Sobre el parámetro de no extensividad para algunos sistemas super-aditivos

Article *in* Ingeniería y Ciencia · January 2010

M. E. Puerta
Universidad EAFIT

Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165
Volumen 6, número 11, enero-junio de 2010, páginas 143–158

Sobre el parámetro de no extensividad para algunos sistemas super-aditivos

Soube o parâmetro de não extensividade para alguns superaditivos

Over the non-extensivity parameter for some superadditives systems

R. Borja–Tamayo[1], C. Cartagena–Marín[2], G. Loaiza–Ossa[3], G. Molina–Vélez[4] y M. Puerta–Yepes[5]

Recepción: 08-jun-2009/Modificación: 15-dic-2009/Aceptación: 27-ene-2010
Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo

Resumen

Este artículo propone una relación biunívoca entre el parámetro de no extensividad q y la función de densidad de probabilidad estacionaria f correspondientes a un observable u para algunos sistemas super–aditivos en los que la Entropía de Tsallis sea aplicable. Dicha relación se da en términos de comparación entre funciones de enlace que caracterizan la falta de memoria de ciertas variables aleatorias asociadas al parámetro q y a la densidad estacionaria f. Finalmente, a partir de los resultados anteriores, se propone un método que permite aproximar el parámetro q, mediante una estimación de f, cuando la energía efectiva asociada a u sea la energía cinética efectiva.

[1] Magíster en Matemáticas aplicadas, rborjata@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[2] Físico, ccartage@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[3] Doctor en Matemáticas, gloaiza@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[4] Magíster en Matemáticas aplicadas, jmolinav@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.
[5] Doctora en Matemáticas, mpuerta@eafit.edu.co, profesora, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

Palabras claves: entropía, termoestadística no extensiva, sistemas super–aditivos.

Resumo

Este artigo propõe uma relação biunívoca entre o parâmetro de não extensividade q e a função de densidade de probabilidade estacionaria f correspondente a um observável u para alguns sistemas superaditivos nos que a entropia de Tsallis seja aplicável. Esta relação dei-se em termos de comparação entre funções de enlace que caracterizam a falta de memória de certas variáveis aleatórias associadas ao parâmetro q e à densidade estacionaria f. Finalmente a partir dos resultados anteriores, se propõe um método que permite aproximar o parâmetro q, mediante uma estimação de f, quando a energia efetiva associada a u seja a energia cinética efetiva.

Palavras chaves: entropia, termoestadistica não extensiva, sistemas super aditivos.

Abstract

In this paper one introduces a bijective relation between the non–extensivity parameter q and the stationary probability density function f corresponding to an observable u for some super–additive systems for which the notion of Tsallis entropy applies. This relation is given as a comparison of linking functions characterizing memoryless of certain random variables associated to parameter q and the stationary density f. Then these results are used to formulate a method for approximating the parameter q based on an estimation of f, provided that the effective energy associated to u equals the effective kinetic energy.

Key words: entropy, thermostatistics non expansive, super–additives systems.

1 Introducción

En el desarrollo conceptual de la termoestadística se han propuesto diferentes maneras para describir las propiedades macroscópicas de los sistemas físicos bajo estudio en términos de sus propiedades microscópicas. La formulación dada por Boltzmann–Gibbs constituye un paso fundamental en la búsqueda del cumplimiento de este propósito. Sólo recientemente se ha visto la necesidad de generalizar el concepto de Entropía (y por consiguiente de las funciones de distribución de probabilidad que la maximizan) para describir sistemas con un alto grado de complejidad que se han manifestado en muchos campos de la física no lineal, como el estudio de los fenómenos de turbulencia, percolación, multifractales, radiación cósmica de fondo, etcétera. En 1988, Constantino Tsallis [1] introdujo un nuevo concepto de Entropía y conjuntamente nuevas restricciones para el correspondiente funcional, el cual se utiliza para describir sistemas que poseen propiedades no extensivas. Esta formulación generalizada de Entropía depende de un parámetro real llamado parámetro de no extensividad, q, el cual ha sido propuesto de acuerdo a las condiciones específicas que describen el sistema. Para que el formalismo de Tsallis constituya una teoría física completa cerrada es necesario determinar, en el marco de la mecánica no extensiva, el valor particular (o valores particulares) de q para un sistema físico dado.

En la literatura se encuentran varios cálculos para determinar q en sistemas físicos particulares [2]. En algunos casos, los procedimientos parten de principios primeros o leyes derivadas para determinar el valor o valores de q correspondientes a distribuciones de probabilidad que se ajusten a los datos observados en un sistema. Otros procedimientos consisten en partir de datos experimentales para encontrar una función de ajuste (asumiendo características no extensivas) y plantear un valor o valores de q óptimos.

En el marco de la mecánica no extensiva interesa conocer, para algún sistema físico dado, nuevas formas de calcular el parámetro q: el presente artículo aporta precisamente en dicho conocimiento. Concretamente, el objeto de este artículo es introducir una nueva forma de relacionar el parámetro q para un observable u, con su función de densidad de probabilidad estacionaria f, siempre que ésta tenga media cero en un sistema superaditivo y la energía efectiva asociada a u cumpla ciertas condiciones. La relación se plantea mediante la comparación de funciones de enlace que permitan describir la pérdida de memoria (según una caracterización de Ghitany [3]) para ciertas variables aleatorias. La comparación entre las funciones de enlace se usa como criterio para obtener el parámetro q a partir de una estimación de la función de densidad de probabilidad estacionaria. Dicho criterio es constructivo en cuanto no requiere suponer un valor específico para q.

El artículo está dividido en dos secciones: en la 2, se presenta una breve revisión de temas necesarios relacionados con termoestadística generalizada y funciones de enlace; en la 3 se expone el objeto central del artículo, donde se establece una relación entre el parámetro q y la función de densidad para el observable u del sistema físico con las características descritas previamente, además, se establece un criterio de aproximación para q a partir de una estimación de la función de densidad.

2 Preliminares

2.1 Entropía S_q de Tsallis

Considérese un sistema con n estados posibles, cada uno con probabilidad p_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. La Entropía de Boltzman–Gibbs–Schannon (BGS) es el fundamento de la mecánica estadística clásica y se define para $p = (p_1, \ldots, p_n)$ mediante

$$S(p) = k_B \sum_{i=1}^{n} p_i log \left(\frac{1}{p_i} \right),$$

donde k_B es la constante de Boltzman (que para efectos de este artículo será tomada como uno) y log es el logaritmo natural.

Si bien la propuesta de Boltzmann–Gibbs ha mostrado efectividad, su uso se restringe a los sistemas conocidos como aditivos o extensivos; tales sistemas son aquellos que cumplen la propiedad de aditividad $S(A+B) = S(A) + S(B)$, donde A y B son dos sistemas independientes en el sentido probabilístico. Para sistemas no extensivos es necesario generalizar la Entropía de forma tal que se cubran los casos subaditivos o superaditivos. En este sentido, la estadística no extensiva de Tsallis es considerada como un nuevo paradigma en mecánica estadística.

La Entropía S_q, definida por Tsallis [1], para cada real q, con $q \neq 1$, está dada por

$$S_q(p) = k \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} (p_i)^q}{q-1},$$

y toma el valor $S(p)$ si $q = 1$.

La entropía S_q de Tsallis verifica las siguientes propiedades [4]:

1. S_q es extensión de S en el siguiente sentido: si $q \to 1$ se tiene $S_q \to S$.

2. $S_q(P) = 0$ sólo en el caso de que alguna $p_i = 1$.

3. El máximo para S_q, bajo la única restricción $\sum_i p_i = 1$, se obtiene para $p_i = \frac{1}{n}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$.

4. Propiedad de no extensividad. Supóngase que se tienen dos sistemas independientes A y B, en sentido probabilístico, esto es $P_{ij}^{A+B} = P_i^A P_j^B$. Entonces se tiene

$$\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1-q)\frac{S_q(A)S_q(B)}{k^2}\,.$$

O de forma equivalente

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k}S_q(A)S_q(B)\,.$$

Del último numeral se concluye que: para $q > 1$ se tienen sistemas superextensivos, para $q = 1$ se tienen sistemas extensivos y para $q < 1$ sistemas subextensivos. El caso de Boltzmann–Gibbs se reduce así a los sistemas extensivos.

En las últimas tres décadas se ha encontrado evidencia experimental que presenta casos de sistemas termodinámicos (con suficiente complejidad) que son no extensivos, hecho que en gran medida ha servido como muestra de la importancia de la teoría de Tsallis en la termoestadística. Una situación entre estos casos anómalos se ofrece en consideraciones hidrodinámicas de los fenómenos de turbulencia en tres dimensiones. Particularmente en el estudio presentado por Cristian Beck [5], de la diferencia de la velocidad radial u entre dos puntos en un líquido separados por una distancia r descrita mediante su relación con la energía cinética $\frac{1}{2}u^2$. Las propiedades dinámicas de estos sistemas, como la difusión anómala, la simetría y la ley de potencia para el decaimiento de correlaciones, están en buena coincidencia con las predicciones de los modelos no extensivos en un amplio rango de parámetros.

La manifestación de las propiedades no extensivas de la Entropía de Tsallis ha conducido a la representación de S_q en términos de generalizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, llamadas q–logaritmo y q–exponencial, que son inversas una de la otra y se definen respectivamente para $q \neq 1$ por

$$log_q(x) := \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \qquad \text{y} \qquad exp_q(x) := [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}\ ,$$

donde $[u]_+ = \text{máx}\{0, u\}$. Cuando $q \to 1$, las expresiones anteriores se reducen a las funciones logaritmo natural y exponencial respectivamente. La función q–logaritmo permite representar la Entropía S_q mediante

$$S_q(p) = \sum_i p_i log_q\left(\frac{1}{p_i}\right).$$

La distribución de probabilidades de equilibrio $p = \{p_i\}$ se obtiene maximizando S_q con respecto a los p_i sujeto a la restricción $\sum_i p_i = 1$. Para el conjunto microcanónico (sistema aislado), ésta será la única restricción; en tal caso el resultado de la optimización es $p_i = \frac{1}{n}$. Si se considera un sistema en contacto con un baño térmico, en el conjunto canónico, además de la anterior restricción, es necesaria una de las tres siguientes:

$$a)\ U_q = \sum_i p_i e_i, \qquad b)\ U_q = \sum_i p_i^q e_i \ \text{ y } \quad c)\ U_q = \frac{\sum_i p_i^q e_i}{\sum_i p_i^q},$$

donde U_q es el valor esperado de energía E asociada al sistema y los e_i son los autovalores del Hamiltoniano cuántico del sistema. Cada restricción fue introducida en diferentes trabajos de Tsallis [1, 2, 6].

El uso de cualquiera de las anteriores restricciones conduce a distintas termoestadísticas, donde a cada una de ellas le corresponde una distinta distribución de probabilidades $p = \{p_i\}$, que expresa la distribución de probabilidades de ocupación de los microestados. Ferri, Martínez y Plastino [7] muestran que cada una de ellas se deriva de una sola expresión, que depende de un parámetro (multiplicador de Lagrange) β y está dada por $p = \{p_i\}$, donde

$$p_i = \frac{[1-(1-q)\beta e_i]^{\frac{1}{1-q}}}{\sum_i [1-(1-q)\beta e_i]^{\frac{1}{1-q}}} = \frac{exp_q(-\beta e_i)}{\sum_i exp_q(-\beta e_i)} \qquad \text{válido para } 0 < q \leqslant 2\,;$$

y las expresiones para β corresponden al β^* que aparece en [7] para cada una de las correspondientes restricciones.

En el caso continuo, el funcional de Entropía se define por

$$S_q(f) = k\frac{1-\int (f(x))^q dx}{q-1}.$$

A continuación se presentan resultados sobre optimización de S_q con notación tomada de [6] y [8], pero el proceso como tal se puede consultar en [6].

Considérese el problema de maximizar S_q, sujeto a las restricciones

$$\int f(x)dx = 1 \quad \text{y} \quad \int (x-\overline{\mu}_q)^2 \frac{[f(x)]^q}{\int [f(x)]^q dx} dx = \overline{\sigma}_q^2 \,, \tag{1}$$

donde $\overline{\sigma}_q^2$ y $\overline{\mu}_q$ son la varianza y la media generalizadas de x respectivamente. El resultado de la optimización, válido para $q < 3$, es

$$f(x) = \frac{1}{z_q}[1+(q-1)\beta_q(x-\overline{\mu}_q)]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{z_q} exp_q(-\beta_q(x-\overline{\mu}_q))\,,$$

donde la constante $\beta_q > 0$ se puede determinar usando la segunda restricción de (1) y z_q corresponde a $z_q := \int exp_q(-\beta_q(x-\overline{\mu}_q))dx$.

Para modelos estacionarios es necesario considerar una tercera restricción de (1) dada por

$$\int x \frac{[f(x)]^q}{\int [f(x)]^q dx} dx = \overline{\mu}_q \,.$$

En este caso, la función de densidad de probabilidad estacionaria que resulta de la optimización (escribiendo respectivamente $\frac{1}{z_q}$ y $\frac{\beta}{2}$ en lugar de la notación $\mathcal{A}_q$ y β_q de [8]) es

$$f(x) = \frac{1}{z_q}\left[1+(q-1)\frac{\beta}{2}(x-\overline{\mu}_q)^2\right]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{z_q} exp_q\left(-\frac{\beta}{2}(x-\overline{\mu}_q)^2\right), \tag{2}$$

válido para $q < 3$, donde $z_q := \int exp_q(-\frac{\beta}{2}(x-\overline{\mu}_q)^2)dx$, el parámetro β puede ser determinado por $\beta = \frac{2}{\overline{\sigma}_q^2(3-q)}$ y las varianzas usual y generalizada están relacionadas por $\overline{\sigma}_q^2 = \overline{\sigma}^2 \frac{5-3q}{3-q}$. Además, $\beta = \frac{2}{\sigma^2(5-3q)}$ y z_q se puede calcular por

$$\frac{1}{z_q} = \begin{cases} \frac{\Gamma[(5-3q)/(2-2q)]}{\Gamma[(2-q)/(1-q)]}\sqrt{\frac{(1-q)\beta}{2\pi}} & \text{si} \quad q < 1 \\ \frac{\Gamma[1/(q-1)]}{\Gamma[(3-q)/(2q-2)]}\sqrt{\frac{(q-1)\beta}{2\pi}} & \text{si} \quad q > 1\,. \end{cases}$$

2.2 Propiedad de pérdida de memoria y funciones de enlace

Si se considera una función de distribución exponencial, la función de distribución acumulada asociada está dada por $F(t) = 1 - e^{\frac{-t}{\lambda}}$ con $t > 0$, donde el parámetro $\lambda > 0$ representa la media de la variable aleatoria que tiene asociada dicha distribución. En tal caso, la función de supervivencia asociada es $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}$. Por otro lado, es conocida la propiedad de pérdida de memoria dada por $P(X > t + a) = P(X > t)P(X > a)$ que cumple una variable aleatoria con distribución exponencial.

Observación 1. *Considérese una variable aleatoria X con función de distribución de probabilidad F, continua y estrictamente creciente en un intervalo. Dado que en tal caso F y $\bar{F}$ distribuyen uniformemente en $(0, 1)$, se tiene que $g(X) := log(\frac{1}{F(X)})$ y $h(X) =: log(\frac{1}{\bar{F}(X)})$ están exponencialmente distribuidas con media uno.*

Así, la propiedad de pérdida de memoria para F y $\bar{F}$ respectivamente (o bien, para X mediante g y h respectivamente) es caracterizada por Ghitany [3] por medio de las funciones de enlace g y h de la forma:

$$\begin{aligned} P(g(X) > s + t) &= P(g(X) > s)P(g(X) > t), \quad \textit{para algún } s, t\,, \\ P(h(X) > a + b) &= P(h(X) > a)P(h(X) > b), \quad \textit{para algún } a, b\,, \end{aligned} \tag{3}$$

o igualmente

$$P(X > h^{-1}(a + b)) = P(X > h^{-1}(a))P(X > h^{-1}(b)), \qquad \textit{para algún } a, b\,.$$

De tal forma, existen $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ tales que

$$P(g(X) > t) = e^{\frac{-t}{\lambda_1}} \quad y \quad P(h(X) > t) = e^{\frac{-t}{\lambda_2}}\,.$$

3 Funciones de enlace y el parámetro de no extensividad

Es claro que la propiedad de pérdida de memoria, en la forma (3), para una variable aleatoria X que distribuya siguiendo una función de densidad de probabilidad continua definida mediante una función exponencial, permite caracterizar a X mediante la relación $\bar{F_Y}(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} = \lambda f_Y(t) \quad (t > 0)$. En la subsección 3.1 se mostrará que en el caso en que la variable aleatoria X tenga función de densidad q–exponencial, se obtiene una caracterización similar, para lo cual es necesario establecer una biyección que identifique a una restrición de la función de supervivencia asociada a la variable aleatoria, con otra función de supervivencia definida mediante una función de enlace. En la subsección 3.2 se propone una nueva forma de de relacionar (mediante comparación de funciones de enlace) la función de densidad estacionaria estimada con una función que permite decidir el parámetro de no extensividad correspondiente para ciertos sistemas super–aditivos.

3.1 Parámetro de no extensividad y propiedad de pérdida de memoria

Para modelos canónicos no extensivos se han propuesto funciones de densidad estacionarias f asociadas a un observable u, maximizando el funcional de Entropía con las restricciones adecuadas, descritas por

$$f(u) = \frac{1}{z_q} exp_q(-\beta E(u)), \qquad \text{con} \;\; z_q = \int exp_q(-\beta E(u))du\,. \tag{4}$$

En adelante, se supondrá que f es una función de densidad de probabilidad continua y simétrica para un observable u asociado a un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad $q > 1$.

Se define una probabilidad en $[0, \infty)$, para alguna variable aleatoria Y, mediante

$$\bar{F}_Y(t) = P(Y > t) = z_q f(t) = exp_q(-\beta E(t))\,.$$

Para cada $r > 1$, en el intervalo $[0, \frac{1}{r-1})$, se define la probabilidad para una variable aleatoria X_r por medio de

$$\bar{F}_{X_r}(t) = P(X_r > t) = \frac{1}{exp_r(t)}\,. \tag{5}$$

Sea $\bar{F}$ la restricción de $\bar{F}_Y$ al intervalo $[0, \frac{1}{q-1})$, claramente $\bar{F}$ no es una función de supervivencia. Nótese que la asignación Ψ dada por $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$ es una biyección en $[0, \frac{1}{q-1})$.

Proposición 2. *La única biyección en* $[0, \frac{1}{q-1})$ *definida por* $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$ *ocurre cuando* $r = q$.

Demostración. Nótese que para $q < r$ no es posible tener una biyección dada por $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_r}(t)$ porque el dominio de la primera incluye propiamente al dominio de la segunda (aún si se redefiniera $\bar{F}_{X_r}(t) = 0$ para $\frac{1}{r-1} \leqslant t < \frac{1}{q-1}$, la asignación no sería inyectiva). Análogamente, cuando $q > r$ no es posible una biyección como la planteada anteriormente, ya que $[0, \frac{1}{q-1})$ se incluye propiamente en $[0, \frac{1}{r-1})$. Gracias al decrecimiento estricto, tanto de $\bar{F}_{X_q}$ como de $\bar{F}$, la única biyección (como las sugeridas) que puede plantearse es $\Psi(\bar{F}(t)) = \bar{F}_{X_q}(t)$ para todo $t \in [0, \frac{1}{q-1})$. $\square$

A continuación se muestra que la biyección Ψ permite caracterizar la pérdida de memoria de X_q en términos de $\bar{F}(t)$ y, por tanto, de Y. En efecto, siendo $\bar{F}_{X_q}$ y $\bar{F}_Y$ las funciones de supervivencia para X_q e Y respectivamente, las funciones de enlace mediante las cuales se expresa la pérdida de memoria para X_q e Y están definidas respectivamente por

$$h_{X_q}(t) := log(exp_q(t)), \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{q-1} \quad \text{y}$$
$$h_Y(t) := log\left(\frac{1}{exp_q(-\beta(t))}\right), \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t < \infty\,.$$

En consecuencia, existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que

$$P(h_{X_q}(X_q) > t) = e^{\frac{-t}{\lambda_1}} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{q-1} \quad \text{y}$$
$$P(h_Y(Y) > t) = e^{\frac{-t}{\lambda_2}} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t < \infty\,.$$

En particular, si $t \in [0, \frac{1}{q-1})$, se satisfacen las dos igualdades anteriores y si se toma $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, entonces se tiene

$$P(h_{X_q}(X_q) > t) = P((h_Y(Y) > t))^k\,,$$

o igualmente, $P(X_q > h_{X_q}^{-1}(t)) = P(Y > h_Y^{-1}(t))^k$; que se puede escribir como $\bar{F}_{X_q}(h_{X_q}^{-1}(t)) = (\bar{F}_Y(h_Y^{-1}(t)))^k$, o bien

$$\Psi(\bar{F}_Y(h_{X_q}^{-1}(t))) = (\bar{F}_Y(h_Y^{-1}(t)))^k\,,$$

con lo cual, la pérdida de memoria de Y se puede expresar mediante las funciones de enlace y la biyección.

3.2 Estimación del parámetro de no extensividad

Considérese una función de densidad de probabilidad continua y simétrica f para un observable u asociado a un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad $q > 1$. Para plantear una relación entre f con una función que permite decidir el parámetro de no extensividad, se planteará una relación entre dicho parámetro y la familia de funciones $\bar{F}_{x_r}$ (con $1 < r < 3$ construidas como en la subsección anterior). Dicha relación será establecida mediante un criterio que determine: cuándo una de las gráficas correspondiente a las funciones de la familia corta a la gráfica de $\bar{F}_u$ en un único punto (a, b) tal que $a > 0$. Lo anterior equivale a comparar la familia de funciones de enlace $h_r(t) = log(exp_r(t))$ con $h_Y(t) = log[1/exp_q(-\beta E(t))]$, o más directamente, la familia de funciones $exp_r(t)$ con la función $e_f(t) := \frac{1}{exp_q(-\beta E(t))}$.

El siguiente resultado plantea que e_f cumple condiciones para ser considerada como exponencial k–deformado en el sentido de Naudts [9].

Proposición 3. *Considérese una función de densidad de probabilidad estacionaria, continua y simétrica correspondiente a un observable u de un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad $q > 1$, y sea $E(u)$ la energía asociada a u según* (4). *Si además, para todo $t > 0$ se cumplen $E(t) > 0$ y*

$$[1 - (1-q)\beta E(t)]\beta \frac{d^2}{dt^2}E(t) + 2\beta^2(1-q)(\frac{d}{dt}E(t))^2 > 0\,, \qquad (6)$$

entonces se tiene: $e_f(0) = 1$, $e_f(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y e_f es función continua, estrictamente creciente y cóncava en el intervalo $[0, \infty)$. Además, e_f tiene derivada cero a derecha de cero.

Demostración. Sólo se justificará las propiedades decrecimiento concavidad de e_f, ya que las demás afirmaciones son fáciles de probar a partir de las propiedades de exp_q.

Para considerar las dos primeras derivadas de e_f respecto a t, resultan útiles las siguientes expresiones, que aparecen en las páginas 38 y 39 de [10]:

$$\frac{1}{exp_q(x)} = exp_q\left(\frac{-x}{1+(1-q)x}\right), \qquad x \neq \frac{1}{q-1}, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx} exp_q(x) = (exp_q(x))^q, \tag{8}$$

$$(exp_q(x))^a = exp_{1-(1-q)/a}(ax). \tag{9}$$

Aplicando (7) para reescribir a $e_f(t)$, derivando en ambos lados y simplificando, se obtiene

$$\frac{d}{dt}e_f(t) = \left[\frac{1}{exp_q(-\beta E(t))}\right]^q \left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1-(1-q)\beta E(t)]^2}\right].$$

Ahora, empleando (7), (8) y (9), mediante cálculos laboriosos, la segunda derivada es dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}e_f(t) = A(t)\left([1-(1-q)\beta E(t)]\beta \frac{d^2}{dt^2}E(t) + 2\beta^2(1-q)(\frac{d}{dt}E(t))^2\right) + B(t),$$

donde

$$A(t) = \left[\frac{1}{(1-(1-q)\beta E(t))^3}\right]\left[exp_{(2q-1)/q}\left(\frac{\beta E(t)}{1-(1-q)\beta E(t)}\right)\right] \text{ y}$$

$$B(t) = q\left[\frac{\beta \frac{d}{dt}E(t)}{[1-(1-q)\beta E(t)]^2}\right]^2 \left[exp_{(2q-1)/q}\left(\frac{q\beta E(t)}{1-(1-q)\beta E(t)}\right)\right]^{(2q-1)/q}.$$

Ahora bien, si se cuenta con un sistema para el cual $E(t) > 0$ para $t > 0$, entonces $\frac{d}{dt}e_f(t)$ es positiva para todo $t > 0$ y por tanto e_f es estrictamente creciente en los reales positivos, $\mathbb{R}^+$.

Además, las funciones $A(t)$ y $B(t)$ son estrictamente positivas en $\mathbb{R}^+$, por lo que $\frac{d^2}{dt^2}e_f(t)$ es estrictamente positiva y $e_f(t)$ es función cóncava en $\mathbb{R}^+$, siempre y cuando se cumpla (6). □

Observación 4. *Es de importancia resaltar que la familia de funciones exp_r para $1 < r < 3$ presenta el siguiente comportamiento:*

- *Cada exp_r es una función: continua en $[0, \frac{1}{r-1})$, estrictamente creciente, cóncava, que pasa por $(0,1)$ y tiene asíntota vertical en $\frac{1}{r-1}$. Además, exp_r tiene derivada uno a derecha de cero.*

- *Es familia ordenada en el siguiente sentido: Si $r_1 < r_2$ entonces, para todo $t \in [0, \frac{1}{r_2-1})$, $exp_{r_1}(t) < exp_{r_2}(t)$.*

Ahora, por las características dadas en la observación 4 para la familia de funciones $e_r(t)$ y por las características de e_f según la proposición 3, existe un único r_0 para el cual la gráfica de e_{r_0} corta a la gráfica de e_f en un único punto que tenga coordenadas positivas. A continuación se presentan condiciones para que r_0 sea precisamente el parámetro de no extensividad q.

Si se considera q como el parámetro de no extensividad, según la proposición 3 y $exp_q(t_0) = e_f(t_0)$ para algún $t_0 > 0$, se tiene que $exp_q(t_0) = [exp_q(-\beta E(t_0))]^{-1}$. Aplicando (7) se llega a $exp_q(t_0) = exp_q(\frac{\beta E(t_0)}{1-(1-q)\beta E(t_0)})$, de donde se obtiene $t_0 = \frac{\beta E(t_0)}{1-(1-q)\beta E(t_0)}$. Ahora, la función

$$w(t) = \frac{\beta E(t)}{1-(1-q)\beta E(t)} \tag{10}$$

es acotada por $\frac{1}{q-1}$ siempre que $E(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Además, si t_0 es el único punto fijo de $w(t)$, entonces la gráfica de e_q corta a la de e_f únicamente en t_0. Las consideraciones anteriores dependen de la forma explícita para función energía efectiva $E(t)$ y de β.

Si la energía asociada a un observable u, con función de densidad estacionaria f, es de la forma $E(u) = \frac{u^2}{2}$, entonces se satisfacen las condiciones de la proposición 3. Si además se considera $\beta = \frac{2}{\sigma^2(5-3q)}$, entonces $w(t)$ se transforma en

$$w(t) = \frac{t^2}{\sigma^2(5-3q)-(1-q)t^2}$$

y, en este caso, al plantear la existencia de un punto fijo para $w(t)$ se llega a la ecuación cuadrática $(1-q)t^2 + t - \sigma^2(5-3q) = 0$, cuya única solución es $t = \frac{1}{2(q-1)}$ siempre y cuando sea cero su discriminante

$$D = 1 + 4\sigma^2(1-q)(5-3q) = 0\,, \tag{11}$$

es decir, cuando $q = \frac{8\sqrt{\sigma} \pm \sqrt{4\sigma^2 - 3}}{6\sqrt{\sigma^2}}$ y $\sigma^2 \geqslant \frac{3}{4}$. Con las anteriores condiciones, y teniendo presente que $\beta = \frac{2}{\sigma^2(5-3q)}$, se obtiene que (11) se cumple si, y sólo si, $\beta = 8(q-1)$. Lo anterior justifica el siguiente resultado.

Proposición 5. *Para una función de densidad de probabilidad estacionaria f, continua correspondiente a un observable u con media cero, de un sistema no extensivo, con parámetro de no extensividad $q > 1$ y energía efectiva $E(u) = \frac{u^2}{2}$, se tiene que: si la varianza es $\sigma^2 \geqslant \frac{3}{4}$ y se considera $\beta = 8(q-1)$, entonces las gráficas de $e_f(t)$ y $exp_q(t) = exp(-\frac{\beta}{2}t^2)$ se cortan en un único punto de coordenadas positivas.*

De acuerdo a lo anterior, se puede establecer el siguiente criterio.

Criterio 6. *Sea $\widehat{f}$ la función de densidad estacionaria estimada y tal que $\widehat{\sigma}^2 \geqslant \frac{3}{4}$ para una función f que cumpla las hipótesis de la proposición 5. Sea $\widehat{z_q}$ el inverso multiplicativo de la máxima altura de $\widehat{f}$ (por la simetría de f, se sabe que $\frac{1}{z_q}$ es la máxima altura de f, o bien, la imagen bajo f de la media $\mu = 0$). El método para determinar el valor de q consiste en comparar las gráficas de exp_r (para $1 < r < 3$) con la gráfica de*

$$e_{\widehat{f}} := \frac{1}{\widehat{z_q}\widehat{f}}.$$

El parámetro de no extensividad q será el correspondiente a $q = r$ tal que la gráfica de e_r corte a la gráfica de $e_{\widehat{f}}$ en un único punto que sea de coordenadas positivas.

Para ilustrar el funcionamiento del método se considera la situación presentada en [11], que ha sido estudiada en varios trabajos de Cristian Beck, para un caso de defectos de turbulencia, donde la Entropía de Tsallis es aplicable. En tal caso, el observable u es la velocidad media radial entre dos partículas en un fluido, que cumple $\overline{\mu}$=0. Considérese: la energía cinética efectiva $E(u) = \frac{u^2}{2}$ como la energía efectiva asociada a u, $\sigma^2 = 1$ y que en [11] se presenta evidencia experimental de que el parámetro de no extensividad correspondiente debe ser $q \approx 1{,}5$. Con lo anterior, a partir de (2), se obtiene que la función de distribución de probabilidad estacionaria que maximiza la Entropía es

$$f(u) = \frac{2}{\pi(1+u^2)^2}\,.$$

A manera de test para el método, se considerará $\widehat{f} = f$ y se espera que aplicando el criterio se obtenga $q = 1{,}5$. En efecto, dado que la máxima altura de $\widehat{f}$ es $\widehat{z_q} = \frac{\pi}{2}$ y por consiguiente $e_{\widehat{f}}(u) = (1+u^2)^2$, resulta de la comparación entre la familia de funciones exp_r (con $1 < r < 3$) y la función $e_{\widehat{f}}$, que la única gráfica de las exp_r que corta a la de $e_{\widehat{f}}$ en un único punto de coordenadas positivas $(t_0, e_{\widehat{f}}(t_0))$, es la correspondiente a $r = 1{,}5$. Para el caso, el único $t_0 > 0$ que verifica $exp_{1,5}(t_0) = e_{\widehat{f}}(t_0)$ es $t_0 = 1$; para $1 < r < 1{,}5$, la gráfica de exp_r corta en dos puntos de coordenadas positivas a la de $e_{\widehat{f}}$ y para $1{,}5 < r < 3$, la gráfica de exp_r no corta a la de $e_{\widehat{f}}$.

4 Conclusiones

Dada una función de densidad de probabilidad continua y simétrica f, para un observable u asociado a un sistema no extensivo con parámetro de no extensividad $q > 1$, considérese la función de densidad de probabilidad dada en (4) (siendo $E(u)$ la energía efectiva asociada a u). Si $E(u)$ es función estrictamente convexa y positiva en el intervalo $(0, \infty)$ y cumple (6), se tiene:

- Para $1 < r < 3$, la función de supervivencia F_{x_q} es la única entre las F_{x_r} definidas por (5), que permite establecer una biyección con la restricción a $[0, \frac{1}{q-1})$ de la función de supervivencia definida por $\frac{1}{z_q f}$.

- Si se cumple (6), entonces las gráficas de exp_q y exp_f se cortan en un único punto siempre que $w(t)$, definida en (10), tenga un único punto fijo.

Si se considera $E(u) = \frac{1}{2}u^2$ y f se ha estimado mediante $\widehat{f}$, donde $\widehat{\sigma}^2 \geqslant \frac{3}{4}$, entonces se puede aplicar el criterio 6 para estimar el parámetro q.

Referencias

[1] C. Tsallis. *Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics*. Journal of Statistical Physics, ISSN 0022–4715, **52**(1 y 2), 478–487 (1988). Referenciado en 145, 146, 148

[2] C. Tsallis. *Nonextensive entropy: Interdisciplinary applications*, ISBN 0195159772, Gell–Mann, M.(Editores), 2004. Referenciado en 145, 148

[3] M. Ghitany. *Some remarks on a characterization of the generalized log-logistic distribution*. Environmetrics, ISSN 1180–4009, **7**(3), 277–281 (1996). Referenciado en 145, 150

[4] C. Tsallis, F. Baldovin, R. Cerbino and P. Pierobon. *Entropic nonextensivity: a possible measure of complexity*. Chaos, Solitons and Fractals, ISSN 0960–0779, **13**(3), 371–391 (2002). Referenciado en 146

[5] C. Beck. *Application of generalized thermostatistics to fully developed turbulence*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, ISSN 0378–4371, **277**(1), 115–123 (2000). Referenciado en 147

[6] C. Tsallis, R. Mendes and A. Plastino. *The role of constraints within generalized nonextensive statistics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, ISSN 0378–4371, **261**(3), 534–554 (1998). Referenciado en 148, 149

[7] G. Ferri, S. Martínez y A. Plastino. *Sobre el procedimiento de normalización en la termoestadística de Tsallis*. Anales AFA, ISSN 0327–358X, **16**, 24–29 (2004). Referenciado en 148

[8] L. Moyano. *Mecânica estatística não-extensiva em sistemas complexos: fundamentos dinâmicos e aplicações*, Tese de Dutorado, Centro Brasilero de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2006), `http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/tese_moyano.2006_05_02_04_01_11.pdf`. Referenciado en 149

[9] J. Naudts. *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatistics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, ISSN 0378–4371, **316**(1), 323–334 (2002). Referenciado en 153

[10] E. Pinheiro Borges. *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos*, Tese de Dutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004), http://www2.ufba.br/ ernesto/files/epb-tese.pdf. Referenciado en 154

[11] E. Daniels, C. Beck and E. Bodenschatz. *Defect turbulence and generalized statistical mechanics*. Physica D: Nonlinear Phenomena, ISSN 0167–2789, **193**(1–4), 208–217 (2004). Referenciado en 156