro y menor espesor de pared, con el fin de evaluar la situación mas critica cuando esta sometida a la presión neumática suministrada por el sistema.

Estos datos fueron obtenidos del catalogo de tubería de aluminio de la empresa Alúmina S.A

 Tubos circulares / Circular pipes								
REFERENCIA REFERENCIE	DIMENSION A		DIMENSION B		PESO / WEIGHT		PERIMETRO / PERIMETER	
	pulg.	mm.	pulg.	mm.	lb/pie	kg/m	pulg.	mm.
TC-081	5-3/8	136.50	3/16	4.75	3.564	5.327	16.88	428.83
TC-082	3-19/32	91.30	0.173	4.40	2.193	3.261	11.29	286.80
TC-083	3.920	89.40	1/8	3.20	1.980	2.948	11.06	280.80
TC-084	6.787	172.40	0.394	10.00	9.230	13.836	21.32	541.61
TC-085	2-7/8	47.50	0.297	7.55	1.727	2.567	5.87	149.22
TC-086	1.181	30.00	0.157	4.00	0.996	0.885	3.71	94.25
TC-087	1.968	50.00	0.098	2.50	0.679	1.011	6.19	157.10
TC-088	1.575	40.00	0.098	2.50	0.556	0.798	4.95	125.66
TC-089	1.622	41.20	0.122	3.10	0.675	1.005	5.10	129.43
TC-090	2.756	70.00	0.425	10.80	3.657	5.443	8.66	219.91
TC-091	0.276	7.00	0.043	1.10	0.057	0.055	0.87	21.99
TC-91A (1)	0.315	8.00	0.053	1.36	0.050	0.076	0.99	25.13
TC-092	2.945	74.60	0.104	2.65	1.093	1.627	9.25	234.99
TC-093	1.634	41.50	0.069	1.75	0.398	0.592	5.15	130.37
TC-094	5.984	152.00	0.256	6.50	5.411	8.092	18.80	477.92
TC-095	0.433	11.00	0.043	1.10	0.062	0.092	1.36	34.55
TC-096	2.953	75.00	0.078	2.00	0.834	1.242	9.28	235.62
TC-097	1.969	50.00	0.078	2.00	0.549	0.817	6.18	157.08
TC-098	0.937	23.80	0.087	2.20	0.271	0.404	2.94	74.77
TC-099 (2)	2-1/4	57.00	1/8	3.10	0.956	1.422	7.05	179.07
TC-100	3.375	85.70	1/4	6.35	2.900	4.316	10.60	269.23
TC-101 (3)	6-1/4	158.75	3/8	9.52	8.158	12.141	19.64	498.73
TC-102 (4)	7/8	22.30	1/8	3.2	0.348	0.518	2.75	69.74
TC-103	0.551	14.00	0.181	4.8	0.247	0.368	1.73	43.98
TC-104	1.31	38.40	0.037	0.95	0.204	0.303	4.75	120.64
TC-105	4	101.60	0.089	2.25	1.279	1.903	12.57	319.2
TC-106 (5)	1.830	47.00	0.265	6.75	1.354	2.313	5.81	147.65
TC-107	1.378	35.00	0.197	5.00	0.858	1.277	4.33	109.96
TC-108	1.196	30.40	0.087	2.20	0.355	0.528	3.76	95.30
TC-109	2.440	62.00	0.118	3.00	1.013	1.507	7.67	194.78
TC-110	3	76.20	1/4	6.35	2.538	3.776	9.42	239.39

Notas: (1) Exclusivo para Refrigeración - Refrigeration exclusive
 (2) Cilindros neumáticos - Pneumatical cylinders
 (3) Industria petrolera - Petroleum
 (4) Borne - Bore
 (5) Marcos bicicletas - Bicycle

Catalogo de Alúmina S.A

Una vez determinada la fuerza con la que el mecanismo de sujeción presiona la superficie de la tubería de aluminio se procede a realizar la modelación en el software COSMOS/M, para esto se presenta el archivo un archivo (*.txt) que contiene las instrucciones necesarias para modelar el problema.

17.2 DEFINICION DE GEOMETRIA

Definición de propiedades de elementos

```
PropSets> ElementGroup  
EGROUP,1,SOLID,0,1,0,0,0,0,0
```

Generación de puntos para dibujar tubo de aluminio

```
Geometry>Points>Define  
PT,1,0.06,0,-0.0508  
PT,2,0.06,0.0508,-0.0508
```

Especificación del plano de trabajo.

```
Geometry>Grid>Plane  
PLANE,X,0,1
```

Generación de círculo por medio de curvas con ángulos de 268°, 4° y 88° con centro en P2(0.06,0.0508,-0.0508) y extremos en puntos 1, 5, 6 respectivamente.

```
Geometry>Curves>Circle in plane  
CRPCIRCLE,1,2,1,0.0508,268,3  
CRPCIRCLE,4,2,5,0.0508,4,1  
CRPCIRCLE,5,2,6,0.0508,88,1
```

Generación de puntos para dibujar superficie interior del tubo de aluminio

```
Geometry>Points>Define  
PT,7,0.06,0.00225,-0.0508
```

Generación de curvas para dibujar superficie interior del tubo de aluminio

Geometry>Curves>Circle in plane

CRPCIRCLE,6,2,7,0.04855,268,3

CRPCIRCLE,9,2,10,0.04855,4,1

CRPCIRCLE,10,2,11,0.04855,88,1

Generación de superficies para extrusión de tubo de aluminio.

Geometry>Surface > Surface with 2 Curves

SF2CR,1,6,1,0

SF2CR,2,7,2,0

SF2CR,3,8,3,0

SF2CR,4,9,4,0

SF2CR,5,10,5,0

Generación de Volumen por extrusión de superficies.

VLEXTR,1,5,1,X,-0.16

Generación de puntos para dibujar sujetador de aluminio.

Geometry>Points>Define

PT,22,0.06,0,0.01

PT,23,-0.1,0,0.01

PT,24,-0.1,0,.04

PT,25,0.06,0,0.04

Generación de curva para definir superficie de extrusión de sujetador.

Geometry>Curves>Line with 2 Points

CRLINE,41,23,22

CRLINE,42,22,25

CRLINE,43,25,24

CRLINE,44,24,23

Generación de superficies para extrusión de sujetador de aluminio.

Geometry>Surface > Surface with 4 Curves

SF4CR,26,41,42,43,44,0

Extrusión de superficie que define sujetador de aluminio.

VLEXTR,26,26,1,Y,0.1016

Generación de puntos para dibujar la superficie de goma que recubre el sujetador de aluminio.

Geometry>Points>Define

PT,30,0.06,0,0

PT,31,-0.1,0,0

Generación de curvas que da forma a la geometría de superficie protectora.

Geometry>Curves>Line with 2 Points

CRLINE,53,23,31

CRLINE,54,31,30

CRLINE,55,30,22

Generación de superficie para extrusión de protector de goma.

Geometry>Surface > Surface with 4 Points

SF4PT,32,23,22,30,31,0

Extrusión de superficie de goma.

VLEXTR,32,32,1,Y,0.1016

SCALE,0

Asignación de propiedades de Material y mallado de superficie de goma.

PICK_MAT,1,RUBBER,SI

M_VL,7,7,1,8,20,2,6,1,1,1

Asignación de propiedades de Material y mallado de sujetador y tubo de aluminio.

PICK_MAT,2,AL_6061,SI

M_VL,1,3,1,8,12,2,20,1,1,1

M_VL,5,5,1,8,12,2,20,1,1,1

M_VL,4,4,1,8,4,2,20,1,1,1

M_VL,6,6,1,8,20,3,6,1,1,1

ACTECLR,1,MP,1

NMERGE,1,4620,1,0.00001,0,1,0

NCOMPRESS,1,4620

Asignación de fuerza que actúa sobre el sistema de sujeción.

FND,3938,FZ,-388.156,3938,1

Asignación de restricciones en desplazamientos.

```
DSF,26,UY,0,32,6,  
DCR,23,UY,0,23,1,  
DCR,22,UX,0,22,1,UZ,
```

Selección de elementos GAP (nodo - superficie) para problemas de contacto.

```
PropSets> ElementGroup  
EGROUP,2,GAP,1,0,0,2,4,1,0,0
```

Asignación de constante asociada a elementos GAP, donde la distancia relativa entre nodos es cero.

```
PropSets>Real Constants  
RCONST,2,2,1,1,0
```

Selección de superficies de contacto entre superficie de goma y tubo de aluminio.

```
Analisis> non lineal> contact > NL_GSAUTO  
NL_GSAUTO,1,21,1,36,36,1,1
```

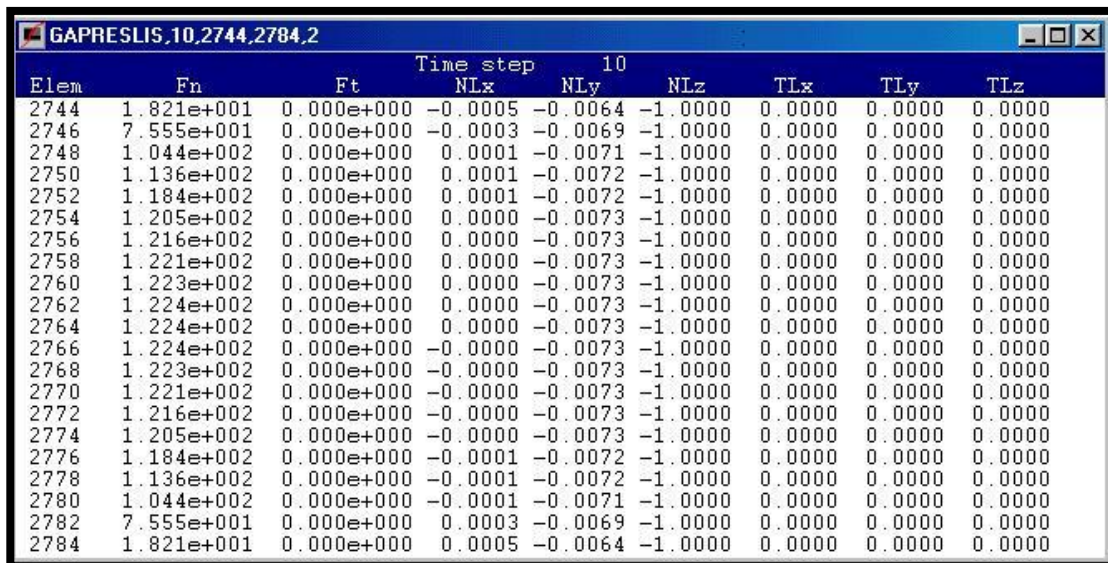
Asignación de parámetros para análisis no lineal.

```
CURDEF,TIME,1,1,0,0,10,10  
TIMES,0,1,0.1  
NL_PLOT,1,10,1,0  
EDELETE,2681,2701,1  
C* R_NONLINEAR
```

17.3 SOLUCION DEL PROBLEMA

El análisis no lineal estático, del problema modelado y resuelto en COSMOS/M, proporciona una solución con 21 elementos GAP, que se cierran durante la ejecución del problema, tal como se observa en la (Figura. 22).

Figura 22. Fuerza en elementos GAP en contacto superficial.



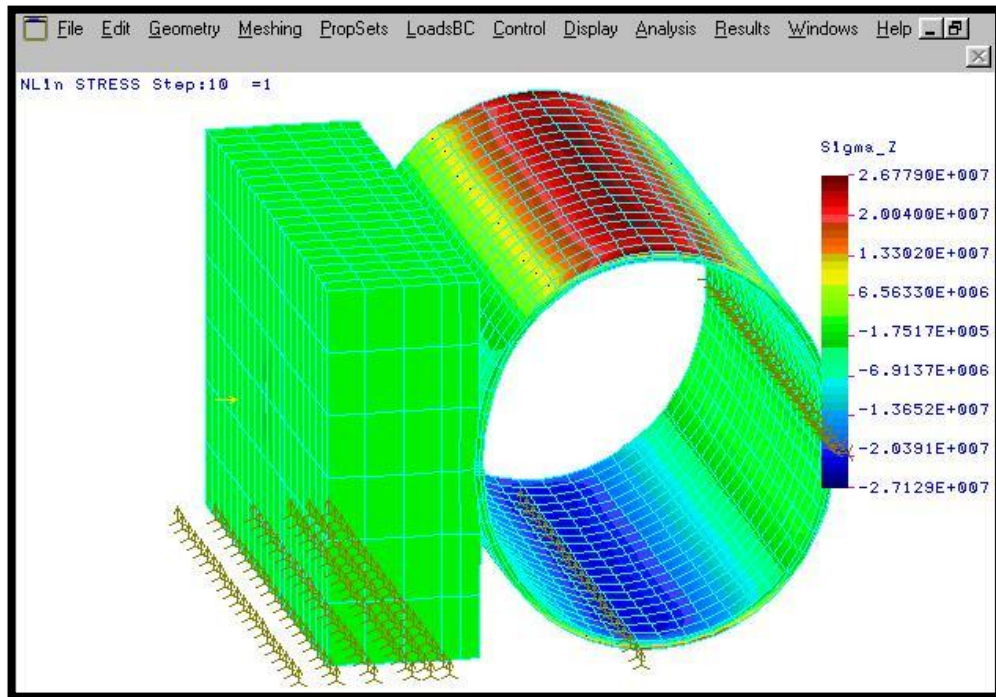
Elem	Fn	Ft	Time step 10					
			NLx	NLy	NLz	TLx	TLy	TLz
2744	1.821e+001	0.000e+000	-0.0005	-0.0064	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2746	7.555e+001	0.000e+000	-0.0003	-0.0069	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2748	1.044e+002	0.000e+000	0.0001	-0.0071	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2750	1.136e+002	0.000e+000	0.0001	-0.0072	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2752	1.184e+002	0.000e+000	0.0001	-0.0072	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2754	1.205e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2756	1.216e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2758	1.221e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2760	1.223e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2762	1.224e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2764	1.224e+002	0.000e+000	0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2766	1.224e+002	0.000e+000	-0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2768	1.223e+002	0.000e+000	-0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2770	1.221e+002	0.000e+000	-0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2772	1.216e+002	0.000e+000	-0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2774	1.205e+002	0.000e+000	-0.0000	-0.0073	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2776	1.184e+002	0.000e+000	-0.0001	-0.0072	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2778	1.136e+002	0.000e+000	-0.0001	-0.0072	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2780	1.044e+002	0.000e+000	-0.0001	-0.0071	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2782	7.555e+001	0.000e+000	0.0003	-0.0069	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2784	1.821e+001	0.000e+000	0.0005	-0.0064	-1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Programa COSMOS/M

Los resultados mostrados en la (Figura. 22), contienen el valor de la fuerza normal que actúa sobre cada uno de los elementos GAP que se cierran durante la ejecución del programa. Estos elementos están compuestos por nodos, los cuales contienen la información del estado de esfuerzos y deformaciones en cada uno de los puntos de contacto.

La (Figura. 23), muestra los esfuerzos generados en el sistema, cuando la fuerza suministrada por el cilindro neumático presiona la superficie del tubo de aluminio.

Figura 23. Estado de esfuerzos en sujetador neumático en dirección (Z).



Programa COSMOS/M

Figura 24. Esfuerzos en sujetador neumático.

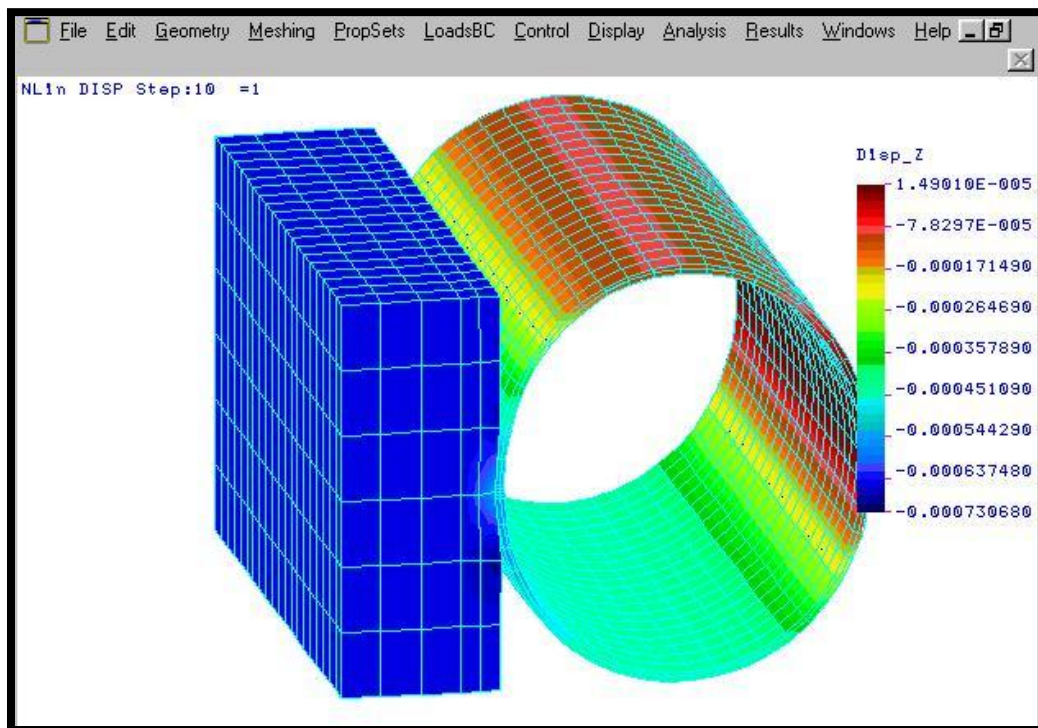
Node	SIG_X	SIG_Y	Step SIG_Z	10 Top Face TAU_XY	Layer 1 TAU_XZ	TAU_YZ
3535	-6.068e+006	-4.333e+007	-1.591e+006	-6.553e+005	6.276e+005	1.462e+004
3543	-1.091e+007	-3.989e+007	-1.142e+007	-6.234e+005	5.104e+005	-1.908e+006
3551	-1.785e+007	-4.321e+007	-1.458e+007	-4.852e+005	2.518e+005	-2.609e+006
3559	-2.042e+007	-4.578e+007	-1.579e+007	-2.790e+005	7.032e+004	-2.799e+006
3567	-2.090e+007	-4.675e+007	-1.657e+007	-1.513e+005	1.392e+004	-2.936e+006
3575	-2.091e+007	-4.698e+007	-1.683e+007	-9.511e+004	6.765e+003	-2.993e+006
3583	-2.096e+007	-4.707e+007	-1.699e+007	-5.896e+004	8.704e+003	-3.026e+006
3591	-2.105e+007	-4.715e+007	-1.705e+007	-3.851e+004	6.199e+003	-3.042e+006
3599	-2.111e+007	-4.722e+007	-1.708e+007	-2.182e+004	3.790e+003	-3.047e+006
3607	-2.114e+007	-4.725e+007	-1.709e+007	-1.028e+004	1.398e+003	-3.050e+006
3615	-2.115e+007	-4.727e+007	-1.709e+007	-9.838e+000	4.301e+000	-3.049e+006
3623	-2.114e+007	-4.725e+007	-1.709e+007	1.027e+004	-1.394e+003	-3.050e+006
3631	-2.111e+007	-4.722e+007	-1.708e+007	2.183e+004	-3.794e+003	-3.047e+006
3639	-2.105e+007	-4.715e+007	-1.705e+007	3.852e+004	-6.203e+003	-3.042e+006
3647	-2.096e+007	-4.707e+007	-1.699e+007	5.896e+004	-8.704e+003	-3.026e+006
3655	-2.091e+007	-4.698e+007	-1.683e+007	9.510e+004	-6.766e+003	-2.993e+006
3663	-2.090e+007	-4.675e+007	-1.657e+007	1.513e+005	-1.392e+004	-2.936e+006
3671	-2.042e+007	-4.578e+007	-1.579e+007	2.790e+005	-7.032e+004	-2.799e+006
3679	-1.785e+007	-4.321e+007	-1.458e+007	4.853e+005	-2.518e+005	-2.609e+006
3687	-1.091e+007	-3.989e+007	-1.142e+007	6.234e+005	-5.104e+005	-1.908e+006
3695	-6.068e+006	-4.333e+007	-1.591e+006	6.553e+005	-6.276e+005	1.465e+004

Programa COSMOS/M

La (Figura. 24), muestra la lista de los esfuerzos en la dirección (Z), en cada uno de los nodos sobre la curva de la tubería que entra en contacto con el sujetador neumático, donde el máximo esfuerzo es de -17.09 Mpa. Es importante anotar que cada uno de los nodos listados en la figura anterior hacen parte de los elementos GAP, creados para el análisis de contacto entre las superficies.

Otro aspecto importante a conocer es la deformación en dirección (Z), que se presenta en los mismos nodos, los cuales se muestran en la (Figura. 25).

Figura 25. Deformación en sujetador neumático en dirección (Z).



Programa COSMOS/M

Los resultados mostrados en la (Figura. 24), son complementados con la lista de desplazamientos en cada uno de los nodos que constituyen los elementos GAP en la superficie de contacto. (Ver Figura. 26)

Figura 26. Desplazamientos en sujetador neumático.

Node	UX	UY	UZ	Step	RX	RY	RZ
3535	1.416e-006	3.190e-005	-5.666e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3543	3.371e-007	3.199e-005	-5.623e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3551	4.367e-008	3.203e-005	-5.625e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3559	5.478e-008	3.202e-005	-5.634e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3567	8.052e-008	3.200e-005	-5.640e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3575	7.412e-008	3.198e-005	-5.643e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3583	5.136e-008	3.196e-005	-5.644e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3591	3.430e-008	3.195e-005	-5.645e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3599	2.001e-008	3.194e-005	-5.646e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3607	9.929e-009	3.193e-005	-5.647e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3615	-4.218e-011	3.193e-005	-5.647e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3623	-1.001e-008	3.193e-005	-5.647e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3631	-2.009e-008	3.194e-005	-5.646e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3639	-3.438e-008	3.195e-005	-5.645e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3647	-5.144e-008	3.196e-005	-5.644e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3655	-7.419e-008	3.198e-005	-5.643e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3663	-8.060e-008	3.200e-005	-5.640e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3671	-5.485e-008	3.202e-005	-5.634e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3679	-4.375e-008	3.203e-005	-5.625e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3687	-3.371e-007	3.199e-005	-5.623e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
3695	-1.416e-006	3.190e-005	-5.666e-004	10	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000

Programa COSMOS/M

Con base en los resultados mostrados en la Fig.(25 y 26), se puede concluir que el máximo grado de deformación en la dirección (Z) es de -0.0005647 m; aproximadamente 0.5647mm.

Otro de los aspectos importantes a tener en cuenta en este análisis, es la utilización de elementos GAP, en la superficie del tubo de aluminio, con el fin de determinar los esfuerzos normales en la superficie generados cuando los cuerpos entran en contacto. En este tipo de análisis con elementos GAP, es indispensable borrar los elementos GAP que coinciden con los nodos de contacto entre las superficies, ya que estos de por si ya están en contacto.

17.4 ANALISIS DE RESULTADOS.

Comparando los resultados obtenidos en el software COSMOS/M, donde el máximo esfuerzo de contacto en la dirección (Z) es de -17.09 Mpa; y el máximo grado de deformación en la dirección (Z) es de -0.0005647 m; aproximadamente 0.5647 mm.

Este resultado se compara con el máximo valor de esfuerzo de impacto permisible para este tipo de colisión, cuyo valor es de 237 Mpa, lo que nos indica que los esfuerzos producidos en la tubería esta 8.89 veces por debajo del máximo esfuerzo de impacto permisible para la tubería de aluminio.

17.5 ANALISIS EN PROGRAMA MATLAB

El análisis en Matlab, requiere determinar la fuerza de impacto suministrada por el sistema neumático al mecanismo de sujeción, la cual fue de 388.156 N. Para continuar con el análisis, es necesario asumir el contacto entre dos superficies de aluminio, teniendo en cuenta que los topes de sujeción son fabricados en aluminio, y estos son los que dan rigidez al sistema.

Con los datos anteriores, procedemos a ingresar los datos necesarios para realizar el calculo de los esfuerzos de contacto en la superficie de la tubería de aluminio, cuyas propiedades mecánicas son:

C* MATL:AL_6061 : ALUMINUM 6061 ALLOY

C* EX 0.69E+11 Pascals

C* NUXY 0.33

Estas propiedades fueron tomadas de la librería del programa COSMOS/M.

El máximo esfuerzo de contacto en dirección (Z), arrojado por el programa Matlab es de -23.503 Mpa, el cual comparado con el máximo esfuerzo de contacto en la dirección (Z) obtenida con el programa COSMOS/M de -17.09 Mpa, se observa que el porcentaje de error es del 37.52%.

Figura 27. Solución en Matlab.

```

File Edit Window Help
Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 1: 0.33
Ingrese el coeficiente de poisson para cuerpo 2: 0.33
Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 1: 69e9
Ingrese el modulo de elasticidad para cuerpo 2: 69e9
Ingrese la carga aplicada a los cuerpos en contacto: 388.156
Ingrese la longitud de los cilindros en contacto: 0.16
Ingrese el radio para el cuerpo 1: 0.0508
Ingrese el radio para el cuerpo 2: 0
Ingrese el coeficiente de fricción entre los cuerpos si hay F tangencial: 0

La longitud [mm] del semi eje mayor del area de contacto es [mm]: 6.36625e-005
Presión en el area de contacto es [mm]: 2.42595e+007
El esfuerzo principal en dirección del eje X es [Mpa]: -1.57598e+007
El esfuerzo principal en dirección del eje Y es [Mpa]: -2.35034e+007
El esfuerzo principal en dirección del eje Z es [Mpa]: -2.42536e+007
El maximo esfuerzo cortante es [Mpa]: 7.27786e+006
El esfuerzo cortante octaedrico es [Mpa]: 6.55008e+006
La maxima deflexion en la línea de contacto es [mm]: 7.54771e-008»

```

Programa COSMOS/M

El error relativo encontrado entre las dos soluciones, difiere en un 37.52%; sin embargo hay que tener en cuenta que la solución en Matlab, supone un contacto directo entre dos piezas de aluminio, y no tiene en cuenta la cubierta de goma que recubre el sujetador de aluminio con el fin de disminuir el impacto con el tubo.

Analizando los resultados obtenidos con los dos Software, se concluye que los resultados en Matlab para piezas con mas de dos materiales involucrados, no son muy precisos, pero permiten obtener de forma rápida un valor aproximado que de los esfuerzos de contacto, sin la necesidad de emplear varias horas en el análisis y modelación de un problema en COSMOS/M.

18. RECOMENDACIONES

El programa en Matlab entrega los resultados en el sistema de unidades (M.K.S), lo que indica que los datos de entrada deben introducirse en este mismo sistema de medida; sin embargo es posible emplear otro sistema de unidades siempre y cuando guarde consistencia con las unidades de los datos de entrada, a fin de asegurar una adecuada interpretación de los datos arrojados por el programa.

El programa cuenta con un archivo que contiene un tutorial, que facilita la manipulación del programa e indica cada uno de los pasos a seguir una vez se ingresa al menú inicial.

Un aspecto importante a tener en cuenta durante la modelación del problema de contacto es COSMOS/M, consiste en hacer coincidir nodo a nodo las superficies de los cuerpos analizados, ya sea en un punto para el caso de superficies esféricas o los nodos a lo largo de una línea de contacto para el caso de superficies cilíndricas.

Una vez verificada la coincidencia de los nodos, se procede a eliminar los nodos repetidos con el fin de garantizar el contacto entre los dos cuerpos modelados y así evitar que el programa emita error durante la ejecución.

El otro punto importante, hace referencia al tamaño del mallado de cada uno de los cuerpos analizados, ya que de este dependen los resultados obtenidos al ejecutar el programa. Si la malla es muy grande y la distancia entre nodos es mayor con respecto a la deformación de los cuerpos, estos nunca entrarán en contacto arrojando resultados nulos o erróneos.

19. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

19.1 LIBROS

BEER, Fernand & RUSSEL, Johnston. Mecánica de materiales. 2 ed. Barcelona, España: McGraw Hill, 1990. 160 p. ISBN 968-600-127-X.

DOUSCHMAN, Aaron D. Diseño de maquinas. 1 ed. México: Compañía editorial continental, 1985. 585-605 p. ISBN 968-26-0600-4

NORTON, L. R. Diseño de maquinas. , 1ed. México: Editorial Prentice Hall, 1999 480 p.

MOTT, Robert L. Diseño de elementos de maquinas. 2 ed. México: Prentice Hall, 1992. Sec. 11-13. 430 p. ISBN 0-675-2289-3

TIMOSHENKO, S. P y GOODIER, J. N. Theory of elasticity. 3ed. Barcelona: España: McGraw Hill, 1991. Sec. 109 p. ISBN 0-07-056888-X

SHIGLEY, J.E. y MISCHKE, L.D. Diseño en ingeniería mecánica. 5 ed. España: McGraw Hill, 1990. 145 p. ISBN 0-06-056968

FAIRES, J.M. Diseño de elementos de maquinas. 4 ed. España: Montaner y Simón, 1970. 47-49 p. ISBN 867-351-507-X

ROARK, Raimond J y otros. Formulas for Stress and Strain. 5 ed. New York: McGraw Hill Book Company, 1982. p 513-529, ISBN 0-07-0530319

BORES, Arthur P y otros. *Advances Mechanics of Materials*. 3 ed. New York: Jhon Wiley and Sons, 1978. p 581-627, ISBN 0-471-08892-7

ORTHWEIN, William C. *Diseño de componentes de Maquinas*. 1 ed. México: Ed. Continental S. A, 1996. p 109-113, ISBN 968-26-1257-8

ALONSO, Marcelo y FINN, Eduard. *Física Mecánica*. Bogota: Fondo Interamericacano, 1970. ISBN 24-04-31502-0

BALLIF, Jae R. y DIBBLE, William E. *Física Básica*. 2 ed. México: Limusa, 1976. ISBN 60-03-91403-1

EISBERG, Robert y LERNER, Lawrence S. *Física, Fundamentos y aplicaciones*. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1983. ISBN 50-03-55008-1

RESNICK, Robert y HALLIDAY, David. *Física para estudiantes de Ciencias e Ingenierías*. 13 ed. Barcelona: C.E.C.S.A, 1969. ISBN 60-03-50266-2

SEARS, Francis W y ZEMANSKY, Mark W. *Física*. Madrid: Aguilar S.A., 1979. 1010 p. ISBN 84-03-20203-2

19.2 FUENTES ELECTRONICAS

X. Lu, D. Pugh, and J. Scheetz. *General Solution for Hertz Contact Loading*. [Monografía en línea]. 1 ed. Pasadena (California): G. E. Development, 1999. Disponible en:<<http://www.crd.ge.com/cooltechnologies/pdf/1999crd170.pdf> >

SLOCUM Alexander. *Point and line contact between surfaces & Kinematic coupling design*. [Monografía en línea]. 2 ed. New York: Utha University, 1994. Disponible en:<<http://www.mech.utah.edu/~me7960/lectures/ContactStresses.pdf>>

DEEG Emil W. New Algorithms for Calculating Hertzian Stresses, Deformations, and Contact Zone Parameters. AMP Journal of Technology Vol. 2 November, 1992. Disponible en :< <http://www.amp.com/productos./technology/2jot2.pdf>>

DIACONU Nicolae, Lorena Tomescu, Ion Crudu. Theoretical model for estimating the stress distribution within the superficial layer, for two cylinders contact. [Monografía en línea]. 2 ed. New York : Research Development Center , 1994. Disponible en: <<http://www.om.ugal.ro/fasc%208%20-20tribologie/2002/pdf/2002>>

KOGUR Lior. The analysis of contact stress on meshed teeth's flanks along the path of contact for a tooth pair. [Monografía en línea]. New York : Highway Engineering, 2001. Disponible en:<<http://facta.junis.ni.ac.yu/facta/macar2003/pdf>>

