

# **CALIBRACIÓN DE MODELOS PLANOS PARA EFECTUAR ANÁLISIS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA**

**Juan Camilo Molina Villegas**

Ingeniero civil Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

Especialista en ingeniería sismo resistente Universidad Eafit

jmolina2@eafit.edu.co

## **RESUMEN**

En el presente documento se estudia la posibilidad de obtener propiedades equivalentes de un modelo plano para el estudio de interacción suelo estructura para varias configuraciones del sitio de cimentación. Para tal efecto se toma como modelo básico tridimensional un sistema de un grado de libertad sobre un semiespacio elástico, homogéneo e isotrópico con cimentación circular. Para el modelo plano se toma un modelo similar al tridimensional cambiando la cimentación circular por una rectangular infinita (strip foundation). Del análisis anterior se obtienen los parámetros equivalentes del modelo plano básico (masa, altura, rigidez y amortiguamiento de la estructura, ancho de la cimentación, modulo de corte, relación de Poisson y densidad del suelo) tanto dependientes como independientes de la frecuencia y se estudia la posibilidad de extrapolar estos resultados a otros escenarios diferentes al usado para la calibración.

## **ABSTRACT**

The present work explores the possibility of obtaining equivalent in-plane or 2D idealizations to address soil structure interaction type of problems under given soil-structure 3D configurations. The starting point is a 3D single-degree-of-freedom (SDOF) structure supported on a circular foundation over an elastic and isotropic half-space. The proposed planar idealization is similar to the 3D model but with a rectangular (or strip) foundation that extends to infinity in the direction normal to the plane of the model. From the analysis of both models equivalent properties for the 2D case (like structural mass, height, stiffness and damping, foundation width, and soil shear modulus, Poisson ratio and density) are obtained. Equivalent properties which are frequency dependent and frequency independent are considered. The possibility of extrapolating the obtained results to different scenarios is also studied.

## **PALABRAS CLAVE**

Interacción suelo estructura, modelos planos, funciones de impedancia.

## INDICE

	Pág.
1. INTRODUCCIÓN	4
2. EXPLICACIÓN CUALITATIVA DE LA INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA	5
3. PLANTEAMIENTO INGENIERIL DEL PROBLEMA DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA	7
4. ESTADO DEL ARTE DEL PROBLEMA DE APROXIMAR MEDIANTE MODELOS PLANOS EL FENOMENO DE INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL	11
5. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS A EMPLEAR	13
5.1 MODELO TRIDIMENSIONAL	13
5.2 MODELO PLANO	13
5.3 LIMITACIONES DE LOS MODELOS A EMPLEAR	13
6. PROCEDIMIENTO	15
6.1 MODELO TRIDIMENSIONAL	15
6.2 MODELO PLANO	22
7. COMPARACIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL Y PLANO	26
7.1 COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA	26
7.2 COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA	29
8. CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO PLANO EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA	32
8.1 PRIMERA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN DE LA AMPLITUD DE LOS TÉRMINOS DE LA DIAGONAL DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA)	32
8.2 SEGUNDA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN DE TRES DE LOS CUATRO TÉRMINOS DE LA DIAGONAL DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA)	35
8.3 TERCERA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (MODELO CON MALLADO INVARIABLE)	37
8.4 CUARTA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARAMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN SOLO DEL MOVIMIENTO EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA)	41
8.5 QUINTA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARAMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (MODELO CON AMORTIGUAMIENTO EN EL SUELO)	41
8.6 COMENTARIOS SOBRE LAS REPERCUSIONES DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS CALIBRACIONES PRESENTADAS EN ESTE NUMERAL	42
9. CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA	44
9.1 CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN INTERVALO CORTO DE FRECUENCIAS CENTRADO EN LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL DEL SISTEMA	44
9.2 CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN AMPLIO RANGO DE FRECUENCIAS	44
9.3 COMENTARIOS RESPECTO AL PROCEDIMIENTO PRESENTADO EN ESTE NUMERAL	46
10. COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE VARIAS DE LAS CALIBRACIONES PROPUESTAS	47
10.1 COMPARACIÓN DEL MODELO PLANO EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA	47

10.2	COMPARACIÓN DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA	49
11.	COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA ENTRE VARIOS MODELOS TRIDIMENSIONALES Y PLANOS	52
11.1	CIMENTACIÓN SUPERFICIAL SOBRE SEMIESPACIO ELASTICO	52
11.2	CIMENTACIÓN SUPERFICIAL SOBRE ESTRATO ELASTICO EMPOTRADO	53
11.3	CIMENTACIÓN ENTERRADA EN UN SEMIESPACIO ELASTICO	55
11.4	CIMENTACIÓN ENTERRADA EN UN ESTRATO EMPOTRADO EN SU BASE	58
12	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	61
	BIBLIOGRAFIA	62
	APENDICE 1: LISTA DE VARIABLES	65

# 1. INTRODUCCIÓN

Desde hace tiempo la comunidad científica es consciente de que el problema de interacción suelo estructura es puramente tridimensional y que esto es debido tanto a la respuesta dinámica de la estructura como a la del suelo de soporte. Como ejemplo de lo anterior se tiene la existencia de modos torsionales en estructuras con base empotrada y la presencia de ondas que viajan en un amplio rango de direcciones en problemas básicos de elastodinámica.

Con el objetivo de disminuirle una dimensión al problema, ya sea para facilitar el entendimiento del mismo o para rebajar la carga computacional, se han emprendido esfuerzos para obtener modelos bidimensionales (deformación plana) que representen dentro de los límites de la precisión ingenieril el fenómeno tridimensional. Como resultado de lo anterior se han propuesto propiedades equivalentes del modelo plano de tal manera que presenten el modelo tridimensional aproximadamente en ciertos escenarios. En este punto debe recordarse que existen en ingeniería muchos problemas estáticos que permiten su solución exacta o muy cercana a ésta mediante procedimientos de deformación plana, tensión plana o axisimétricos y que los modelos planos a su vez son muy fructíferos en el estudio de propagación de ondas.

El objetivo de este trabajo es realizar una calibración de los parámetros de los cuales es función la respuesta de una estructura de un grado de libertad plana cimentada sobre la superficie de un semiespacio elástico y homogéneo ante ciertas condiciones especiales de las ondas incidentes (Figura 1.1.b), para representar adecuadamente la respuesta de su contraparte tridimensional (Figura 1.1.a). La diferencia con las propuestas realizadas hasta la fecha es que se presentará una calibración que es función de la frecuencia, es decir, que las propiedades equivalentes del modelo plano no serán únicas sino que variarán con la frecuencia de estudio, lo que de antemano significa una mayor precisión.

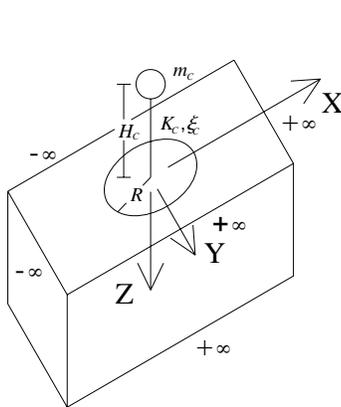


Figura 1.1.a: Modelo tridimensional

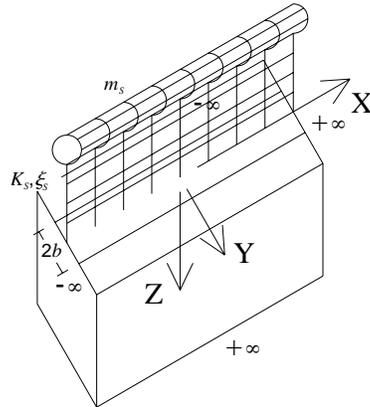


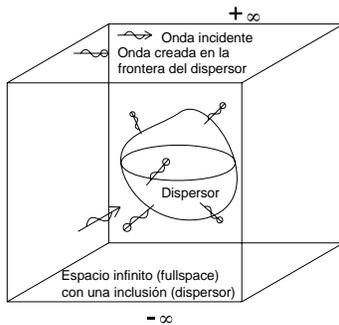
Figura 1.1.b: Modelo bidimensional

Debido a que en la mayoría de casos no es posible representar el suelo como un semiespacio homogéneo o la cimentación como superficial, se estudiará la posibilidad de extrapolar los resultados obtenidos a otras condiciones del suelo y cimentación.

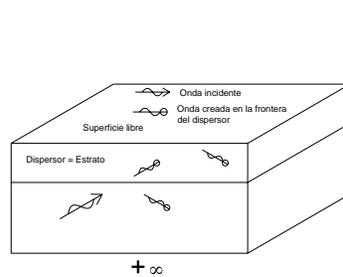
## 2. EXPLICACIÓN CUALITATIVA DE LA INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

El fenómeno de interacción suelo estructura puede ser entendido en su forma más pura como el problema de difracción de ondas o del “dispersor” (cuerpo extraño en un medio), en el cual la estructura hace el papel de éste (Figura 2.1). De esta manera se entiende claramente como las ondas que viajan en el suelo son alteradas no solamente por la estratificación del terreno o la topografía sino también por las condiciones de frontera dinámicas tanto de tracciones como de deformaciones que impone la estructura y su movimiento en la interfaz de suelo sobre la cual está apoyada.

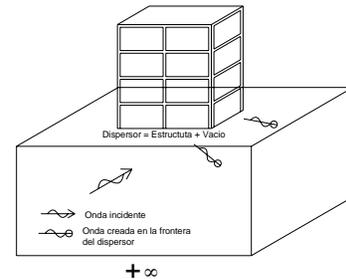
La presencia del dispersor (estructura) da lugar a la creación de ondas en la interfaz suelo estructura que se propagan alejándose de la estructura o ingresando a la misma. Debido a este movimiento conjunto de suelo y estructura se obtienen como resultado desplazamientos que son diferentes a los que se obtendrían simplemente por el efecto de superficie libre, estratificación o topografía (efectos locales) e incluso los que se obtendrían con el suelo y la cimentación (sin la superestructura), pues claramente las condiciones de frontera variables en el tiempo creadas por la estructura distan mucho de aquellas constantes en el tiempo creadas por la superficie libre.



**Figura 2.1.a: Problema del dispersor genérico.**

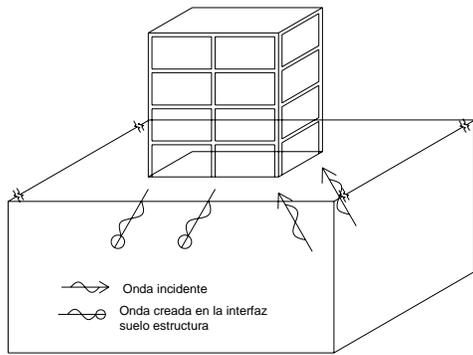


**Figura 2.1.b: Problema del dispersor para un estrato sobre semiespacio.**

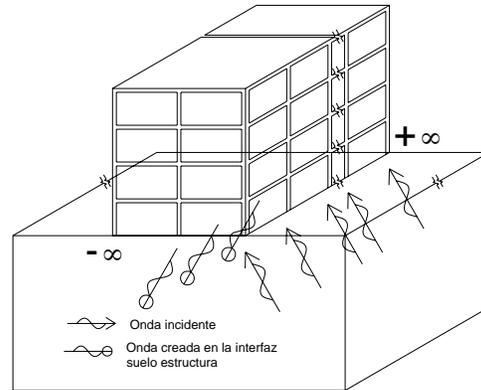


**Figura 2.1.c: Problema del dispersor para el análisis de interacción suelo-estructura.**

El fenómeno de radiación de las ondas que salen de la interfaz suelo-estructura (dispersión) y de la reflexión de ondas en la superficie libre es responsable de imprecisiones cuando se usan modelos numéricos “finitos” para representar el fenómeno de interacción-suelo estructura. Igualmente, esta radiación se convierte en uno de los obstáculos más difíciles de salvar a la hora de plantear los modelos planos (ver Figura 2.2), pues el modelo plano sobrevalora altamente la radiación respecto al tridimensional, lo que conlleva a una predicción de desplazamientos menores. Otra de las grandes diferencias entre ambos modelos es que el tridimensional presenta una mayor rigidez que el plano, lo anterior se puede entender si se considera que para desplazar la estructura tridimensional es necesario desplazar una mayor cantidad de suelo que para la plana (aquí nos referimos a una profundidad equivalente de la estructura plana).



**Figura 2.2.a: Radiación en una estructura tridimensional.**



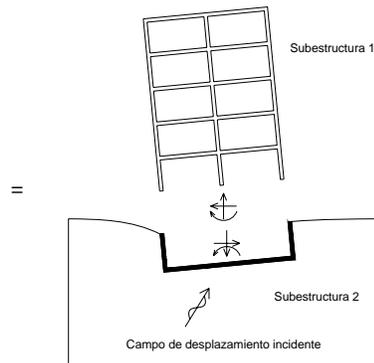
**Figura 2.2.b: Radiación en una estructura plana.**

### 3. PLANTEAMIENTO INGENIERIL DEL PROBLEMA DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

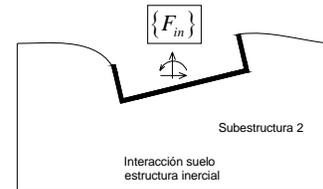
Debido al amplio uso, al ser la base de los códigos de diseño y a que en este trabajo se usará, a continuación se resumirá el planteamiento ingenieril del fenómeno de interacción suelo-estructura. Para esto nos apoyaremos en la Figura 3.1 que se presenta a continuación:



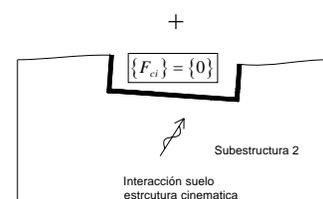
**Figura 3.1.a: Sistema suelo-estructura sometido a un campo de ondas incidentes.**



**Figura 3.1.b: Subestructuración del sistema suelo-estructura.**



**Figura 3.1.c: Interacción suelo-estructura inercial**



**Figura 3.1.d: Interacción suelo-estructura cinemática**

En el análisis ingenieril de interacción suelo-estructura el sistema formado por el suelo (medio seminfinito) y la estructura (medio finito) se subdivide en dos subsistemas o subestructuras, el suelo y la estructura [3], los cuales se pueden fácilmente acoplar por medio de relaciones de continuidad y equilibrio. Además, de lo anterior usualmente se supone que la cimentación es infinitamente rígida para reducir el número de grados de libertad del suelo y facilitar el acople entre las subestructuras (Figura 3.1.b). Este proceso de subestructuración se debe a la gran diferencia que existe entre el comportamiento del suelo y la estructura (esta metodología guarda implícita la posibilidad de resolver el problema de valores en la frontera para ambos espacios mediante diferentes procedimientos) y a la posibilidad de usar los resultados para un mismo tipo de suelo en diferentes estructuras. Una vez realizada la subestructuración se enfoca la atención a solucionar el problema del movimiento de la cimentación rígida apoyada en el suelo y sometida al campo de ondas incidentes, y a la resolver el problema del movimiento de la cimentación rígida sometida a la acción de fuerzas externas (subestructura 2). No se prestará atención al modelamiento de la estructura (subestructura 1) debido a que este problema tiene una solución relativamente estandarizada y difundida ampliamente tanto para el dominio del tiempo como de la frecuencia.

Aprovechando las propiedades de linealidad que tiene el problema, el movimiento de la subestructura 2 se divide en los siguientes dos problemas básicos:

El primero es obtener el desplazamiento forzado de la cimentación debido a las fuerzas externas actuantes sobre ella (Figura 3.1.c). Este problema se conoce en el ámbito ingenieril como el de interacción suelo-estructura inercial, y es simplemente un problema de radiación de ondas. Este problema ha sido ampliamente estudiado desde antes del análisis de la interacción suelo estructura bajo el contexto del análisis de fundaciones para maquinaria. También es ampliamente usado para la evaluación de la interacción suelo estructura debido a cargas generadas fuera del suelo como es el caso de cargas eólicas o cargas generadas dentro de la estructura en análisis. El objetivo del estudio de la interacción inercial en el dominio de la frecuencia es encontrar matrices de rigidez dinámicas (matrices de impedancia) que relacionen las fuerzas externas sobre la cimentación y los desplazamientos de ésta. Las funciones de impedancia son dependientes de la frecuencia de excitación, de la geometría de la cimentación y de las propiedades elásticas, inerciales y geométricas del suelo de soporte. De lo anterior se entiende que el análisis a afrontar es en el dominio de la frecuencia y debe emplearse el análisis de Fourier para su solución.

El segundo problema es obtener el movimiento de la cimentación sin masa bajo la acción del campo de ondas incidente (Figura 3.1.d). Este problema se conoce en el ámbito ingenieril como el de interacción suelo-estructura cinemática y es simplemente un problema de dispersión de ondas. Este efecto es función de la geometría y tipo de la cimentación (ej cimentación superficial o profunda), de las propiedades elásticas, inerciales y geométricas del suelo de soporte y del tipo y frecuencia de la onda incidente. Es importante tener presente que este movimiento usualmente no es igual al movimiento en superficie libre, no solo porque la cimentación no tiene que ser superficial sino debido al efecto “promediador” de movimientos que causa la cimentación en el movimiento del suelo. Este movimiento se suele especificar por medio de funciones de transferencia entre el campo de desplazamiento incidente o el movimiento de la superficie libre, y el movimiento de la cimentación. Un método aproximado ampliamente empleado para estimar el movimiento de la cimentación es el desarrollado por Iguchi [4]. Otra forma ampliamente difundida para llamar a este desplazamiento es “movimiento de entrada” (“input motion”), aunque no puede ser confundido con el movimiento al que queda sometida la base de la estructura o la cimentación, que se llama movimiento de entrada efectivo y considera tanto la interacción cinemática como la inercial.

Basados en lo anteriormente mencionado, los movimientos de la cimentación (base de la estructura) se calculan como:

$$\{u\} = \{u_m\} + \{u_{ci}\} \quad (3.1)$$

Donde:

$\{u\}$ : Vector de desplazamiento total en la base de la cimentación.

$\{u_m\}$ : Vector de desplazamientos en la base de la cimentación debido a la interacción suelo-estructura inercial.

$\{u_{ci}\}$ : Vector de desplazamientos en la base de la cimentación debido a la interacción suelo-estructura cinemática.

La interacción inercial suelo-estructura se plantea como:

$$\{F\} = [\bar{K}] \{u_m\} \quad (3.2)$$

Donde:

$\{F\}$ : Fuerzas externas sobre la cimentación para la interacción suelo-estructura inercial.

$[\bar{K}]$ : Matriz de impedancia.

Es importante resaltar que los desplazamientos usados en (3.2) son debidos sólo a la interacción inercial pues debido a la interacción cinemática no se generan fuerzas en la cimentación.

Reemplazando (3.1) en (3.2) se obtiene:

$$\{F\} = [\bar{K}] \{u\} - [\bar{K}] \{u_{ci}\} \quad (3.3)$$

o

$$\{F\} = [\bar{K}] \{u\} - \{F_{ci}\} \quad (3.4)$$

Donde:

$$\{F_{ci}\} = [\bar{K}] \{u_{ci}\} \quad (3.5)$$

Si se plantea la condición  $\{u\}=\{0\}$  se tiene de (3.4) que  $\{F\}=-\{F_{ci}\}$ , con lo cual las fuerzas  $\{F_{ci}\}$  pueden también interpretarse como las fuerzas que ejerce el suelo sobre la cimentación (esto debido al signo negativo) empotrada ( $\{u\}=\{0\}$ ) al estar sometida al campo de ondas incidente.

Una forma usual de representar la matriz de impedancia es:

$$[\bar{K}] = [K] + i\varpi[C] \quad (3.6)$$

Donde  $[K] = \text{Re}([\bar{K}])$  representa la matriz de rigidez dinámica del suelo y  $[C] = \frac{1}{\varpi} \text{Im}([\bar{K}])$  representa la matriz de amortiguamiento del mismo, donde  $\varpi$  es la frecuencia de la excitación.

La respuesta en el dominio de la frecuencia de una fundación rígida con matriz de masa  $[M_0]$  sujeta a fuerzas externas  $\{F_{ext}\}$  y a sollicitaciones sísmicas está dada por (Figura 3.2):

$$\{F_{ext}\} - \{F\} = -\varpi^2 [M_0] \{u\} \quad (3.7)$$

Donde:

$\{F_{ext}\}$ : Vector de fuerzas externa aplicadas sobre el centro de la fundación debidas a la estructura apoyada sobre la cimentación (dominio de la frecuencia).

$-\{F\}$ : Vector de fuerzas que ejerce el suelo sobre la cimentación debido al desplazamiento de la misma (dominio de la frecuencia).

$\{u\}$ : Vector de desplazamientos del centro de la cimentación (dominio de la frecuencia).

$-\varpi^2 [M_0] \{u\}$ : Fuerzas inerciales (dominio de la frecuencia).

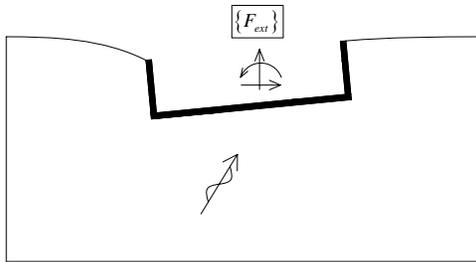


Figura 3.2.a: Movimiento de la cimentación con masa debido a las fuerzas externas y al campo de ondas incidente

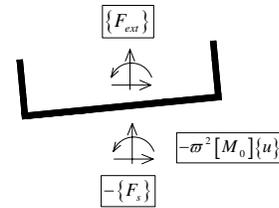


Figura 3.2.b: Equilibrio de la cimentación con masa.

Reemplazando (3.4) y (3.6) en (3.7) se obtiene:

$$(-\varpi^2 [M_0] + i\varpi [C] + [K]) \{u\} = \{F_{ext}\} + \{F_{ci}\} \quad (3.8)$$

Ahora reemplazando (3.1) y (3.2) en (3.8) se obtiene:

$$(-\varpi^2 [M_0] + i\varpi [C] + [K]) \{u_{in}\} = \varpi^2 [M_0] \{u_{ci}\} + \{F_{ext}\} \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.9) se ve claramente que para obtener la solución al problema de interacción suelo-estructura sólo es necesario obtener la matriz de impedancia de la cimentación y el vector de desplazamientos de entrada  $\{u_{ci}\}$ . Para el caso general en que sobre la cimentación existe una estructura, lo único que debe hacerse es obtener las fuerzas en la base de la cimentación  $\{F_{ext}\}$  en función de los desplazamientos de la base. Para esto se aplica condensación a la estructura y los desplazamientos de los nodos en contacto con la cimentación se dejan solo en función de los movimientos del centro de la cimentación.

La gran fortaleza que presenta este método ingenieril basado en la división del problema en interacción inercial y cinemática radica en la gran cantidad de estudios que se han realizado para obtener las funciones de impedancia y movimientos de entrada para un amplio espectro de situaciones. A continuación se reseñan algunos de estos estudios:

Interacción suelo estructura inercial (funciones de impedancia):

Tipo de cimentación:	Referencia
Circular, rígida y superficial sobre un semiespacio homogéneo.	[5], [6]
Circular, rígida y superficial sobre un estrato empotrado en la base.	[29]
Circular, rígida y enterrada en un estrato empotrado en la base.	[29]
Circular, rígida y superficial sobre un estrato que está soportado sobre un semiespacio.	[9], [33]
Rectangular, rígida y superficial sobre un semiespacio homogéneo.	[7]
Rectangular, rígida y enterrada sobre un semiespacio homogéneo.	[8]
Plana sobre un semiespacio homogéneo.	[10], [22], [23]
Plana sobre un estrato empotrado en la base.	[25], [30]
Plana enterrada en un estrato empotrado en la base.	[25], [30]
Plana de sección transversal semi elíptica sobre suelo homogéneo.	[11]
Plana de sección transversal rectangular sobre suelo estratificado.	[21], [25]
Plana de sección transversal rectangular y enterrada en un suelo estratificado.	[25]
En forma de L enterrada en semiespacio viscoelástico.	[12]
Geometría irregular, rígida y superficial sobre suelo homogéneo.	[13]
Geometría irregular, rígida y superficial sobre suelo estratificado.	[14]
Una amplia gama de funciones de impedancia se presentan en los siguientes documentos de G. Gazetas.	[19], [32]

Interacción suelo estructura cinemática (movimientos de entrada):

Tipo de cimentación y onda incidente:	Referencia
Circular, rígida y superficial sobre suelo homogéneo ante movimientos variables espacialmente.	[15]
Rectangular, rígida y superficial sobre suelo homogéneo con ondas SH y Rayleigh incidiendo horizontalmente.	[7]
Rectangular, rígida y enterrada sobre suelo homogéneo con ondas P y SH incidiendo verticalmente y ondas SH incidiendo horizontalmente	[8], [16]
En forma de L enterrada en semiespacio viscoelástico sometida a ondas P, S y Rayleigh.	[12]
Semiesférica, rígida y sobre suelo homogéneo sometido a ondas P, SV y SH incidiendo con diferentes ángulos.	[17]
Plana de sección transversal rectangular sobre suelo homogéneo sometida a ondas Rayleigh y P, SV y SH incidiendo verticalmente.	[10]
Plana de sección transversal semi elíptica sobre suelo homogéneo sometida a ondas planas incidiendo no verticalmente.	[11]

#### 4. ESTADO DEL ARTE DEL PROBLEMA DE APROXIMAR MEDIANTE MODELOS PLANOS EL FENOMENO DE INTERACCIÓN SUELO ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL

Debido a las ventajas antes mencionadas que tiene la modelación bidimensional del fenómeno de interacción suelo estructura, se han llevado a cabo varios intentos para validar su empleo [2] y [18].

En los dos estudios citados se buscaba igualar o aproximar para un amplio rango de frecuencias las funciones de impedancia de traslación horizontal y balanceo para cimentaciones superficiales planas (modelo plano) y circulares (modelo tridimensional) sobre un semiespacio elástico homogéneo. Para lograr esto se tomaron como parámetros libres el ancho y la profundidad efectiva de la fundación del modelo plano. Además, en el trabajo de Wolf y Meek [2] se adiciona la impedancia del suelo del modelo plano. Cabe destacar que para ambos modelos los resultados obtenidos son independientes de la frecuencia.

Con base en lo anterior, Luco y Hadjian [18] propusieron las siguientes relaciones entre las propiedades del modelo plano y el modelo tridimensional:

Parámetros del suelo:	Parámetros de la cimentación:	Representación gráfica:
$\frac{\rho_s}{\rho_c} = 1$ $\frac{G_s}{G_c} = 1$ $\frac{\mu_s}{\mu_c} = 1$ (Iguales suelos)	$\frac{c}{R} = \frac{8}{\pi} \approx 2.546$ $\frac{b}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$	

Tabla 4.1: Resumen del modelo plano calibrado propuesto por Luco y Hadjian [18].

De lo anterior cabe destacar que en esta calibración las propiedades del suelo de cimentación del modelo plano coinciden totalmente con las del modelo tridimensional.

Debido a la imposibilidad de obtener un valor equivalente para ambos parámetros que se ajustara a un amplio rango de frecuencias, Luco y Hadjian [18] concluyeron que no era posible representar el fenómeno de interacción suelo estructura mediante un modelo plano.

En el trabajo de Wolf y Meek [2] se obtuvo el siguiente modelo calibrado:

Parámetros del suelo:	Parámetros de la cimentación:	Representación gráfica:
$\frac{\rho_s}{\rho_c} = 0.645$ $\frac{G_s}{G_c} = 1$ $\frac{\mu_s}{\mu_c} = 1$ (Diferentes suelos)	$\frac{c}{R} = \frac{8}{\pi} \approx 2.546$ $\frac{b}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$ R: Radio de la cimentación circular del modelo 3D.	

Tabla 4.2: Resumen del modelo plano calibrado propuesto por Wolf y Meek [2].

Cabe anotar que el trabajo de Wolf y Meek [2] no tenía como objetivo principal calibrar el modelo plano de tal manera que representara acertadamente el fenómeno tridimensional sino explicar las diferencias entre ambos modelos.

En el presente trabajo se analizará la posibilidad de calibrar los parámetros del suelo, geometría de la cimentación y parámetros estructurales del modelo plano, y no sólo las dimensiones de la cimentación como lo proponen Luco y Hadjian [18]. Es importante mencionar que los coeficientes equivalentes obtenidos para el modelo plano se considerarán función de la frecuencia. Todo lo anterior posibilita calibrar mejor el modelo plano pues al analizar el sistema suelo-estructura-cimentación se tienen parámetros libres por parte de la estructura (altura, rigidez, amortiguamiento y masa), por parte de la cimentación (ancho y profundidad para el caso de cimentaciones profundas) y por parte del suelo (densidad, módulo de corte y relación de Poisson) y no simplemente los parámetros geométricos de la cimentación como en el caso del trabajo de Luco y Hadjian [18].

## 5. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS A EMPLEAR

Buscando una mayor claridad entre los efectos causados por la estructura y los debidos al suelo se ha tomado como modelo de la estructura uno de un grado de libertad pues el uso de una con varios grados de libertad complicaría el análisis y escondería la importancia de los parámetros. Lo anterior no significa ninguna simplificación, puesto que de acuerdo con el método de análisis por superposición modal la respuesta de un sistema de múltiples grados de libertad puede calcularse como la suma de la respuesta de diferentes estructuras de un grado de libertad. A continuación se describen el modelo tridimensional y el plano a emplear en este trabajo:

### 5.1 MODELO TRIDIMENSIONAL

El modelo tridimensional a emplear consiste en una fundación circular sin espesor, infinitamente rígida, de radio  $R$  y sin masa, ubicada fijamente sobre la superficie libre de un semiespacio: elástico, homogéneo, isotrópico y lineal, caracterizado por su densidad ( $\rho_c$ ), relación de Poisson ( $\mu_c$ ) y modulo de corte ( $G_c$ ). Sobre la fundación está soportada una estructura de un grado de libertad caracterizada por su altura ( $H_c$ ), su masa concentrada ( $m_c$ ), su rigidez ( $K_c$ ) y su amortiguamiento viscoso, representado como fracción del crítico ( $\xi_c$ ). Ver figuras 1.1.a, 6.1.a y 6.1.b.

Las funciones de impedancia para este modelo han sido obtenidas por diferentes autores entre los que destacan [5], [6].

### 5.2 MODELO PLANO

El modelo plano a emplear consiste en una fundación superficial de ancho ( $2b$ ) y sin masa, la cual es conocida en la literatura como “strip foundation”. El suelo sobre el cual está unida fijamente es un semiplano elástico, homogéneo, isotrópico y lineal caracterizado por su densidad ( $\rho_s$ ), relación de Poisson ( $\mu_s$ ) y modulo de corte ( $K_s$ ). Sobre la fundación está soportada una estructura de un grado de libertad caracterizada por su altura ( $H_s$ ), su masa por unidad de longitud ( $m_s$ ), su rigidez por unidad de longitud ( $K_s$ ) y su amortiguamiento ( $\xi_s$ ). Ver Figura 1.1.b.

Varios autores han obtenido las funciones de impedancia para cimentaciones infinitas (strip foundations) sobre semiespacios homogéneos [10], [19], [22], [23] pero el inconveniente de estos resultados es el bajo rango de la frecuencia cubierta. Por esta razón en este documento se empleó un programa de elementos de frontera elaborado por el Ing. Juan Diego Jaramillo para obtener las funciones de impedancia.

Igual que en el caso tridimensional se empleará el procedimiento de subestructuración para acoplar el suelo y la estructura y obtener la respuesta del sistema.

### 5.3 LIMITACIONES DE LOS MODELOS A EMPLEAR

A continuación se hará hincapié en las limitaciones que tienen los modelos a emplear, las justificaciones de algunas de estas y sus consecuencias:

- El modelo empleado para el suelo es un semiespacio o un semiplano elástico, lineal, homogéneo, isotrópico y sin amortiguamiento. Esta selección se ha realizado por simplicidad del modelo pues modelos más complejos poseen mayor número de parámetros (Ej.: profundidad a la cual está enterrada la fundación, geometría de la estratificación del suelo y amortiguamiento). Debido a lo anterior los resultados obtenidos tendrán mayor validez para suelos que se aproximen al del modelo pero como se verá

más adelante también existen conclusiones respecto a su uso en lugares con diferentes condiciones del terreno.

Con respecto al modelo empleado para la superestructura, sistema de un grado de libertad, éste se ha escogido por la posibilidad de emplear el método de superposición modal mediante el cual la respuesta de una estructura de múltiples grados de libertad puede ser obtenida como la suma de la respuesta de diferentes estructuras de un grado de libertad. Lo anterior significa que esta suposición no implica ninguna limitación.

- Debido a que se supone que la estructura se puede convertir en un modelo plano, está implícito entonces en el modelo que se trata de estructuras sin excentricidad y que los análisis se llevan a cabo sobre los ejes principales del movimiento.
- Finalmente, es importante dejar claro que los efectos tridimensionales de la interacción suelo-estructura considerados en este trabajo son producto de la estructura y no del suelo de cimentación o las solicitaciones. En otras palabras, se considera que la geometría y las propiedades dinámicas del suelo de cimentación no son función de la variable espacial perpendicular al plano de análisis. Igualmente, se considera que la sollicitación o movimiento incidente tampoco es función de la variable espacial perpendicular al plano de análisis. Esto último significa que sólo se consideran ondas incidentes planas con dirección de propagación en el plano de análisis, o de ondas cilíndricas de eje perpendicular al plano de análisis. Estas condiciones claramente impiden la presencia de rotaciones de la estructura debidas al movimiento incidente.

## 6. PROCEDIMIENTO

A continuación se describe el procedimiento para hallar la respuesta de ambos modelos en estudio.

### 6.1 MODELO TRIDIMENSIONAL:

La respuesta de la estructura tridimensional de un grado de libertad ante el campo de desplazamiento incidente será obtenida mediante el método de subestructuración por medio del cual tanto la estructura como el suelo son estudiadas individualmente y luego por equilibrio y compatibilidad de desplazamientos se realiza el acople de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de todo el sistema (Figura 6.1).

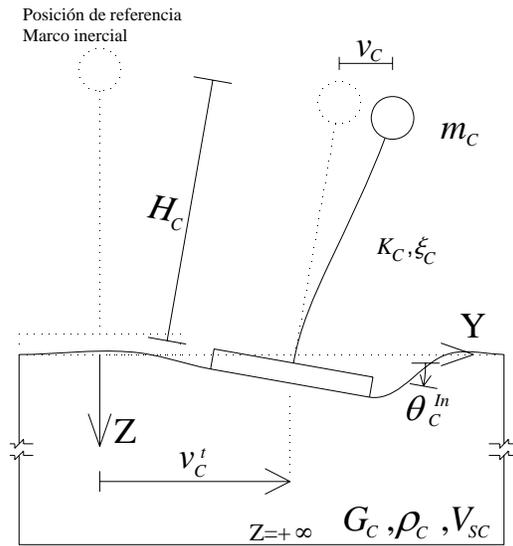


Figura 6.1.a: Modelo tridimensional y sus variables.

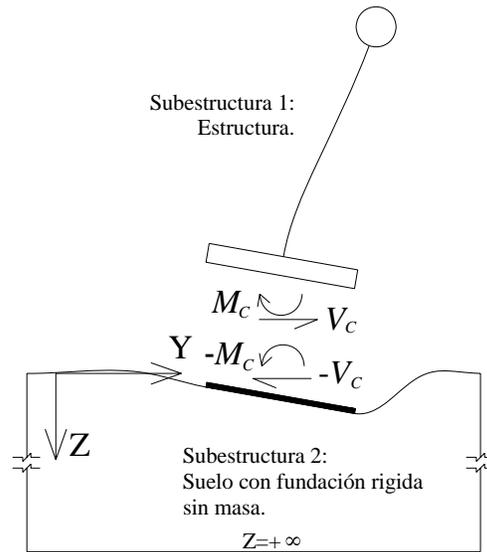


Figura 6.1.b: Subestructuración del modelo.

La Figura 6.2 es el símil de la Figura 3.1 para el caso particular de análisis, es decir, cimentación circular rígida apoyada sobre un semiespacio homogéneo y para el cual el principal componente de desplazamiento en superficie libre debido a las ondas incidentes es horizontal.

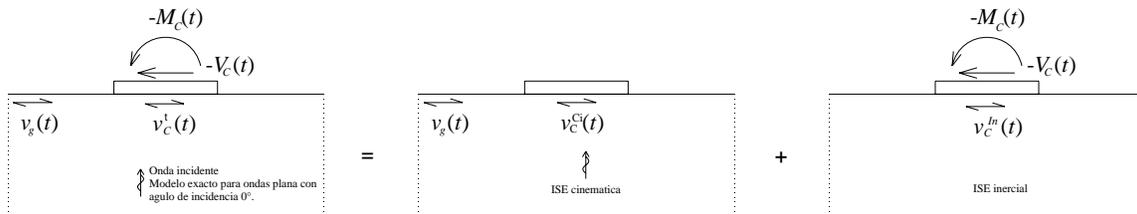


Figura 6.2: Descomposición del problema del movimiento de la cimentación rígida y sin masa en dos problemas más simples: en el centro de la figura el movimiento de la cimentación debido al campo incidente y a la derecha el movimiento forzado de la misma.

De lo presentado en la Figura 6.2 y en numerales anteriores se concluye que el campo de desplazamiento horizontal en el centro de la cimentación se escribe como:

$$v_C^t(t) = v_C^{Ci}(t) + v_C^{In}(t) \quad (6.1)$$

Para el caso particular de ondas planas incidiendo verticalmente sobre un semiespacio homogéneo o estratificado horizontalmente se cumple que el desplazamiento en superficie libre es igual al debido a la interacción cinemática suelo estructura, es decir, el efecto alterador del desplazamiento en superficie libre debido a la interacción cinemática es nulo. Ahora, para el caso particular de ondas S incidiendo verticalmente la única componente de movimiento debido a la interacción suelo-estructura cinemática es la horizontal y es igual al movimiento de campo libre, de tal forma que (6.1) bajo los supuestos anteriores puede reescribirse como:

$$v'_c(t) = v_g(t) + v_c^{ln}(t) \quad (6.2)$$

A continuación se presentan las 3 ecuaciones de movimiento linealmente independientes para la subestructura 1 (ver Figura 6.1.b).

$$m_c \ddot{v}_c(t) + 2m_c \omega_c \xi_c \dot{v}_c(t) + K_c v_c(t) + m_c H_c \ddot{\theta}_c^{ln}(t) + m_c \dot{v}_c^{ln}(t) + m_c \ddot{v}_g(t) = 0 \quad (6.3)$$

$$m_c \ddot{v}_c(t) + m_c H_c \ddot{\theta}_c^{ln}(t) + m_c \dot{v}_c^{ln}(t) + m_c \ddot{v}_g(t) = V_c(t) \quad (6.4)$$

$$m_c H_c \ddot{v}_c(t) + m_c H_c^2 \ddot{\theta}_c^{ln}(t) + m_c H_c \dot{v}_c^{ln}(t) + m_c H_c \ddot{v}_g(t) = M_c(t) \quad (6.5)$$

Al realizar la transformada de Fourier de las ecuaciones (6.3) a (6.5) y expresarlas matricialmente se obtiene (de aquí en adelante el término  $e^{j\omega t}$  ha sido omitido y sólo se presenta el espectro de los desplazamientos y fuerzas):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ V_c(i\omega) \\ M_c(i\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_c + 2i\omega m_c \omega_c \xi_c + K_c & -\omega^2 m_c & -\omega^2 m_c H_c \\ -\omega^2 m_c & -\omega^2 m_c & -\omega^2 m_c H_c \\ -\omega^2 m_c H_c & -\omega^2 m_c H_c & -\omega^2 m_c H_c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c(i\omega) \\ v_c^{ln}(i\omega) \\ \theta_c^{ln}(i\omega) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_c \\ m_c \\ m_c H_c \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\omega) \quad (6.6)$$

Para la subestructura 2 las relaciones entre fuerzas y desplazamientos en el centro de la cimentación (funciones de impedancia) fueron obtenidas por Veletsos y Wei [5] y se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} -V_c(i\omega) \\ -M_c(i\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{yy}(i\omega) & \bar{K}_{y\theta}(i\omega) \\ \bar{K}_{y\theta}(i\omega) & \bar{K}_{\theta\theta}(i\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c^{ln}(i\omega) \\ \theta_c^{ln}(i\omega) \end{Bmatrix} = \frac{8G_c R}{2 - \mu_c} \begin{bmatrix} (k_{11}(a_0) + ia_0 c_{11}(a_0)) & (k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0))R \\ (k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0))R & \frac{2 - \mu_c}{3(1 - \mu_c)} (k_{22}(a_0) + ia_0 c_{22}(a_0))R^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c^{ln}(i\omega) \\ \theta_c^{ln}(i\omega) \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Donde  $\frac{8G_c R}{2 - \mu_c}$  es la fuerza estática necesaria para producir un movimiento horizontal unitario sin giro (rigidez

estática horizontal) y  $\frac{8G_c R}{2 - \mu_c} * \frac{(2 - \mu_c) R^2}{3(1 - \mu_c)} = \frac{8G_c R^3}{3(1 - \mu_c)}$  es el momento flector estático necesario para producir

un giro unitario de la cimentación sin desplazamiento horizontal (rigidez estática rotacional).

Las graficas de los coeficientes  $k_{11}$ ,  $c_{11}$ ,  $k_{21}$ ,  $c_{21}$ ,  $k_{22}$  y  $c_{22}$  se presentan a continuación:

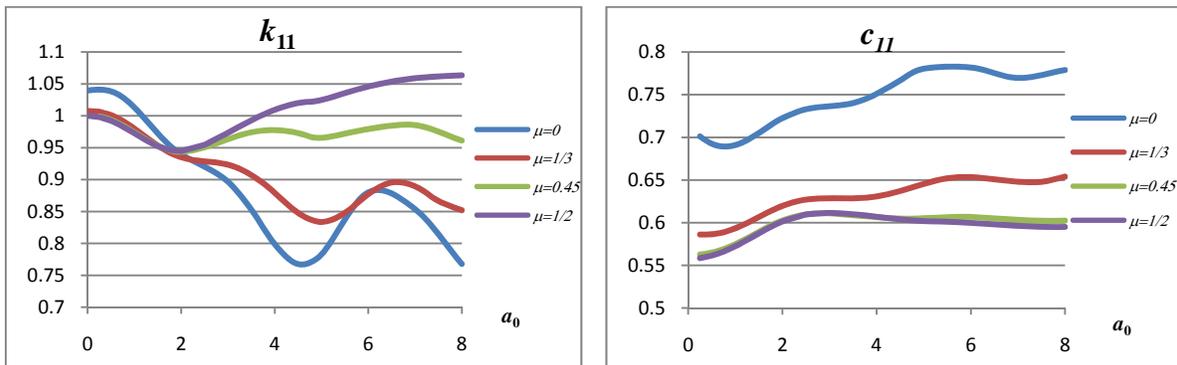


Figura 6.3.a: Parte real de la función de impedancia de translación desacoplada ( $k_{11}$ ).

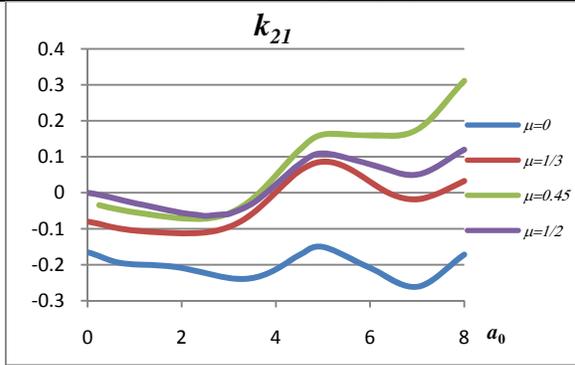


Figura 6.3.b: Parte imaginaria de la función de impedancia de translación desacoplada ( $c_{11}$ ).

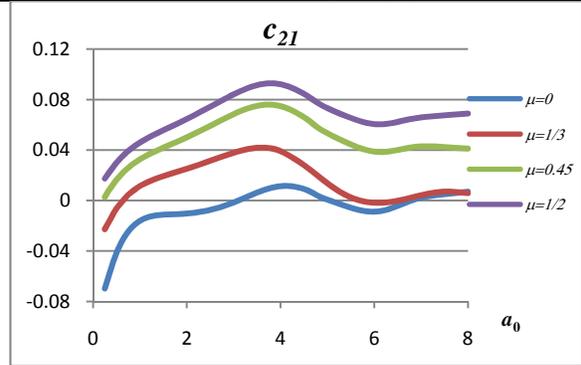


Figura 6.3.c: Parte real de la función de impedancia de translación y rotación acopladas ( $k_{21}$ ).

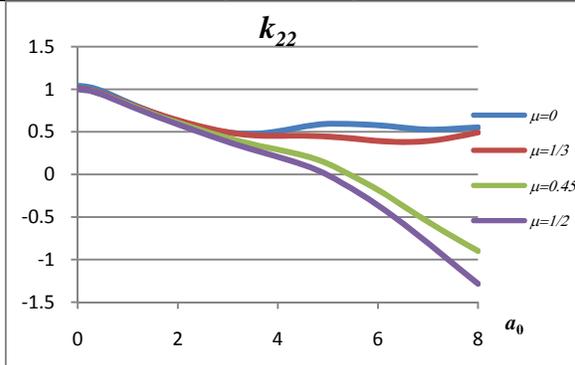


Figura 6.3.d: Parte imaginaria de la función de impedancia de translación y rotación acopladas ( $c_{21}$ ).

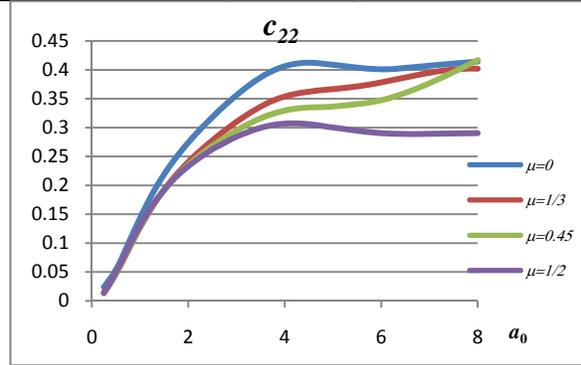


Figura 6.3.e: Parte real de la función de impedancia de rotación desacoplada ( $k_{22}$ ).

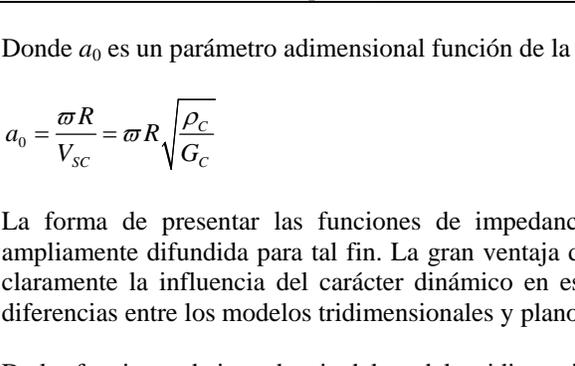
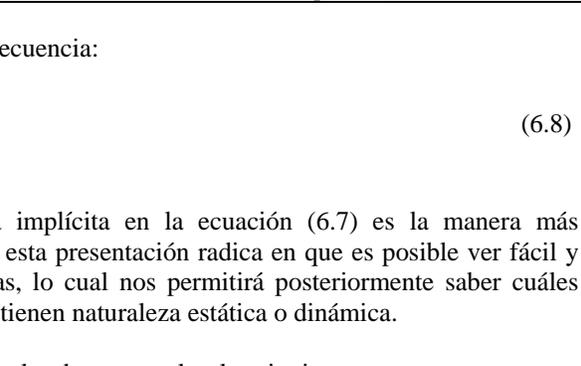


Figura 6.3.f: Parte imaginaria de la función de impedancia de rotación desacoplada ( $c_{22}$ ).



Donde  $a_0$  es un parámetro adimensional función de la frecuencia:

$$a_0 = \frac{\omega R}{V_{sc}} = \omega R \sqrt{\frac{\rho_c}{G_c}} \quad (6.8)$$

La forma de presentar las funciones de impedancia implícita en la ecuación (6.7) es la manera más ampliamente difundida para tal fin. La gran ventaja de esta presentación radica en que es posible ver fácil y claramente la influencia del carácter dinámico en estas, lo cual nos permitirá posteriormente saber cuáles diferencias entre los modelos tridimensionales y planos tienen naturaleza estática o dinámica.

De las funciones de impedancia del modelo tridimensional es bueno resaltar los siguientes aspectos:

- Debido al hecho de que la parte imaginaria de las funciones de impedancia tiene como factor  $a_0$  se concluye que para el caso estático ( $a_0=0$ ) todos los términos de la matriz de impedancia son reales y por ende el desplazamiento y las fuerzas externas están en fase.
- Los términos  $k_{22}$  y  $c_{22}$  son muy dependientes del valor de la relación de Poisson (figuras 6.3.e y 6.3.f), esto se debe a que al presentarse el movimiento de balanceo se producen principalmente ondas P para las cuales la velocidad de propagación es función de este parámetro. Al presentarse el movimiento horizontal de la cimentación se producen principalmente ondas S las cuales tienen velocidad de propagación independiente de la relación de Poisson.
- Los términos  $k_{11}$  y  $c_{11}$  presentan valores que pueden considerarse independientes de la frecuencia, mientras que los demás términos presentan una marcada variación con la frecuencia (con  $a_0$ ).
- Los términos que están fuera de la diagonal de la matriz de impedancia presentan valores muy inferiores a aquellos ubicados en la diagonal.

- Las funciones de impedancia presentadas en (6.7) pueden expresarse de manera más conveniente de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} -V_c(i\omega) \\ \frac{M_c(i\omega)}{R} \end{Bmatrix} = \frac{8G_c R}{2 - \mu_c} \begin{bmatrix} (k_{11}(a_0) + ia_0 c_{11}(a_0)) & (k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0)) \\ (k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0)) & \frac{2 - \mu_c}{3(1 - \mu_c)} (k_{22}(a_0) + ia_0 c_{22}(a_0)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c^{In}(i\omega) \\ \theta_c^{In}(i\omega) * R \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

La ventaja de esta representación es que tanto los vectores de fuerza y desplazamiento así como la matriz están formados por términos con iguales unidades lo que facilita una mejor comparación de sus valores relativos.

En este punto es importante interpretar la variable  $a_0$ , de la que depende el problema de vibración forzada de un disco sobre un semiespacio. El movimiento del sistema suelo cimentación (ver Figura 6.4.a) depende la relación entre las dimensiones de la cimentación y la longitud de onda, así:

$$\frac{R}{\lambda} = \frac{R}{V_{ss} / f_{Onda}} = \frac{\omega R}{2\pi V_{ss}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right) a_0$$

Que resulta ser proporcional a  $a_0$ .

Para el caso de suelos estratificados la respuesta dependerá adicionalmente de la relación  $H/R$  (ver Figura 6.4.b)

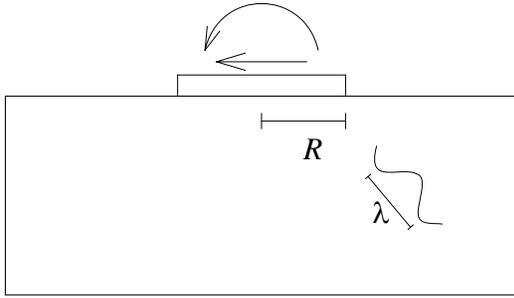


Figura 6.4.a: Explicación del parámetro  $a_0$  para un semiespacio.

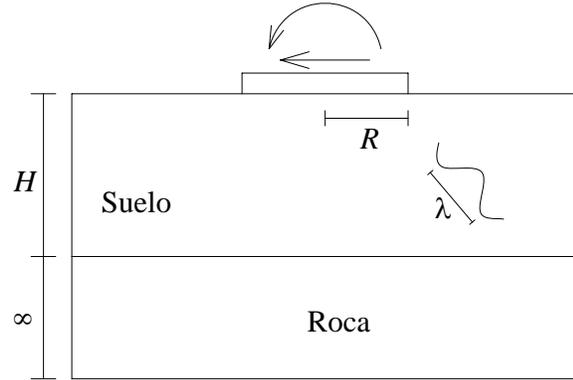


Figura 6.4.b: Explicación del parámetro  $a_0$  para un suelo estratificado.

Continuado con el desarrollo de las ecuaciones, si se reemplaza (6.7) en (6.6) con el objeto de eliminar las fuerzas en la interfaz de ambas subestructuras, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c(i\omega) \\ v_c^{In}(i\omega) \\ \theta_c^{In}(i\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_c \\ -m_c \\ -m_c H_c \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\omega) \quad (6.10)$$

o

$$\frac{1}{m_c} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31}/H_c & G_{32}/H_c & G_{33}/H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c(i\omega) \\ v_c^{In}(i\omega) \\ \theta_c^{In}(i\omega) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\omega) \quad (6.11)$$

Donde:

$$G_{11} = -\varpi^2 m_c + 2i\varpi\xi_c \sqrt{K_c m_c} + K_c \quad (6.12)$$

$$G_{12} = -\varpi^2 m_c \quad (6.13)$$

$$G_{13} = -\varpi^2 m_c H_c \quad (6.14)$$

$$G_{21} = -\varpi^2 m_c \quad (6.15)$$

$$G_{22} = \hat{K}_{yy}(i\varpi) - \varpi^2 m_c = \frac{8G_c R}{2 - \mu_c} [k_{11}(a_0) + ia_0 c_{11}(a_0)] - \varpi^2 m_c \quad (6.16)$$

$$G_{23} = \hat{K}_{y\theta}(i\varpi) - \varpi^2 m_c H_c = \frac{8G_c R^2}{2 - \mu_c} [k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0)] - \varpi^2 m_c H_c \quad (6.17)$$

$$G_{31} = -\varpi^2 m_c H_c \quad (6.18)$$

$$G_{32} = \hat{K}_{y\theta}(i\varpi) - \varpi^2 m_c H_c = \frac{8G_c R^2}{2 - \mu_c} [k_{21}(a_0) + ia_0 c_{21}(a_0)] - \varpi^2 m_c H_c \quad (6.19)$$

$$G_{33} = \hat{K}_{\theta\theta}(i\varpi) - \varpi^2 m_c H_c^2 = \frac{8G_c R^3}{3(1 - \mu_c)} [k_{22}(a_0) + ia_0 c_{22}(a_0)] - \varpi^2 m_c H_c^2 \quad (6.20)$$

Para facilitar el cálculo posterior de las funciones de transferencia a definir más adelante, conviene reescribir la ecuación (6.11) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} -1 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) + \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{\hat{K}_{yy}(i\varpi)}{\varpi^2 m_c} - 1 & \frac{\hat{K}_{y\theta}(i\varpi)}{\varpi^2 m_c H_c} - 1 \\ -1 & \frac{\hat{K}_{y\theta}(i\varpi)}{\varpi^2 m_c H_c} - 1 & \frac{\hat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)}{\varpi^2 m_c H_c^2} - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c(i\varpi) \\ v_c^{ln}(i\varpi) \\ H_c \theta_c^{ln}(i\varpi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} v_g(i\varpi) \quad (6.21)$$

La ecuación (6.10) o (6.11) representa la relación entre los desplazamientos de los tres grados de libertad del sistema y la aceleración horizontal en superficie libre. Por medio de la regla de Kramer se pueden definir fácilmente las siguientes funciones de transferencia:

Función de transferencia entre el desplazamiento relativo de la masa respecto a la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_1^c = \frac{v_c(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} = \frac{-\varpi^2 v_c(i\varpi)}{\ddot{v}_g(i\varpi)} = \varpi^2 m_c \frac{\begin{vmatrix} 1 & G_{12} & G_{13} \\ 1 & G_{22} & G_{23} \\ H_c & G_{31} & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.22)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción suelo estructura inercial y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_2^c = \frac{v_c^{ln}(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} = \frac{-\varpi^2 v_c^{ln}(i\varpi)}{\ddot{v}_g(i\varpi)} = \varpi^2 m_c \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & 1 & G_{13} \\ G_{21} & 1 & G_{23} \\ G_{31} & H_c & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.23)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento de la masa debido a la rotación de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_3^C = \frac{\theta_c^{ln}(i\omega) H_C}{v_g(i\omega)} = \frac{-\omega^2 H_C \theta_c^{ln}(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = \omega^2 m_c H_C \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & 1 \\ G_{21} & G_{22} & 1 \\ G_{31} & G_{32} & H_C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.24)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_4^C = \frac{v_c'(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{v_g(i\omega) + v_c^{ln}(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{\ddot{v}_g(i\omega) - \omega^2 v_c^{ln}(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = 1 + \omega^2 m_c \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & 1 & G_{13} \\ G_{21} & 1 & G_{23} \\ G_{31} & H_C & G_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.25)$$

Cabe anotar que la  $FT_4^C$  también tiene el siguiente significado:

$$FT_4^C = \frac{\ddot{v}_c'(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} \quad (6.26)$$

Debido al acoplamiento de los 3 grados de libertad del modelo no es posible obtener fórmulas simples para calcular las funciones de transferencia presentadas en las ecuaciones (6.22) a (6.26), pero si se desprecian los términos acoplados de la matriz de impedancia (términos fuera de la diagonal de (6.7)) debido a su valor relativo pequeño, la ecuación (6.21) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} -1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + 2i\xi_c \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) & -1 & -1 \\ -1 & \frac{\widehat{K}_{yy}(i\omega)}{m_c \omega^2} - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega)}{m_c \omega^2 H_c^2} - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_c(i\omega) \\ v_c^{ln}(i\omega) \\ H_c \theta_c^{ln}(i\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} v_g(i\omega) \quad (6.27)$$

Restando la primera y la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (6.27) se obtiene:

$$v_c^{ln}(i\omega) = \frac{m_c \omega^2}{\widehat{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + 2i\xi_c \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \right] v_c(i\omega) \quad (6.28)$$

Restando la primera y la tercera ecuación del sistema de ecuaciones (6.27) se obtiene:

$$H_c \theta_c^{ln}(i\omega) = \frac{m_c \omega^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + 2i\xi_c \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \right] v_c(i\omega) \quad (6.29)$$

Reemplazando (6.28) y (6.29) en la primera ecuación del sistema de ecuaciones (6.27) se obtiene:

$$FT_1^C = \frac{v_c(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} \approx \frac{1}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]} \quad (6.30)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.28), (6.29) y (6.30) en la segunda y tercera ecuación del sistema (6.27) se obtiene:

$$FT_2^C = \frac{v_c^m(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} \approx \frac{\frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]} \quad (6.31)$$

$$FT_3^C = \frac{\theta_c^m(i\varpi) H_c}{v_g(i\varpi)} \approx \frac{\frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]} \quad (6.32)$$

$FT_4^C$  puede calcularse fácilmente a partir de (6.25) y (6.31) así:

$$FT_4^C = \frac{v_c'(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} = 1 + FT_2^C \approx 1 + \frac{\frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]} \quad (6.33)$$

Con respecto a las ecuaciones (6.30) a (6.33) se tienen los siguientes comentarios importantes:

- Si se toma el caso particular donde  $\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\varpi)) = \infty$ ,  $\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)) = \infty$ ,  $\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\varpi)) = 0$  y  $\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)) = 0$  se obtienen precisamente las funciones de transferencia para una estructura de un grado de libertad sobre base rígida, es decir,  $FT_1^C = \left[ -1 + \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right]^{-1}$ ,  $FT_2^C = FT_3^C = 0$  y  $FT_4^C = 1$ .
- Existe una gran dependencia entre las formas de las funciones de transferencia  $FT_2^C$ ,  $FT_3^C$  y  $FT_4^C$  con la  $FT_1^C$ , esta relación puede verse claramente en las siguientes expresiones:

$$FT_2^C = \frac{v_c^m(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} \approx \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] FT_1^C$$

$$FT_3^C = \frac{\theta_c^m(i\varpi) H_c}{v_g(i\varpi)} \approx \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] FT_1^C$$

$$FT_4^C = \frac{v_c'(i\varpi)}{v_g(i\varpi)} \approx 1 + \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} \left[ \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_c \left( \frac{\omega_c}{\varpi} \right) \right] FT_1^C$$

Las ecuaciones anteriores ponen de manifiesto la dependencia de la respuesta del sistema con el desplazamiento relativo de la masa respecto a la cimentación. Por ejemplo, la rápida variabilidad de la función de transferencia del movimiento total de la base de la cimentación respecto al movimiento en

campo libre ( $FT_4^c$ ) se debe al rápido cambio de fase de ( $FT_1^c$ ). Este hecho puede verse para un caso particular de análisis en la Figura 7.2.

- La forma de las funciones de transferencia se puede explicar cualitativamente al estudiar el denominador de estas. Para frecuencias no muy altas respecto a la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada ( $\varpi \leq 3\omega_c$ ) el denominador de las funciones de transferencia toma el valor:

$$\text{Denominador} \approx -1 + \left(\frac{\omega_c}{\varpi}\right)^2 \left[ 1 - \frac{m_c \varpi^2}{\widehat{K}_{yy}(i\varpi)} - \frac{m_c \varpi^2 H_c^2}{\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi)} \right]$$

Igualando la ecuación anterior a cero (frecuencia fundamental del sistema) se obtiene:

$$\varpi_{Max} \approx \frac{\omega_c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2 m_c}{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\varpi))} + \frac{\omega_c^2 m_c H_c^2}{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\varpi))}}} \quad (6.34)$$

Lo cual indica que la frecuencia para la respuesta máxima será siempre menor a la de la estructura con base empotrada. Este hecho se debe a la flexibilidad finita del suelo.

## 6.2 MODELO PLANO:

Las ecuaciones de movimiento para el modelo plano se obtienen siguiendo un procedimiento similar al realizado para el caso de la cimentación circular (ecuaciones (6.3)-(6.5)), obteniéndose:

$$m_s c \ddot{v}_s(t) + 2m_s c \omega_s \xi_s \dot{v}_s(t) + K_s c v_s(t) + m_s c H_s \ddot{\theta}_s^{ln}(t) + m_s c \ddot{v}_s^{ln}(t) + m_s c \ddot{v}_g(t) = 0 \quad (6.35)$$

$$m_s c \ddot{v}_s(t) + m_s c H_s \ddot{\theta}_s^{ln}(t) + m_s c \ddot{v}_s^{ln}(t) + m_s c \ddot{v}_g(t) = V_s(t) \quad (6.36)$$

$$m_s c H_s \ddot{v}(t) + m_s c H_s^2 \ddot{\theta}_s^{ln}(t) + m_s c H_s \ddot{v}_s^{ln}(t) + m_s c H_s \ddot{v}_g(t) = M_s(t) \quad (6.37)$$

Realizando la transformada de Fourier de las ecuaciones (6.35) a (6.37) y simplificando los términos  $e^{i\varpi t}$ , se obtiene:

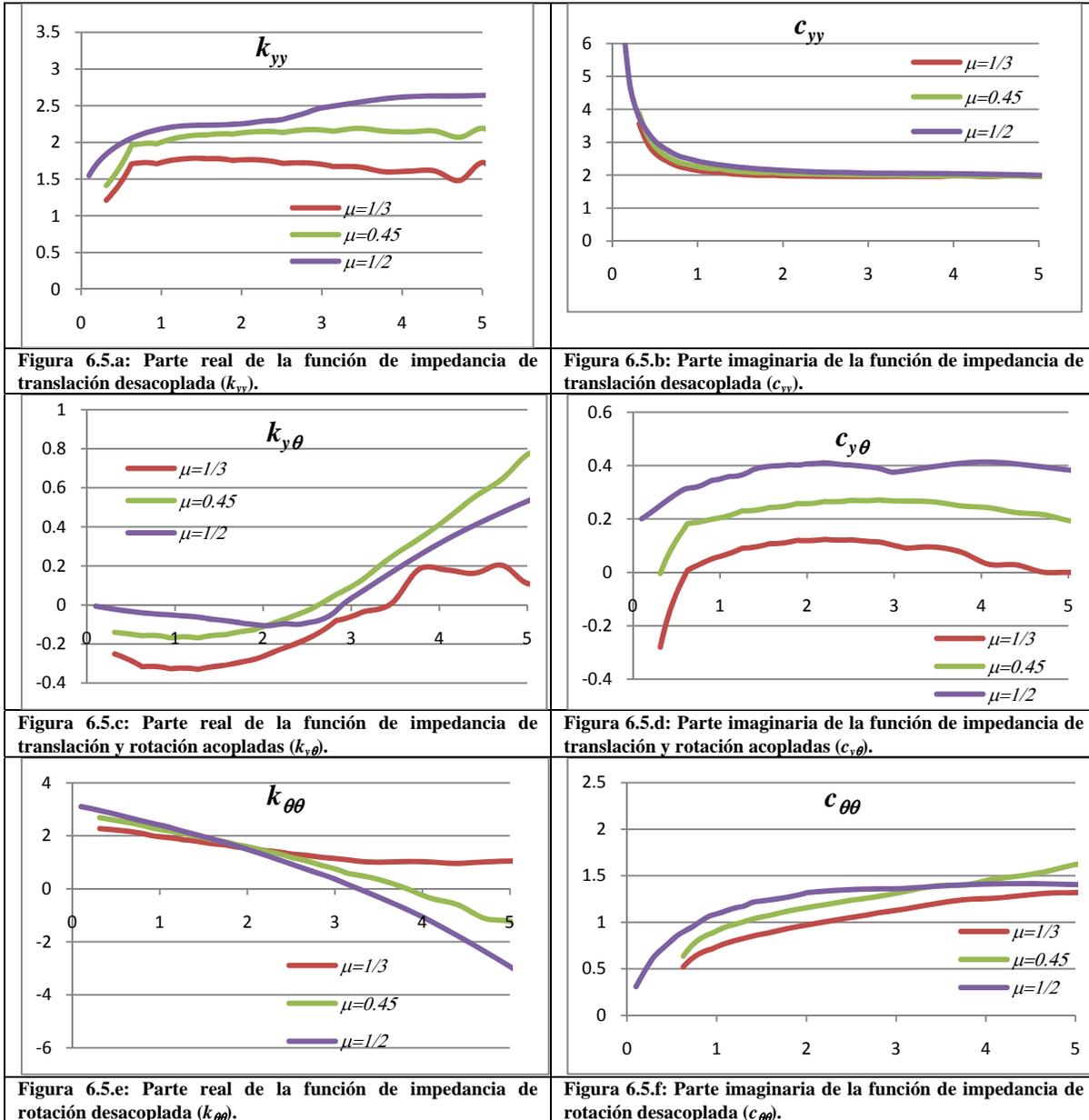
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ V_s(i\varpi) \\ M_s(i\varpi) \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\varpi^2 m_s + 2i\varpi m_s \omega_s \xi_s + K_s & -\varpi^2 m_s & -\varpi^2 m_s H_s \\ -\varpi^2 m_s & -\varpi^2 m_s & -\varpi^2 m_s H_s \\ -\varpi^2 m_s H_s & -\varpi^2 m_s H_s & -\varpi^2 m_s H_s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s(i\varpi) \\ v_s^{ln}(i\varpi) \\ \theta_s^{ln}(i\varpi) \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} m_s \\ m_s \\ m_s H_s \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\varpi) \quad (6.38)$$

El movimiento forzado de la cimentación infinita debido a fuerzas externas y sin ondas incidentes fue estudiado entre otros por Luco y Westmann [22] y Gazetas [19] quienes obtuvieron las funciones de impedancia para valores de frecuencia relativamente bajas. Las funciones de impedancia que se emplearon fueron obtenidas por medio de un programa de elementos de frontera desarrollado por el Ing. Juan Diego Jaramillo. La forma de estas es:

$$\begin{Bmatrix} -V_s(i\varpi) \\ -M_s(i\varpi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{yy}(i\varpi) & \bar{K}_{y\theta}(i\varpi) \\ \bar{K}_{y\theta}(i\varpi) & \bar{K}_{\theta\theta}(i\varpi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s^{ln}(i\varpi) \\ \theta_s^{ln}(i\varpi) \end{Bmatrix} = c G_s \begin{bmatrix} (k_{yy}(b_0) + i b_0 c_{yy}(b_0)) & (k_{y\theta}(b_0) + i b_0 c_{y\theta}(b_0)) b \\ (k_{y\theta}(b_0) + i b_0 c_{y\theta}(b_0)) b & (k_{\theta\theta}(b_0) + i b_0 c_{\theta\theta}(b_0)) b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s^{ln}(i\varpi) \\ \theta_s^{ln}(i\varpi) \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

De la comparación de (6.7) con (6.39) se ve que en la última no se presentan como factor común las rigideces estáticas del modelo plano. Lo anterior se debe a que ésta es cero para el desplazamiento horizontal (ver

Figura 6.5.a). Los valores de los coeficientes de la matriz de impedancia se presentan a continuación en forma gráfica:



Donde  $b_0$  es un parámetro adimensional función de la frecuencia (símil de  $a_0$  para fundación circular):

$$b_0 = \frac{\varpi b}{V_{ss}} = \varpi b \sqrt{\frac{\rho_s}{G_s}} \quad (6.40)$$

Reemplazando (6.39) en (6.38) se obtiene:

$$c \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s(i\varpi) \\ v_s^{ln}(i\varpi) \\ \theta_s^{ln}(i\varpi) \end{Bmatrix} = c \begin{Bmatrix} -m_s \\ -m_s \\ -m_s H_s \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\varpi) \quad (6.41)$$

o

$$\frac{1}{m_s} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31}/H_s & J_{32}/H_s & J_{33}/H_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s(i\omega) \\ v_s^{In}(i\omega) \\ \theta_s^{In}(i\omega) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{v}_g(i\omega) \quad (6.42)$$

Donde:

$$J_{11} = -\omega^2 m_s + 2i\omega \xi_s \sqrt{K_s m_s} + K_s \quad (6.43)$$

$$J_{12} = -\omega^2 m_s \quad (6.44)$$

$$J_{13} = -\omega^2 m_s H_s \quad (6.45)$$

$$J_{21} = -\omega^2 m_s \quad (6.46)$$

$$J_{22} = \bar{K}_{yy}(i\omega) - \omega^2 m_s = G_s [k_{yy}(b_0) + ib_0 c_{yy}(b_0)] - \omega^2 m_s \quad (6.47)$$

$$J_{23} = \bar{K}_{y\theta}(i\omega) - \omega^2 m_s H_s = G_s b [k_{y\theta}(b_0) + ib_0 c_{y\theta}(b_0)] - \omega^2 m_s H_s \quad (6.48)$$

$$J_{31} = -\omega^2 m_s H_s \quad (6.49)$$

$$J_{32} = \bar{K}_{\theta y}(i\omega) - \omega^2 m_s H_s = G_s b [k_{\theta y}(b_0) + ib_0 c_{\theta y}(b_0)] - \omega^2 m_s H_s \quad (6.50)$$

$$J_{33} = \bar{K}_{\theta\theta}(i\omega) - \omega^2 m_s H_s^2 = G_s b^2 [k_{\theta\theta}(b_0) + ib_0 c_{\theta\theta}(b_0)] - \omega^2 m_s H_s^2 \quad (6.51)$$

De igual manera que se hizo para el caso tridimensional, también se pueden definir las funciones de transferencia para el modelo plano de la siguiente manera:

Función de transferencia entre el desplazamiento relativo de la masa respecto a la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_1^S = \frac{v_s(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{-\omega^2 v_s(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = \omega^2 m_s \frac{\begin{vmatrix} 1 & J_{12} & J_{13} \\ 1 & J_{22} & J_{23} \\ H_s & J_{31} & J_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.52)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción suelo estructura inercial y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_2^S = \frac{v_s^{In}(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{-\omega^2 * v_s^{In}(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = \omega^2 m_s \frac{\begin{vmatrix} J_{11} & 1 & J_{13} \\ J_{21} & 1 & J_{23} \\ J_{31} & H_s & J_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}} \quad (6.53)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento de la masa debido a la rotación de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_3^S = \frac{\theta_s^{ln}(i\omega)H_s}{v_g(i\omega)} = \frac{-\omega^2 H_s * \theta_s^{ln}(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = \omega^2 m_s H_s \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & 1 \\ J_{21} & J_{22} & 1 \\ J_{31} & J_{32} & H_s \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} \quad (6.54)$$

Función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre:

$$FT_4^S = \frac{v_s'(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{v_g(i\omega) + v_s^{ln}(i\omega)}{v_g(i\omega)} = \frac{\ddot{v}_g(i\omega) - \omega^2 v_s^{ln}(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} = 1 + \omega^2 m_s \begin{vmatrix} J_{11} & 1 & J_{13} \\ J_{21} & 1 & J_{23} \\ J_{31} & H_s & J_{33} \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} \quad (6.55)$$

Cabe anotar que la  $FT_4$  también tiene el siguiente significado:

$$FT_4^S = \frac{\ddot{v}_s'(i\omega)}{\ddot{v}_g(i\omega)} \quad (6.56)$$

De igual manera que para el caso tridimensional, se pueden definir fórmulas aproximadas que sean simples y bastante aproximadas a las teóricas para las funciones de transferencia si se supone que los términos acoplados de la matriz de impedancia son nulos. Realizando este procedimiento se obtienen las funciones:

$$FT_1^S = \frac{v_s(i\omega)}{v_g(i\omega)} \approx \frac{1}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2 H_s^2}{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]} \quad (6.57)$$

$$FT_2^S = \frac{v_s^{ln}(i\omega)}{v_g(i\omega)} \approx \frac{\frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2 H_s^2}{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]} \quad (6.58)$$

$$FT_3^S = \frac{\theta_s^{ln}(i\omega)H_s}{v_g(i\omega)} \approx \frac{\frac{m_s c \omega^2 H_s^2}{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2 H_s^2}{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]} \quad (6.59)$$

$$FT_4^S = \frac{v_s'(i\omega)}{v_g(i\omega)} \approx 1 + \frac{\frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]}{-1 + \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2}{\bar{K}_{yy}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right] - \frac{m_s c \omega^2 H_s^2}{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right) \right]} \quad (6.60)$$

Los comentarios presentados para las funciones de transferencia del modelo tridimensional son también aplicables para el modelo plano.

## 7. COMPARACIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL Y PLANO

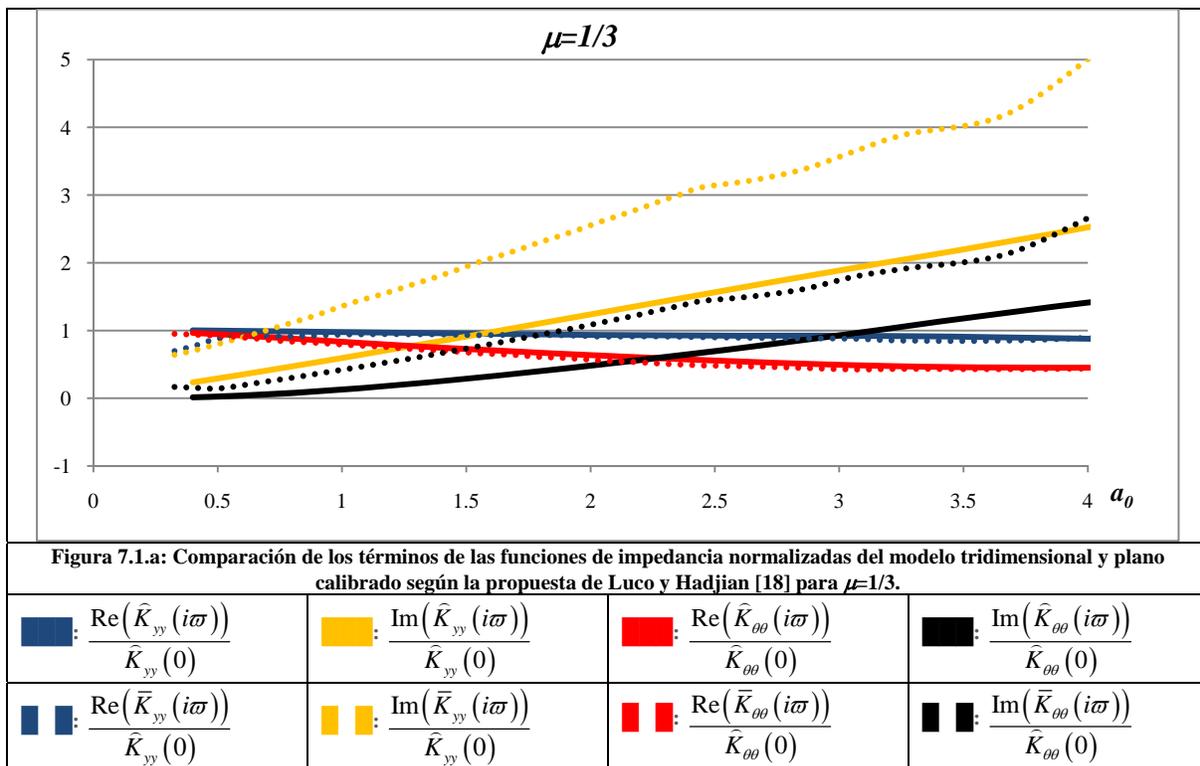
A continuación se realizará una comparación del comportamiento dinámico de los modelos tridimensional y plano presentados en el capítulo 6. Esta se dividirá en la comparación de las funciones de impedancia y de las funciones de transferencia para un caso particular.

### 7.1 COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA

En este numeral, por medio de la comparación de las funciones de impedancia de ambos modelos estudiados se pretende lograr los siguientes objetivos:

- Estudiar la física del movimiento forzado para ambos tipos de cimentaciones empleadas en este trabajo, de tal forma que sean claras las principales semejanzas y diferencias entre ambos.
- Con base en el objetivo anterior, evaluar la posibilidad de realizar la calibración (alteración) del modelo plano para representar de buena manera el fenómeno tridimensional.

Como paso inicial para realizar la comparación de ambos modelos se supondrá que el modelo plano equivalente es el obtenido por Luco y Hadjian [18], el cual consiste en suelos iguales y relaciones  $c/R=2.546$  y  $b/R=0.816$ . A continuación se presentan los términos de las matrices de impedancia del modelo tridimensional y plano como fracción de la rigidez estática correspondiente del modelo tridimensional:



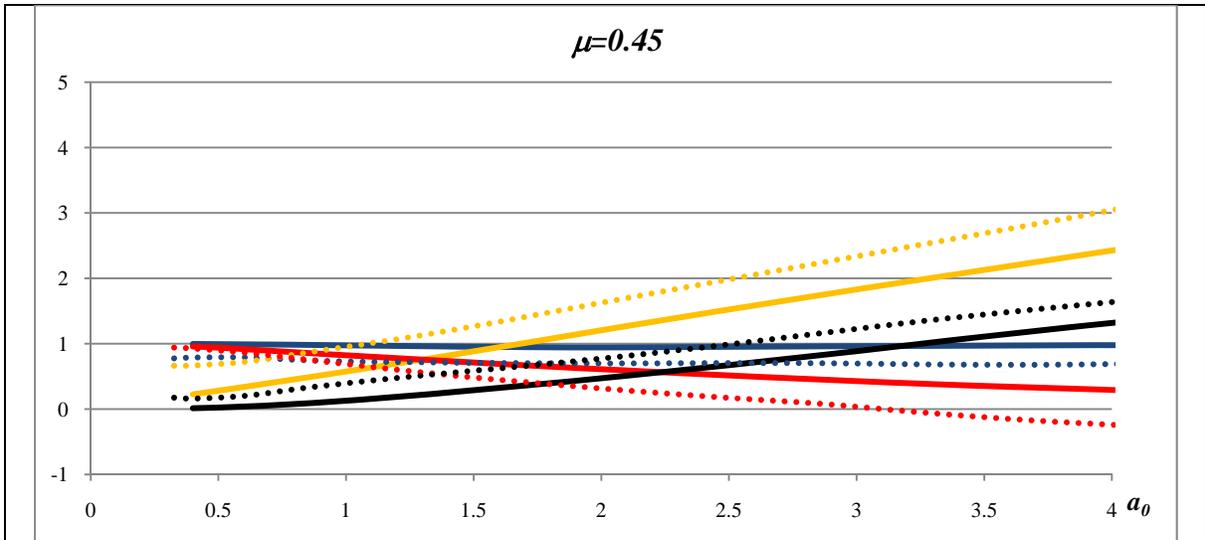


Figura 7.1.b: Comparación de los términos de las funciones de impedancia normalizadas del modelo tridimensional y plano calibrado según la propuesta de Luco y Hadjian [18] para  $\mu=0.45$ .

: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$
: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$

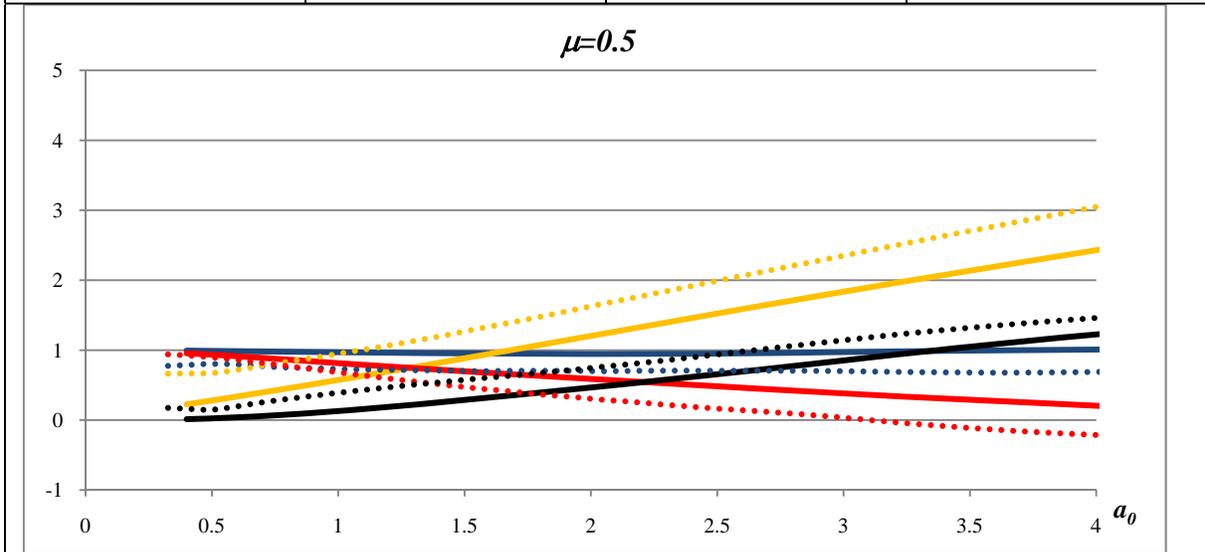


Figura 7.1.c: Comparación de los términos de las funciones de impedancia normalizadas del modelo tridimensional y plano calibrado según la propuesta de Luco y Hadjian [18] para  $\mu=0.5$ .

: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$
: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$

Del análisis de las figuras 7.1.a a 7.1.c se obtienen las siguientes conclusiones:

- Las rigideces del modelo tridimensional son mayores a las del modelo plano y su diferencia se acentúa al aumentar el valor de  $\mu$ .

- El amortiguamiento por radiación debido al cabeceo del modelo plano es siempre mayor al del modelo tridimensional siendo la diferencia más marcada a menores valores de  $\mu$ .
- Debido a que la calibración propuesta por Luco y Hadjian [18] consistió en igualar las rigideces de los modelos plano y tridimensional en especial para las altas frecuencias, se encuentra una buena coincidencia de estos valores en especial para  $\mu=1/3$ .
- La relación de Poisson del suelo juega un papel muy importante en los modelos tridimensional y plano y no es posible despreciar su influencia en el fenómeno de interacción suelo estructura. Por esto una buena calibración del modelo plano debe ser función de este parámetro. Lo anterior se ve claramente también al comparar las funciones de impedancia para cada modelo (figuras 6.3 y 6.5).
- Debido a que las diferencias entre ambos modelos radican en el amortiguamiento y en la rigidez, es importante evaluar modelos donde el suelo posea amortiguamiento y usar éste como una de las variables de calibración, lo anterior para casos de cimentaciones superficiales puede realizarse adecuadamente por medio del principio de correspondencia. Cabe anotar que en este trabajo no se explorará en profundidad esta alternativa.

Si se desea que la respuesta del sistema suelo-cimentación plano calibrado fuese igual al tridimensional se debería cumplir que las funciones de impedancia fueran iguales para todas las frecuencias. Lo anterior se representa por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) \left(\frac{k_{yy}(b_0)}{k_{11}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) F_1(\omega) = 1 \quad (7.1)$$

$$\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \left(\frac{c_{yy}(b_0)}{c_{11}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) F_2(\omega) = 1 \quad (7.2)$$

$$\frac{\text{Re}(\bar{K}_{y\theta}(i\omega))}{\text{Re}(\bar{K}_{y\theta}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) \left(\frac{k_{y\theta}(b_0)}{k_{21}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) F_3(\omega) = 1 \quad (7.3)$$

$$\frac{\text{Im}(\bar{K}_{y\theta}(i\omega))}{\text{Im}(\bar{K}_{y\theta}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \left(\frac{c_{y\theta}(b_0)}{c_{21}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) F_4(\omega) = 1 \quad (7.4)$$

$$\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right)^2 \left(\frac{3(1-\mu_c)}{8}\right) \left(\frac{k_{\theta\theta}(b_0)}{k_{22}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right)^2 \left(\frac{3(1-\mu_c)}{8}\right) F_5(\omega) = 1 \quad (7.5)$$

$$\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))} = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right)^2 \left(\frac{3(1-\mu_c)}{8}\right) \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \left(\frac{c_{\theta\theta}(b_0)}{c_{22}(a_0)}\right) = \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{b}{R}\right)^2 \left(\frac{3(1-\mu_c)}{8}\right) F_6(\omega) = 1 \quad (7.6)$$

De las ecuaciones anteriores puede verse que existen tres términos adimensionales que pueden variar para lograr la calibración entre las propiedades del sistema suelo-cimentación plano y tridimensional. En este punto cabe destacar que no es posible realizar una calibración adecuada entre el modelo tridimensional y plano que no sea función de la frecuencia pues las funciones  $F_1(\omega)$  a  $F_6(\omega)$  presentan una gran variabilidad con la frecuencia. Otro aspecto a resaltar es que con sólo tres parámetros libres no es posible calibrar las seis ecuaciones, por lo cual sólo podrán obtenerse resultados aproximados. De ser necesarios los demás parámetros libres podrían ser tomados de las propiedades de la estructura.

Como alternativa a las ecuaciones (7.1) a (7.6) también pueden obtenerse la relación entre las amplitudes y las fases de las funciones de impedancia del modelo plano y el tridimensional:

$$\frac{|\bar{K}_{yy}(i\omega)|}{|\bar{K}_{yy}(i\omega)|} = \left(\frac{c * G_s}{R * G_c}\right) \left(\frac{2-\mu_c}{8}\right) \sqrt{\frac{k_{yy}^2(b_0) + b_0^2 c_{yy}^2(b_0)}{k_{11}^2(a_0) + a_0^2 c_{11}^2(a_0)}} = 1 \quad (7.7)$$

$$\frac{\text{Fase}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\text{Fase}(\bar{K}_{yy}(i\omega))} = 1 \rightarrow \frac{k_{11}(a_0) b_0 c_{yy}(b_0)}{k_{yy}^2(b_0) a_0 c_{11}(a_0)} = 1 \quad (7.8)$$

$$\frac{\bar{K}_{y\theta}(i\omega)}{\hat{K}_{y\theta}(i\omega)} = \left( \frac{cG_S}{RG_C} \right) \left( \frac{b}{R} \right) \left( \frac{2 - \mu_C}{8} \right) \sqrt{\frac{k_{y\theta}^2(b_0) + b_0^2 c_{y\theta}^2(b_0)}{k_{21}^2(a_0) + a_0^2 c_{21}^2(a_0)}} = 1 \quad (7.9)$$

$$\frac{\text{Fase}(\bar{K}_{y\theta}(i\omega))}{\text{Fase}(\hat{K}_{y\theta}(i\omega))} = 1 \rightarrow \frac{k_{21}(a_0) b_0 c_{y\theta}(b_0)}{k_{y\theta}(b_0) a_0 c_{21}(a_0)} = 1 \quad (7.10)$$

$$\frac{\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)}{\hat{K}_{\theta\theta}(i\omega)} = \left( \frac{c * G_S}{R * G_C} \right) \left( \frac{b}{R} \right)^2 \left( \frac{3(1 - \mu_C)}{8} \right) \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^2(b_0) + b_0^2 c_{\theta\theta}^2(b_0)}{k_{22}^2(a_0) + a_0^2 c_{22}^2(a_0)}} = 1 \quad (7.11)$$

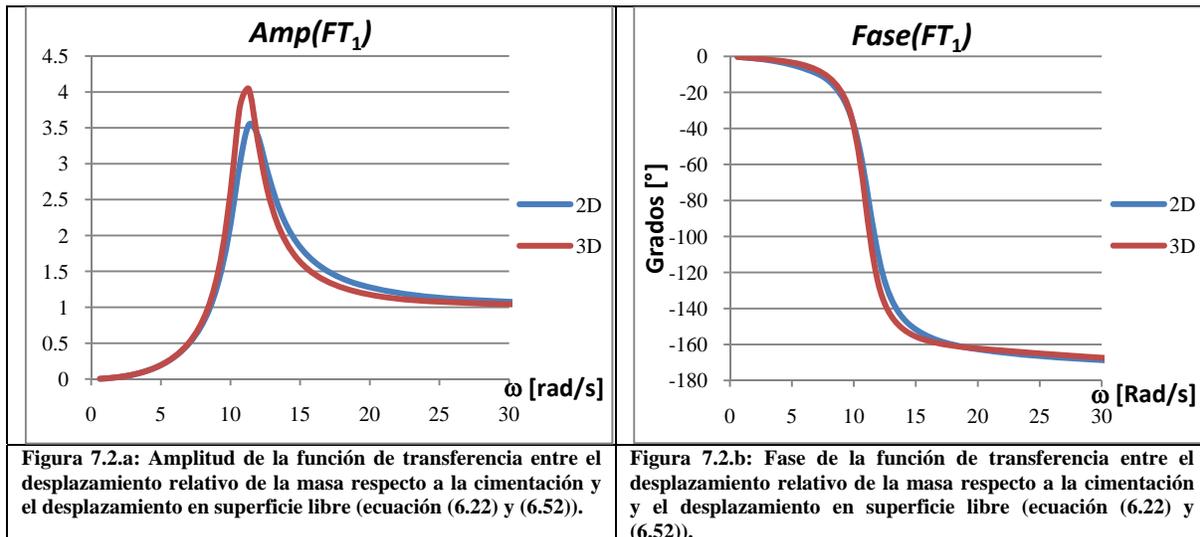
$$\frac{\text{Fase}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\text{Fase}(\hat{K}_{\theta\theta}(i\omega))} = 1 \rightarrow \frac{k_{22}(a_0) b_0 c_{\theta\theta}(b_0)}{k_{\theta\theta}(b_0) a_0 c_{22}(a_0)} = 1 \quad (7.12)$$

## 7.2 COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Con el objetivo de lograr un mayor entendimiento del fenómeno de interacción suelo- estructura que permita realizar algunos juicios sobre los parámetros calibrados del modelo plano, a continuación se realizará por medio de un ejemplo particular la comparación de las funciones de transferencia del modelo tridimensional y el plano propuesto por Luco y Hadjian [18]. Las propiedades de ambos modelos son:

Modelo tridimensional	Modelo plano		
$m_C = 8 \times 10^6$ [kg]	$c = 50.93$ [m]	Para definir las propiedades del modelo plano se han usado las relaciones obtenidas por Luco y Hadjian [18]:	
$k_C = 1.3 \times 10^9$ [N/m]	$m_S = 1.57 \times 10^5$ [kg/m]		
$\xi_C = 0.05$	$k_S = 2.55 \times 10^7$ [N/m <sup>2</sup> ]		
$H_C = 15$ [m]	$\xi_S = 0.05$		
$R = 20$ [m]	$H_S = 15$ [m]		
$G_C = 7.2 \times 10^7$ [N/m <sup>2</sup> ]	$b = 16.33$ [m]		$\frac{c}{R} = \frac{8}{\pi} \approx 2.546$
$\rho_C = 1800$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$G_S = 7.2 \times 10^7$ [N/m <sup>2</sup> ]		$\frac{b}{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$
$\mu_C = 1/3$	$\rho_S = 1800$ [kg/m <sup>3</sup> ]		
$V_{SC} = 200$ [m/s]	$\mu_S = 1/3$		
	$V_{SS} = 200$ [m/s]		
Estos datos representan una estructura larga de 5 pisos (T=0.5s) sobre un suelo blando.			

Para este caso de estudio las funciones de transferencia obtenidas se presentan a continuación:



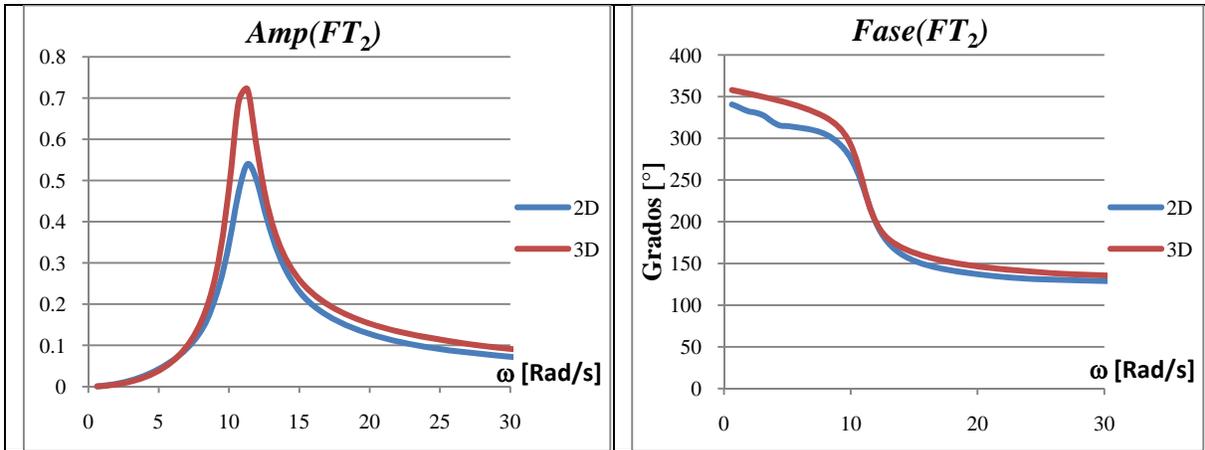


Figura 7.2.c: Amplitud de la función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento en superficie libre (ecuación (6.23) y (6.53)).

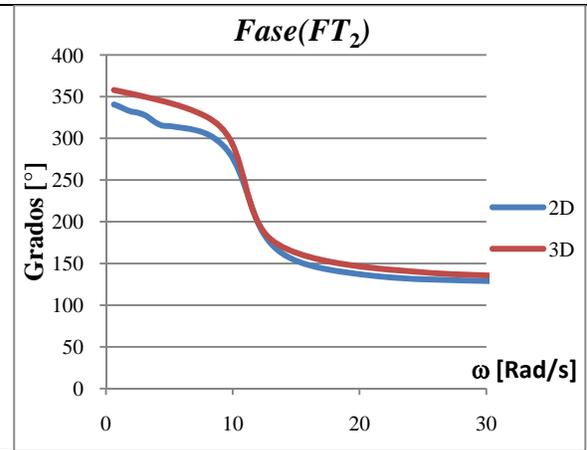


Figura 7.2.d: Fase de la función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento en superficie libre (ecuación (6.23) y (6.53)).

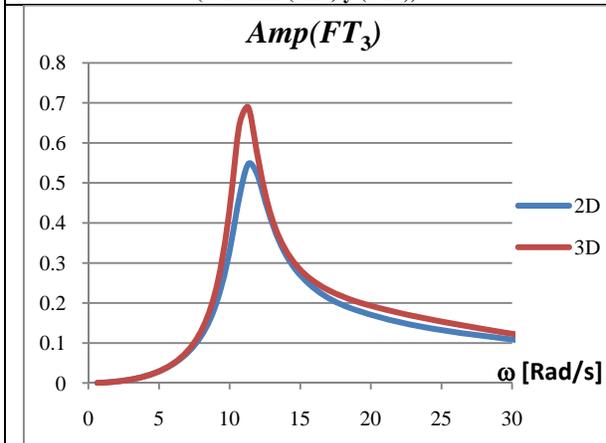


Figura 7.2.e: Amplitud de la función de transferencia entre el desplazamiento de la masa debido a la rotación de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre (ecuación (6.24) y (6.54)).

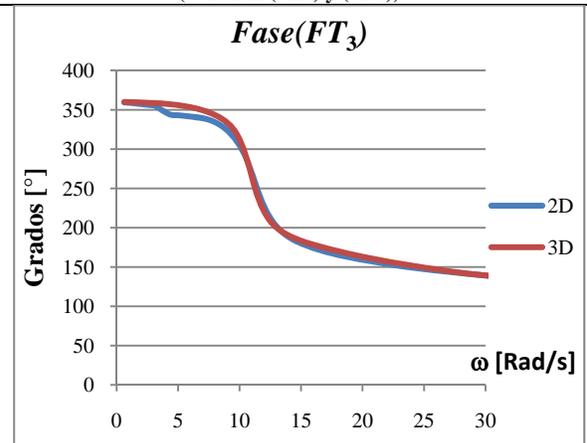


Figura 7.2.f: Amplitud de la función de transferencia entre el desplazamiento de la masa debido a la rotación de la cimentación y el desplazamiento en superficie libre (ecuación (6.24) y (6.54)).

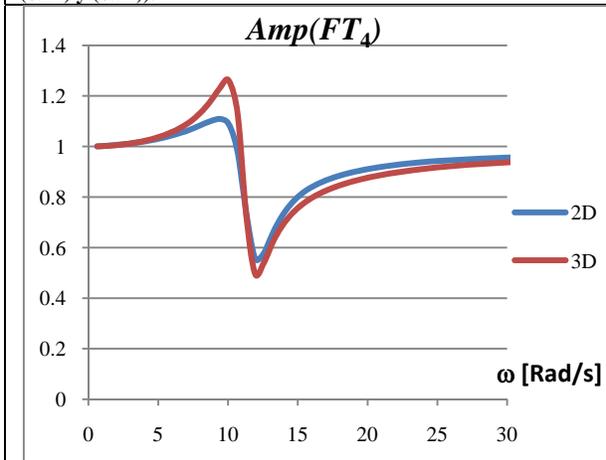


Figura 7.2.g: Amplitud de la función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el movimiento en superficie libre (ecuación (6.25) y (6.55)).

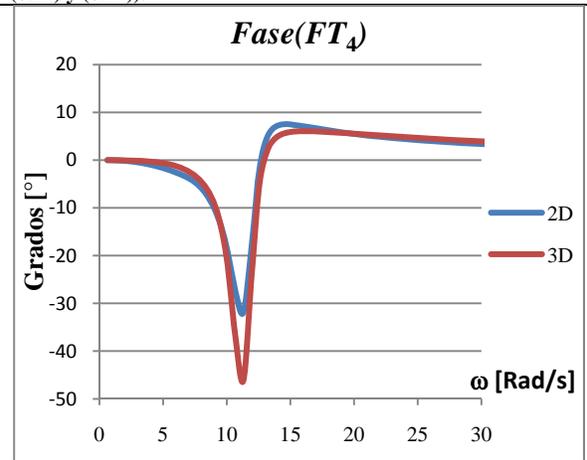


Figura 7.2.h: Fase de la función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el movimiento en superficie libre (ecuación (6.25) y (6.55)).

De las figuras anteriores se concluye lo siguiente:

- La respuesta del modelo plano calibrado suele subestimar la respuesta del modelo tridimensional, pudiendo ser la diferencia muy importante en especial en aquellos casos donde el fenómeno de interacción suelo estructura es muy marcado como es en el presente ejemplo.
- La fase de las funciones de transferencia de ambos modelos es similar excepto para la del desplazamiento total en la cimentación.
- El periodo fundamental del modelo plano es inferior al del modelo tridimensional.
- Debido a que la forma de las funciones de transferencia de ambos modelos es similar se esperaría que si se hacen coincidir el periodo fundamental y la amplitud máxima del desplazamiento total en la base de la cimentación para ambos modelos se logre una aceptable calibración.

## 8. CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO PLANO EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA

Para obtener la calibración de los parámetros del modelo plano se han seguido varias alternativas las cuales se describen a continuación:

### 8.1 PRIMERA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN DE LA AMPLITUD DE LOS TÉRMINOS DE LA DIAGONAL DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA)

Esta tentativa de calibración de los parámetros del modelo plano para representar bajo ciertos límites de precisión al modelo tridimensional busca la igualdad o similitud de los desplazamientos (amplitud y fase) de los tres grados de libertad de las estructuras en ambos modelos. De esta manera por medio del modelo plano se pueden obtener los rasgos más característicos de la respuesta de la estructura en estudio.

Reemplazando (6.11) en (6.42) y forzando a que la amplitud y la fase de los tres grados de libertad de ambos modelos son iguales se obtiene:

$$\frac{1}{m_c} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31}/H_c & G_{32}/H_c & G_{33}/H_c \end{bmatrix} = \frac{1}{m_s} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31}/H_s & J_{32}/H_s & J_{33}/H_s \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

A continuación se procederá a igualar las entradas a ambos lados de este sistema de ecuaciones. Igualando la entrada (1,1) de ambos lados de (8.1) y reemplazando los valores de  $G_{11}$  y  $J_{11}$  con los dados en (6.12) y (6.43) se obtiene:

$$\xi_c = \xi_s \quad (8.2)$$

$$\omega_c = \omega_s \quad (8.3)$$

La ecuación (8.2) se cumple si:

$$m_s = \frac{m_c}{c} \quad (8.4)$$

$$K_s = \frac{K_c}{c} \quad (8.5)$$

Donde  $c$  representa la “profundidad efectiva” de la fundación infinita, lo cual corresponde claramente a la definición usual de este parámetro.

Igualando la entrada (1,3) de ambas matrices en (8.1) se obtiene:

$$H_c = H_s \quad (8.6)$$

Hasta este punto se ha concluido que las propiedades de las estructuras del modelo plano y tridimensional deben ser iguales, por lo cual sólo quedan por calibrar los demás parámetros del modelo plano:  $b$ ,  $G_s$ ,  $\rho_s$ . (No se incluye la relación de Poisson por la compleja variación de las funciones de impedancia con este parámetro, ver figuras 6.3 y 6.5). Se propone entonces que la relación de Poisson sea igual en los dos modelos:  $\mu_c = \mu_s$ . Como consecuencia de que las estructuras de ambos modelos sean iguales, el problema de

cumplir con la ecuación (8.1) se ve reducido al problema de igualar las funciones de impedancia del modelo tridimensional y plano.

Recordando que las matrices de impedancia son simétricas y de componentes complejas, el igualar estas para ambos modelos conlleva a la definición de 6 ecuaciones, las cuales no pueden ser satisfechas por sólo 3 parámetros libres. De aquí en adelante presentaremos el procedimiento para aproximar la solución al sistema de ecuaciones faltante.

La primera ecuación del sistema es:

$$a_0 = b_0 \quad (8.7)$$

Esta ecuación se ha empleado debido al estrecho dominio que presentan ambas variables en las funciones de impedancia (ver figuras 6.3 y 6.5).

Igualando las amplitudes de la entrada (1,1) de las funciones de impedancia (ecuaciones (6.7) y (6.39)) y usando (8.7) se obtiene:

$$\frac{G_s c}{G_c R} = \frac{8}{2 - \mu_c} \frac{\sqrt{k_{11}(a_0)^2 + a_0^2 c_{11}(a_0)^2}}{\sqrt{k_{yy}(a_0)^2 + a_0^2 c_{yy}(a_0)^2}} \quad (8.8)$$

Igualando las amplitudes de la entrada (2,2) de las funciones de impedancia (ecuaciones (6.7) y (6.39)) y usando (8.7) se obtiene:

$$\left(\frac{b}{R}\right)^2 = \frac{8}{3(1 - \mu_c)} \left(\frac{c G_s}{R G_c}\right)^{-1} \frac{\sqrt{k_{22}(a_0)^2 + a_0^2 c_{22}(a_0)^2}}{\sqrt{k_{\theta\theta}(a_0)^2 + a_0^2 c_{\theta\theta}(a_0)^2}} \quad (8.9)$$

Reemplazando (8.8) en (8.9) se obtiene:

$$\frac{b}{R} = \sqrt{\frac{(2 - \mu_c) \left( \sqrt{k_{22}(a_0)^2 + a_0^2 c_{22}(a_0)^2} \left( k_{yy}(a_0)^2 + a_0^2 c_{yy}(a_0)^2 \right) \right)}{3(1 - \mu_c) \left( \sqrt{k_{11}(a_0)^2 + a_0^2 c_{11}(a_0)^2} \left( k_{\theta\theta}(b_0)^2 + a_0^2 c_{\theta\theta}(b_0)^2 \right) \right)}} \quad (8.10)$$

De (87) se puede concluir que:

$$\frac{\rho_s}{\rho_c} = \left(\frac{R}{b}\right)^2 \left(\frac{G_s}{G_c}\right) \quad (8.11)$$

Ahora, reemplazando (8.8) y (8.9) en (8.11) se obtiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_c} = \frac{24(1 - \mu_c) \left(\frac{c}{R}\right)^{-1} \left( \frac{k_{11}(a_0)^2 + a_0^2 c_{11}(a_0)^2}{k_{yy}(a_0)^2 + a_0^2 c_{yy}(a_0)^2} \right) \sqrt{k_{\theta\theta}(b_0)^2 + a_0^2 c_{\theta\theta}(b_0)^2}}{(2 - \mu_c)^2 \left(\frac{c}{R}\right) \left( \frac{k_{22}(a_0)^2 + a_0^2 c_{22}(a_0)^2}{k_{11}(a_0)^2 + a_0^2 c_{11}(a_0)^2} \right)} \quad (8.12)$$

Hasta este punto se ha realizado la calibración de parámetros del modelo plano y se han dejado sus valores en términos de la “profundidad equivalente” de este modelo, o lo que es igual, en términos de la relación  $\frac{c}{R}$ . Lo

anterior se debe a que la variable del problema es  $\frac{G_s c}{G_c R}$  y no solo  $\frac{c}{R}$ .

Los resultados obtenidos de las ecuaciones anteriores se presentan gráficamente a continuación para un valor de  $c/R=2$ :

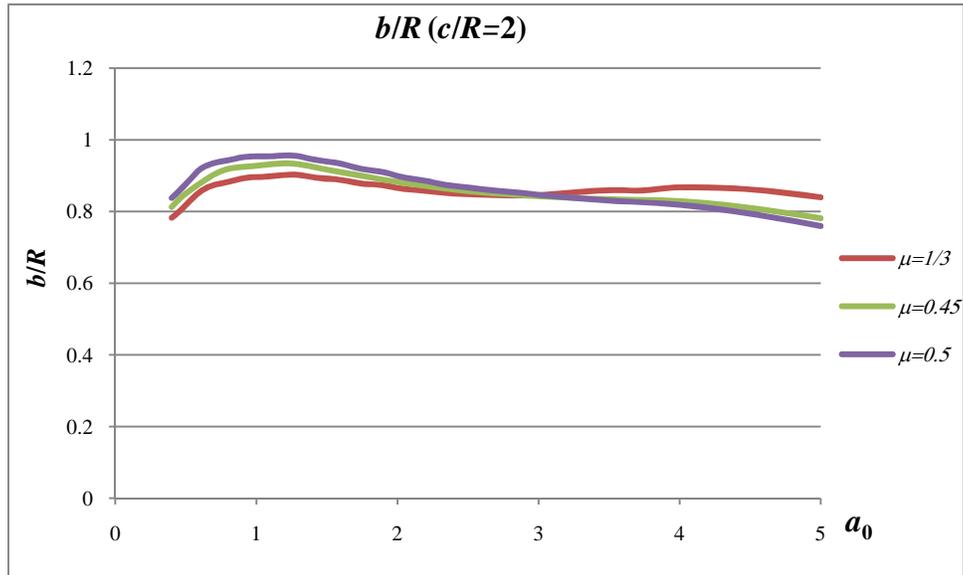


Figura 8.1.a: Gráfica de la relación entre el semieje de la cimentación del modelo plano y el radio de la cimentación del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

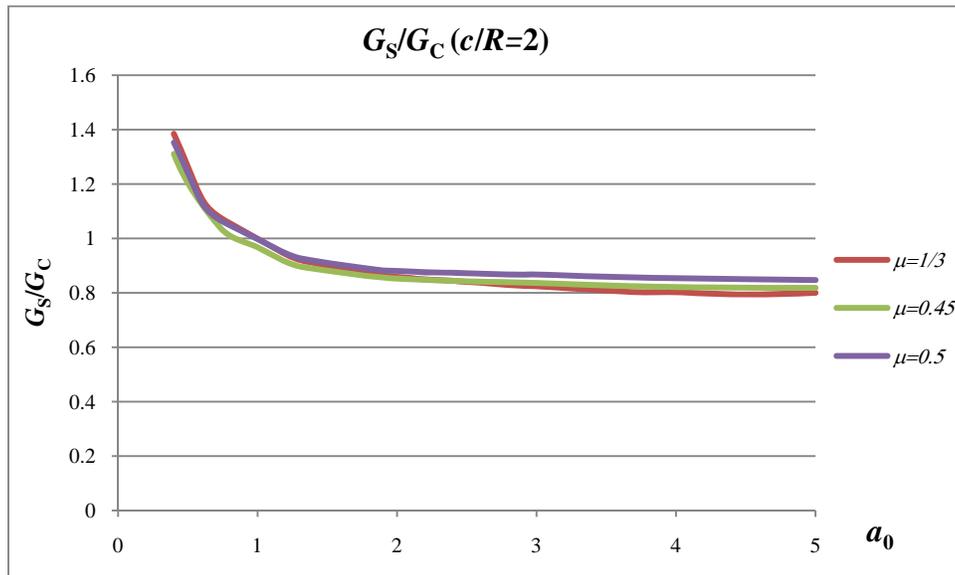


Figura 8.1.b: Gráfica de la relación entre el módulo de corte del suelo del modelo plano y módulo de corte del suelo del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

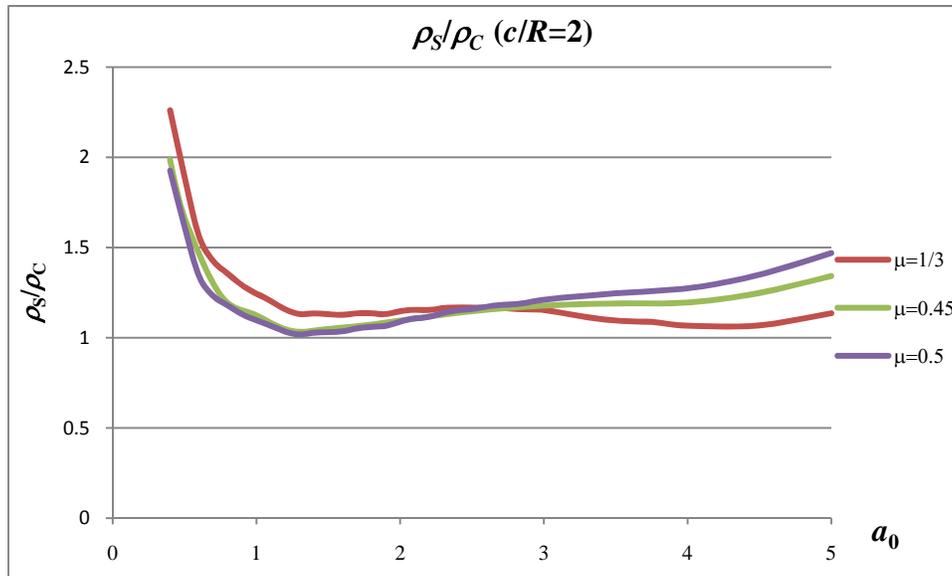


Figura 8.1.c: Gráfica de la relación entre la densidad del suelo del modelo plano y la densidad del suelo del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

La principal razón para igualar los términos de la diagonal de las funciones de impedancia de ambos modelos es que su valor es mucho más elevado que el de los términos por fuera de la diagonal.

En este punto el lector debe ser consciente de las implicaciones que tiene el uso de las relaciones presentadas en este numeral, pues al ser  $\frac{b}{R}$ ,  $\frac{G_s}{G_c}$  y  $\frac{\rho_s}{\rho_c}$  función de la frecuencia es necesario variar el modelo plano para cada frecuencia de estudio. Como caso particular si se utiliza un método numérico como elementos finitos o elementos de frontera, al variar  $\frac{b}{R}$  es necesario realizar un nuevo mallado. El verdadero uso de esta calibración ocurre para representaciones independientes de la frecuencia, esto se explicará más adelante en el numeral 9.

## 8.2 SEGUNDA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN DE TRES DE LOS CUATRO TÉRMINOS DE LA DIAGONAL DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA)

En el numeral anterior se ha concluido que para igualar la respuesta de ambos modelos en estudio la manera más adecuada es hacer iguales las estructuras del modelo plano y tridimensional y a su vez igualar las funciones de impedancia de ambos modelos. Para lograr lo anterior es necesario que las ecuaciones (7.1) a (7.6) o (7.7) a (7.12) o una mezcla coherente de ellas sean igualadas a la unidad, de tal forma que se tiene un sistema de 6 ecuaciones con tres variables independientes:  $\frac{cG_s}{RG_c}$ ,  $\frac{b}{R}$  y  $\frac{b_0}{a_0}$ .

Debido a que este sistema de ecuaciones no se puede resolver, se recurre a disminuir la dimensión del mismo, es decir, se aceptará una solución aproximada en lugar de la exacta. Para esto nos apoyamos en el hecho de que los términos de acoplamiento de las matrices de impedancia son pequeños respecto a los de la diagonal y por lo tanto dos ecuaciones pueden ser eliminadas, de tal forma que ahora se cuenta con un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. La otra ecuación a eliminar o desconocer dependerá de los valores de la parte real o imaginaria o amplitud y fase de las funciones de impedancia. Por ejemplo, se pueden igualar la parte real e imaginaria (o amplitud y fase) de un término de la diagonal y la amplitud del otro (o la parte real o imaginaria).

A continuación se realizará una calibración de parámetros basada en la igualación a la unidad de las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.11) o lo que es igual, la parte real e imaginaria del término que relaciona la fuerza y el desplazamiento horizontal, y la amplitud del término que relaciona el momento y la rotación. Seguidamente se presenta el procedimiento para realizar esta calibración.

Dividiendo (7.2) entre (7.1) se obtiene:

$$\frac{b_0}{a_0} = \left( \frac{k_{yy}(b_0)}{k_{11}(a_0)} \right) \left( \frac{c_{11}(a_0)}{c_{yy}(b_0)} \right) \quad (8.13)$$

La ecuación (8.13) es muy importante pues será empleada para realizar un proceso iterativo que conducirá al valor de  $b_0$  en función de  $a_0$ .

Igualando la ecuación (7.1) a 1 se tiene:

$$\frac{cG_s}{RG_c} = \left( \frac{8}{2-\mu_c} \right) \left( \frac{k_{11}(a_0)}{k_{yy}(b_0)} \right) \quad (8.14)$$

Reemplazando (8.13) y (8.14) en (7.11) e igualando a 1 se tiene:

$$\frac{b}{R} = \sqrt{\frac{2-\mu_c}{3(1-\mu_c)}} \frac{k_{yy}(b_0)}{k_{11}(a_0)} \sqrt{\frac{k_{22}^2(a_0) + a_0^2 c_{22}^2(a_0)}{k_{\theta\theta}^2(b_0) + b_0^2 c_{\theta\theta}^2(b_0)}} \quad (8.15)$$

De la ecuación (8.13) también puede obtenerse la relación entre las densidades de ambos modelos, así:

$$\frac{\rho_s}{\rho_c} = \frac{24(1-\mu_c)}{(2-\mu_c)^2} \left( \frac{c_{11}(a_0)}{c_{yy}(b_0)} \right)^2 \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^2(b_0) + b_0^2 c_{\theta\theta}^2(b_0)}{k_{22}^2(a_0) + a_0^2 c_{22}^2(a_0)}} \left( \frac{c}{R} \right)^{-1} \quad (8.16)$$

A continuación se presentan en forma grafica los resultados obtenidos de esta calibración:

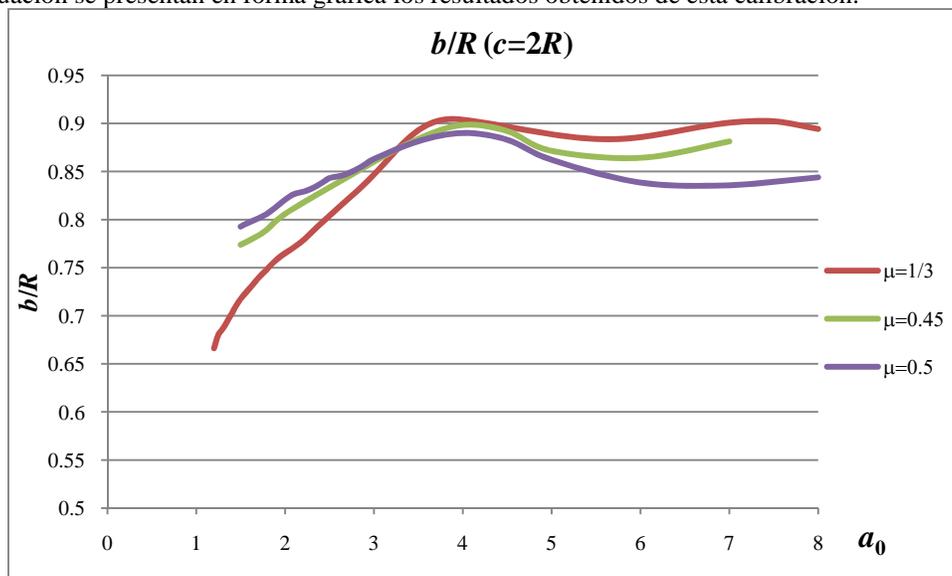


Figura 8.2.a: Gráfica de la relación entre el semieancho de la cimentación del modelo plano y el radio de la cimentación del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

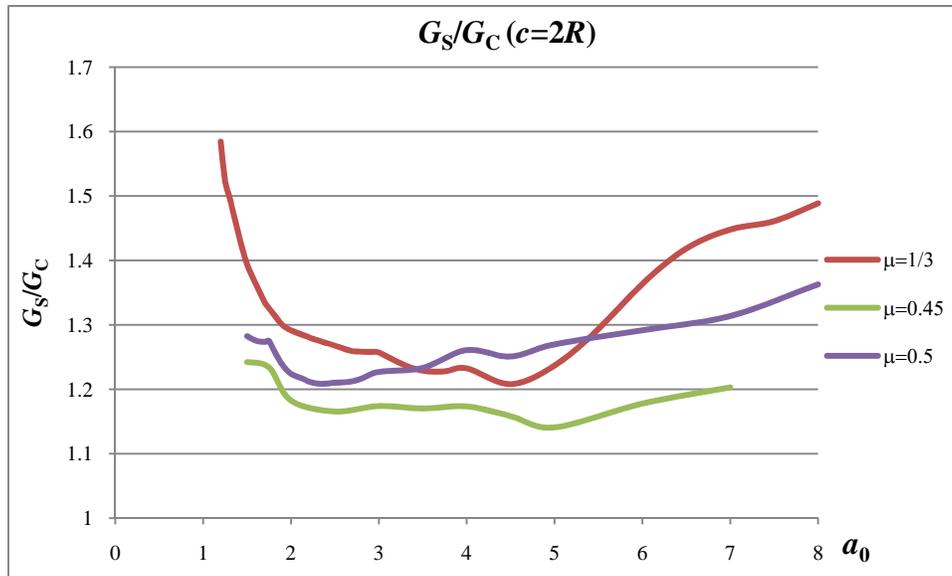


Figura 8.2.b: Gráfica de la relación entre el módulo de corte del suelo del modelo plano y modulo de corte del suelo del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

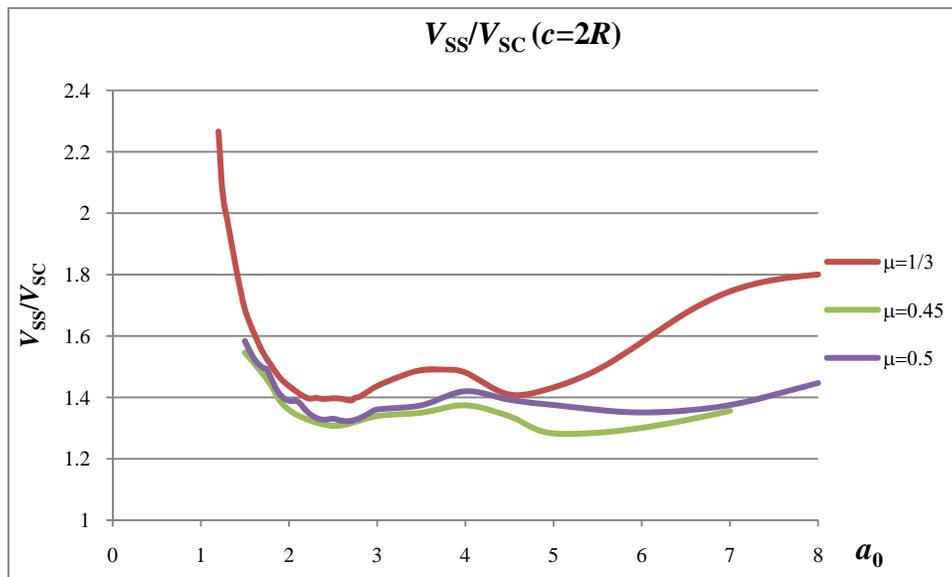


Figura 8.2.c: Gráfica de la relación entre la velocidades de corte del suelo del modelo plano y la velocidad de corte del suelo del modelo tridimensional para una relación  $c/R=2$ .

Esta calibración de parámetros presenta el mismo inconveniente que la anterior pues para su implementación es necesario cambiar el modelo para cada frecuencia en estudio y en especial es necesario cambiar la discretización del problema (mallado).

### 8.3 TERCERA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (MODELO CON MALLADO INVARIABLE)

Como se ha comentado anteriormente las dos calibraciones anteriores presentan el gran inconveniente que es necesario cambiar la discretización del modelo plano para cada frecuencia de estudio pues el ancho de la cimentación es función de la frecuencia. Para eliminar esto se tomarán como variables independientes del

problema  $\frac{cG_s}{RG_c}$  y  $\frac{b_0}{a_0}$  de tal manera que sólo se puedan igualar a la unidad 2 de las 6 ecuaciones (7.1) a (7.6)

o (7.7) a (7.12). Como alternativa se tomará igualar las amplitudes de los términos de la diagonal de las matrices de impedancia. De lo anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{2 - \mu_c}{3(1 - \mu_c)} \sqrt{\frac{k_{22}^2(a_0) + a_0^2 c_{22}^2(a_0)}{k_{11}^2(a_0) + a_0^2 c_{11}^2(a_0)}} = \left(\frac{b}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{k_{\theta\theta}^2(b_0) + b_0^2 c_{\theta\theta}^2(b_0)}{k_{yy}^2(b_0) + b_0^2 c_{yy}^2(b_0)}} \quad (8.17)$$

$$\frac{G_s}{G_c} = \left(\frac{4}{2 - \mu_c}\right) \sqrt{\frac{k_{11}^2(a_0) + a_0^2 c_{11}^2(a_0)}{k_{yy}^2(b_0) + b_0^2 c_{yy}^2(b_0)}} \quad (8.18)$$

Como caso particular en la obtención de la ecuación (8.18) se ha usado la relación  $c=2R$ .

Como puede verse en la ecuación (8.17) el valor de la relación  $b/R$  pese a ser libre no puede tomar cualquier valor pues si es muy pequeño o grande haría que no pudiese cumplir ésta. Como caso particular se encontró que para valores de  $b/R=0.85$  (ver la concordancia de este valor con lo presentado en la Figura 13a) es posible obtener valores de las propiedades equivalentes para el rango de frecuencias usuales en las estructuras. Los resultados de las propiedades calibradas se presentan a continuación:

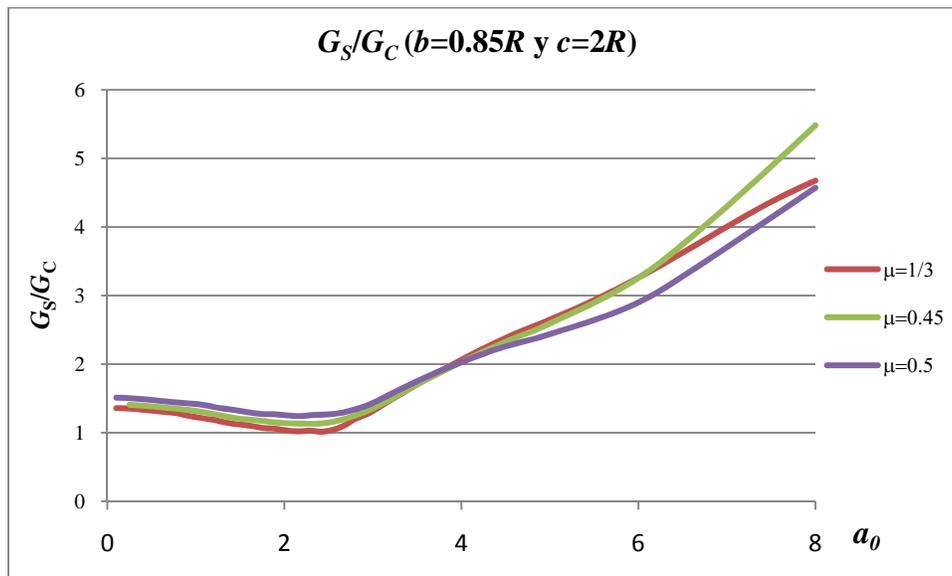


Figura 8.3.a: Relación entre los modelos de corte del modelo plano y tridimensional ( $G_s/G_c$ ) para valores de  $b/R=0.8R$  y  $c/R=2$ .

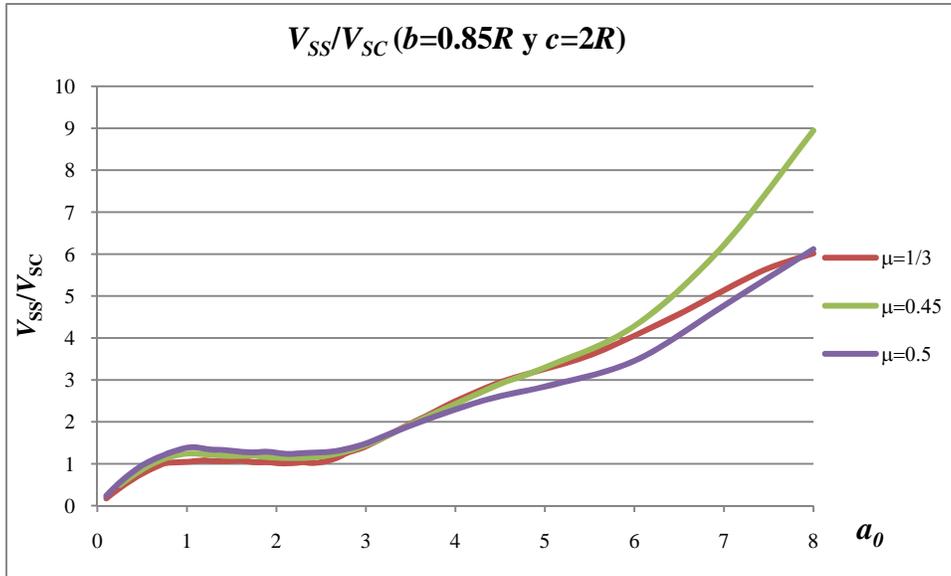


Figura 8.3.b: Relación entre las velocidades de propagación de las ondas de corte del suelo del modelo plano y tridimensional ( $V_{ss}/V_{sc}$ ) para valores de  $b/R=0.85$  y  $c/R=2$ .

A continuación se presenta la comparación de los términos de las funciones de impedancia del modelo tridimensional y del modelo plano calibrado con la actual propuesta:

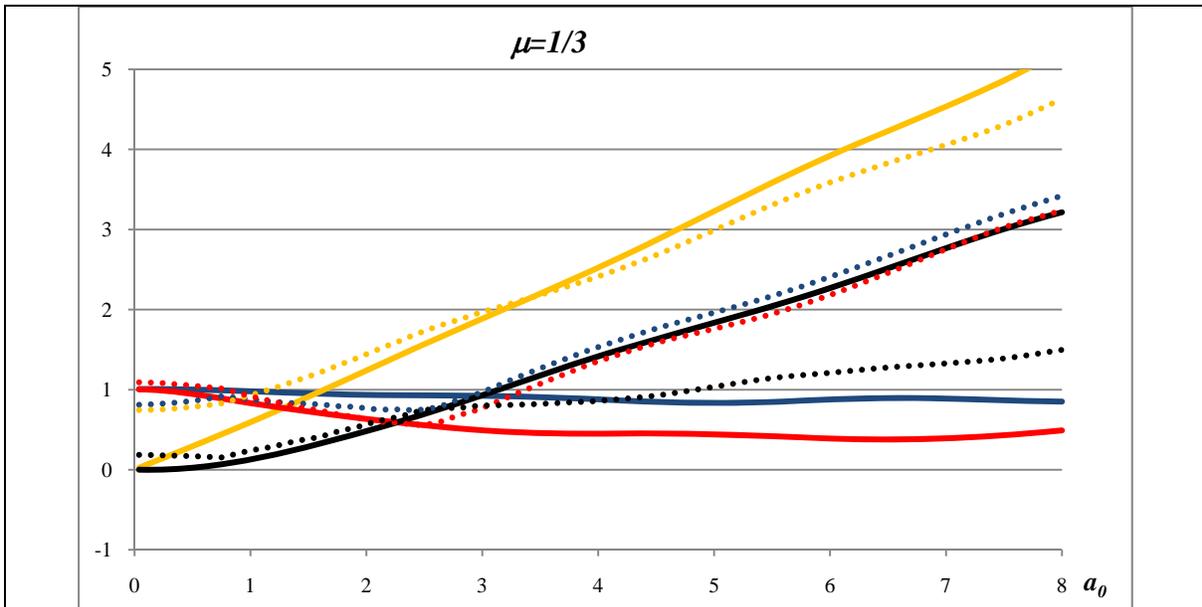


Figura 8.4.a: Comparación de los términos de las funciones de impedancia normalizadas del modelo tridimensional y plano calibrado según la tentativa 3 de este documento para  $\mu=1/3$ .

: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$
: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$

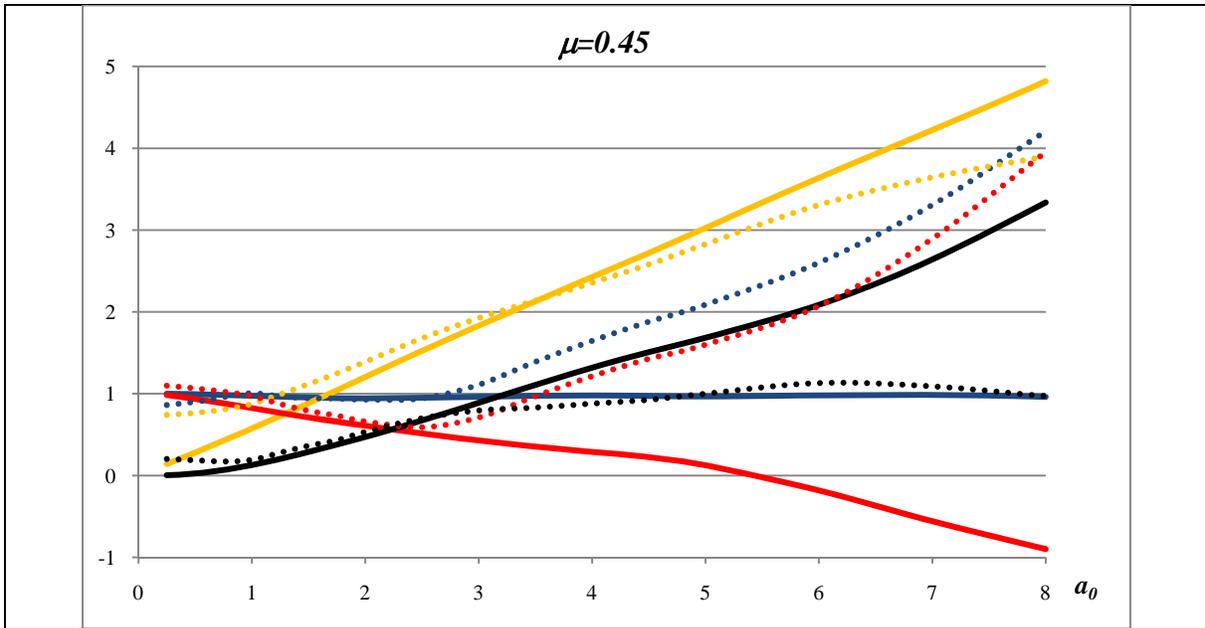


Figura 8.4.b: Comparación de los términos de las funciones de impedancia normalizadas del modelo tridimensional y plano calibrado según la tentativa 3 de este documento para  $\mu=0.45$ .

: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$
: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$

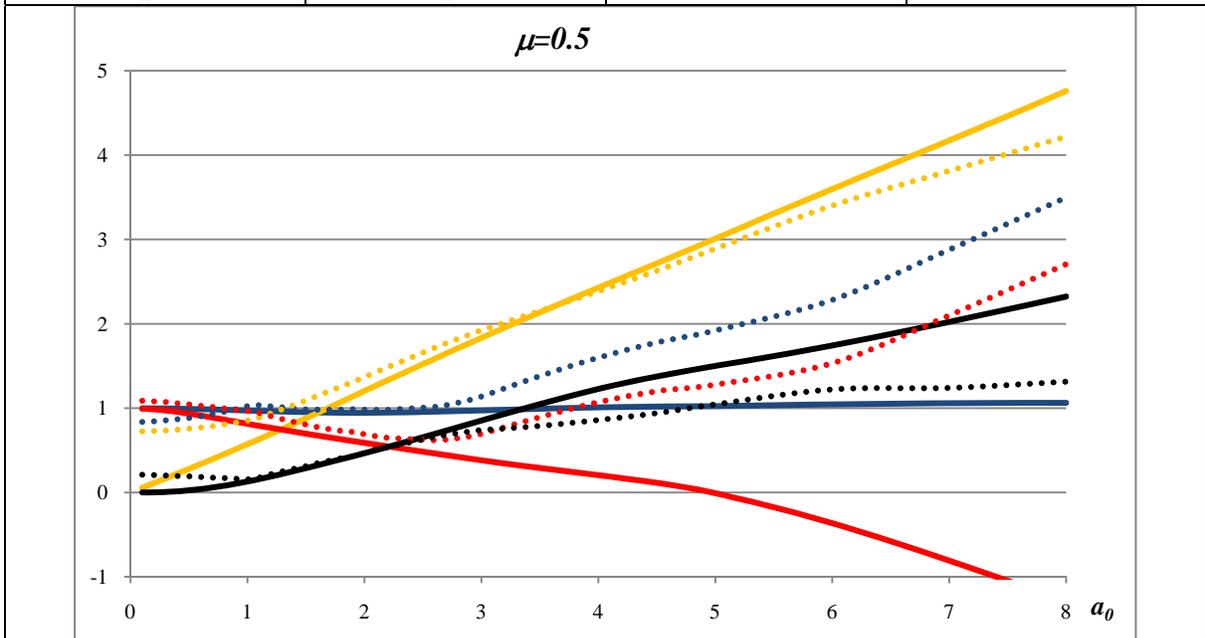


Figura 8.4.c: Comparación de los términos de las funciones de impedancia normalizadas del modelo tridimensional y plano calibrado según la tentativa 3 de este documento para  $\mu=0.5$ .

: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega))}{\widehat{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\widehat{K}_{\theta\theta}(0)}$
: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\omega))}{\bar{K}_{yy}(0)}$	: $\frac{\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$	: $\frac{\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega))}{\bar{K}_{\theta\theta}(0)}$

De las figuras anteriores se ve que la diferencia en las fases de los términos de la matriz de impedancia es importante para valores de  $a_0 > 3$ , lo que quiere decir que se espera que la presente calibración presenta mejores resultados para valores de  $a_0$  menores a este valor.

A continuación se describen en forma resumida otras dos opciones de calibración del modelo plano que no han sido explotadas a profundidad en el presente trabajo. El objetivo de presentarlas radica en el hecho de que estas pueden ser opciones muy valiosas a desarrollar en un futuro.

#### 8.4 CUARTA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (IGUALACIÓN SOLO DEL MOVIMIENTO EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA)

Como cuarta tentativa se propone igualar o aproximar el desplazamiento y la rotación en la cimentación de ambos modelos (sin importar que valor tome el movimiento del resto de la estructura), de tal forma que las propiedades de la estructura plana y tridimensional no sean iguales. Con lo anterior el análisis de interacción suelo-estructura consistirá en dos pasos: 1) por medio del modelo plano equivalente se obtendrá el movimiento “real” de la base de la estructura y 2) este desplazamiento será empleado en un modelo tridimensional de la estructura del cual se obtendrá la respuesta de ésta.

Para llevar a cabo esta calibración se igualan las funciones de transferencia del desplazamiento y rotación en la base de la cimentación respecto al desplazamiento en superficie libre, con la nomenclatura usada hasta ahora lo anterior corresponde a obtener las siguientes ecuaciones:

$$FT_2^C = FT_2^S \quad (8.19)$$

$$\frac{FT_3^C}{H_C} = \frac{FT_3^S}{H_S} \quad (8.20)$$

Las ecuaciones (8.19) y (8.20) en su forma aproximada son:

$$FT_2^C(\varpi) = \frac{\frac{m_s * \varpi^2}{G_s(k_{yy}(b_0) + ib_0 c_{yy}(b_0))} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right]}{-1 + \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) - \frac{m_s * \varpi^2}{G_s(k_{yy}(b_0) + ib_0 c_{yy}(b_0))} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_s * \varpi^2 H_s^2}{G_s(k_{\theta\theta}(b_0) + ib_0 c_{\theta\theta}(b_0)) b^2} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right]} \quad (8.21)$$

$$\frac{FT_3^C(\varpi)}{H_C} = \frac{\frac{m_s * \varpi^2 H_s}{G_s(k_{\theta\theta}(b_0) + ib_0 c_{\theta\theta}(b_0)) b^2} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right]}{-1 + \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) - \frac{m_s \varpi^2}{G_s(k_{yy}(b_0) + ib_0 c_{yy}(b_0))} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right] - \frac{m_s * \varpi^2 H_s^2}{G_s(k_{\theta\theta}(b_0) + ib_0 c_{\theta\theta}(b_0)) b^2} \left[ \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right)^2 + 2i\xi_s \left( \frac{\omega_s}{\varpi} \right) \right]} \quad (8.22)$$

Si se reemplazan las funciones de transferencia del modelo tridimensional (ecuaciones (40) y (41)) en las ecuaciones (8.21) y (8.22) pueden obtenerse cuatro ecuaciones las cuales poseen más de cuatro parámetros libres, al igual que en la calibración anterior se recomienda dejar fijos aquellos parámetros que conllevarían un nuevo mallado del modelo para cada frecuencia de estudio (altura de la estructura y ancho de la cimentación).

#### 8.5 QUINTA TENTATIVA DE CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA (MODELO CON AMORTIGUAMIENTO EN EL SUELO)

Esta alternativa consiste en tener presente el amortiguamiento del suelo como parámetro de calibración. Lo anterior se basa en que una de las grandes diferencias entre los modelos planos y tridimensionales es que los

primeros sobrestiman el amortiguamiento por radiación. Para el caso particular de los modelos estudiados, al igualar los términos de la diagonal de las funciones de impedancia de ambos modelos se obtiene:

$$\frac{8G_c R}{2-\mu_c} (k_{11}(a_0) + ia_0 c_{11}(a_0)) * (1 + i2\zeta_c) = c * G_s (k_{yy}(b_0) + ib_0 c_{yy}(b_0)) * (1 + i2\zeta_s) \quad (8.23)$$

$$\frac{8G_c R}{3(1-\mu_c)} (k_{22}(a_0) + ia_0 c_{22}(a_0)) R^2 (1 + i2\zeta_c) = c * G_s (k_{\theta\theta}(b_0) + ib_0 c_{\theta\theta}(b_0)) b^2 (1 + i2\zeta_s) \quad (8.24)$$

Donde:

$\zeta_c$ : Amortiguamiento histerético del suelo del modelo tridimensional.

$\zeta_s$ : Amortiguamiento histerético del suelo del modelo plano.

Como resultado de esta calibración y esperando obtener valores típicos para el amortiguamiento del suelo del modelo plano puede verse que la influencia del amortiguamiento no afecta de manera considerable la amplitud de los términos de las funciones de impedancia pero sí varía en forma más importante la fase. Este hecho puede ser de gran ventaja pues como se ha visto en la calibración 3 las fases del modelo calibrado con esta alternativa y la del tridimensional son bastante diferentes.

Con respecto a esta calibración se debe llamar la atención pues aunque en las ecuaciones (8.23) y (8.24) está implícito el uso del principio de correspondencia, éste sólo se puede tomar como una buena aproximación para casos de suelos profundos (Kausel [29]). Para casos donde no se cumpla esta hipótesis las funciones de impedancia del suelo con amortiguamiento no pueden calcularse directamente de aquellas para el suelo sin amortiguamiento. No obstante, en estos casos también sigue siendo válida la idea de agregar una variable más a la calibración por medio del amortiguamiento.

## 8.6 COMENTARIOS SOBRE LAS REPERCUSIONES DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS CALIBRACIONES PRESENTADAS EN ESTE NUMERAL

A continuación se discutirán brevemente algunas importantes repercusiones que tendría el uso de los anteriores resultados a modelos diferentes de suelo, es decir, la extrapolación de los resultados obtenidos al calibrar el modelo plano de la cimentación sobre semiespacio elástico a otros modelos. Una discusión más amplia sobre este tema se deja para un capítulo posterior de este trabajo.

1. El cambio de las velocidades de propagación de ondas P y S entre el modelo tridimensional y los modelos planos calibrados hará que para el caso de cimentaciones sobre estratos el periodo fundamental de estos sea diferente entre ambos modelos. Esto es importante pues las formas de las funciones de impedancia para suelos estratificados están muy relacionadas con los periodos fundamentales de los estratos y si se realiza una variación de estos entre el modelo plano y tridimensional se hará más difícil realizar un buen ajuste del modelo plano.

2. El hecho de rigidez estática nula para el desplazamiento horizontal del modelo plano genera ciertos problemas pues este hecho se convierte en un caso especial dentro de la gran variedad de posibles escenarios de modelos planos, como por ejemplo, cimentación superficial o enterrada sobre un estrato empotrado en su base, cimentación superficial o enterrada sobre un estrato apoyado sobre un semiespacio y cimentación enterrada en un semiespacio, debido a que en los ejemplos anteriores la rigidez estática del modelo plano no es nula. Es por esto que para extrapolar las propuestas presentadas en este capítulo a otros escenarios se debe ser muy cuidadoso. En el capítulo 12 se discute el problema de realizar calibraciones de modelos planos para otros escenarios diferentes al de la fundación sobre un semiespacio elástico homogéneo.

4. Pese a que la hipótesis referente al hecho de que los términos acoplados de la matriz de impedancia son menores a los desacoplados es válida para otros escenarios diferentes a los de la cimentación sobre un semiespacio, se debe resaltar que el valor relativo de los últimos disminuye en especial para cimentaciones

enterrados. Este hecho debe ser estudiado pues puede convertirse en un generador de errores no tenido en cuenta hasta ahora.

## 9. CALIBRACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTES DE LA FRECUENCIA

El objetivo de este numeral es describir algunos procedimientos para realizar una calibración de los parámetros del modelo plano estudiado, pero independiente de la frecuencia, de tal manera que se logre una aceptable correspondencia con el modelo tridimensional. Aunque el presente procedimiento va en contravía de las propuestas de calibración presentadas en el capítulo 8 se considera importante su discusión pues al ser independiente de la frecuencia se presta para un uso en un contexto más amplio como por ejemplo para problemas no lineales o mediante el empleo de métodos numéricos en el dominio del tiempo los cuales tienen más amplia difusión que aquellos en el dominio de la frecuencia.

Las alternativas que se presentarán se basan en lograr una buena coincidencia entre las funciones de impedancia del modelo tridimensional y el plano para un determinado rango de frecuencias. Lo anterior se apoya en el hecho de que la respuesta de una estructura se suele concentrar en un ancho de frecuencias reducido. Continuando con lo que se ha presentado hasta el momento sólo se busca calibrar los términos desacoplados de las funciones de impedancia pues tienen un valor mucho mayor que los acoplados. Lo anterior simplemente significa que se buscará que las ecuaciones (7.1), (7.2), (7.5) y (7.6) (o sus equivalentes en términos de amplitud y fase) se aproximen a la unidad.

### 9.1 CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN INTERVALO CORTO DE FRECUENCIAS CENTRADO EN LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL DEL SISTEMA

Como puede verse claramente en las funciones de transferencia presentadas en las gráficas 7.2.a a 7.2.h, la amplitud máxima de éstas se presenta para una frecuencia muy cercana y un poco menor a la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada. En esta alternativa se propone usar las propiedades equivalentes obtenidas de la calibración 2 para el valor de la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada (9.1) o del sistema suelo cimentación (6.34):

$$a_0^F = \frac{\omega_c R}{V_{SS}} = \sqrt{\frac{K_c}{m_c}} \frac{R}{V_{SS}} \quad (9.1)$$

Donde:

$\omega_c$ : Frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada.

Esta alternativa debe ser usada con mucho cuidado pues desconoce totalmente el contenido frecuencial de la excitación y además debe tenerse en cuenta que para sistemas de varios grados de libertad las funciones de transferencia son diferentes a las presentadas en las gráficas 7.2.a a 7.2.h pues presentan picos cerca a las frecuencias fundamentales de la estructura.

### 9.2 CALIBRACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN AMPLIO RANGO DE FRECUENCIAS

En esta propuesta se seguirá un procedimiento similar al presentado por Luco y Hadjian [18] según el cual se busca una calibración que permita obtener una buena representación de las funciones de impedancia del modelo tridimensional para un amplio rango de frecuencias definiendo propiedades equivalentes del modelo plano. Lo novedoso en esta propuesta es que también se considerará como parámetro libre el módulo de corte del suelo, lo cual a priori significa una mejor calibración pues se tiene un parámetro libre adicional.

Como se observa de la comparación de las figuras 6.3.a con 6.5.a, 6.3.b con 6.5.b ... y 6.3.f con 6.5.f, las funciones de impedancia de los modelos tridimensional y plano presentan variaciones muy diferentes. Lo

anterior también se ve al comparar las figuras 7.1.a a 7.1.c y constatar que éstas distan mucho de ser horizontales (independientes de la frecuencia). Por lo anterior, se calibrarán las propiedades del modelo plano sólo para algunos rangos de frecuencia.

Debido a que la parte real del término que relaciona la fuerza horizontal con el desplazamiento horizontal de la función de impedancia del modelo plano (Figura 6.5.a) presenta una variación tan diferente a la del modelo tridimensional (Figura 6.3.a), se propone que el valor promedio de la primera para las bajas frecuencias sea igual al valor promedio de la segunda para este mismo rango de frecuencias (el valor de esta sí es casi constante). Realizando el cociente de estas dos funciones se obtiene:

$$\frac{\text{Prom}\left(\text{Re}\left(\bar{K}_{yy}(i\omega)\right)\right)}{\text{Prom}\left(\text{Re}\left(\tilde{K}_{yy}(i\omega)\right)\right)} = \frac{\pi\left(\frac{cG_s}{RG_c}\right)}{8} \quad (\text{Símil de la ecuación 11 de [18]}) \quad (9.2)$$

Continuando con este procedimiento, se observa que la parte imaginaria del término que relaciona la fuerza horizontal con el desplazamiento horizontal de la función de impedancia del modelo plano para las altas frecuencias toma un valor constante (Figura 6.5.b), e igual sucede para el modelo tridimensional (Figura 6.3.b). Relacionando ambas cantidades se obtiene:

$$\frac{\text{Im}\left(\bar{K}_{yy}(b_0 \gg 0)\right)}{\text{Im}\left(\tilde{K}_{yy}(a_0 \gg 0)\right)} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{R}\right) \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{V_{ss}}{V_{sc}}\right)^{-1} \quad (\text{Símil de la ecuación 12 de [18]}) \quad (9.3)$$

También, se observa de la función de impedancia del modelo plano (Figura 6.5.e) que la parte real del término que relaciona el momento flector con la rotación posee una forma diferente a la misma componente para el modelo tridimensional (Figura 6.3.e). La relación entre estos términos para las bajas frecuencias se puede aproximar así:

$$\frac{\text{Re}\left(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)\right)}{\text{Re}\left(\tilde{K}_{\theta\theta}(i\omega)\right)} = \frac{3\pi}{16} \left(\frac{b}{R}\right)^2 \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \quad (\text{Símil de la ecuación 13 de [18]}) \quad (9.4)$$

La relación entre la parte imaginaria del término de la función de impedancia que relaciona la rotación de la cimentación con el momento flector sobre ésta, para el modelo plano, y su similar tridimensional, se puede aproximar para las altas frecuencias como (ver figuras 6.3.f. y 6.5.f):

$$\frac{\text{Im}\left(\bar{K}_{\theta\theta}(b_0 \gg 0)\right)}{\text{Im}\left(\tilde{K}_{\theta\theta}(a_0 \gg 0)\right)} = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{b}{R}\right)^3 \left(\frac{cG_s}{RG_c}\right) \left(\frac{V_{ss}}{V_{sc}}\right)^{-1} \quad (\text{Símil de la ecuación 13 de [18]}) \quad (9.5)$$

El objetivo es lograr que las ecuaciones (9.2) a (9.5) o el mayor número de éstas se aproximen a la unidad. Debido a que contamos con cuatro ecuaciones y sólo con tres incógnitas, sólo podremos lograr que tres de estas ecuaciones se cumplan. A continuación se describe en forma tabulada algunas soluciones aproximadas al anterior sistema de ecuaciones:

Ecuaciones a resolver	$\frac{cG_s}{RG_c}$	$\frac{b}{R}$	$\frac{V_{ss}}{V_{sc}}$	Lado derecho de la ecuación			
				9.2	9.3	9.4	9.5
(9.2), (9.3) y (9.4)	2.546	0.816	1.324	1	1	1	0.887
(9.2), (9.4) y (9.5)	2.546	0.816	1.176	1	1.125	1	1
(9.2), ( $\pm 9.3$ ), (9.4) y ( $\pm 9.5$ )	2.546	0.816	1.25	1	1.058	1	0.939
(9.3), (9.4) y (9.5)	2.264	0.866	1.248	0.889	1	1	1
(9.2), (9.3) y (9.5)	2.546	0.866	1.403	1	1	1.125	1
( $\pm 9.2$ ), (9.3), ( $\pm 9.4$ ) y (9.5)	2.405	0.866	1.326	0.944	1	1.062	1

De la interpretación de los resultados de la tabla anterior se recomienda emplear los datos obtenidos de las propuestas 3 y 6 pues en éstas se equilibran los términos que amplifican y deamplifican la respuesta del modelo plano.

### 9.3 COMENTARIOS RESPECTO AL PROCEDIMIENTO PRESENTADO EN ESTE NUMERAL

Para finalizar este numeral se presentarán algunos comentarios que sirvieron de soporte para su desarrollo:

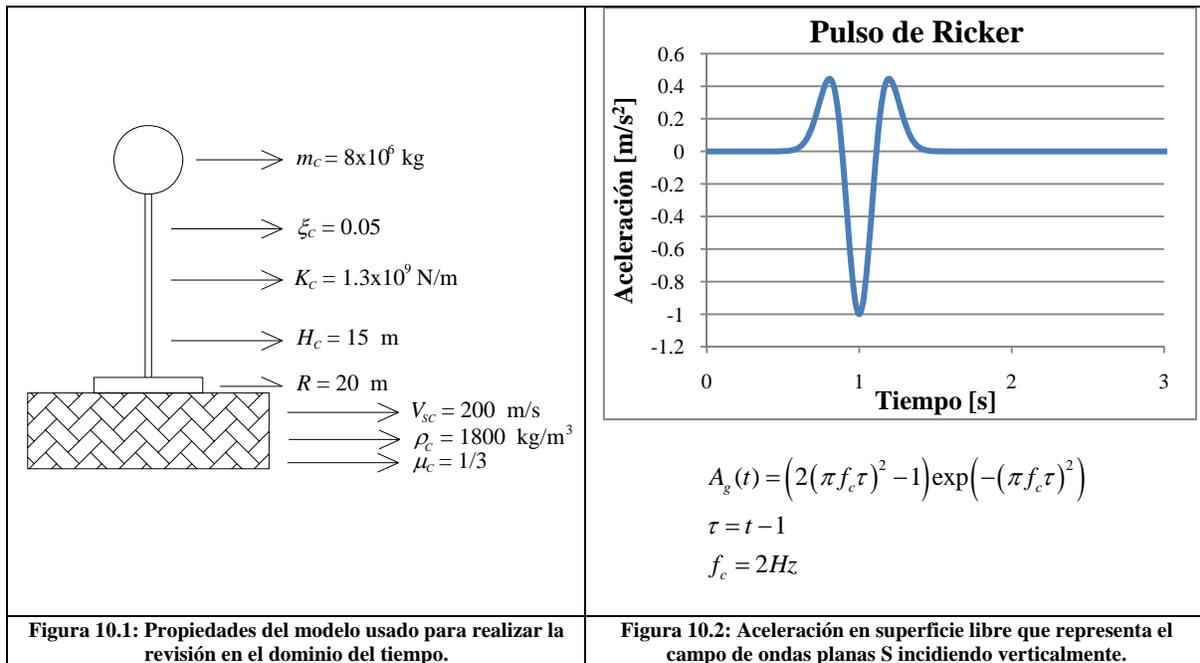
- Gran parte de lo presentado en este numeral supone que el cociente entre las funciones de impedancia del modelo tridimensional y plano pueden ser supuestas como constantes en un intervalo de frecuencias determinado. Esto simplemente es una extrapolación del hecho de la existencia de resultados que indican que es posible realizar de forma aproximada análisis de interacción suelo-estructura independientes de la frecuencia que representen de buena manera el fenómeno tridimensional [20], [27] y [28].

- Es importante resaltar que la forma de las funciones de impedancia cambia radicalmente para diferentes configuraciones del sistema suelo-cimentación. Como caso particular se tiene el hecho de que para casos estratificados la forma de las funciones de impedancia para ambos modelos presentan una gran variación, en especial cerca de las frecuencias fundamentales del suelo. Esta gran variación puede ser una limitación para la extrapolación de los resultados presentados en este numeral. En el capítulo 11 se discutirá brevemente como afrontar problemas de interacción suelo estructura mediante modelos planos para configuraciones de suelo diferentes a las de cimentaciones superficiales sobre semiespacios homogéneos.

## 10. COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE VARIAS DE LAS CALIBRACIONES PROPUESTAS

A continuación se realizarán las comparaciones de los resultados obtenidos por medio de las dos familias de calibraciones realizadas para el modelo plano: dependientes de la frecuencia e independientes de la frecuencia, con el respectivo modelo tridimensional y además con alguna de las calibraciones que usualmente se emplea para el análisis de interacción suelo estructura por medio de modelos planos.

Para ambas clases de comparaciones la estructura será la misma empleada en el numeral 7.2, la cual se representa por facilidad en la Figura 10.1. Esta estructura se someterá a una onda S incidiendo verticalmente, cuyo campo de aceleraciones en superficie libre tiene la forma de un pulso de Ricker (Figura 10.2).



### 10.1 COMPARACIÓN DEL MODELO PLANO EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA

A continuación se presenta la comparación de la respuesta en el dominio del tiempo del modelo tridimensional, el modelo plano calibrado con la alternativa presentada en el numeral 8.3 y un modelo plano “equivalente” usado normalmente en la práctica profesional. La escogencia de la calibración presentada en el numeral 8.3 se debe a que como se ha discutido anteriormente ésta es la calibración dependiente de la frecuencia de más factible implementación.

Se tomará como modelo plano representativo de la práctica profesional uno que posee ancho igual al diámetro de la cimentación circular y una profundidad equivalente tal que el “área” de las cimentaciones plana y tridimensional sean iguales, siendo las propiedades del suelo las mismas para ambos modelos. Para el ejemplo particular en estudio las propiedades de este modelo plano son:  $b = 20 \text{ m}$  y  $c = 31.42 \text{ m}$ .

A continuación se presenta la comparación de resultados entre los diferentes modelos en el dominio del tiempo:

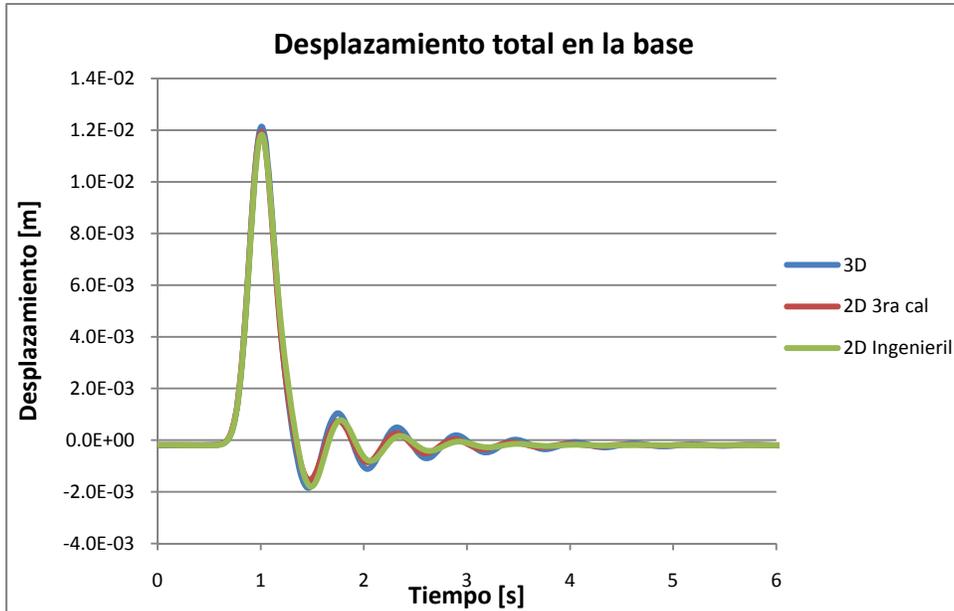


Figura 10.3.a: Desplazamiento total en la cimentación.

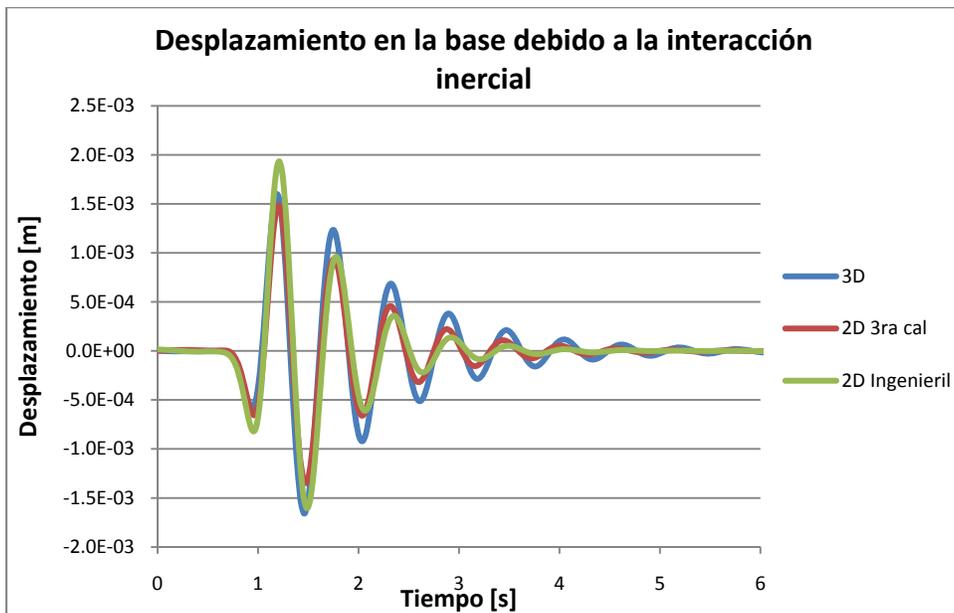


Figura 10.3.b: Desplazamiento en la cimentación debida a la interacción suelo-estructura inercial.

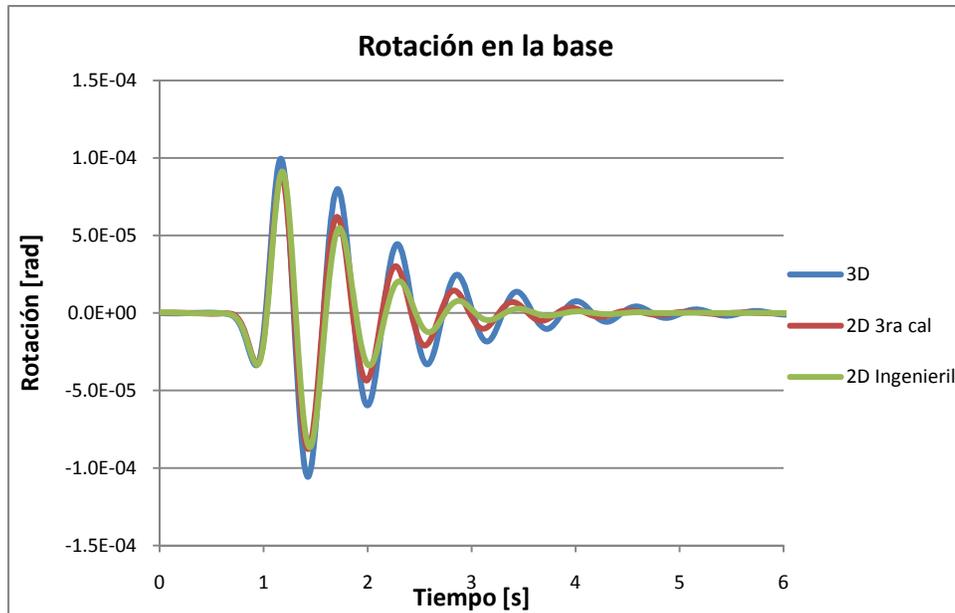


Figura 10.3.c: Rotación en la cimentación.

Con respecto a las figuras presentadas anteriormente debe decirse que como era de esperarse, la calibración en función de la frecuencia da resultados mejores que aquella usada habitualmente en la práctica profesional. También se observa que el modelo plano ingenieril posee un mayor amortiguamiento que el modelo plano calibrado en función de la frecuencia, lo anterior puede ser un factor a tener en cuenta para solicitaciones que tengan una mayor duración que la del pulso de Ricker, lo cual es el caso típico de los sismos.

Aunque aquí no se presenta, se espera que para el caso de estructuras altas la diferencia entre la respuesta del modelo calibrado en función la frecuencia y el ingenieril sea aún mayor pues como puede verse en la Figura 10.3.c este último subvalora la rotación en la base de la cimentación.

## 10.2 COMPARACIÓN DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

A continuación se presenta la comparación de la respuesta en el dominio del tiempo del modelo tridimensional, el modelo plano calibrado con la alternativa presentada en el numeral 8.2 para la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada, y un modelo plano “equivalente” usado normalmente en la práctica profesional.

La escogencia de la calibración presentada en el numeral 8.2 para el modelo plano calibrado independientemente de la frecuencia se debe a que con ésta es con la que se logra mayor concordancia entre las funciones de impedancia del modelo plano calibrado y el tridimensional.

Para el ejemplo en estudio se tiene:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K_c}{m_c}} = 12.74 \text{ Rad / s}$$

$$a_0^F = \frac{\omega_c R}{V_{sc}} = 1.275$$

$$c/R = 2.0 \text{ (Constante para esta calibración)}$$

$$b/R = 0.68 \text{ (Figura 8.2.a)}$$

$$\rho_s/\rho_c = 0.36 \text{ (Figura 8.2.c)}$$

$$G_s/G_c = 1.523 \text{ (Figura 8.2.b)}$$

$$\mu_s = \mu_c = 1/3 \text{ (Hipótesis de iguales relaciones de Poisson).}$$

$$c = 40 \text{ m.}$$

$$b = 13.6 \text{ m.}$$

$$\rho_s = 648 \text{ kg/m}^3.$$

$$G_s = 1.094 \times 10^8 \text{ N/m}^2.$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos para los modelos anteriores:

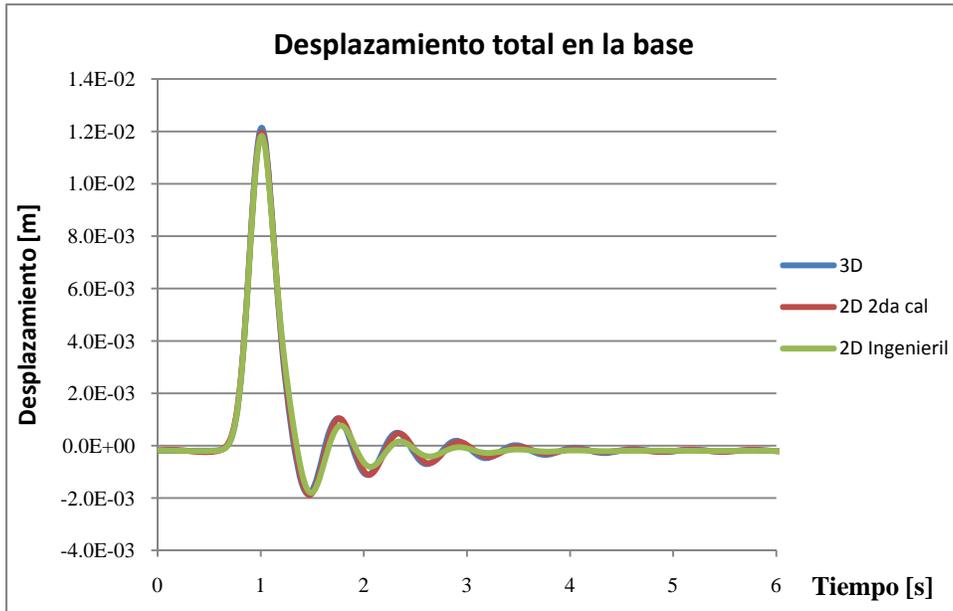


Figura 10.4.a: Desplazamiento total en la cimentación.

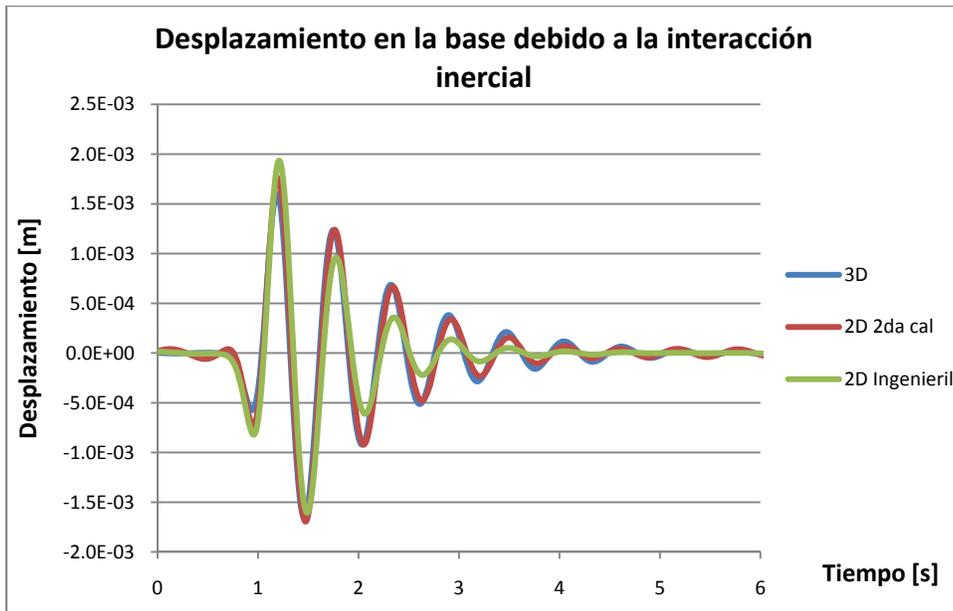


Figura 10.4.b: Desplazamiento en la cimentación debido a la interacción suelo-estructura inercial.

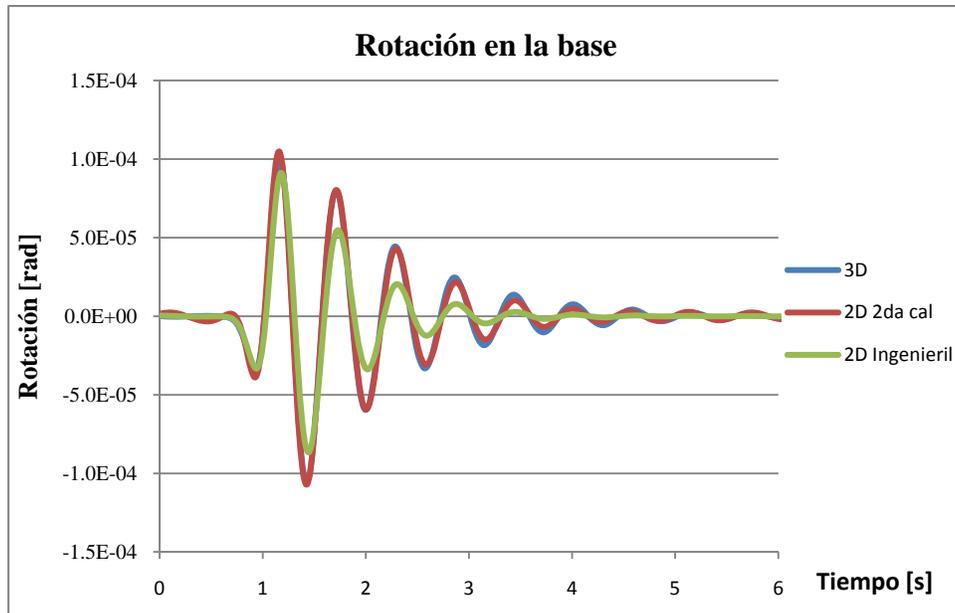


Figura 10.4.c: Rotación de la cimentación.

Del análisis de las Figura 10.4.b y 10.4.c puede verse como ambos modelos planos representan muy bien la respuesta del modelo tridimensional. Como caso importante puede verse que el modelo plano calibrado independiente de la frecuencia da resultados mejores que el calibrado dependiente de la frecuencia, lo anterior se debe a la importancia que juega la frecuencia fundamental en la respuesta de un sistema de un grado de libertad con interacción suelo estructura, es de esperar que para un sistema de varios grados de libertad la respuesta del modelo plano calibrado en función de la frecuencia de resultados mejores que el modelo plano calibrado independientemente de la frecuencia.

## 11. COMPARACIÓN DE LAS FUNCIONES DE IMPEDANCIA ENTRE VARIOS MODELOS TRIDIMENSIONALES Y PLANOS

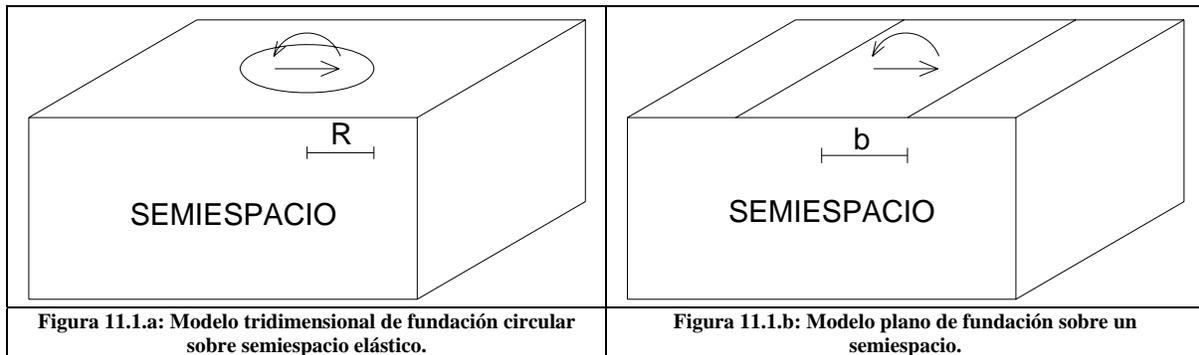
El objetivo de este capítulo es estudiar la posibilidad de realizar la calibración de modelos planos diferentes al de la cimentación superficial sobre un semiespacio homogéneo basado en la igualación de las rigideces estáticas de los modelos tridimensional y plano, fuera de esto también se revisará que tan viable es la utilización de fórmulas empíricas tradicionales para calibrar el modelo plano en dichos escenarios.

Si se visualizan las funciones de impedancia como el producto de una constante (rigidez estática) y un término función de la frecuencia cuya forma depende de las propiedades del sitio, es natural pensar que una buena calibración independiente de la frecuencia del modelo plano, para cualquier escenario se obtendría al igualar las rigideces estáticas de éste con las del respectivo modelo tridimensional en estudio manteniendo iguales las demás propiedades del suelo y la estructura. Para lo anterior se analizarán los siguientes escenarios:

- Fundación superficial sobre un estrato apoyado en roca infinitamente rígida (estrato empotrado).
- Fundación enterrada en un semiespacio.
- Fundación enterrada en un estrato empotrado en su base.

### 11.1 CIMENTACIÓN SUPERFICIAL SOBRE SEMIESPACIO ELASTICO

Para servir de punto de comparación con la discusión a realizar en los siguientes numerales, a continuación se realizará un recuento de las principales diferencias que existen entre las funciones de impedancia del modelo tridimensional (figura 11.1.a) y plano (figura 11.1.b) estudiados hasta ahora.



#### - RIGIDEZ ESTÁTICA

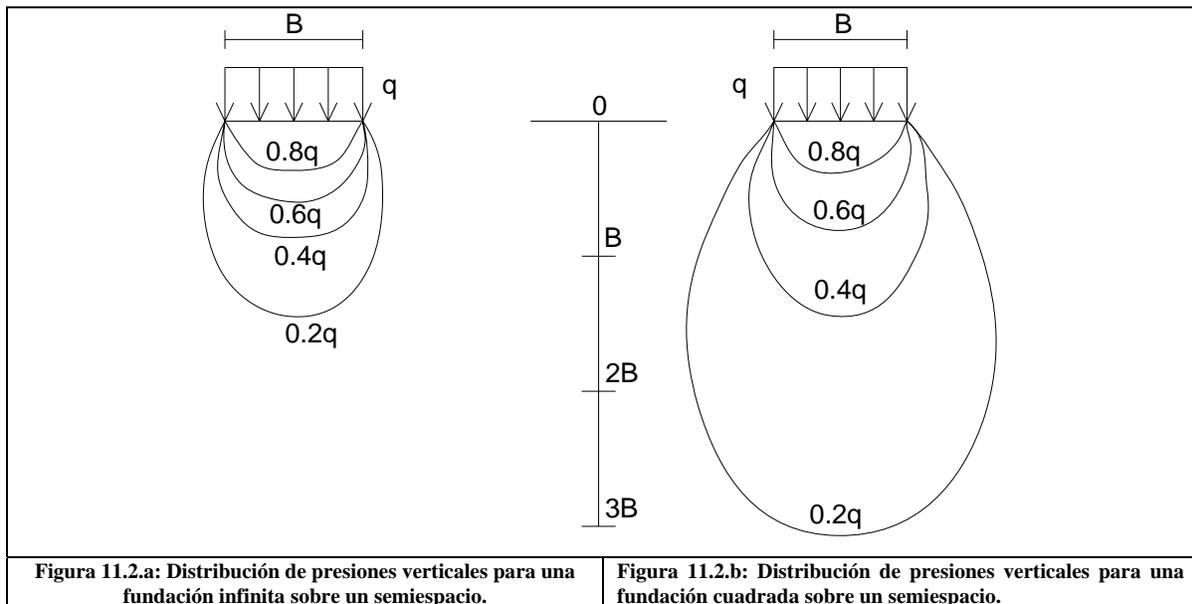
A continuación se presenta en forma tabular las rigideces estáticas tanto horizontal como rotacional de los modelos tridimensional (Figura 11.1.a) y plano (Figura 11.1.b) de cimentaciones sobre un semiespacio elástico homogéneo. Los valores para el modelo tridimensional fueron obtenidos por Veletsos y Wei [5] mientras que los valores para el modelo plano corresponde a Gazetas [19].

	Modelo tridimensional		Modelo plano	
	Rigidez	Rango de uso	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\mu}$	$R > 0$	0	$b > 0$
Rotacional	$\frac{8GR^3}{3(1-\mu)}$	$R > 0$	$\frac{\pi Gb^2c}{2(1-\mu)} \left[ 1 + \left( \frac{\ln(3-4\mu)}{\pi} \right)^2 \right]$	$b > 0$

Tabla 11.1: Rigideces estáticas del modelo tridimensional y plano para un semiespacio elástico.

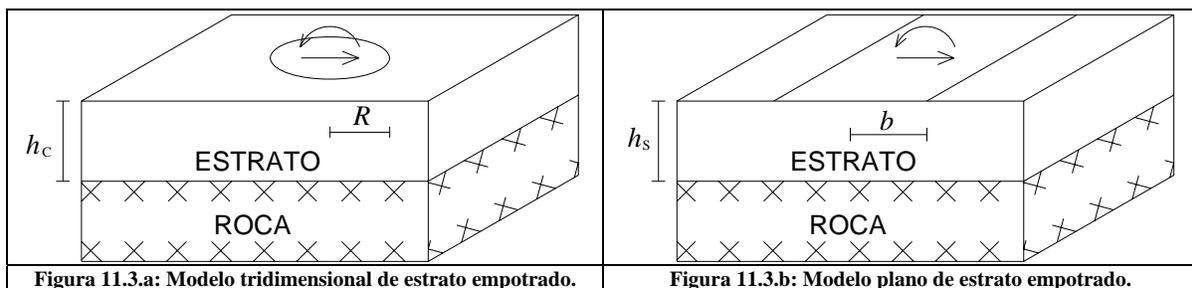
Como puede verse en la tabla 11.1 la rigidez estática tanto horizontal como rotacional del modelo tridimensional excede la del modelo plano para geometrías usualmente usadas para la calibración de éste, siendo la diferencia más marcada para el caso del desplazamiento horizontal donde la rigidez del modelo plano en cero. Es importante mencionar que la rigidez del modelo tridimensional excede a la del modelo plano no solo para el caso estático sino también para frecuencias mayores a cero.

Del análisis estático de ambos modelos también se pueden sacar conclusiones importantes si se examina la distribución de presiones del modelo tridimensional y plano en estudio, en la Figura 11.2 se presenta dicha distribución (para el modelo tridimensional se ha empleado una cimentación rectangular en lugar de la circular), aquí se observa claramente como la distribución de presiones del modelo plano disminuye mucho más rápidamente con la profundidad que en el modelo tridimensional. La anterior idea sirve de explicación para las diferencias entre las rigideces estáticas de los modelos tridimensionales y planos a estudiar en los siguientes numerales.



## 11.2 CIMENTACIÓN SUPERFICIAL SOBRE ESTRATO ELASTICO EMPOTRADO

El caso a estudiar en este numeral corresponde a una cimentación superficial sobre un estrato elástico y homogéneo empotrado en su base, para el caso tridimensional la cimentación es circular mientras que para el caso plano la cimentación es infinita, una descripción de ambos modelos se presenta en la Figura 11.3.



Entre otros esta configuración ha sido estudiada por Kausel [29], Veletsos y Wei [5], Kausel, Whitmann, Elsabee y Morray [26] y Dominguez [34] para el caso tridimensional, mientras que por Jakub [30], Gazetas y Roesset [21] y Liang [25] para el caso plano.

- RIGIDEZ ESTÁTICA

A continuación se presenta en forma tabular los valores aproximados de la rigidez estática para los modelos tridimensional (Figura 11.3.a) y plano (Figura 11.3.b). Los valores del modelo tridimensional fueron obtenidos por Kausel [29] mediante el uso de un programa de elementos finitos con fronteras absorbentes y los resultados del modelo plano fueron obtenidos por Jakub [30] usando una formulación similar.

	Modelo tridimensional		Modelo plano	
	Rigidez	Rango de uso	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{8G_c R}{2-\mu_c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{h_c}\right)$	$\frac{h_c}{R} > 1$	$\frac{2.1G_s c}{2-\mu_s} \left(1 + 2 \frac{b}{h_s}\right)$	$1 \leq \frac{h_s}{b} \leq 8$
Rotacional	$\frac{8G_c R^3}{3(1-\mu_c)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{h_c}\right)$	$1 < \frac{h_c}{R} \leq 4$	$\frac{1.62G_s b^2 c}{1-\mu_s} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{b}{h_s}\right)$	$2 \leq \frac{h_s}{b} \leq 8$

Tabla 11.2: Rigideces estáticas del modelo tridimensional y plano para un estrato empotrado.

De las rigideces estáticas presentadas en la Tabla 11.2 puede verse que estas son presentadas como el valor de la rigidez estática del modelo del semiespacio multiplicada por un factor de modificación mayor a uno, el cual es función del radio o semiancho de cimentación y la profundidad del estrato, lo cual quiere decir que la rigidez estática de estos modelos es mayor a la del semiespacio. También es importante notar como las rigideces estáticas del modelo plano aumentan más rápidamente con la relación  $b/h_s$  que las del tridimensional para  $R/h_c$ . Esto último se convierte en una razón para concluir que el uso de calibraciones independientes de la frecuencia y del tipo no modelo no producirán resultados veraces para este tipo de escenario ni para escenarios estratificados.

- PROPUESTA DE CALIBRACIÓN DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

A continuación se plantea una calibración de parámetros del modelo plano independiente de la frecuencia basada en hacer que las rigideces estáticas del modelo plano sean iguales a las del modelo tridimensional. En la presente calibración se proponen como parámetros a calibrar el ancho y la profundidad efectiva del modelo plano mientras que los demás parámetros se consideran iguales a los del modelo tridimensional. La anterior propuesta se basa en el hecho que la forma de las funciones de impedancia para casos estratificados tanto tridimensionales como planos está estrechamente relacionada con las frecuencias fundamentales de los estratos, por lo cual para mantener dichas frecuencias iguales para ambos modelos se propone que las configuraciones de los suelos de ambos modelos sea la misma, además de lo anterior se propone que las propiedades de la estructura del modelo calibrado sean iguales a las del tridimensional. De igualar las rigideces estáticas horizontal y rotacional presentadas en la Tabla 11.2 se obtiene:

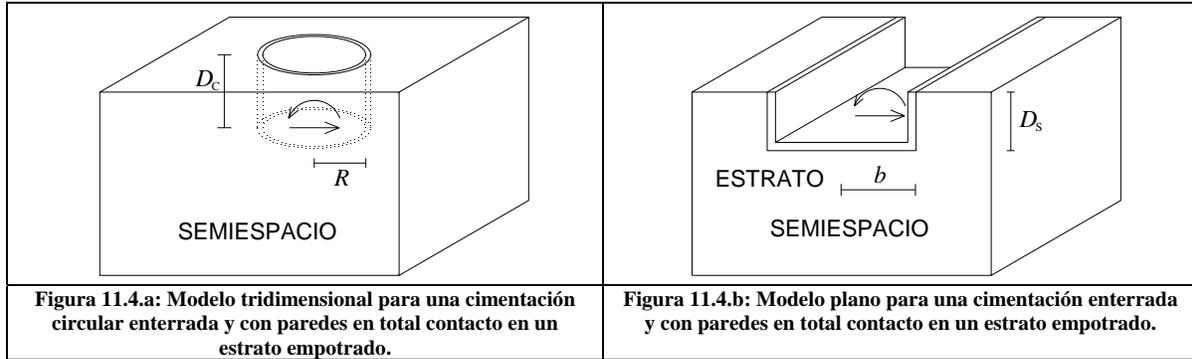
$$c \left(1 + 2 \frac{b}{h_c}\right) = 3.81R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{h_c}\right) \quad (11.1)$$

$$b^2 c \left(1 + \frac{1}{5} \frac{b}{h_c}\right) = 1.64R^3 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{h_c}\right) \quad (11.2)$$

Las anteriores dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas que puede ser solucionado fácilmente.

### 11.3 CIMENTACIÓN ENTERRADA EN UN SEMIESPACIO ELASTICO

En este numeral se estudian las cimentaciones enterradas en un semiespacio homogéneo y elástico cuyas paredes están en total contacto con el suelo, en las Figuras 11.4.a y 11.4.b se presentan dichos tipos de configuración.



La obtención de las funciones de impedancia para estas configuraciones ha sido estudiada entre otros por Apsel y Luco [36], Saha, Hadid y Berrah [37] y Mita y Luco [38] para el caso tridimensional mientras que por Chang [25] para el caso plano.

#### - RIGIDEZ ESTÁTICA

A continuación se presentan valores para la rigidez estática de modelos tridimensional (Figura 11.4.a) y plano (Figura 11.4.b) de cimentaciones enterradas en un semiespacio elástico con el cual las paredes de la cimentación tienen contacto total. Los resultados del modelo tridimensional fueron obtenidos por Pais y Kausel [39], mientras que los resultados del modelo plano han sido una extrapolación de los resultados presentados por Jakub [30] para el caso de una cimentación enterrada en un estrato empotrado.

Modelo tridimensional		
	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{8G_c R}{2 - \mu_c} \left(1 + \frac{D_c}{R}\right)$	$\frac{D_c}{R} \leq 2$
Rotacional	$\frac{8G_c R^3}{3(1 - \mu_c)} \left[1 + 2.3 \frac{D_c}{R} + 0.58 \left(\frac{D_c}{R}\right)^3\right]$	$\frac{D_c}{R} \leq 2$
Modelo plano		
Horizontal	$\frac{2.1G_s c}{2 - \mu_s} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{D_s}{b}\right)$	No se presenta por ser una extrapolación.
Rotacional	$\frac{1.62 * G_s b^2 c}{1 - \mu_s} \left(1 + \frac{D_s}{b}\right)$	No se presenta por ser una extrapolación.

Tabla 11.3: Rigideces estáticas del modelo tridimensional y plano para una fundación enterrada en un semiespacio.

De la tabla 11.3 puede verse que rigideces estáticas horizontal y rotacional de ambos modelos varía de forma diferente en función de la profundidad de enterramiento, lo que de nuevo es un indicador que es imposible basados solo en propiedades geométricas de las cimentaciones realizar una calibración aceptable del modelo plano.

- PROPUESTA DE CALIBRACIÓN DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

En esta propuesta las propiedades del modelo plano calibrado se obtienen a partir de igualar las rigideces estáticas horizontal y rotacional del modelo tridimensional y plano según lo presentado en la Tabla 11.3 bajo la hipótesis que las demás propiedades de los modelos sean iguales (modulo de corte, densidad y relación de Poisson del suelo y profundidad de la cimentación), de lo anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$c \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{D_c}{b} \right) = 3.81R \left( 1 + \frac{D_c}{R} \right) \quad (11.3)$$

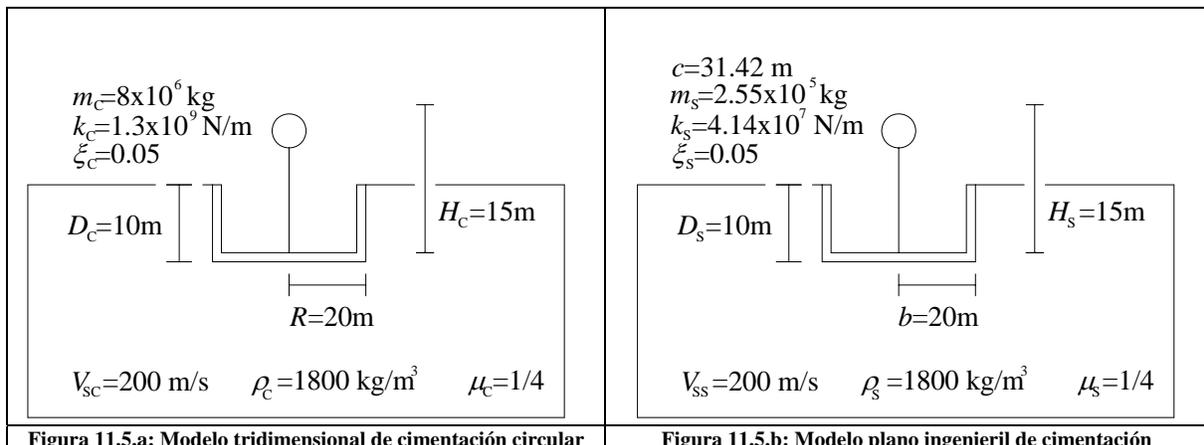
$$b^2 c \left( 1 + \frac{D_c}{b} \right) = 1.65R^3 \left[ 1 + 2.3 \frac{D_c}{R} + 0.58 \left( \frac{D_c}{R} \right)^3 \right] \quad (11.4)$$

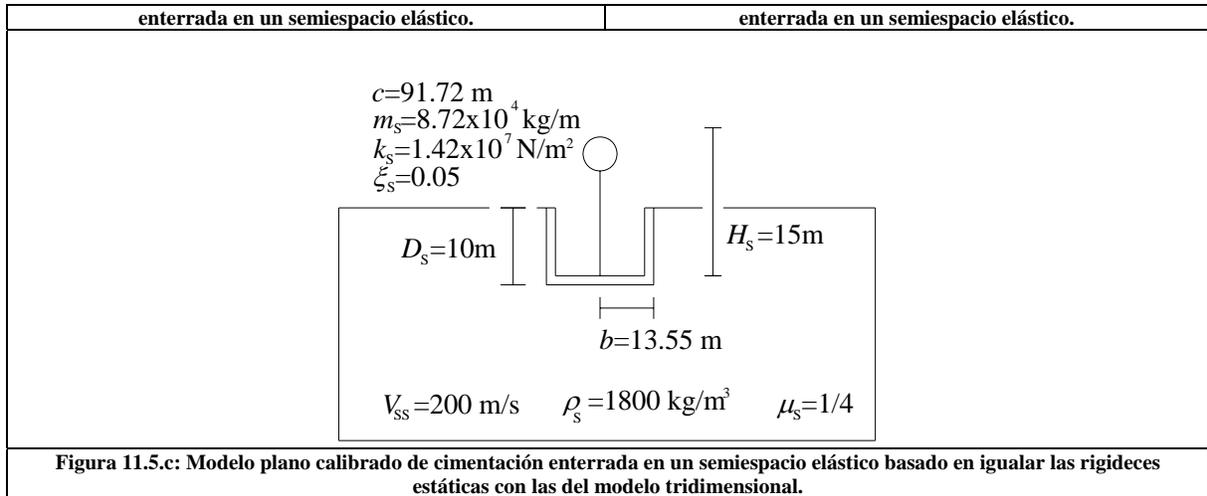
Las ecuaciones (11.3) y (11.4) son de fácil solución para b y c dadas las propiedades del modelo tridimensional.

- EJEMPLO COMPARATIVO

A continuación se realiza un ejemplo comparativo de las respuestas en el dominio del tiempo de los siguientes modelos:

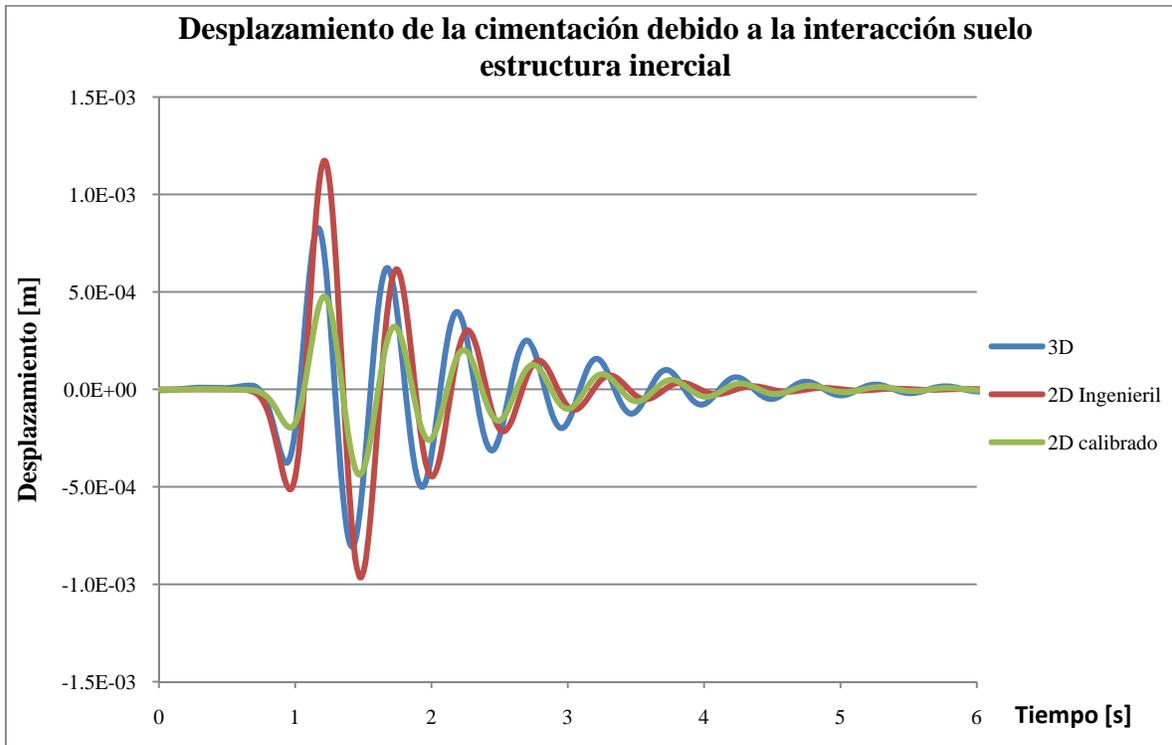
- Modelo tridimensional de cimentación circular enterrada en un semiespacio elástico (figura 11.5.a). Las funciones de impedancia y la amplitud de las funciones de transferencia entre el movimiento en superficie libre y el movimiento y la rotación de la cimentación debida a la interacción suelo-estructura cinemática fueron obtenidas por Day [40].
- Modelo plano “ingenieril” basado en igualar el ancho de la cimentación plana al diámetro de la cimentación e igualar el área de las de las cimentaciones de ambos modelos (figura 11.5.b). De la anterior hipótesis se obtuvieron las siguientes propiedades:  $b=20\text{m}$  y  $c=62.83\text{m}$ . Las funciones de impedancia y las funciones de transferencia entre el movimiento en superficie libre y el movimiento y la rotación de la cimentación debida a la interacción suelo-estructura cinemática fueron obtenidas por medio de un programa de elementos de frontera desarrollado por el ingeniero Juan Diego Jaramillo.
- Modelo plano calibrado igualando las rigideces estáticas de éste con las del modelo tridimensional (figura 11.5.c). De estas hipótesis se obtuvieron las siguientes propiedades equivalentes:  $b=13.55\text{m}$  y  $c=91.72\text{m}$ . Las funciones de impedancia y las funciones de transferencia entre el movimiento en superficie libre y el movimiento y la rotación de la cimentación debida a la interacción suelo-estructura cinemática fueron obtenidas por medio de un programa de elementos de frontera desarrollado por el ingeniero Juan Diego Jaramillo.





La excitación para los anteriores modelos consiste en una onda S incidiendo verticalmente la cual produce en superficie libre una aceleración representada por el pulso de Ricker presentado en la Figura 10.2.

A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos en el dominio del tiempo:



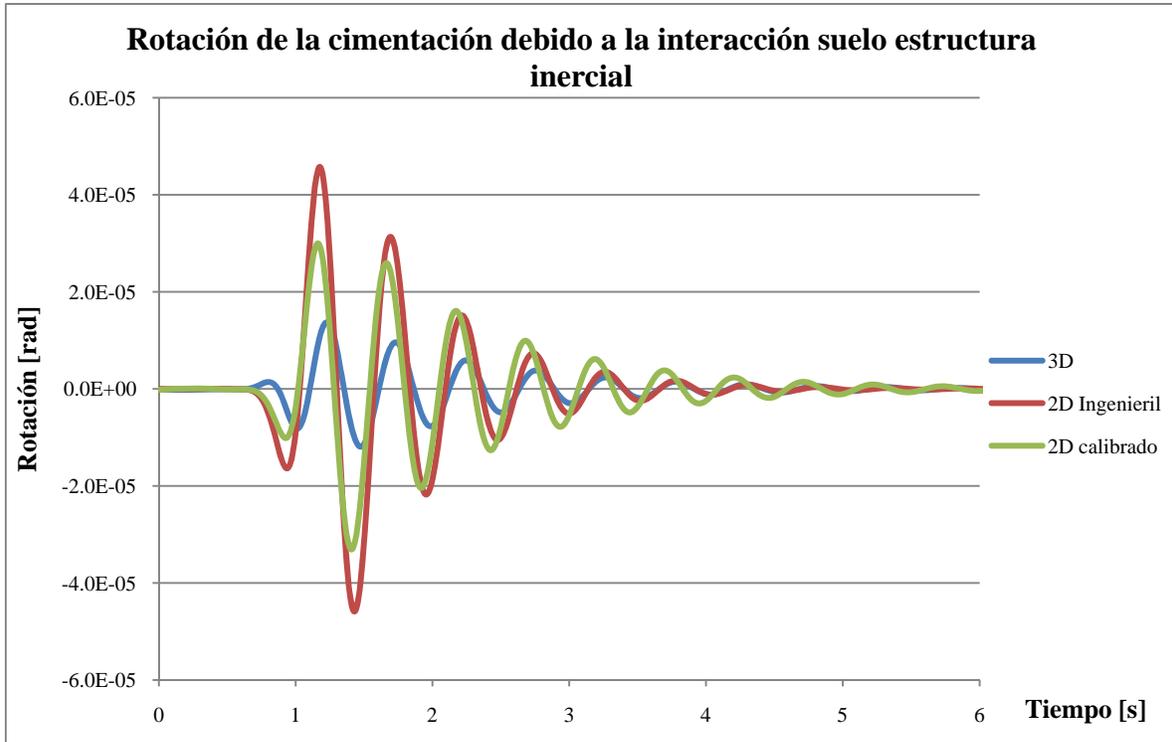


Figura 11.6.b: Rotación de la cimentación debido a la interacción suelo estructura inercial.

Como resultado de las figuras anteriores se concluye que tanto la propuesta presentada en este capítulo (igualación de las rigidez estáticas del modelo tridimensional y plano) como la basada en la igualación de las propiedades geométricas producen resultados poco representativos del movimiento real de la cimentación y por tanto se recomienda no usar este tipo calibraciones en análisis de interacción suelo estructura. La razón que explica la gran diferencia entre el comportamiento del modelo calibrado con la propuesta de este capítulo y el modelo tridimensional se debe a que al igualar solo las rigideces estáticas no se están teniendo en cuenta las propiedades inerciales y de radiación del problema las cuales están asociadas con la parte imaginaria de las funciones de impedancia pues ésta es cero para el caso estático.

#### 11.4 CIMENTACIÓN ENTERRADA EN UN ESTRATO EMPOTRADO EN SU BASE

En este numeral se discutirán las funciones de impedancia para cimentaciones enterradas en un estrato empotrado en su base, ver figura 11.7. Estas han sido estudiadas entre otros por Kausel [29] y Elsabee y Morray [26] para el caso tridimensional mientras que por Jakub [30] para el caso plano.

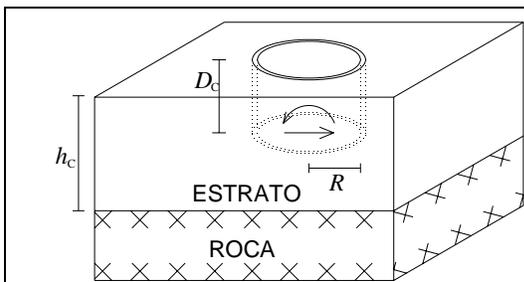


Figura 11.7.a: Modelo tridimensional para una cimentación circular enterrada en un estrato con paredes en total contacto en un estrato empotrado.

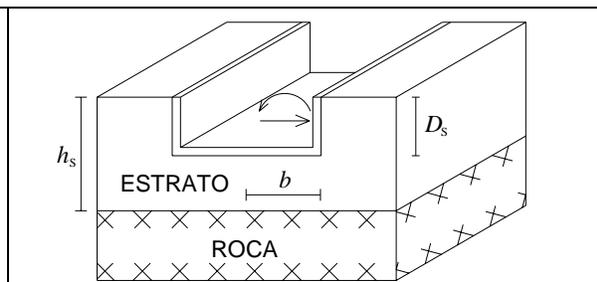


Figura 11.7.b: Modelo plano para una cimentación enterrada en un estrato con paredes en total contacto en un estrato empotrado.

RIGIDEZ ESTÁTICA

A continuación se presentan valores aproximados para la rigidez estática horizontal y rotacional para modelos tridimensional (Figura 11.7.a) y plano (Figura 11.7.b) de cimentaciones enterradas en un estrato empotrado, el contacto entre las paredes de la cimentación y el suelo es total en ambos modelos. Los resultados del modelo tridimensional fueron obtenidos por Elsabee [31] y los del modelo plano fueron obtenidos por Jakub [30].

Modelo tridimensional		
	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\mu_c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R}{h_c}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D}{R}\right) \left(1 + \frac{5}{4} \frac{D}{h_c}\right)$	$\frac{D_c}{R} < 2 \wedge \frac{D_c}{h_c} \leq 0.5$
Rotacional	$\frac{8GR^3}{3(1-\mu_c)} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{R}{h_c}\right) \left(1 + 2 \frac{D}{R}\right) \left(1 + 0.71 \frac{D}{h_c}\right)$	$\frac{D_c}{R} < 2 \wedge \frac{D_c}{h_c} \leq 0.5$
Modelo plano		
	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{2.1Gc}{2-\mu_s} \left(1 + 2 \frac{b}{h_s}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{D_s}{b}\right) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{D_s}{h_s}\right)$	$\frac{D_s}{b} \leq \frac{2}{3} \wedge \frac{b}{h_s} \leq 0.5$
Rotacional	$\frac{1.62Gb^2c}{1-\mu_s} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{b}{h_s}\right) \left(1 + \frac{D_s}{b}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{D_s}{h_s}\right)$	$\frac{D_s}{b} \leq \frac{2}{3} \wedge \frac{b}{h_s} \leq 0.5$

Tabla 11.5: Rigideces estáticas del modelo tridimensional y plano para cimentaciones enterradas en un estrato.

Las rigideces estáticas para el caso de paredes con diferente altura a la profundidad de la excavación de la cimentación (Figura 11.8) fueron presentadas por Gazetas [32] para el caso tridimensional y plano, a continuación se presentan dichos resultados:

Modelo tridimensional		
	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{8GR}{2-\mu} \left(1 + 0.5 \frac{R}{h_c}\right) \left(1 + 0.55 \frac{d_c}{R}\right) \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D_c}{R}\right) \frac{D_c}{h_c - D_c}\right]$	No especificado
Rotacional	$\frac{8GR^3}{3(1-\mu)} \left(1 + 0.17 \frac{R}{h_c}\right) \left(1 + 2 \frac{d_c}{R}\right) \left(1 + 0.65 \frac{D_c}{h_c}\right)$	No especificado
Modelo plano		
	Rigidez	Rango de uso
Horizontal	$\frac{2Gc}{2-\mu} \left(1 + 2 \frac{b}{h_s}\right) \left(1 + 0.5 \frac{d_s}{b}\right) \left(1 + 1.5 \frac{D_s}{h_s}\right)$	No especificado
Rotacional	$\frac{\pi * Gb^2c}{2(1-\mu)} \left(1 + 0.2 \frac{b}{h_s}\right) \left(1 + \frac{d_s}{b}\right) \left(1 + 0.65 \frac{D_s}{h_s}\right)$	No especificado

Tabla 11.6: Rigideces estáticas del modelo tridimensional y plano para cimentaciones enterradas en un estrato en contacto total o parcial con el suelo.

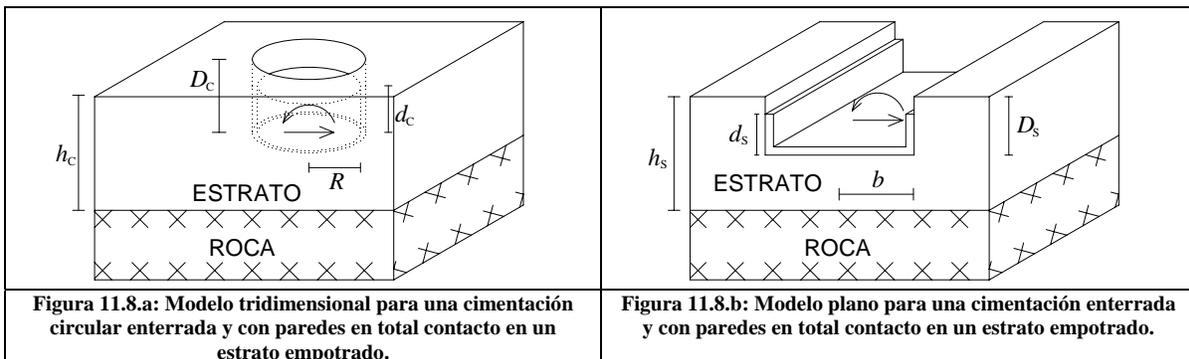


Figura 11.8.a: Modelo tridimensional para una cimentación circular enterrada y con paredes en total contacto en un estrato empotrado.

Figura 11.8.b: Modelo plano para una cimentación enterrada y con paredes en total contacto en un estrato empotrado.

Es importante hacer hincapié que para las cimentaciones enterradas los términos fuera de la diagonal de las funciones de impedancia juegan un papel más importante que para cimentaciones superficiales llegando a ser el valor de los primeros hasta el 40% del valor de los segundos.

- PROPUESTA DE CALIBRACIÓN DEL MODELO PLANO INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA

Siguiendo la propuesta de calibración presentada en este capítulo se propone la igualación de las rigideces estáticas del modelo plano equivalente y del tridimensional por medio de la calibración del ancho y profundidad efectiva del modelo plano, las demás propiedades del modelo plano incluyendo el suelo y estructura son iguales en el modelo plano calibrado y el tridimensional. A continuación se presentan las ecuaciones a resolver para calibrar el modelo plano.

Pared en contacto total con el suelo:

$$c \left( 1 + 2 \frac{b}{H_c} \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{D_c}{b} \right) = \frac{3.81R \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{R}{H_c} \right) \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{D_c}{R} \right) \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{D_c}{h_c} \right)}{\left( 1 + \frac{4}{3} \frac{D_c}{h_c} \right)} \quad (11.5)$$

$$b^2 c \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{b}{h_c} \right) \left( 1 + \frac{D_c}{b} \right) = \frac{1.65R^3 \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{R}{h_c} \right) \left( 1 + 2 \frac{D_c}{R} \right) \left( 1 + 0.71 \frac{D_c}{h_c} \right)}{\left( 1 + \frac{2}{3} \frac{D_c}{h_c} \right)} \quad (11.6)$$

Pared en contacto parcial con el suelo:

$$c \left( 1 + 2 \frac{b}{h_c} \right) \left( 1 + 0.5 \frac{d_c}{b} \right) = \frac{4R \left( 1 + 0.5 \frac{R}{h_c} \right) \left( 1 + 0.55 \frac{d_c}{R} \right) \left[ 1 + \left( 0.85 - 0.28 \frac{D_c}{R} \right) \frac{D_c}{h_c - D_c} \right]}{\left( 1 + 1.5 \frac{D_c}{h_c} \right)} \quad (11.7)$$

$$b^2 c \left( 1 + 0.2 \frac{b}{h_c} \right) \left( 1 + \frac{d_c}{b} \right) = \frac{1.7R^3 \left( 1 + 0.17 \frac{R}{h_c} \right) \left( 1 + 2 \frac{d_c}{R} \right) \left( 1 + 0.65 \frac{D_c}{h_c} \right)}{\left( 1 + 0.65 \frac{D_c}{h_c} \right)} \quad (11.8)$$

## 12 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. Se han propuesto varias alternativas tanto dependientes como independientes de la frecuencia para definir las propiedades mecánicas del suelo de cimentación y las propiedades geométricas de la cimentación, de manera que se puedan reproducir con muy buena precisión los movimientos de la cimentación en un problema tridimensional de interacción suelo-cimentación-estructura en el cual el suelo pueda representarse por medio de un semiespacio homogéneo y la cimentación como superficial, usando un modelo de deformación plana.
2. La diferencia fundamental de las propuestas presentadas en el capítulo 8 con respecto a otras anteriores que han tratado de explotar la simplicidad de modelación y de cálculo de los modelos planos, pero manteniendo la precisión de los modelos tridimensionales, es que en este caso las propiedades del modelo plano se consideran función de la frecuencia. Este hecho claramente obliga a hacer análisis en el dominio de la frecuencia y por lo tanto trae implícita la linealidad del problema.
3. Una de las propuestas de calibración para el caso de cimentación superficial sobre semiespacio homogéneo función de la frecuencia, mantiene independiente de ésta, la relación entre las propiedades geométricas de los dos modelos, 2D y 3D. Aunque esta alternativa es menos precisa que aquella en la cual la geometría del modelo plano varía con la frecuencia, tiene la ventaja de no requerir discretizaciones de la geometría del problema en función de la frecuencia, lo que definitivamente es muy atractivo en términos del esfuerzo computacional de pre-procesamiento y pos-procesamiento.
4. En este trabajo también se han propuesto procedimientos independientes de la frecuencia para realizar la calibración de modelos de deformación plana para analizar problemas de interacción suelo estructura en escenarios que pueden ser diferentes al de cimentaciones superficiales sobre un semiespacio homogéneo. Estos procedimientos se basan en hacer coincidir las funciones de impedancia del modelo tridimensional y plano para una frecuencia en particular, siendo esta la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada para el caso de cimentación superficial sobre un semiespacio y cero (caso estático) para otros escenarios.
5. El procedimiento de subestructuración empleado en este documento para analizar la respuesta de un sistema de un grado de libertad ante una sollicitación sísmica es fácilmente extensible a sistemas más complejos como lo son estructuras de varios grados de libertad o cimentaciones enterradas, el hecho de haber empleado para el análisis un sistema de un grado de libertad se debe a que es posible obtener la respuesta de la estructura como la suma de la respuesta de diferentes sistemas de un grado de libertad.
6. No es posible utilizar calibraciones de modelos planos para realizar análisis de interacción suelo-estructura las cuales estén basadas solo en relaciones entre las propiedades geométricas de las cimentaciones del modelo tridimensional y plano calibrado independientemente de cuál sea el escenario de análisis. También es importante notar que los errores obtenidos por este tipo de calibraciones no están dentro de los rangos ingenieriles permitidos.
7. Antes de abordar cualquier análisis de interacción suelo-estructura por medio de un modelo de deformación plana se aconseja realizar una comparación de las funciones de impedancia del modelo plano calibrado y el tridimensional, para esto no es necesario tener las funciones de impedancia de ambos modelos, existe mucha bibliografía donde se presentan de forma simplificada estas, una buena colección de esta información se puede encontrar en los artículos de Gazetas [19] y [32]. En caso de no existir información robusta que avale el uso de un determinado modelo plano para realizar un análisis de interacción suelo estructura para cierto escenario se aconseja el empleo de modelos simplificados tridimensionales como los presentados por Wolf [1].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J.P. Wolf, Foundation vibration analysis using simple physical models, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, , 1994.
- [2] J.P. Wolf y J.W. Meek, “Insight on 2D- versus 3D-modelling of surface foundations via strength-of-materials solutions for soil dynamics”, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 23, Pag. 91-112, 1994.
- [3] R.W. Clough y J. Penzien, Dynamics of structures, 2da ed, Mc Graw Hill, 1993.
- [4] M. Iguchi, “An approximate analysis of input motions for rigid embedded foundations”, translation of the Architectural Institute of Japan, N° 315, Pag. 61-75, May 1982.
- [5] A.S. Veletsos y Y.T. Wei, “Lateral and rocking vibration of footings”, Journal of the soil mechanics and foundations division, vol .97, N° SM 9 , Pag. 1227-1248, Sept. 1971.
- [6] J.E. Luco y R.A. Westmann, “Dynamic response of circular footings”, Journal of the engineering mechanics division, vol. 97, N° EM 5, Pag. 1381-1395, Oct. 1971.
- [7] H.L. Wong y J.E. Luco, “Tables of impedance functions and input motions for rectangular foundations”, University of Southern California, Report N° CE 78-15, Dec. 1978.
- [8] A. Mita y J.E. Luco, “Impedance funtions and input motions for embedded square foundations”, Journal of Geotechnical Engineering, Vol 115, N°4, Pag. 491-503, April 1989.
- [9] J.E. Luco, “Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium”, Nuclear engineering and design, Vol 31, Pag. 204-217, 1974.
- [10] M.A. Oien, “Steady motion of a rigid strip bounded to an elastic half space”, Journal of applied mechanics, N° 70-WA/APM-56, Pag. 328-334, June 1971.
- [11] J.E. Luco, H.I. Wonng y M.D. Trifunac, “A note on the dynamic response of rigid embedded foundations”, Earthquake engineering and structural dynamics, Vol 4, Pag. 119-127, 1975.
- [12] M. Suárez, J. Avilés y F.J. Sánchez-Sesma, “Response of L-shaped rigid foundations embedded in a uniform half-space to traveling seismic waves”, Soil dynamics and earthquake engineering, Vol 22, Pag. 625-637, 2002.
- [13] R. Dobry y G. Gazetas, “Dynamic response of arbitrarily shaped foundations”, Journal of Geotechnical Engineering, Vol 112, No. 2, 1986.
- [14] L. Andersen y J. Clausen , “Impedance of surface footings on layered ground” Computers and Structures, vol. 86, Pag. 72-87, 2008.
- [15] J.E. Luco y A. Mita, “Response of circular foundation to spatially random ground motion”, Journal of engineering mechanics, Vol 113, N°1, Pag. 1-15, Jan 1987.
- [16] J. Aviles, M. Suarez and F.J. Sanchez-Sesma, “Effects of wave passage on the relevant dynamic properties of structures with flexible foundation”, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 31, Pag. 139-159, 2002.
- [17] V.W. Lee, “Investigation of three-dimensional soil-structure interaction”, University of Southern California Report N° CE 79-11, Aug. 1979.

- [18] J.E. Luco y A.H. Hadjian, "Two-dimensional approximations to the three-dimensional soil-structure interaction problem", Nuclear engineering and design, vol. 31, Pag. 195-203, 1974.
- [19] G. Gazetas, "Analysis of machine foundation vibrations state of the art", Soil dynamics and earthquake engineering, vol. 2, N°1, Pag. 2-42, 1983.
- [20] N.C. Tsai, D. Niehoff, M. Swatt y A.H. Hadjian, "The use of frequency-independent soil-structure interaction parameters", Nuclear engineering and design, Vol. 31, Pag. 168-183, 1974.
- [21] G.C. Gazetas y J.M. Roesset, "Forced vibrations of strip footings on layered soils Proc. ASCE Specialty Conference on Methods of Structural Analysis, dynamic Soil-Structure Interaction Session, Vol. 1, Pag. 115-131, 1976.
- [22] J.E. Luco y R.A. Westmann, "Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space", Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Vol. 39, Ser. E., N°2, Pag. 527-534, 1972.
- [23] P. Karasudhi, L.M. Keer y S.L. Lee , "Vibratory motion of a body on an elastic half plane", Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Vol. 35, Series E., N°4, Pag. 697-705, 1968.
- [24] J.P. Wolf y G.R. Darbre, "Dynamic-stiffness matrix of surface foundation on layered halfspace based on stiffness-matrix approach", IAEA IWGGCR specialists meeting on gas-cooled reactor seismic design problems and solutions, Pag. 183-206. San Diego, CA (USA). 30 Aug - 1 Sep, 1982
- [25] V. Chang-Liang, "Dynamic response of structures in layered soil", MIT research report R74-10. Soil publication N°335, structures publication N°383, Mass. Instit. Of technology, Cambridge, Mass., Enero 1974.
- [26] F. Elsabee y J.P. Morray, " Dynamic behavior of embedded foundations ", MIT research report R77-33, 1977.
- [27] M.A. Sarrazin, J.M. Roesset y R.V. Whitman, "Dynamic soil-structure interaction", Journal of the structural division", ST 7, Pag. 1525-1543, Julio 1972.
- [28] R.A. Parmelee, D.S. Perelman y S.L. Lee, "Seismic response of meultiple-story structures on flexible foundations", Bulletin of seismological society of America, Vol. 59, No. 3, Pag. 1061-1070, Junio 1969.
- [29] E. Kausel, "Forced vibrations of circular foundations on layered media", Research report R74-11, MIT, 1974.
- [30] M. Jakub, "Dynamic stiffness of foundations 2-D vs 3-D solutions", Research report R77-35, MIT, 1977.
- [31] F. Elsabee, "Static stiffness coefficients for circular foundations embedded in an elastic medium", Tesis de maestria, Mass. Inst. of Tech., Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [32] G. Gazetas, "Foundation vibrations". Cap 15 del libro "Foundation engineering", editor: H.Y. Fang, 2da ed., New York: Van Reinholds; 1991. Pag. 553-593.
- [33] J. Kashio, "Steady state response of a circular disk resting on a layered medium", Ph.D. dissertation, Rice University, Houston, TX, 1970.
- [34] J. Dominguez, "Response of embedded foundations to travelling waves", Research report R78-24, Dept. Civil. Engrg., Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Mass. 1978.
- [35] T.J. Tzong y J. Penzien, "Hybrid modelling of soil-structure interaction in layered media", Report N° UCB/EERC-83/22 Eartquake engineering reserch center, university of California, Berkeley, California , 1983.

[36] R.J. Apsel y J.E. Luco, "Impedance functions for foundations embedded in a layered medium an integral equation approach", Earthquake engineering and structural dynamics, Vol. 15, Pag. 213-231, 1987.

[37] O. Saha, M. Hadid, M.K. Berrah, "A study on impedance functions of embedded cylindrical foundations by a boundary element method", Premier Colloque National de Génie Parasismique. ALger. Vol. 1. Pag. 269-275. 1996.

[38] A. Mita y J.E. Luco, "Dynamic response of embedded foundations: a hybrid approach", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 63, Pag. 233-259, 1987.

[39] A. Pais y E. Kausel, "Approximate formulas for dynamic stiffnesses of rigid foundations", Soil dynamics and earthquake engineering, Vol. 7, Pag. 213-227, 1988.

[40] S.M. Day, "Seismic response of embedded foundations", American Society of Civil Engineers, ASCE National Convention, Chicago, Illinois, October 16-20, Pag. 1-22, 1978.

## APENDICE 1: LISTA DE VARIABLES

### Modelo tridimensional

$a_0 = \frac{\omega R}{V_{sc}}$ : Frecuencia adimensional para el modelo con fundación circular.

$a_0^F$ : Frecuencia adimensional para la frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada ( $\omega_C$ ).

$d_C$ : Altura de las paredes de la fundación enterrada.

$D_C$ : Profundidad de enterramiento para fundaciones enterradas.

$FT_1^c = \frac{v_c(i\omega)}{v_g(i\omega)}$ : Función de transferencia entre el desplazamiento relativo de la masa respecto a la cimentación y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_2^c = \frac{v_c^{ln}(i\omega)}{v_g(i\omega)}$ : Función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_3^c = \frac{\theta_c^{ln}(i\omega)H_c}{v_g(i\omega)}$ : Función de transferencia entre la rotación en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_4^c = \frac{v_c'(i\omega)}{v_g(i\omega)}$ : Función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el movimiento horizontal en superficie libre.

$G_C$ : Modulo de corte del suelo.

$h_C$ : Profundidad del estrato.

$H_C$ : Altura de la estructura (sistema de un grado de libertad).

$\text{Im}(\widehat{K}_{yy}(i\omega)), \text{Im}(\widehat{K}_{yy}(a_0))$ : Parte imaginaria del término de la matriz de impedancia que relaciona el desplazamiento horizontal y la fuerza horizontal.

$\text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega)), \text{Im}(\widehat{K}_{\theta\theta}(a_0))$ : Parte imaginaria del término de la matriz de impedancia que relaciona la rotación y el momento flector.

$K_C$ : Rigidez de la estructura (sistema de un grado de libertad).

$m_C$ : Masa de la estructura (sistema de un grado de libertad).

$M_C(t)$ : Momento flector en la base de la subestructura 1.

$M_C(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $M_C(t)$ .

R: Radio de la cimentación circular.

$\text{Re}(\widehat{K}_{yy}(i\omega)), \text{Re}(\widehat{K}_{yy}(a_0))$ : Parte real del término de la matriz de impedancia que relaciona el desplazamiento horizontal y la fuerza horizontal.

$\text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(i\omega)), \text{Re}(\widehat{K}_{\theta\theta}(a_0))$ : Parte real del término de la matriz de impedancia que relaciona la rotación y el momento flector.

$v_C(t)$ : Desplazamiento horizontal de la masa del sistema de un grado de libertad relativo a la cimentación (dominio del tiempo).

$v_C(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_C(t)$ .

$V_C(t)$ : Fuerza horizontal en la base de la subestructura 1.

$V_C(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $V_C(t)$ .

$v_C^{ci}(t)$ : Desplazamiento horizontal de la fundación debido a la interacción suelo estructura cinemática (dominio del tiempo).

$v_C^{ci}(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_C^{ci}(t)$ .

$v_C^{in}(t)$ : Desplazamiento horizontal de la fundación debido a la interacción suelo estructura inercial (dominio del tiempo).

$v_C^{in}(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_C^{in}(t)$ .

$v_C^t(t)$ : Desplazamiento horizontal total de la fundación (dominio del tiempo).

$v_g(t)$ : Desplazamiento horizontal en superficie libre.

$\ddot{v}_g(t)$ : Aceleración horizontal en superficie libre.

$\ddot{v}_g(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $\ddot{v}_g(t)$ .

$V_{sc} = \sqrt{G_c / \rho_c}$ : Velocidad de propagación de la onda de corte del suelo.

$\mu_c$ : Relación de Poisson del suelo.

$\xi_c$ : Amortiguamiento viscoso de la estructura (sistema de un grado de libertad).

$\zeta_c$ : Amortiguamiento histerético del suelo.

$\theta_c^{in}(t)$ : Rotación de la cimentación respecto al eje X debido a la interacción suelo estructura inercial.

$\theta_c^{in}(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $\theta_c^{in}(t)$ .

$\rho_c$ : Densidad del suelo del modelo con fundación circular.

$\varpi$  : Frecuencia de estudio.

$\omega_c = \sqrt{K_c/m_c}$  : Frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada (sistema de un grado de libertad).

### Modelo plano

b: Mitad del ancho de la fundación.

$b_0 = \frac{\varpi b}{V_{ss}}$  : Frecuencia adimensional.

c: Profundidad equivalente de la fundación.

$d_s$  : Altura de las paredes de la fundación enterrada.

$D_s$  : Profundidad de enterramiento para fundaciones enterradas.

$FT_1^s = \frac{v_s(i\varpi)}{v_g(i\varpi)}$  : Función de transferencia entre el desplazamiento relativo de la masa respecto a la cimentación y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_2^s = \frac{v_s^{ln}(i\varpi)}{v_g(i\varpi)}$  : Función de transferencia entre el desplazamiento en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_3^s = \frac{\theta_s^{ln}(i\varpi)H_s}{v_g(i\varpi)}$  : Función de transferencia entre la rotación en la base de la cimentación debido a la interacción inercial y el movimiento horizontal en superficie libre.

$FT_4^s = \frac{v_s^i(i\varpi)}{v_g(i\varpi)}$  : Función de transferencia entre el desplazamiento total en la base de la cimentación y el movimiento horizontal en superficie libre.

$G_s$ : Modulo de corte del suelo.

$h_s$ : Profundidad del estrato de suelo.

$H_s$ : Altura de la estructura (sistema de un grado de libertad).

$\text{Im}(\bar{K}_{yy}(i\varpi)), \text{Im}(\bar{K}_{yy}(b_0))$ : Parte imaginaria del término de la matriz de impedancia que relaciona el desplazamiento horizontal y la fuerza horizontal.

$\text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\varpi)), \text{Im}(\bar{K}_{\theta\theta}(b_0))$ : Parte imaginaria del término de la matriz de impedancia que relaciona la rotación y el momento flector.

$K_S$ : Rigidez de la estructura por unidad de longitud (sistema de un grado de libertad).

$m_S$ : Masa de la estructura por unidad de longitud (sistema de un grado de libertad).

$M_S(t)$ : Momento flector por unidad de longitud en la base de la subestructura 1.

$M_S(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $M_S(t)$ .

$\text{Re}(\bar{K}_{yy}(i\omega)), \text{Re}(\bar{K}_{yy}(b_0))$ : Parte real del término de la matriz de impedancia que relaciona el desplazamiento horizontal y la fuerza horizontal.

$\text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(i\omega)), \text{Re}(\bar{K}_{\theta\theta}(b_0))$ : Parte real del término de la matriz de impedancia que relaciona la rotación y el momento flector.

$v_S(t)$ : Desplazamiento horizontal de la masa del sistema de un grado de libertad relativo a la cimentación (dominio del tiempo).

$v_S(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_S(t)$ .

$V_S(t)$ : Fuerza horizontal por unidad de longitud en la base de la subestructura 1.

$V_S(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $V_S(t)$ .

$v_S^{Ci}(t)$ : Desplazamiento horizontal de la fundación debido a la interacción suelo estructura cinemática (dominio del tiempo).

$v_S^{Ci}(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_S^{Ci}(t)$ .

$v_S^{In}(t)$ : Desplazamiento horizontal de la fundación debido a la interacción suelo estructura inercial (dominio del tiempo).

$v_S^{In}(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $v_S^{In}(t)$ .

$v_C^t(t)$ : Desplazamiento horizontal total de la fundación (dominio del tiempo).

$v_g(t)$ : Desplazamiento horizontal en superficie libre.

$\ddot{v}_g(t)$ : Aceleración horizontal en superficie libre.

$\ddot{v}_g(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $\ddot{v}_g(t)$ .

$V_{SS} = \sqrt{\frac{G_S}{\rho_S}}$ : Velocidad de propagación de la onda de corte del suelo del modelo con fundación infinita.

$\mu_S$ : Relación de Poisson del suelo.

$\xi_S$ : Amortiguamiento viscoso de la estructura.

$\zeta_S$ : Amortiguamiento histerético del suelo.

$\theta_s^n(t)$ : Rotación de la cimentación infinita respecto al eje X debido a la interacción suelo estructura inercial.

$\theta_s^n(i\omega)$ : Transformada de Fourier de  $\theta_s^n(t)$ .

$\rho_s$ : Densidad del suelo.

$\omega$ : Frecuencia de estudio.

$\omega_s = \sqrt{K_s/m_s}$ : Frecuencia fundamental de la estructura con base empotrada (sistema de un grado de libertad).