Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 5, número 9, junio de 2009, páginas 25–43

Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de vibraciones de una viga elástica

Simetria e novas soluções da equação de vibração de uma viga elástica

Symmetry and new solutions of the equation for vibrations of an elastic beam

Nikolay Sukhomlin[1] y José R. Álvarez[2]

Recepción: 10-nov-2008/Modificación: 21-mar-2009/Aceptación: 25-mar-2009
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

En este artículo se estudia la "no Lie" simetría de la ecuación de viga, se construyen todos los operadores de simetría diferenciales lineales, hasta tercer orden. Se constata que el problema de resolución de dicha ecuación se reduce a la búsqueda de soluciones de dos ecuaciones de Kolmogorov. Se despejan varias clases de soluciones de la ecuación, particularmente las que verifican la ley de conservación de la velocidad areolar inicial y las que verifican la ley de conservación de elasticidad inicial. Se ilustra la equivalencia entre el problema de Cauchy y la existencia de una simetría específica. Se encuentra el paralelismo sorprendente que existe entre la ecuación de viga y la ecuación de onda. Aplicando el "método Ansatz" se construye una amplia familia de nuevas soluciones exactas que incluye particularmente las que describen la propagación de ondas con amortiguamiento. Todos los resultados del artículo son nuevos, los pocos resultados conocidos en la literatura son siempre mencionados.

[1] PhD in Mathematical & Physical sciencies, ww17971865@yahoo.fr, profesor titular, Escuela de física, Universidad Autónoma de Santo Domingo, Santo Domingo de Guzmán–República Dominicana.
[2] Licenciado en física, coeton@hotmail.com, estudiante de maestría, Departamento de física, Universidad de Puerto Rico, San Juan–Puerto Rico.

Palabras claves: operadores de simetría, simetría y problema de Cauchy, paralelismo entre ecuaciones, método Ansatz.

Resumo

Este artigo explora a "não-Lie" simetria da equação do viga, são construídos todos os operadores diferenciais lineares da simetria a terceira ordem. Verifica-se que o problema da resolução desta equação é reduzida para encontrar soluções de equações de Kolmogorov. Encontramos várias classes de soluções da equação, particularmente aqueles que verificam a lei da conservação da velocidade inicial do setor e que verificam a lei de conservação de elasticidade inicial. São ilustrado a equivalência entre o problema de Cauchy e à existência de uma simetria específica. É impressionante o paralelismo entre a equação do viga e da equação de onda. Aplicando o método "Ansatz" constrói uma vasta família de novas soluções exatas, que inclui nomeadamente a propagação de ondas com amortecimento. Todos os resultados do trabalho são novos, a poucos resultados conhecidos na literatura são sempre mencionados.

Palavras chaves: operadores de simetria, simetria e problema de Cauchy, o paralelismo entre as equações, método Ansatz.

Abstract

In this short paper it is studied the "not Lie" symmetry of the beam equation. All operators of symmetry linear differential until third order are constructed. It is noted that the resolution of this equation reduces to finding solutions of two Kolmogorov equations. Several class of new solutions of the beam equation are found, particularly those that verify the law of conservation of the initial areolar speed and other that verify the law of conservation of the initial elasticity. It is showed the equivalence between the solution of the problem Cauchy and the existence of a specific symmetry. It is found a parallelism between the beam equation and the wave equation. Using the Ansatz method a wide new family of exact solutions is built. This family includes particularly the solutions which describe the propagation of damped waves. All results of this paper are new.

Key words: operators of symmetry, Cauchy problem and symmetry, parallelism between equations, Ansatz method.

1 Introducción

En el marco de la teoría de Euler–Bernoulli [1], el comportamiento dinámico de las vibraciones transversales de una viga elástica verifica la ecuación lineal diferencial parcial de orden cuatro

$$\hat{A}\Phi \equiv (\partial_t^2 - \partial_x^4)\Phi(t,x) = 0, \quad t \geqslant 0; \quad x \in [0,L] \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Los métodos de resolución de (1) no están desarrollados como en el caso de las ecuaciones de segundo orden. Tradicionalmente, en la literatura se utiliza la separación de variables directamente en coordenadas iniciales $\Phi(t,x) = X(x)T(t)$, lo que permite la aplicación del análisis de Fourier.

En los últimos tiempos varias ecuaciones han sido estudiadas aplicando la teoría de Lie. Gandarias y Bruzón [2], Bruzón et al. [3], Wafo [4] y otros aplicaron la teoría de Lie para deducir las simetrías clásicas de (1) y construir algunas soluciones particulares.

Sin embargo, la simetría "no Lie" de (1) prácticamente no está estudiada. Esta investigación representa el primer paso en esta dirección. Todos los resultados que se presentan en este artículo son nuevos, por lo tanto, se dificulta relacionar estos resultados directamente con los resultados existentes en la literatura. No obstante, los pocos resultados conocidos en la literatura son mencionados.

Los operadores de primer orden obtenidos, son obviamente iguales a los obtenidos con el enfoque de Lie, pero en dicho enfoque los autores los utilizan únicamente para la construcción de las soluciones particulares sin algún estudio del sentido físico de ellos. En este trabajo se intenta también eliminar esta laguna.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 se construye el espacio vectorial de todos los operadores de simetría de (1), lineales, diferenciales, hasta tercer orden. En las secciones 3 y 4 se plantea el problema de la construcción de las soluciones que verifican la ley de conservación de la velocidad areolar inicial y las que verifican la ley de conservación de la elasticidad inicial respectivamente.

En la sección 5 se ilustra la equivalencia entre el problema de Cauchy de valores iniciales y la existencia de una simetría específica del sistema dinámico. En la sección 6 se destaca el paralelismo existente entre la ecuación de viga y la ecuación de onda.

En la sección 7 se aplica el "método Ansatz" a (1). Después de exponer el método que se desarrolló y aplicó a las ecuaciones no lineales, se presenta su aplicación a la ecuación lineal. Esta utilización no tradicional del "método Ansatz" permite construir una familia de nuevas soluciones exactas de la ecuación de viga parametrizada por cuatro constantes arbitrarias e independientes.

2 Simetría de la ecuación de viga

El operador de (1) se puede factorizar en cualquiera de las dos formas:

$$\hat{A} = \hat{A}^{+}\hat{A}^{-} = \hat{A}^{-}\hat{A}^{+}, \tag{2}$$

$$\hat{A}^{+} \equiv \partial_t + \partial_x^2, \quad \hat{A}^{-} \equiv \partial_t - \partial_x^2 \,. \tag{3}$$

Rothe [5] utilizó la idea de factorización en una ecuación similar para una viga de forma triangular en una turbina, pero esto fue realizado por el autor luego de la separación de variables en coordenadas iniciales. En el presente artículo se realiza la factorización del operador de (1) y se hace independientemente de la separación de variables, lo que permite el estudio más eficaz de la simetría de dicha ecuación. Esta particularidad, permite formular las proposiciones:

Proposición 1.

1. *Los operadores $\hat{A}^{-}, \hat{A}^{+}$ son operadores de simetría de la ecuación de viga, pues $\lfloor \hat{A}, \hat{A}^{\pm} \rfloor = 0$. Además $\lfloor \hat{A}^{-}, \hat{A}^{+} \rfloor = 0$.*

2. *Los operadores $\hat{A}^{-}, \hat{A}^{+}$ definen las ecuaciones directa e inversa de Kolmogorov, respectivamente[1]:*

$$\hat{A}^{-}\Psi \equiv (\partial_t - \partial_x^2)\Psi = 0, \qquad \hat{A}^{+}\Psi \equiv (\partial + \partial_x^2)\Psi = 0 \,. \tag{4}$$

Proposición 2. *Sea $S \equiv \{\Phi | \hat{A}\Phi = 0\}$, el conjunto de todas las soluciones de* (1)*. Sean S^{+} y S^{-} dos subconjuntos: $S^{+} \equiv \{\Phi^{+} : \hat{A}^{+}\Phi^{+} = 0\}$, $S^{-} \equiv \{\Phi^{-} : \hat{A}^{-}\Phi^{-} = 0\}$, $S^{+} \cap S^{-} \neq \varnothing$, $S^{+} \subset S$ y $S^{-} \subset S$.*

[1] Es interesante que la similitud entre el papel de la ecuación de viga para las ecuaciones de cuarto orden y el papel de la ecuación de difusión para las ecuaciones parabólicas de segundo orden fue observado hace varias décadas, véase por ejemplo Conte [6].

1. *S es invariante con respecto a la aplicación de los operadores $\hat{A}^+$ y $\hat{A}^-$.*

2. *Los operadores de simetría $\hat{A}^+$ y $\hat{A}^-$, proyectan todo el conjunto S en los subconjuntos S^- y S^+ respectivamente: $\hat{A}^+\Phi \in S^-$, $\hat{A}^-\Phi \in S^+ \Leftrightarrow \hat{A}\Phi \in S$.*

3. *Cualquier combinación lineal de funciones $\Phi^\pm$ es solución de* (1)*.*

Estas proposiciones se comprueban directamente de (2), (3) y (4).

Observación 1. Usando la proposición 2 se pueden construir las soluciones de (1) a partir de cualquiera de los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos:

$$\begin{cases} \hat{A}^+\Phi = \Phi^- \\ \hat{A}^-\Phi^- = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{A}^-\Phi = \Phi^+ \\ \hat{A}^+\Phi^+ = 0\,. \end{cases}$$

Por definición, véase por ejemplo Shapovalov [7], un operador $\hat{B}$ se llama operador de simetría de $\hat{A}\Phi = 0$ si existe un operador lineal $\hat{F}$ tal que se verifica $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{F}\hat{A}$. De hecho, un operador de simetría de una ecuación transforma una solución de la ecuación en otra. Esta propiedad se usa en la demostración de la proposición 5.

Se construye ahora el conjunto de todos los operadores de simetría, diferenciales, lineales, hasta tercer orden, de la ecuación de viga

$$\hat{B} = \alpha(t,x)\partial_t + \beta(t,x)\partial_x^3 + \gamma(t,x)\partial_x^2 + \varepsilon(t,x)\partial_t\partial_x + \mu(t,x)\partial_x + \upsilon(t,x)\,,$$

donde las funciones $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \mu, \upsilon$ son tales que se verifica la condición de conmutación

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{F}\hat{A} \text{ con un operador lineal } \hat{F}\,. \tag{5}$$

Se encuentran dos subconjuntos de dichos operadores, los cuales se especifican en las proposiciones 3 y 4: con el operador $\hat{F} = 0$ y con el operador $F \neq 0$ respectivamente.

Proposición 3. *Todos los operadores de simetría de* (1) *diferenciales, lineales, hasta tercer orden que están en conmutación con el operador de la* *ecuación de viga* $[\hat{A}, \hat{B}] = 0, \hat{F} = 0$ *constituyen un espacio vectorial con la base*

$$\begin{array}{llll} \hat{B}_1 = \frac{x}{2}\partial_t + t\partial_x^3, & \hat{B}_2 = \partial_x^3, & \hat{B}_3 = \partial_x^2 & \hat{B}_4 = \partial_t\partial_x \\ \hat{B}_5 = \partial_x, & \hat{B}_6 = \partial_t, & \hat{B}_7 = 1\,. & \end{array} \tag{6}$$

Particularmente, en esta base los operadores $\hat{A}^+$ y $\hat{A}^-$ se presentan como $\hat{A}^\pm = \hat{B}_6 \pm \hat{B}_3$. Por otro lado, se conoce que los operadores de simetría, diferenciales, lineales, de primer orden, de las ecuaciones directa e inversa de Kolmogorov (4), respectivamente son:

$$\begin{array}{lll} \hat{A}^+\Psi = 0 \quad \Rightarrow & \hat{B}^+ = -2t\partial_x + x, & \hat{B}_x \equiv \partial_x\,, \\ \hat{A}^-\Psi = 0 \quad \Rightarrow & \hat{B}^- = 2t\partial_x + x, & \hat{B}_x \equiv \partial_x\,. \end{array} \tag{7}$$

Se nota que los operadores $\hat{B}^+$ y $\hat{B}^-$ representan los operadores de la coordenada inicial $\lim\limits_{t\to 0}\hat{B}^\pm = x_0$. El operador $\hat{B}_x$ corresponde en la mecánica cuántica al operador del momento lineal y en cada caso $[B_x, B^\pm] = 1$. Se usan estos operadores en la sección 5.

Entre todos los operadores del conjunto (6) el operador $\hat{B}_1$ tiene un interés especial. Éste se puede asumir en función de los operadores $\hat{A}^\pm$ y $\hat{B}^\pm$, así:

$$\begin{gathered} \hat{B}_1 = \frac{1}{4}(\hat{B}^+\hat{A}^- + \hat{B}^-\hat{A}^+)\,, \\ [\hat{A}^\pm, \hat{B}_1] = \pm\hat{A}^\pm\partial_x, \quad \Rightarrow \quad \hat{A}^\pm\hat{B}_1 = (\hat{B}_1 \pm \partial x)\hat{A}^\pm\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Proposición 4. *En el caso* $\hat{F} \neq 0$ *de la condición* (5) *todos los operadores de simetría, diferenciales, lineales, hasta tercer orden, se presentan como combinación lineal de los tres operadores, que son:*

$$\hat{B}_8 = tx\partial_t + t^2\partial_x^3 + \frac{x^2}{4}\partial_x - \frac{x}{2},\ \ \hat{B}_9 = 2t\partial_t + x\partial_x,\ \ \hat{B}_{10} = x\partial_x^2 + 2t\partial_x\partial_t\,. \tag{9}$$

Los cuales verifican las relaciones de conmutación:

$$\begin{gathered} [\hat{A}, \hat{B}_8] = 2x\hat{A}, \quad [\hat{A}, \hat{B}_9] = 4\hat{A}, \quad [\hat{A}, \hat{B}_{10}] = 4\partial_x\hat{A}, \\ [\hat{A}^\pm, B_9] = 2\hat{A}^\pm, \quad \Rightarrow \hat{A}^\pm\hat{B}_9 = (\hat{B}_9 + 2)\hat{A}^\pm\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Las proposiciones 3 y 4 pueden ser demostradas con facilidad.

Como ya fue mencionado, los operadores $\hat{B}_5$ y $\hat{B}_9$ también aparecen en los estudios realizados con el enfoque de Lie, sin embargo aquí se usan también los operadores de simetría de orden superior, y se da en la sección 4 la interpretación física del operador $\hat{B}_9$, lo que permite construir una nueva ley de conservación del modelo de Euler–Bernoulli.

Observación 2. Se afirma que $\hat{B}_{10} = \hat{B}_9\hat{B}_5$. Se puede demostrar que ningún otro producto de los operadores de simetría de (6) y (9) no entra en el conjunto de los operadores de simetría, diferenciales, lineales, hasta tercer orden aparte de relaciones triviales como $\hat{B}_2 = \hat{B}_5^3$, $\hat{B}_3 = \hat{B}_5^2$, $\hat{B}_4 = \hat{B}_6\hat{B}_5$.

3 Problema de soluciones de la ecuación de viga que verifican la ley de conservación de la velocidad areolar inicial

Se buscan las soluciones de (1) que son funciones propias del único operador de simetría no trivial $\hat{B}_1$ del conjunto (6).

$$\hat{A}\Phi = 0\,, \tag{11a}$$

$$\hat{B}_1\Phi = \lambda\Phi\,. \tag{11b}$$

El operador $\hat{B}_1$ tiene una interpretación física clara: es el operador de la velocidad areolar inicial

$$\text{si } t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_1\Phi \to \frac{x}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}\,,$$

en donde A representa el área cubierta por el desplazamiento transversal de la viga. Así, el sistema dinámico con la simetría definida por el operador $\hat{B}_1$ evoluciona de tal manera que se cumple la ley de conservación de la velocidad areolar inicial. Más exactamente, se conserva la velocidad areolar inicial relativa $\Phi^{-1}\hat{B}_1\Phi = \lambda = \text{const}$.

Proposición 5. *Las funciones propias del operador de simetría $\hat{B}_1$, que verifican el sistema* (11)*, con $\lambda \neq 0$, se presentan como combinación lineal de las funciones $\Phi^{\pm}$.*

Prueba. Sean $\hat{B}_1$ como en (7) y las funciones Φ^+, $\tilde{\Phi}^+ \in S^+$; $\Phi^-, \tilde{\Phi}^- \in S^-$ de la proposición 2. Entonces, (11b) para $\lambda \neq 0$ se reduce a

$$\begin{aligned}
\hat{B}_1\Phi &= \frac{1}{4}(\hat{B}^+\hat{A}^- + \hat{B}^-\hat{A}^+)\Phi = \frac{1}{4}\left(\hat{B}^+(\hat{A}^-\Phi) + \hat{B}^-(\hat{A}^+\Phi)\right) \\
&= \frac{1}{4}(\hat{B}^+\Phi^+ + \hat{B}^-\Phi^-) = \lambda_1\tilde{\Phi}^+ + \lambda_2\tilde{\Phi}^- = \lambda\Phi \\
&\Rightarrow \Phi = \alpha\Phi^+ + \beta\Phi^- \quad (\alpha, \beta = \text{const})\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Aquí se utiliza el hecho de que todos los operadores son lineales y que los operadores $\hat{B}^+, \hat{B}^-$ de (7) son los operadores de simetría de las respectivas ecuaciones de Kolmogorov (4).

Observación 3. El núcleo del operador $\hat{B}_1$ (el caso $\lambda = 0$, en (11b)) se presenta en forma $\Phi_{xxx} = t^{-1}\varphi(x/\sqrt{t})$ en donde $\Phi_x \equiv \partial\Phi/\partial x$ y la función φ verifica la ecuación diferencial ordinaria $4\varphi''' + \xi^2\varphi' + \xi\varphi = 0$, $\xi := x/\sqrt{t}$. De hecho, en este caso está realizada la separación de variables en coordenadas: $\tau = t$, $\xi = x/\sqrt{t}$. El conjunto de los elementos del núcleo no tiene la riqueza del caso $\lambda \neq 0$ de la proposición 5.

Aplicando los operadores $\hat{A}^\pm$ a (11b), usando (8) y la proposición 2, transformamos (11b) en una de las siguientes dos ecuaciones respectivamente:

$$\hat{C}^\pm\Phi^\pm \equiv (\hat{B}_1 \mp \partial_x)\Phi^\pm = \lambda\Phi^\pm\,.$$

Así, el sistema de orden cuatro (11) se reduce a dos sistemas independientes de tercer orden:

$$\hat{A}^+\Phi^+ = 0 \tag{12a}$$

$$\hat{C}^+\Phi^+ \equiv \left(\frac{x}{2}\partial_t + t\partial_x^3 - \partial_x\right)\Phi^+ = \lambda\Phi^+\,. \tag{12b}$$

$$\hat{A}^-\Phi^- = 0 \tag{13a}$$

$$\hat{C}^-\Phi^- \equiv \left(\frac{x}{2}\partial_t + t\partial_x^3 + \partial_x\right)\Phi^- = \lambda\Phi^-\,. \tag{13b}$$

El sistema (13) representa el problema de resolución de la ecuación directa de Kolmogorov (4) con un operador de simetría del tercer orden. En realidad, (13a) es la conocida ecuación de difusión. La clasificación de todos los operadores de simetría, diferenciales, lineales hasta el tercer orden, para las ecuaciones de tipo de difusión y de tipo de Shrödinger está hecha por Sukhomlin y Arias [8]. Así el sistema (13) entra en la clase de equivalencia 8 de este artículo, con el operador (usando las denotaciones (7))

$$\hat{C}^{-} = \frac{1}{4}(\hat{B}^{-}\hat{B}_x^2 + \hat{B}_x^2\hat{B}^{-}) + \frac{1}{2}\hat{B}_x\,. \tag{14}$$

Del hecho que $\hat{B}^{-} = 2t\hat{B}_x + x$ se puede afirmar que el operador $\hat{C}^{-}$ de (14) representa una forma cúbica[2] del operador $\hat{B}_x$ y entonces siempre puede ser factorizado

$$\hat{C}^{-} = \frac{1}{4}\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i\hat{B}_x - \beta_i) \text{ con ciertas funciones } \alpha_i = \alpha_i(t,x),\ \beta_i = \beta_i(t,x)\,.$$

Así la solución del sistema (13) se puede encontrar usando técnicas numéricas. El mismo procedimiento se aplica al sistema (12) y, conforme a las proposiciones 2 y 5, se puede construir la solución de la ecuación de viga como la combinación lineal de las soluciones de (12) y (13).

4 Problema de soluciones de la ecuación de viga que verifican la ley de conservación de la elasticidad inicial

Se busca ahora la solución del sistema:

$$\hat{A}\Phi = 0\,, \tag{15a}$$

$$\hat{B}_9\Phi = \lambda\Phi\,. \tag{15b}$$

Como se sabe, la elasticidad de una variable $\Psi(x)$, se define por $E \equiv x\Psi_x/\Psi$. Se constata que el operador $\hat{B}_9$ se interpreta como el operador de la elasticidad inicial del material de viga. Conforme a esto, el sistema dinámico

[2] Shapovalov y Sukhomlin [9] mostraron que para una ecuación diferencial lineal de tipo parabólico de segundo orden, los operadores de simetría lineales diferenciales de primer y segundo orden tienen un papel especial: cualquier operador de simetría diferencial lineal de orden superior al orden de la ecuación, siempre representa una forma de orden correspondiente de dichos operadores.

con la simetría definida por el operador $\hat{B}_9$ evoluciona de tal forma que se verifica la ley de conservación de la elasticidad inicial

$$\text{si } t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_9\Phi \to \frac{x\Delta\Phi}{\Delta x} = \lambda\Phi \quad \Rightarrow \quad E = \Phi^{-1}\hat{B}_9\Phi = \lambda\,.$$

Por un procedimiento similar al de la sección 3, utilizando (10) y la proposición 2, (15b) se puede escribir de la forma de una de las dos ecuaciones:

$$D^{\pm}\Phi^{\pm} = (\hat{B}_9 + 2)\Phi^{\pm} = \lambda\Phi^{\pm}\,.$$

Lo que también permite reducir el sistema (15) a dos sistemas independientes de segundo orden:

$$\hat{A}^{+}\Phi^{+} = 0\,, \tag{16a}$$
$$\hat{D}^{+}\Phi^{+} \equiv (2t\partial_t + x\partial_x + 2)\Phi^{+} = \lambda\Phi^{+}\,. \tag{16b}$$

$$\hat{A}^{-}\Phi^{-} = 0\,, \tag{17a}$$
$$\hat{D}^{-}\Phi^{-} \equiv (2t\partial_t + x\partial_x + 2)\Phi^{-} = \lambda\Phi^{-}\,. \tag{17b}$$

En este caso, el sistema (17) define el problema de resolución de la ecuación directa de Kolmogorov con un operador de simetría del primer orden. Este caso también está presente en la clasificación de Sukhomlin y Arias [8]. Es fácil encontrar la solución de este sistema

$$\Phi^{+}(x,t,\lambda) = t^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)})F(\xi)\,,$$

$\xi \equiv x/\sqrt{t}$, y la función $F = F(\xi)$ verifica la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} - \frac{\xi}{2}\frac{dF(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)F(\xi) = 0\,,$$

cuyas dos soluciones independientes se expresan en términos de las funciones hipergeométricas confluentes. Particularmente los polinomios de Hermite pertenecen a esta clase de soluciones.

De forma similar se puede proceder con el sistema (16). Dado que el operador de derivación con respecto al tiempo se puede expresar en función de los operadores $\hat{A}^{\pm}$: $\partial_t = \frac{1}{2}(\hat{A}^{+} - \hat{A}^{-})$, la ecuación de valores propios (16b) se presenta como

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \lambda\Phi = t(\Phi^{+} + \Phi^{-})\,.$$

Este procedimiento permite, luego de la resolución mencionada de los sistemas (16) y (17), obtener la solución de (1) que son funciones propias del operador de elasticidad inicial.

5 Correspondencia entre la simetría y el problema de Cauchy

Con el siguiente ejemplo se ilustra la importancia de la búsqueda de soluciones de la ecuación principal que sean simultáneamente las funciones propias de un operador de simetría con el sentido inicial especial. Sea la ecuación de difusión

$$\hat{C}f \equiv \{\partial_t - \partial_x^2\}f = 0\,. \tag{18}$$

Como se mencionó en (7) tiene sólo dos operadores de simetría independientes, lineales, diferenciales de primer orden: $\hat{B}^{-} = 2t\partial_x + x$ y $\hat{B}_x = \partial_x$. Las soluciones de (18), que son funciones propias del operador no trivial $\hat{B}^{-}$, verifican el sistema:

$$\begin{aligned} \hat{C}f &= 0\,, \\ \hat{B}^{-}f &= \lambda f\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Su solución es la ya conocida solución fundamental de la ecuación de difusión

$$f \equiv G(t,x,\lambda) = \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}\right\}\,, \tag{20}$$

donde la constante $c = 1/\sqrt{2\pi}$ se encuentra de la condición de la normalización.

Dos hechos son importantes: primero, que $\hat{B}^{-}$ es el *operador de la coordenada inicial* que se denota por λ y en consecuencia, la solución fundamental (20) verifica la ley de conservación de dicha coordenada $f^{-1}\hat{B}^{-}f = \lambda = \text{const.}$

La segunda propiedad consiste en el hecho que la función (20) representa también la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión con la función delta de Dirac como condición inicial (véase, por ejemplo, Tijonov y Samarsky [10]):

$$\begin{aligned} \hat{C}f(t,x) &= 0\,, \\ f(t=0,x) &= \delta(x-\lambda)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Así se llega a una importante conclusión:

Proposición 6. *La resolución del problema de Cauchy* (21) *da la misma respuesta que la resolución del sistema* (19) *en el cual la condición inicial se sustituye por un operador de simetría que tiene el sentido físico inicial correspondiente*[3]*.*

La situación es parecida en el caso de la ecuación de Black Scholes. Sukhomlin [11] construyó la "Ley de Conservación de Strike Price", que se verifica durante la evolución del sistema dinámico de Black Scholes, y comprobó que la existencia de dicha simetría es equivalente a la condición final del problema (la ecuación de Black Scholes es una ecuación retrógrada de Kolmogorov y su condición final corresponde a la condición inicial del problema de Cauchy). De hecho, Sukhomlin comprobó que la resolución de la ecuación de Black Scholes, junto con dicha ley de simetría, da la misma solución clásica que la construida por F. Black y M. Scholes por la resolución del problema de Cauchy correspondiente.

Descrita esta equivalencia, se valoriza el problema de soluciones de la ecuación de viga que verifican la ley de conservación de la velocidad areolar inicial y de la elasticidad inicial planteada en las secciones 3 y 4.

Se observa que se puede aplicar el mismo procedimiento al operador $\hat{B}_{10}$ que tiene también un sentido inicial especial: define la curvatura inicial a lo largo de la viga. Así el sistema dinámico, con la simetría definida por el operador $\hat{B}_{10}$, evoluciona de tal forma que se verifica la ley de conservación de la curvatura inicial.

[3]El sistema (19) tiene que ser completado por la condición de normalización lo que está automáticamente incluido en la condición inicial de (21).

6 Paralelismo entre la ecuación de viga y la ecuación de onda

Se encuentra que existe un paralelismo muy sorprendente entre las simetrías de (1) y la ecuación de onda. Esto se explica en parte por el hecho de que los operadores de ambas ecuaciones se factorizan de manera similar.

La ecuación de onda es de segundo orden y usando su único operador de simetría de primer orden no trivial, se puede reducir la resolución de la ecuación a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, parciales, de primer orden; lo que permite construir la solución general conocida como solución de D'Alembert. Mientras que la ecuación de viga es de cuarto orden y usando su único operador de simetría no trivial del conjunto (6) se puede reducir al máximo a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, parciales, de segundo orden, de tipo (12) y (13) cuyas soluciones generales no se conocen. Esta dificultad no permite construir la solución general de la ecuación de viga.

Se presenta este paralelismo en forma de dos columnas, donde se utilizan letras en mayúscula para todo lo que está ligado con la ecuación de viga, y letras en minúscula para lo que está ligado con la ecuación de onda.

Simetría

Ecuación de viga	**Ecuación de onda**
$\hat{A}\Phi \equiv (\partial_t^2 - \partial_x^4)\Phi = 0.$	$\hat{a}\varphi \equiv (\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi = 0.$
Factorización	Factorización
$\hat{A}^+\hat{A}^-\Phi = 0, \quad \hat{A}^+\hat{A}^-\Phi = 0$	$\hat{a}^+\hat{a}^-\varphi = 0, \quad \hat{a}^+\hat{a}^-\varphi = 0$
con	con
$\hat{A}^+ \equiv (\partial_t + \partial_x^2), \quad \hat{A}^- \equiv (\partial_t - \partial_x^2).$	$\hat{a}^+ \equiv (\partial_t + \partial_x), \quad \hat{a}^- \equiv (\partial_t - \partial_x).$

Se definen las funciones $\Phi^\pm$ y $\varphi^\pm$ que verifican las ecuaciones diferenciales:

$\hat{A}^+\Phi^+(t,x) \equiv (\partial_t + \partial_x^2)\Phi^+(t,x) = 0,$	$\hat{a}^+\varphi^+(t,x) \equiv (\partial_t + \partial_x)\varphi^+(t,x) = 0,$
$\hat{A}^-\Phi^-(t,x) \equiv (\partial_t - \partial_x^2)\Phi^-(t,x) = 0.$	$\hat{a}^-\varphi^-(t,x) \equiv (\partial_t - \partial_x)\varphi^-(t,x) = 0.$
1. $\hat{A}^+$ transforma Φ en Φ^+ y $\hat{A}^-$ transforma Φ en Φ^-.	**1.** $\hat{a}^+$ transforma φ en φ^+ y $\hat{a}^-$ transforma φ en φ^-.
2. Cualquier combinación lineal de funciones $\Phi^\pm$ es solución de la ecuación de viga.	**2.** La combinación lineal de funciones $\varphi^\pm$ es solución general de la ecuación de ondas.

Operadores de simetría de orden inferior al orden de la ecuación principal y que tienen el mismo sentido físico.

1. $[\hat{A},\hat{B}]=0$:	**1.** $[\hat{a},\hat{b}]=0$:
$\hat{B}_1=\frac{x}{2}\partial_t+t\partial_x^3$	$\hat{b}_1=\frac{x}{2}\partial_t+\frac{t}{2}\partial_x$
2. $[\hat{A},\hat{B}]=\mathcal{Q}(t,x)\hat{A}$:	**2.** $[\hat{a},\hat{b}]=q(t,x)\hat{a}$:
$\hat{B}_9=2t\partial_t+x\partial_x$	$\hat{b}_5=t\partial_t+x\partial_x$
$\lim\limits_{t\to 0}\hat{B}_1=\frac{x}{2}\partial_t, \quad \lim\limits_{t\to 0}\hat{B}_9=x\partial_x$	$\lim\limits_{t\to 0}\hat{b}_1=\frac{x}{2}\partial_t, \quad \lim\limits_{t\to 0}\hat{b}_5=x\partial_x$
$\hat{B}_1$ es el operador de velocidad areolar inicial, $\hat{B}_9$ representa el operador de elasticidad inicial.	$\hat{b}_1$ es el operador de velocidad areolar inicial, $\hat{b}_5$ representa el operador de elasticidad inicial.

Se puede escribir $\hat{B}_1$ y $\hat{b}_1$ en función de los operadores $\hat{A}^{\pm}$ y $\hat{a}^{\pm}$ en forma similar:

$\hat{B}_1=\frac{1}{4}(\hat{B}^+\hat{A}^-+\hat{B}^-\hat{A}^+)$	$\hat{b}_1=\frac{1}{2}(\hat{b}^+\hat{a}^-+\hat{b}^-\hat{a}^+)$
en donde se denota los operadores de simetría de las ecuaciones $\hat{A}^{\pm}\Phi=0$:	en donde se denota los operadores de simetría de las ecuaciones $\hat{a}^{\pm}\varphi=0$:
$\hat{B}^+=-2t\partial_x+x, \quad \hat{B}^-=2t\partial_x+x.$	$\hat{b}^+=-t+x, \quad \hat{b}^-=t+x.$
Respectivamente $\hat{B}^{\pm}$ son operadores de coordenada inicial $\lim\limits_{t\to 0}\hat{B}^{\pm}=x_0$.	Respectivamente $\hat{b}^{\pm}$ son operadores de coordenada inicial $\lim\limits_{t\to 0}\hat{b}^{\pm}=x_0$.

Problema de valores propios de los operadores $\hat{B}_1$ y $\hat{b}_1$:

$$\begin{cases}\hat{A}\Phi=0\\ (\hat{B}^-\hat{A}^++\hat{B}^+\hat{A}^-)\Phi=4\lambda\Phi\,.\end{cases} \qquad \begin{cases}\hat{a}\varphi=0\\ (\hat{b}^-\hat{a}^++\hat{b}^-\hat{a}^+)\varphi=2\mu\varphi\,.\end{cases}$$

En ambos casos se puede disminuir el orden de la ecuación principal usando la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{cases}(2t\partial_t^2+x\partial_t\partial_x+\partial_t-\lambda\partial_x)\Phi=0\\ \left(\frac{x}{2}\partial_t+t\partial_x^3\right)\Phi=\lambda\Phi\,.\end{cases} \qquad \begin{cases}(t\partial_t^2+x\partial_t\partial_x+\partial_t-\mu\partial_x)\varphi=0\\ \left(\frac{x}{2}\partial_t+\frac{t}{2}\partial_x\right)\varphi=\mu\varphi\,.\end{cases}$$

La similitud entre estos dos últimos sistemas de ecuaciones es evidente: la primera ecuación de cada sistema tienen la misma estructura y los operadores de simetría tienen el mismo sentido físico.

7 Nuevas soluciones exactas de la ecuación de viga usando el método Ansatz

El método Ansatz es comúnmente utilizado por físicos y matemáticos. Un *Ansatz* es una solución estimada a una ecuación inicial que describe un problema físico o matemático. Si un Ansatz resulta ser lo suficientemente bueno, luego será validado por los resultados obtenidos. Algunas veces se introducen ciertos parámetros que pueden ser actualizados luego de la evaluación del resultado, este proceso de prueba y ajuste puede ser realizado iterativamente hasta alcanzar un nivel de precisión deseado.

Por su sentido, un Ansatz es una suposición que se ha verificado más tarde por sus resultados. Después que un Ansatz se ha establecido, las ecuaciones se resuelven con una solución de interés para las aplicaciones.

En física, el Bethe Ansatz es un método para encontrar las soluciones exactas de ciertos modelos cuánticos unidimensionales de muchos cuerpos. Fue inventado por Hans Bethe [12] en 1931 para hallar los valores y vectores propios exactos del hamiltoniano unidimensional del modelo de Heisenberg del antiferromagnetismo.

Sin entrar en la presentación de numerosas aplicaciones del método Ansatz, se puede mencionar otra variante de dicho método llamado "método Ansatz local". Biao Li y Yong Chen [13] aplicaron el método Ansatz a la ecuación no lineal de Boussinesq que es utilizada en la teoría de vibraciones de viga elástica. Los autores encontraron una solución en forma de un solitón. Este resultado no se puede comparar con los descritos aquí porque por definición la ecuación de Boussinesq describe las vibraciones de viga no lineales. El modelo de Bernoulli–Euler contiene la ecuación lineal (1) y no puede contener las soluciones en forma de solitones, pero, como se muestra más adelante, se puede encontrar las soluciones en forma de ondas amortiguadas.

No existe un método estándar para escoger una forma Ansatz conveniente de la solución, pero la idea común consiste en la elección de nueva función incógnita con un argumento lineal respecto con la coordenada y el tiempo. En lo que se conoce, hasta esta publicación (Sukhomlin y Ortiz [14]), el método Ansatz fue aplicado únicamente a las ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, para las ecuaciones lineales, como también se confirma en el presente artículo, se puede encontrar resultados nuevos e interesantes usando dicho método.

Es oportuno mencionar que la utilización de un argumento lineal respecto con la coordenada y el tiempo está justificada en nuestro caso por el paralelismo que se descubrió entre la ecuación de vibraciones de una viga (1) y la ecuación de onda. Se recuerda que la solución general de D'Alembert de esta última ecuación contiene exactamente y exclusivamente los argumentos de este tipo.

Conforme a lo expuesto se plantea el problema de la construcción de soluciones particulares de la ecuación de viga en forma de ondas.

Sean (1) y $w(t,x)$ una solución dada. Se buscan las soluciones particulares de (1) que se presentan en la forma

$$\Phi(t,x) = w(t,x)Z(\theta)\,,$$

donde la nueva función incógnita $Z(\theta)$ depende de un sólo argumento $\theta = \theta(t,x)$, el cual se elige lineal, y para simplificar, se toma la solución particular $w(t,x)$:

$$\begin{aligned} &w(t,x) = \exp(\mu^2 t + \mu x), \quad \theta = \alpha x + \beta t \\ &\qquad \mu \equiv m + iq, \;\; \alpha,\beta,m,q \in \mathbb{R}, \;\; \alpha^2+\beta^2 \neq 0, \;\; m^2+q^2 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Ahora, (1) se transforma en la ecuación diferencial ordinaria

$$\alpha^4 \frac{d^4 Z}{d\theta^4} + 4\mu\alpha^3 \frac{d^3 Z}{d\theta^3} + (6\mu^2\alpha^2 - \beta^2)\frac{d^2 Z}{d\theta^2} + (4\mu^3\alpha - 2\mu^2\beta)\frac{dZ}{d\theta} = 0\,,$$

con su solución general:

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{2\mu\alpha - \beta}{\alpha^2}\theta\right) + C_3 \exp\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\theta\right) + C_4 \exp\left(\frac{\xi}{\alpha^2}\theta\right)\,, \\ \tau &\equiv \frac{1}{2}(-2\mu\alpha - \beta - \sqrt{-4\mu^2\alpha^2 + 4\mu\alpha\beta + \beta^2})\,, \\ \xi &\equiv \frac{1}{2}(-2\mu\alpha - \beta + \sqrt{-4\mu^2\alpha^2 + 4\mu\alpha\beta + \beta^2})\,. \end{aligned}$$

Así se encuentra una familia de nuevas soluciones de la ecuación de viga:

$$\begin{aligned} \Phi(t,x,\alpha,\beta,m,q) &= C_1 \exp\left(\frac{\mu}{\alpha}\theta + \omega t\right) + C_2 \exp(\zeta\theta + \omega t) + C_3 \exp(\eta\theta + \omega t) + \\ C_4 \exp(\delta\theta + \omega t) \;\; &\alpha,\beta,m,q,C_1,C_2,C_3,C_4 = \text{const} \;\; (\alpha^2+\beta^2 \neq 0, \;\; m^2+q^2 \neq 0)\,, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\omega \equiv \mu^2 - \mu\frac{\beta}{\alpha}, \quad \eta \equiv -\frac{1}{2\alpha^2}(\beta + \sqrt{-4\mu^2\alpha^2 + 4\mu\alpha\beta + \beta^2})\,,$$
$$\zeta \equiv -\frac{\mu\alpha - \beta}{\alpha^2}, \quad \delta \equiv -\frac{1}{2\mu^2}(\beta - \sqrt{-4\mu^2\alpha^2 + 4\mu\alpha\beta + \beta^2})\,.$$

Se puede constatar que la solución (22) representa una familia cuatro veces parametrizada, con los parámetros reales α, β, m, q, ($\mu = m + iq$), y con cuatro constantes arbitrarias e independientes C_1, C_2, C_3, C_4. Se puede ilustrar la diversidad de esta familia, especificando los valores de $\alpha, \beta, m, q, C_1, C_2, C_3, C_4$ en la expresión (22) y obtener las soluciones particulares siguientes:

1. Si se eligen las condiciones: $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $C_3 = C_4 = 0$, $\mu = m + iq$ con $m = \frac{\beta}{2\alpha}$ se obtiene la clase de nuevas soluciones de (1) que describe la propagación de ondas amortiguadas dentro de la viga

$$\Phi(t, x, \varepsilon, m, q) = A\cos[q(x + 2mt + \varepsilon)]e^{[mx + (m^2 - q^2)t]}\,, \tag{23}$$

   donde A representa la amplitud y ε la fase inicial de las oscilaciones; A y ε se expresan en función de C_1 y C_2.

2. Si ahora se eligen las condiciones: $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 \neq 0$, $C_4 \neq 0$, $\mu = m + iq$, con $m = \frac{\beta}{2\alpha}$, la familia de nuevas soluciones de la ecuación de viga es

$$\Phi(t, x, m, q, \varepsilon) = B\cosh[n(x + 2mt + \varepsilon)]e^{-[mx + (3m^2 + q^2)t]}\,, \tag{24}$$

   donde las constantes B y ε se expresan en función de C_3 y C_4; y $n \equiv \sqrt{2m^2 + q^2}$. Se observa que las soluciones de tipo (24) no describen la propagación de ondas dentro de la viga como en el caso de (23), sino que representan la vuelta viscosa de la viga a su posición de equilibrio sin oscilaciones.

8 Conclusión

El estudio de la simetría “no Lie” de la ecuación de viga permitió construir todos los operadores de simetría diferenciales lineales, hasta tercer orden. Fue constatado que el problema de resolución de dicha ecuación se reduce a la búsqueda de soluciones de dos ecuaciones de Kolmogorov.

El estudio de dicha simetría facilita destacar dos clases de nuevas soluciones de la ecuación de viga que verifican las leyes de conservación de la velocidad areolar inicial y de la elasticidad inicial respectivamente. La importancia de estas dos clases se justifica por la equivalencia descubierta entre el problema de Cauchy y la simetría específica inicial del modelo. Esto sugiere que estudiando el comportamiento de las soluciones locales es posible extraer cierta información sobre la evolución general del sistema dinámico.

Está establecido el paralelismo entre la ecuación de vibraciones de una viga elástica y la ecuación de onda. También, el método Ansatz permitió la construcción de una clase de nuevas soluciones de la ecuación de viga que describen, entre otros, la propagación de ondas amortiguadas dentro de la viga.

Agradecimientos

Los autores agradecen: al doctor Franklin García Fermín, rector de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD); a la Escuela de física por el apoyo en las investigaciones; a Maria Penkova Vasilieva, Intec, por las discusiones sobre algunos temas en el marco del proyecto de investigación; y a los árbitros anónimos. También, un agradecimiento particular a Luis F. Moreno S., coordinador de la revista Ingeniería y Ciencia.

Referencias

[1] W. Weaver Jr, S. P. Timoshenko and D. H. Young. *Vibration problems in engineering*, fifth edition, ISBN 0–471–63228–7. Wiley–Interscience, 1990. Referenciado en 26

[2] Maria Luz Gandarias and Maria de los Santos Bruzón. *Classical and nonclassical symmetries of a generalized Boussinesq equation*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, ISSN 1402–9251, **5**(1), 8–12 (1998). Referenciado en 27

[3] Maria de los Santos Bruzón, José Carlos Camacho y José Ramírez Labrador. *Modelo de vibraciones de una viga. Reducciones por simetrías*, Proceeeding of the

CISCI: International Conference on Education & Information Systems, Florida, USA, 168–193 (2004). Referenciado en 27

[4] Wafo Soh. *Euler–Bernoulli beams from a symmetry standpoint–characterization of equivalent equations*, http://arxiv.org/abs/0709.1151v1 (Preprint submitted to Elsevier). 7 September 2007. Referenciado en 27

[5] Rudolf Rothe. *Matemática superior para matemáticos, físicos e ingenieros*, ISBN 0–378–20663–1. Editorial Labor, S.A., España, **III**, 1960. Referenciado en 28

[6] S. D. Conte. *A stable implicit finite difference approximation to a fourth order parabolic equation*. Journal of the Association for Computing Machinery, ISSN 0004–5411, **4**(1), 18–23 (1957). Referenciado en 28

[7] V. N. Shapovalov. *Group properties of linear equations*. Russian Physics Journal, ISSN 1064–8887, **11**(6), 75–80 (1968). Referenciado en 29

[8] N. Sukhomlin y M. Arias. *Estudio de simetría y de posibilidades de resolución exacta de las ecuaciones de Schödinger y Hamilton–Jacobi para un sistema aislado*. Ciencia y Sociedad, ISSN 0378–7680, **29**(1), 26–37 (2004). Referenciado en 33, 34

[9] V. N. Shapovalov and N. B. Sukhomlin. *Separation of variables in the non stationary Schrödinger equation*. Russian Physics Journal, ISSN 1064–8887 (Print), 1573–9228 (Online), **17**(12), 1718–1722 (1974). Referenciado en 33

[10] N. Tijonov y A. A. Samarsky. *Ecuaciones de la física matemática*, ISBN 0–158–70015–3. Mir, Moscú, 227 (1972). Referenciado en 36

[11] N. Sukhomlin. *Conservation law of strike price and inversion of the Black-Scholes formula*. Russian Physics Journal, ISSN 1064–8887 (Print) 1573–9228 (Online), **50**(7), 741–743 (2007). Referenciado en 36

[12] H. Bethe. *Zur theorie der metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, ISSN 0939–7922 (Print) 1431–5831 (Online), **71**(3–4), 205–226 (1931). Referenciado en 39

[13] Biao Li and Yong Chen. *Nonlinear partial differential equations solved by projective Riccati equations Ansatz*. Zeitschrift für Naturforschung A, ISSN 0932–0784, **58a**, 511–519 (2003). Referenciado en 39

[14] Nikolay Sukhomlin and Jan Marcos Ortiz. *Equivalence and new exact solutions to the Black–Scholes and diffusion equations*. Applied Mathematics E-Notes, ISSN 1607–2510, **7**, 206–213 (2007). Referenciado en 39