

**DETECCIÓN DE PUNTAS EPILEPTICAS EN SEÑALES EEG
USANDO WAVELETS Y REDES NEURONALES**

WILMER PEÑA ORTEGA

**UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MEDELLIN
2013**

**DETECCIÓN DE PUNTAS EPILEPTICAS EN SEÑALES EEG
USANDO WAVELETS Y REDES NEURONALES**

WILMER PEÑA ORTEGA

**Trabajo presentado para optar el título de
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**Director
NELSON EDUARDO CASTAÑO G.**

**UNIVERSIDAD EAFIT
ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLIN
2013**

Contenido

| | |
|--|------------|
| Introducción | III |
| 1. Procesamiento de señales | 1 |
| 1.1. Terminología | 1 |
| 1.2. Señales | 3 |
| 1.3. Series de Fourier | 4 |
| 1.4. Transformada de Fourier | 6 |
| 1.5. Transformada de Fourier enventanada | 8 |
| 2. Transformada wavelets | 10 |
| 2.1. Wavelet Haar y Análisis multiresolución | 10 |
| 2.1.1. Las wavelet de Haar | 10 |
| 2.1.2. Análisis multiresolución | 13 |
| 2.2. Ecuación de escala | 15 |
| 2.3. Construcción de la función escala | 17 |
| 2.4. Procedimiento iterativo para la construcción de la función escala y determinar los coeficientes g_n | 20 |
| 2.5. Descomposición y reconstrucción | 22 |
| 2.5.1. Algoritmo de descomposición | 22 |
| 2.5.2. Algoritmo de reconstrucción | 25 |
| 2.6. La transformada wavelet | 26 |
| 2.7. Transformada wavelet discreta | 27 |
| 2.8. Wavelets Daubechies | 28 |
| 3. Redes neuronales | 33 |

| | |
|--|-----------|
| 3.1. Elementos básicos en una red neuronal | 34 |
| 3.2. Modelo general de neurona artificial | 34 |
| 3.3. Topología o arquitectura de una red neurona artificial | 35 |
| 3.4. Aprendizaje | 37 |
| 3.5. El perceptrón multicapa | 38 |
| 3.6. Aprendizaje por retropropagación de errores (BP) | 39 |
| 4. Detección y clasificación de puntas epilépticas | 40 |
| 4.1. Electroencefalograma | 40 |
| 4.2. Epilepsia | 41 |
| 4.3. Eventos Epilépticos | 43 |
| 4.4. Detección de puntas epilepticas | 46 |
| 4.4.1. Materiales y métodos | 46 |
| 4.4.2. Procesamiento de la señal EEG e inspección visual | 47 |
| 4.4.3. Análisis de las señales usando la transformada wavelet y extrac- ción de características | 48 |
| 4.4.4. Clasificación de las señales usando una red neuronal artificial . | 57 |
| 4.4.5. Validez, sensibilidad y especificidad | 58 |
| 4.4.6. Aplicación de la red neuronal artificial | 63 |
| 4.4.7. Resultados y discusión | 64 |
| 4.5. Conclusiones | 66 |
| Bibliografía | 67 |

Introducción

En la actualidad, la transformada wavelet es una de las herramientas utilizadas para el análisis de señales, en el ámbito de la biomedicina es una técnica que se adapta al procesamiento de señales de pruebas como electrocardiograma (ECG), electromiografía (EMG), o electroencefalograma (EEG), debido a la característica de no estacionariedad de éstas. En estos tipos de señales la detección de anomalías requiere de un análisis detallado por parte de expertos para su análisis. Por ejemplo, los EEG son utilizados en el diagnóstico de los trastornos cerebrales como la epilepsia o el Alzheimer.

Por otro lado, las redes neuronales artificiales (RNA) poseen características aplicables cuando se dispone de un conjunto básico de datos de entrada en los cuales está incorporado un patrón específico que la red se encarga de memorizar y utiliza como referente para posteriores clasificaciones.

Dentro de las aplicaciones de las RNA, se incluyen problemas de clasificación y reconocimiento de patrones de voz, imágenes, señales, etc. Asimismo se han utilizado para encontrar patrones de fraude económico, hacer predicciones en el mercado financiero, hacer predicciones de tiempo atmosférico, etc.

Varias investigaciones se han llevado a cabo con el fin de ayudar en el análisis y diagnóstico de enfermedades que pueden ser detectadas mediante el estudio de exámenes como el EEG, tomografías, resonancias magnéticas, etc.

En el caso de una enfermedad como la epilepsia, el análisis de exámenes como el EEG son frecuentemente utilizados para determinar si un paciente puede o no sufrir de dicha enfermedad o inclusive determinar qué tipo de epilepsia puede padecer.

La transformada wavelet y su fórmula de inversión asociada, descompone una función separando sus componentes frecuenciales. Utilizando una wavelet dada en lugar de un término exponencial [3].

Las señales de EEG se descomponen en varios niveles de resolución permitiendo un análisis detallado en cada uno de estos. En estos niveles espectrales se pueden identificar patrones que una red neuronal asimila o memoriza para luego determinar si alguna otra señal es patológica o no, definiendo el diagnóstico del paciente [Akin, M., Arserim, M., Kiyimik, M., Turkoglu, I., 2001].

La transformada wavelet y las redes neuronales se han utilizado para detectar el estado de alerta de una persona a partir de patrones estadísticos que diferencian cuando una persona se encuentra en estado de alerta, con somnolencia o dormida, estados que definieron las salidas de la red neuronal [Abdulhamit Subasi, 2005].

Las redes neuronales se han utilizado también en la clasificación de señales de EEG utilizando tres clases: Normal, esquizofrenia (SCH) y Trastorno Obsesivo Compulsivo (TOC) [Neep Hazarika, Jean Zhu Chen, Ah Chung Tsoi, Alex Sergejew, 1997].

Las wavelets Biortogonles con su análisis multiresolución permitió diseñar un algoritmo para la detección de puntas en pacientes con epilepsia refractaria del lóbulo temporal, a partir de los máximos voltajes en cada uno de los seis niveles de reconstrucción usando la wavelet biortogonal 3.7 [Nelson Eduardo Castaño, José Fernando Zapata y Jairo Villegas G., 2009]

Este trabajo utilizará características estadísticas como la media, el mínimo, el máximo, el rango y la desviación estandar de los coeficientes wavelets extraídos de señales EEG normales (Artificios) y patológicas (Puntas), las cuales se convertirán en patrones de aprendizaje de una red neuronal, la cual una vez entrenada, permitirá identificar señales patológicas, y así, aprovechar el potencial que tienen las RNA en la clasificación de patrones como estos.

El trabajo cuenta con cuatro capítulos, los cuales describen los aspectos básicos sobre la teoría wavelet, las redes neuronales y la aplicación de estas teorías al análisis y clasificación de señales EEG de pacientes con epilepsia.

El desarrollo comienza con un primer capítulo donde se exponen algunos tópicos sobre el procesamiento de señales y las herramientas utilizadas para su análisis, como el análisis de Fourier.

En el capítulo dos se presentan algunos resultados sobre la teoría wavelets y en particular de las wavelets Daubechies.

En el capítulo tres se muestran los conceptos básicos relacionados con las redes neuronales y las redes multicapa, apropiadas para la clasificación de patrones.

Por último, en el capítulo cuatro se realiza el análisis de las señales EEG obteniendo un conjunto de estadísticas mediante el análisis wavelets y se clasificarán con una red neuronal multicapa.

Capítulo 1

Procesamiento de señales

En este corto capítulo se presentará alguna terminología necesaria para la lectura de este trabajo. En particular, se hará un resumen de resultados básicos de análisis de Fourier para el procesamiento de señales.

1.1. Terminología

Uno de los conceptos teóricos para el análisis es el de los espacios vectoriales V con producto interno sobre \mathbb{C}

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que $\forall x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tienen las siguientes propiedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

La aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama producto interno* sobre V .

Definición 1.1.1. *Suponga que V es un espacio con producto interno.*

1. *los vectores $x, y \in V$ se dicen ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$.*

*Un producto interno sobre V define una norma en V dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ y una métrica sobre V definida por $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$

2. La colección de vectores e_i , $i = 1, 2, \dots, N$, se dice que es ortonormal si cada e_i tiene longitud 1, $\|e_i\| = 1$, y e_i y e_j son ortogonales para $i \neq j$.

3. Dos subespacios V_1 y V_2 de V se dice que son ortogonales si cada vector en V_1 es ortogonal a cada vector en V_2 .

Definición 1.1.2. Un conjunto $B = \{e_j | j \in \mathbb{Z}^+\}$ es una base de un espacio vectorial V si los vectores e_j son linealmente independientes, y para cada $v \in V$ existe una sucesión $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}^+}$ de números tales que

$$v = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} x_j e_j$$

Definición 1.1.3. Una función continua a trozos $f(x)$ definida en un intervalo I es acotada (o L^∞) en I si existe un número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.

Definición 1.1.4. Una función continua a trozos $f(x)$ definida en un intervalo I es integrable (o L^1) en I si la integral

$$\int_I |f(x)| dx < \infty$$

Definición 1.1.5. Una función continua a trozos $f(x)$ definida en un intervalo I es cuadrado integrable (o L^2) en I si la integral

$$\int_I |f(x)|^2 dx < \infty$$

La norma en L^2 de una función $f(x)$ esta definida por

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Definición 1.1.6. Sea $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Se define el producto interno de $f(t)$ y $g(t)$ como

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Definición 1.1.7. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno sobre \mathbb{C} que es completo** para la norma inducida del producto interno.

**Un espacio métrico V es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente

Definición 1.1.8. Suponga que $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$. El soporte de f , denotado $\text{sop}(f)$, es el conjunto

$$\text{sop}(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}$$

Definición 1.1.9. Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Se dice que f tiene soporte compacto si $\text{sop}(f)$ está contenido en un intervalo cerrado de longitud finita. En este caso decimos que el soporte compacto de f es el intervalo cerrado más pequeño $[a, b]$ tal que $\text{sop}(f) \subseteq [a, b]$. Este intervalo es denotado por $\overline{\text{sop}(f)}$.

Definición 1.1.10. El espacio $l_2(\mathbb{Z})$ es el conjunto de todas las sucesiones $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}^+}$, $x_j \in \mathbb{C}$, con $\sum_{j \in \mathbb{Z}^+} |x_j|^2 < \infty$

1.2. Señales

Podemos definir una señal como una cantidad física que varía de acuerdo al tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes.

Si la información que transmitimos es biológica (ECG, EEG, EMG) o de cualquier otra procedencia (económica, meteorológica...), las señales con una variación continua podrán ser convertidas en series de números -se dirá que se digitalizan- y las series de números podrán ser tratadas para extraer la información que contienen. La forma más utilizada universalmente sin importar la procedencia de la señal es el análisis de Fourier.

Matemáticamente, describimos una señal como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, las funciones

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 3t \\ s_2(t) &= 4t^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

describen dos señales, que varían lineal y cuadráticamente, respectivamente, con la variable independiente t . Otro ejemplo es la función,

$$s(x, y) = 3x + 4xy + 6y^2 \tag{1.2}$$

Esta función describe una señal con dos variables independientes x e y que pueden representar las coordenadas espaciales de un plano. Las señales descritas en (1.1) y (1.2) son señales perfectamente definidas ya que se especifica

la dependencia funcional con la variable independiente. Sin embargo, existen casos en los que dicha relación funcional es desconocida o demasiado complicada como para tener utilidad práctica.

Por ejemplo, una señal de voz no se puede describir funcionalmente mediante expresiones como la (1.1). En general, un segmento de voz puede representarse con un alto grado de exactitud como la suma de varias sinusoides de diferentes amplitudes y frecuencias, esto es, como

$$\sum_{i=1}^N A_i(t) \operatorname{sen}[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)] \quad (1.3)$$

donde $\{A_i(t)\}$, $\{F_i(t)\}$ y $\{\theta_i(t)\}$ son los conjuntos de amplitudes, frecuencias y fases, respectivamente, de las sinusoides.

Como se mencionó anteriormente el análisis de Fourier es una de las herramientas más utilizadas en el análisis de señales. La representación de dichas señales mediante este análisis implica básicamente la descomposición de las mismas en términos de componentes sinusoidales (o exponenciales complejas). Con esta descomposición, se dice que una señal está representada en el *dominio de la frecuencia*.

Para la clase de señales que son periódicas, esta descomposición se denomina *serie de Fourier* y para la clase de señales de energía finita^{***}, la descomposición se denomina *Transformada de Fourier*.

1.3. Series de Fourier

Dada una función $f(t)$, T periódica, se busca una serie trigonométrica que la represente. Dicha serie tiene la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t) \quad (1.4)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

^{***} La energía E de una señal $x(t)$ se define como $E \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, $x(t)$ es de energía finita si $0 < E < \infty$, es decir, si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$

Las fórmulas para calcular a_k y b_k están dadas por

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt \quad (1.5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} k\omega_0 t dt \quad (1.6)$$

Si se considera la dupla (a_k, b_k) se puede definir $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ y un ángulo φ_k de tal forma que

$$\cos \varphi_k = \frac{a_k}{A_k}, \quad \operatorname{sen} \varphi_k = -\frac{b_k}{A_k}$$

asi, se obtiene

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t = A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

El coeficiente A_k es la amplitud y φ_k es la fase del k -ésimo término. Por lo tanto, la serie (1.4) también puede ser escrita como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (1.7)$$

Forma compleja de la serie trigonométrica

La función real con valores complejos $e^{i\omega_0 t}$ se define como

$$e^{i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \operatorname{sen} \omega_0 t$$

para el caso $-t$ se tiene

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Sumando y restando, obtenemos

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}, \quad \operatorname{sen} \omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \quad (1.8)$$

Luego, expandiendo la serie (1.4) y reemplazando (1.8) se tiene también, la siguiente representación para la función $f(t)$,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (1.9)$$

con

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (1.10)$$

donde c_k son los coeficientes de Fourier y $T = 2\pi/\omega_0$ con ω_0 conocida como frecuencia fundamental.

A la anterior representación dada por (1.9) de $f(t)$, se le conoce como serie de Fourier.

La serie de Fourier nos dice que cualquier función periódica se puede descomponer como una suma infinita de funciones periódicas (senos y cosenos). Esto permite un análisis de las frecuencias presentes en la función f .

Los coeficientes c_k en (1.10) miden la amplitud de la componente de frecuencia $k\omega_0$ de la función f . En particular, si $c_k = 0$, esta frecuencia no está presente en la función.

A las ecuaciones (1.9) y (1.10) se les llama ecuaciones de síntesis y análisis, respectivamente.

1.4. Transformada de Fourier

Para el caso de funciones definidas en un intervalo, o funciones periódicas definidas en la recta, éstas pueden ser representadas usando las series de Fourier. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas, se usa la transformada de Fourier.

Con base en (1.9) y (1.10) podemos expresar $f(t)$ como

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(u) e^{-ik\omega_0 u} du \right] e^{ik\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(u) e^{-ik\omega_0 u} du \right] e^{ik\omega_0 t} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Considerando $\omega = k\omega_0$ y extendiendo T a infinito de tal forma que ω_0 tome el enfoque de $d\omega$. La suma en (1.11) se convierte en una integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (1.12)$$

La integral interior es representada por una función $\widehat{f}(\omega)$

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du \quad (1.13)$$

y así (1.12) se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.14)$$

Por lo tanto, la Transformada de Fourier de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ de variable real t está definida por la integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.15)$$

Igual que las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición o análisis de f en componentes; ahora en lugar de presentar sólo frecuencias discretas formando una sucesión, aparece un rango continuo de frecuencias (todo \mathbb{R}). A cada frecuencia ω le corresponde un coeficiente $f(\omega)$, que será, en general, un número complejo; su módulo es la amplitud y su argumento es la fase. La reconstrucción de f a partir de \widehat{f} usando (1.14) se conoce como síntesis.

A continuación se mencionan algunas de las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier.

1. Si $f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ para algunas constantes α y β , la transformada de Fourier de f está dada por

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \alpha \widehat{f}_1(\omega) + \beta \widehat{f}_2(\omega) \end{aligned}$$

2. Dada $f(t)$, si $f_0(t) := f(t - t_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f}_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+t_0)} du \\ &= e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega) \\ &= \left| \widehat{f}(\omega) \right| e^{i\phi(\omega) - i\omega t_0} \end{aligned}$$

donde $\phi(\omega)$ es la fase de la función original $f(t)$.

3. Sea $a \neq 0$, la transformada de Fourier de $f_a(t) := f(at)$ está dada por

$$\begin{aligned}\widehat{f}_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u/a)} d\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Si $a > 1$ el espectro es expandido y si $a < 1$ éste es contraído. Esta es una propiedad que ocurre frecuentemente en el análisis wavelet.

4. El teorema de Parseval establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (1.16)$$

Dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, están relacionadas con sus transformadas de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ y $\widehat{g}(\omega)$ por:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega) \rangle \quad (1.17)$$

1.5. Transformada de Fourier enventanada

Con el objetivo de obtener mejores propiedades de localización en el dominio tiempo-frecuencia, introduciremos la transformada de Fourier enventanada y, en el capítulo siguiente daremos a conocer la transformada wavelets.

En la sección anterior vimos que la transformada de Fourier de una función $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ de variable real t está dada por la ecuación (1.15). En la Transformada de Fourier enventanada se obtiene una localización de la función modulación $e^{-i\omega t}$ usando una función auxiliar $g(u)$ en la transformada de Fourier en una determinada vecindad del dominio del tiempo:

$$g_{\omega,t}(u) = g(u-t)e^{-i\omega t}. \quad (1.18)$$

Por lo tanto, la definición de nuestra transformada está dada por

$$\widetilde{f}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u-t)f(u)e^{-i\omega t} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_{t,\omega}(u) f(u) du = \langle g_{t,\omega}, f \rangle. \quad (1.19)$$

La transformada $f \mapsto \tilde{f}(t, \omega)$ es llamada la transformada de Fourier enventanada o la transformada de Fourier de tiempo corto.

Se puede demostrar que conociendo $\tilde{f}(\omega, t)$, se puede obtener la función $f(u)$ mediante

$$f(u) = \frac{1}{\|g\|^2} \int \int_{\omega, t} g(u-t) e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega, t) d\omega \quad (1.20)$$

esto es, la transformada de Fourier enventanada de una función f , es invertible.

Capítulo 2

Transformada wavelets

2.1. Wavelet Haar y Análisis multiresolución

2.1.1. Las wavelet de Haar

Antes de presentar la definición de Análisis Multiresolución mencionaremos un sistema, que aunque como veremos, no es el más apropiado para aproximar señales, sirve como base para desarrollos posteriores.

En lo que sigue, consideremos dos funciones, una es la función escala ϕ y la otra la función wavelet ψ , importantes en el análisis wavelet.

Definición 2.1.1. *La función escala Haar está definida como*

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{e.o.p} \end{cases}$$

Con base en la función escala ϕ definimos los espacios vectoriales siguientes

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ f_0(t) = \sum_k c_k \phi(t - k) \right\}, \\ V_1 &= \left\{ f_1(t) = \sum_k c_k \phi(2t - k) \right\}, \\ &\vdots \\ V_j &= \left\{ f_j(t) = \sum_k c_k \phi(2^j t - k) \right\} = \text{gen} \left\{ \phi(2^j t - k) \right\} \end{aligned}$$

donde $c_k, t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $\sum_k |c_k|^2 < \infty$.

De esta forma V_j es el espacio de funciones constantes a trozos de soporte finito cuyas discontinuidades están contenidas en el conjunto

$$\{\dots, -1/2^j, 0, 1/2^j, 2/2^j, 3/2^j, \dots\}$$

Es claro que

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$$

hecho que es muy importante en la definición de análisis multiresolución.

El espacio V_0 es generado por ϕ y sus traslaciones. Las funciones $\phi(t - k)$ tienen cada una, norma 1 en L^2 ; esto es,

$$\|\phi(t - k)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - k)^2 dt = \int_k^{k+1} 1 dt = 1$$

Además,

$$\langle \phi(t - j), \phi(t - k) \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - j)\phi(t - k) dt = 0, \quad j \neq k$$

De ésta forma se puede concluir que el conjunto $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_0 .

De manera más general se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *El conjunto de funciones $\{2^{j/2}\phi(2^j t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_j .*

Se pretende descomponer a V_j como una suma de V_{j-1} y su complemento. Para $j = 1$ encontremos el complemento ortogonal de V_0 en V_1 . Ya que V_0 es generado por ϕ y sus traslaciones, es razonable esperar que el complemento ortogonal* de V_0 este generado por las traslaciones de alguna función que llamaremos la wavelets de Haar. Dos hechos claves son necesarios para la construcción de ψ :

1. $\psi \in V_1$ y así ψ puede ser expresado como $\psi(t) = \sum_l a_l \phi(2t - l)$ para algún $a_l \in \mathbb{R}$ (y sólo un número finito de números de a_l son distintos de cero).
2. ψ es ortogonal a V_0 . Esto es equivalente a $\int \psi(t)\phi(t - k)dt = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

*El complemento ortogonal de un subespacio W de un espacio vectorial V es el conjunto W^\perp de todos los vectores de V que son ortogonales a cada vector en W .

Basados en esto, podemos escribir la función ψ como:

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2(t - 1/2)) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$$

Así, se satisface el primer requerimiento. Además,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(2t) - \phi(t)\phi(2t - 1)dt \\ &= \int_0^{1/2} 1dt - \int_{1/2}^1 1dt \\ &= 1/2 - 1/2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, ψ es ortogonal a ϕ . Si $k \neq 0$, entonces el soporte de $\psi(t)$ y el soporte de $\phi(t - k)$ no se traslapan y $\int \psi(t)\phi(t - k)dt = 0$. Por lo tanto, $\psi \in V_1$ es ortogonal a V_0 ; ψ se llama la wavelet Haar.

Definición 2.1.2. *La Wavelets Haar es la función*

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$$

La gráfica de la wavelet Haar se muestra en la figura 2.1

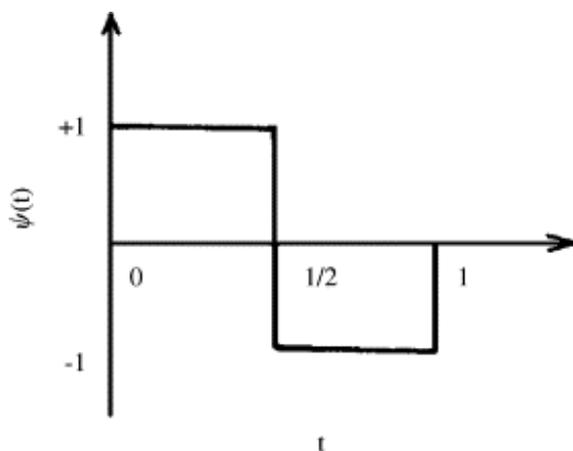


Figura 2.1. Wavelet Haar

Sea W_0 el espacio de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(t - k), \quad a_k \in \mathbb{R}$$

donde, asumimos que sólo un número finito de los a_k son distintos de cero. Lo que acabamos de mostrar es que W_0 es el complemento ortogonal de V_0 en V_1 o, en otras palabras, $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Teorema 2.1.2. Sea W_j el espacio de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j t - k), \quad a_k \in \mathbb{R}$$

donde asumimos que sólo un número finito de las a_k no son cero. W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} y

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Por descomposición sucesiva de V_j, V_{j-1}, \dots , obtenemos

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\ &\dots \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, cada f en V_j puede ser descompuesta únicamente como una suma

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$$

donde cada $w_l \in W_l, 0 \leq l \leq j-1$ y $f_0 \in V_0$.

2.1.2. Análisis multiresolución

El sistema de Haar no es muy apropiado para aproximar funciones suaves. De hecho, cualquier aproximación de Haar es una función discontinua. Se puede probar que si f es una función muy suave, los coeficientes de Haar decrecerán muy lentamente. Por lo tanto, se pretende construir wavelets que tengan mejores propiedades de aproximación, y una forma de hacerlo es a través del análisis multiresolución (AMR).

Definición 2.1.3. Sea $V_j, j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ una sucesión de subespacios de funciones en $L^2(\mathbb{R})$. La colección de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$ es llamado un análisis multiresolución con función de escala ϕ si se tienen las siguientes condiciones:

1. $V_j \subset V_{j+1}$

$$2. \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

$$3. \bigcap V_j = \{0\}$$

4. La función $f(t) \in V_j$ si y sólo si la función $f(2^{-j}t) \in V_0$

5. La función $\phi \in V_0$ y el conjunto $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal (usando el producto interno de L^2) para V_0 .

En el espacio V_{j+1} las funciones (señales) se describen con más detalle que en el espacio V_j , la resolución es mejor en el espacio “más grande”. Esto es, las funciones en V_{j+1} que no están en V_j realzan la resolución. Es usual reunir estos “sintonizadores finos” en un nuevo subespacio $W_j = V_{j+1} \setminus V_j$.

El siguiente teorema es útil en futuros resultados.

Teorema 2.1.3. *Sea $\{V_j; j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$ un análisis multiresolución con función de escala ϕ . Entonces para cada $j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, el conjunto de funciones*

$$\{\phi_{jk}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal para V_j .

Demostración. Para probar que $\{\phi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ genera a V_j , se debe ver que toda $f(t) \in V_j$ se puede escribir como combinación lineal de funciones de $\{\phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. La propiedad 4 de la definición de AMR, implica que la función $f(2^{-j}t)$ pertenece a V_0 y por tanto $f(2^{-j}t)$ es combinación lineal de $\{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Haciendo la transformación $t \mapsto 2^j t$, se tiene que $f(t)$ es combinación lineal de $\{\phi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Resta probar que $\{\phi_{jk}(t), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal. Para ello se debe ver que

$$\langle \phi_{jk}, \phi_{jm} \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}$$

o

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k) \overline{\phi(2^j t - m)} dt = \delta_{km}.$$

Para establecer esta igualdad, basta hacer el cambio de variable $z = 2^j t$, para obtener

$$2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k) \overline{\phi(2^j t - m)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z - k) \overline{\phi(z - m)} dz = \delta_{km},$$

en virtud de la propiedad 5 de la definición de AMR. □

2.2. Ecuación de escala

Puesto que el conjunto $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituye una base ortonormal de V_0 entonces cada $f \in V_0$ se puede expresar como

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(t - n).$$

Ahora, como $\phi \in V_0$, y $V_0 \subset V_1$, se tiene entonces $\phi \in V_1$. Pero la propiedad de dilatación implica que $\phi(2^{-1}t) \in V_0$. En consecuencia, se puede expandir

$$\phi(2^{-1}t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(t - n), \quad t \in \mathbb{R},$$

para algunos coeficientes g_n , $n \in \mathbb{Z}$. O de manera equivalente,

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

en donde las constantes de estructura (los g_n) satisfacen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 < \infty$. La relación (2.1) se llama ecuación de escala. Los coeficientes g_n constituyen un filtro $\mathbf{g} = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ asociado a la función de escala, es decir, una representación de la resolución.

A continuación se dan algunas propiedades de los coeficientes.

Propocisión 2.2.1. *Los coeficientes de la ecuación de escala satisfacen las siguientes propiedades:*

$$g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(2t - n)} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_{2n+k} = 2\delta_{0n}. \quad (2.3)$$

Donde δ_{ij} es la función Delta de Kronecker**

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_n|^2 = 2 \quad (2.4)$$

** $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Si también $\phi \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \phi \neq 0$ y la ecuación (2.1) converge en $L_1(\mathbb{R})$, entonces

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2. \quad (2.5)$$

Demostración. Puesto que $g_n/\sqrt{2}$ son los coeficientes de Fourier de $\phi \in V_1$ con respecto a la base ortonormal $\sqrt{2}\phi(2t - n)$, se tiene

$$\frac{g_n}{\sqrt{2}} = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \sqrt{2} \overline{\phi(2t - n)} dt,$$

o lo que es lo mismo,

$$g_n = 2 \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(2t - n)} dt.$$

De la propiedad 5 de la definición de AMR se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t - n) \overline{\phi(t)} dt = \delta_{0n}.$$

Al sustituir (2.1) y aplicar la identidad de Parseval y la ortogonalidad se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{0n} &= \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} g_k \bar{g}_m \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - 2n - k) \overline{\phi(2t - m)} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{2n+k=m} g_k \bar{g}_m, \end{aligned}$$

lo cual es lo mismo que (2.3). En particular, si se toma $n = 0$ en la última expresión, se obtiene

$$\sum_{k=m} g_k \bar{g}_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 2.$$

Si, además, se tiene $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \neq 0$, entonces al integrar (2.1) término a término se llega

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - n) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt, \end{aligned}$$

al dividir por $\int_{\mathbb{R}} \phi$ se obtiene $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n = 2$. □

2.3. Construcción de la función escala

En esta sección construiremos la función escala $\phi(t) = \sum_n g_n \phi(2t - n)$ a partir de la Transformada de Fourier (TF).

De esta manera al aplicar la TF a dicha ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) g_k e^{-ik\xi/2} \\ &= \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) P(e^{-i\xi/2})\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde el polinomio P es dado por

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k$$

Al iterar (2.6) se tiene

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= P(e^{-i\xi/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) &= P(e^{-i\xi/2^2}) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right)\end{aligned}$$

$$\hat{\phi}(\xi) = P(e^{-i\xi/2}) P(e^{-i\xi/2^2}) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right).$$

Continuando de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= P(e^{-i\xi/2}) \cdot \dots \cdot P(e^{-i\xi/2^n}) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^n P(e^{-i\xi/2^j}) \right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Para una función de escala dada ϕ , la última ecuación se tiene para cada n . En el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, ésta ecuación se transforma en

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\xi/2^j}) \right) \hat{\phi}(0).$$

Si ϕ satisface la condición de normalización $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$, entonces $\hat{\phi}(0) = 1$ y así,

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\xi/2^j}).\tag{2.7}$$

Por tanto, si el producto $\prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\xi/2^j})$ converge, entonces la función de escala queda determinada salvo un factor no nulo $\hat{\phi}(0)$, que es su media. En consecuencia, la única función de escala asociada al filtro \mathbf{g} está dada por (2.7). Es decir, si la función P asociada al filtro \mathbf{g} cumple cierta propiedad de convergencia, entonces se tiene $\hat{\phi}$ y, antitransformando, se obtiene ϕ . En resumen, se tiene el siguiente resultado

Propocisión 2.3.1. *Sea \mathbf{g} un filtro y P el polinomio dado por*

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k.$$

Si la función Φ definida por

$$\Phi(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n P(e^{-i\xi/2^j})$$

está en $L_2(\mathbb{R})$ y verifica $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \Phi(\xi) = 0$. Entonces existe una función de escala ϕ asociada al filtro \mathbf{g} y determinada por $\hat{\phi} = \Phi$ con $\int \phi = 1$.

La siguiente proposición permite dar condiciones sobre la ortonormalidad de la base $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en términos de los coeficientes g_k .

Propocisión 2.3.2. *El sistema $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal si y sólo si la transformada de Fourier de ϕ satisface*

$$2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Demostración. Como $\phi(t - k)$ forma una base ortonormal en V_0 , entonces al

aplicar el teorema de Plancherel se tiene

$$\begin{aligned}
\delta_{0m} &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(t-m)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\phi}(\xi)} e^{-im\xi} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{im\xi} d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{im\xi} d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} e^{im\xi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Sea $F(\xi) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\xi} F(\xi) d\xi = \delta_{0m}. \quad (2.8)$$

La función F es 2π -periódica ya que

$$\begin{aligned}
F(\xi + 2\pi) &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi(k+1))|^2 \\
&= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi j)|^2 = F(\xi).
\end{aligned}$$

Como F es periódica, su serie de Fourier, es $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{imt}$, donde los coeficientes de Fourier son dados por $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi) e^{-im\xi} d\xi$. Por tanto, la condición de ortonormalidad (2.8), es equivalente a $c_{-m} = \delta_{m0}$, lo cual, a su vez, es equivalente a $F(\xi) = 1$. \square

Como consecuencia de este resultado se tiene la siguiente condición necesaria sobre el polinomio $P(z)$ para la existencia de un AMR.

Corolario 2.3.1. *El polinomio $P(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k$ satisface*

$$|P(e^{-it})|^2 + |P(e^{-i(t+\pi)})|^2 = 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.9)$$

Demostración. De los resultados anteriores se tiene

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(\xi) = P(e^{-i\xi/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \text{ par}} + \sum_{k \text{ impar}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + (2n)2\pi)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + (2n+1)2\pi)|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(|P(e^{-i(\frac{\xi}{2} + 2n\pi)})|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + 2n\pi\right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + |P(e^{-i(\frac{\xi}{2} + (2n+1)\pi)})|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + (2n+1)\pi\right) \right|^2 \right) \\
&= |P(e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + 2n\pi\right) \right|^2 \\
&\quad + |P(-e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + 2n\pi\right) \right|^2 \\
&= |P(e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi} + |P(-e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2 \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$1 = |P(e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2 + |P(-e^{-i\frac{\xi}{2}})|^2.$$

□

2.4. Procedimiento iterativo para la construcción de la función escala y determinar los coeficientes g_n

Se tiene que si ϕ existe, su polinomio escala P debe satisfacer la ecuación $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$ para $|z| = 1$. Por lo tanto, una estrategia para la construcción de una función escala ϕ es construir un polinomio P que satisfaga esta ecuación y entonces construir una función ϕ tal que satisfaga la ecuación de escala $\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$.

Supongamos que P ha sido construida de tal forma que satisfaga el corolario 2.3.1 y que $P(1) = 1$. Un ejemplo de tal P será dado en la siguiente sección. La estrategia para la construcción de la función escala ϕ asociada con P está dada por el siguiente proceso iterativo. Sea la función de escala Haar

denotada por

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La función escala ya satisface la propiedad de ortogonalidad. Entonces se define

$$\phi_0(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi_0(2t - k) \quad (2.10)$$

En general, definimos ϕ_n , en términos de ϕ_{n-1} por

$$\phi_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi_{n-1}(2t - k) \quad (2.11)$$

En el próximo teorema, mostramos que ϕ_n converge, cuando $n \rightarrow \infty$, a una función denotada por ϕ . Tomando el límite en la ecuación precedente cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2t - k)$$

y por lo tanto satisface la condición de escala. Donde ϕ_0 satisface la condición de ortonormalidad, se espera que ϕ_1 y ϕ_2, ϕ_3, \dots y eventualmente ϕ también satisfagan la condición de ortonormalidad. Este procedimiento se vuelve a trabajar, bajo ciertas suposiciones adicionales sobre P .

Teorema 2.4.1. *Suponga que $P(z) = (1/2) \sum_k p_k z^k$ es un polinomio que satisface las siguientes condiciones:*

$$*P(1) = 1$$

$$*|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \text{ para } |z| = 1$$

$$*|P(e^{it})| > 0 \text{ para } |t| \leq \pi/2$$

Sea $\phi_0(t)$ la función escala Haar y sea $\phi_n(t) = \sum_k p_k \phi_{n-1}(2t - k)$ para $n \geq 1$. Entonces la sucesión ϕ_n converge punto a punto en L^2 a la función ϕ , que satisface la condición de ortonormalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - n) \phi(t - m) dx = \delta_{nm}$$

y que satisface la ecuación de escala, $\phi(t) = \sum_k p_k \phi(2t - k)$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [3]

2.5. Descomposición y reconstrucción

En esta sección se describirán algoritmos de descomposición y reconstrucción asociados a un AMR. Estos algoritmos se utilizarán junto con el análisis multirresolución en la descomposición y reconstrucción de señales en donde tanto la función de escala como la wavelet son funciones continuas.

2.5.1. Algoritmo de descomposición

Sean $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ los coeficientes de la función de escala ϕ y de la wavelet ψ , respectivamente, para $j, k \in \mathbb{Z}$, definidos por

$$c_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi_{jk}(t) dt \quad (2.12)$$

$$d_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{jk}(t) dt, \quad (2.13)$$

donde

$$\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad \psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k).$$

φ y ψ son, respectivamente, la función de escala y la wavelet madre.

Ahora bien, como $\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$, entonces existe h_m tal que

$$\begin{aligned} \phi_{jk}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{j/2} \phi_{1m}(2^j t - k) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m 2^{(j+1)/2} \phi(2^{j+1} t - 2k - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \phi_{j+1, m+2k}(t) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \phi_{j+1, m}(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Reemplazando este valor en (2.12), se obtiene

$$\begin{aligned}
c_{j,k} &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \phi_{j+1,m}(t) dt \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi_{j+1,m}(t) dt \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} c_{j+1,m},
\end{aligned}$$

por tanto,

$$c_{j,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} c_{j+1,m}. \quad (2.15)$$

Como $V_0 \subset V_1$, para cada $\phi \in V_0$ también se satisface $\phi \in V_1$. Además, $\{\phi_{1k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para V_1 , entonces existe una sucesión $(h_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}(t), \quad (2.16)$$

por tanto, los elementos de la sucesión se puede escribir como

$$h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle \quad \text{y} \quad (h_k) \in \ell_2.$$

La ecuación (2.16) relaciona funciones con diferentes factores de escala, también se conoce como ecuación de dilatación. Para la base de Haar se tiene

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Si φ es la función de escala de un AMR, entonces la wavelet madre ψ se relaciona con ϕ por medio de la ecuación

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \phi_{1k}(t). \quad (2.17)$$

Al sustituir (2.17) en (2.13) se obtiene

$$d_{j,k} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p h_{1-p+2k} c_{j+1,p}. \quad (2.18)$$

Si los coeficientes de escala en cualquier nivel j son dados, entonces todos los coeficientes de la función escala de nivel inferior para $J < j$, se pueden

calcular recursivamente usando la ecuación (2.15), mientras que todos los coeficientes wavelet de nivel inferior ($J < j$) se calculan aplicando (2.18).

Si $c_{j,\cdot}$ y $d_{j,\cdot}$ representan los coeficientes de la función de escala y wavelet en el nivel j , respectivamente, la Figura 2.2 representa el algoritmo de descomposición en forma esquemática. Por ejemplo, la flecha que relaciona los coeficientes c_{j-1} y c_{j-2} , indica que c_{j-2} se calcula sólo usando c_{j-1} .

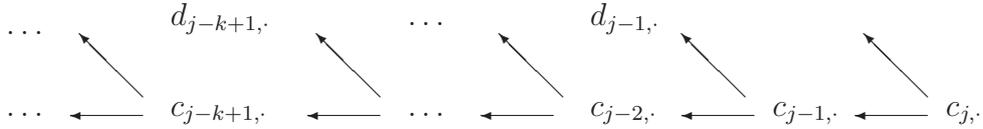


Figura 2.2. Algoritmo de descomposición

Observe que las fórmulas (2.15) y (2.18) comparten un hecho interesante, esto es, en cada ecuación, si el índice de dilatación k se incrementa en uno, todos los índices de (h_m) se desplazan en dos unidades; lo cual significa que si existe solamente un número finito de términos no nulos en la sucesión (h_m) , entonces aplicando el algoritmo de descomposición a un conjunto de coeficientes de escala no nulos en el nivel $j + 1$, se obtendrá sólo la mitad de coeficientes no nulos en el nivel j . Este proceso en teoría de señales se conoce como *downsampling*. Un resultado análogo se tiene para los coeficientes wavelet.

Para expresar lo anterior en la terminología de filtros, recuerde que la convolución de dos sucesiones en $\ell_2(\mathbb{Z})$

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \quad \text{y} \quad y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$$

se define por

$$(x * y)_m := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{m-k}.$$

En consecuencia, (2.15) se puede expresar como

$$c_{j-1,k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2k-m} c_{j,m} = (\tilde{h} * c_j)_{2k}, \quad (2.19)$$

note que se reemplazó j por $j - 1$ y para simplificar se utilizó la notación $\tilde{y}_m = y_{-m}$. Si se define el operador downsampling para la sucesión x como

$$((\downarrow 2)x)_k := x_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

entonces (2.19) se puede escribir

$$c_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{h} * c_j). \quad (2.20)$$

De un procedimiento similar se obtiene, con $g_m = (-1)^m h_{1-m}$,

$$d_{j-1,\cdot} = (\downarrow 2)(\tilde{g} * c_j). \quad (2.21)$$

2.5.2. Algoritmo de reconstrucción

Recuerde que dado un AMR, el conjunto de funciones linealmente independientes ϕ_{jk} que generan a V_j son las funciones de escala, mientras que el conjunto de funciones linealmente independientes ψ_{jk} que generan a W_j son las wavelets. En otras palabras, $\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son generadas, respectivamente, por ϕ y ψ , esto es,

$$\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad \text{y} \quad \psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

forman las bases ortonormales para V_j y W_j , respectivamente. Definiendo

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \langle \phi_{10}, \phi_{0k} \rangle, & a_{2k-1} &= \langle \phi_{11}, \phi_{0k} \rangle \\ b_{2k} &= \langle \phi_{10}, \psi_{0k} \rangle, & b_{2k-1} &= \langle \phi_{11}, \psi_{0k} \rangle, \end{aligned}$$

donde $a_k = h_{-k}$ y $b_k = (-1)^k h_{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m-k} c_{j-1,m} + b_{2m-k} d_{j-1,m} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} c_{j-1,m} + (-1)^k h_{2m-k+1} d_{j-1,m}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Observe que esta última expresión es casi la suma de dos convoluciones. La diferencia está en que el índice para la convolución es $k - m$ mientras acá aparece $k - 2m$. En otras palabras, (2.22) es una convolución pero sin los términos impares (falta $h_{k-(2m-1)}$). Para que (2.22) sea una convolución, se altera la sucesión original intercalando ceros entre sus componentes y obteniendo una nueva sucesión que contiene ceros en todas sus entradas impares. Este procedimiento se llama *upsampling*, denotado por $(\uparrow 2)$. Más explícitamente, si $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, entonces

$$((\uparrow 2)x)_k = (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$$

o de manera equivalente,

$$((\uparrow 2)x)_k = \begin{cases} x_{k/2}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia,

$$c_{j,k} = (((\uparrow 2)c_{j-1}) * h)_k + (((\uparrow 2)d_{j-1}) * g)_k. \quad (2.23)$$

La Figura 2.3 representa el algoritmo de reconstrucción en forma esquemática.

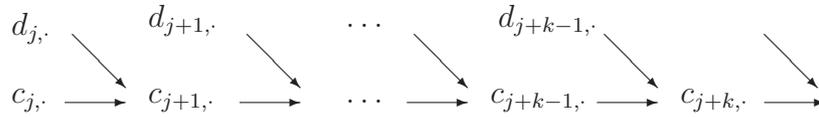


Figura 2.3. Algoritmo de reconstrucción

2.6. La transformada wavelet

La transformada de Fourier enventanada usa el ancho de la ventana, el cual se puede interpretar como una escala para analizar una señal dada. Por otro lado, si la señal tiene detalles importantes de frecuencia fuera de esta escala, se tendrían problemas en el análisis de esta.

Una forma de dar solución a este inconveniente es definir una transformada la cual sea independiente de la escala, es decir, no usa una escala fija, sino escalas variables en el tiempo.

Como la escala esta definida por el ancho de la función modulación, partimos de una función $\psi(t)$ como candidata a la función modulación, y obtenemos a partir de ésta, una familia de funciones por variación de la escala. Dado un $p \geq 0$ fijo, y para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, definimos

$$\psi_a(t) = |a|^{-p} \psi\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{|a|^p} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.24)$$

Si ψ tiene ancho T entonces ψ_a tendrá ancho aT . En términos de frecuencia para una escala pequeña a , ψ_a tiene altas frecuencias, y si a se incrementa la frecuencia ψ_a decrece.

Con el fin de localizar cada función ψ_a en el tiempo definimos para cada $b \in \mathbb{R}$ la función

$$\psi_{a,b}(t) = \psi_a(t - b) = |a|^{-p} \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) = \frac{1}{|a|^p} \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) \quad (2.25)$$

Tomando $p = 1/2$, se tiene que $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\|$.

Ahora podemos definir una transformada en $L^2(\mathbb{R})$ usando funciones de la familia $\psi_{a,b}$ como funciones de modulación. Más precisamente, tenemos

$$\tilde{f}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt \quad (2.26)$$

Si $p = 1/2$, entonces

$$\tilde{f}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) dt = \langle \psi_{a,b}, f \rangle \quad (2.27)$$

Esta transformada es conocida como Transformada Wavelet. Si se conoce \widehat{f} podríamos preguntarnos si es posible encontrar f . El siguiente teorema responde esta pregunta.

Teorema 2.6.1. *Si ψ satisface la condición*

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(t)|^2}{|t|} dt < \infty \quad (2.28)$$

Entonces

$$f(t) = \frac{1}{C} \frac{1}{|a|^3} \int \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_{a,b}(t) \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) da db \quad (2.29)$$

2.7. Transformada wavelet discreta

En la discretización de la wavelet hacemos una restricción de a y b en la transformada continua wavelet. Una de estas discretizaciones es $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$ para $j, k \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t - b}{a} \right)$$

y

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

La función ψ_{jk} es la versión, comprimida 2^j y trasladada en el entero k , de la función $\psi(t)$. La discretización en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala, las traslaciones se hacen sobre puntos más distantes determinando información global de la señal, mientras que a menor escala se obtiene información más detallada de la señal.

La discretización para la escala y la traslación están en términos de los índices j y k sobre los enteros; en la práctica, estos se limitarán para señales casuales ($t > 0$) y para escalas donde los primeros coeficientes de aproximación estarán definidos por el muestreo de la señal, la siguiente definición es una forma alterna para que una función $\psi(t)$ determine una wavelet.

Definición 2.7.1. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet, si la familia de funciones definidas por

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$.

De esta manera, para $s(t) \in L_2(\mathbb{R})$ se tiene

$$\langle s(t), \psi_{j,k} \rangle = 2^{j/2} \int_{-\alpha}^{\alpha} s(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt \quad \text{Trans. discreta wavelet} \quad (2.30)$$

$$s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \psi_{j,k} \quad \text{Repres. de } s(t) \quad (2.31)$$

donde los coeficientes se obtienen por la ortonormalidad de las funciones $\psi_{j,k}$

$$\langle s(t), \psi_{j,k} \rangle = a_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \rangle \quad (2.32)$$

$$= a_{j,k} \|\psi_{j,k}\|^2 \quad (2.33)$$

$$= a_{j,k} \quad (2.34)$$

Definición 2.7.2. Sea $s(t) \in L_2(\mathbb{R})$, la transformada discreta wavelet para $s(t)$, está dada por el conjunto bidimensional de coeficientes

$$a_{j,k} = \langle s(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = 2^{j/2} \int s(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$$

2.8. Wavelets Daubechies

Las wavelets Haar analizadas en la primera sección del presente capítulo tienen soporte compacto pero tienen un inconveniente, y es que son discon-

tinuas.

Ingrid Daubechies descubrió las wavelets que llevan su nombre. La más simple de éstas es justamente la wavelet Haar que es la única discontinua. Las demás wavelets tienen soporte compacto y son continuas. Mejor aún, aumentando el nivel son cada vez más suaves; es decir, pueden tener un número determinado de derivadas continuas. A continuación construiremos la wavelet Daubechies de orden 1 la cual es la misma wavelet Haar, ψ_2 .

En el Teorema 2.4.1 se dan las tres condiciones suficientes en un polinomio P que garantiza que el esquema de iteración descrito anteriormente y que produce una función de escala.

Para un polinomio $P(z)$, sea

$$p(\xi) = P(e^{-i\xi})$$

En términos de la función p , las tres condiciones en la hipótesis del Teorema 2.4.1 pueden ser escritas como

$$p(0) = 1 \tag{2.35}$$

$$|p(\xi)|^2 + |p(\xi + \pi)|^2 = 1 \tag{2.36}$$

$$|p(\xi)| > 0 \quad \text{para} \quad -\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2 \tag{2.37}$$

Se puede demostrar que el polinomio asociado con la función escala Haar es

$$p_0(\xi) = P(e^{-i\xi}) = \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} = e^{-i\xi/2} \cos(\xi/2)$$

ésta elección para p_0 satisface (2.35) a (2.37). Sin embargo, la función escala Haar es discontinua. Una forma de generar una función escala continua es aplicando convolución. En efecto, se puede demostrar que la convolución de la función escala Haar con si misma es igual a la siguiente spline lineal.

$$\phi_0 * \phi_0(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1| & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Ahora, como la transformada de Fourier de una convolución es igual al producto de transformadas de Fourier. En particular, la transformada de Fourier de $\phi * \phi * \dots * \phi$ (n veces) es $(2\pi)^{n/2}(\hat{\phi})^n$. En vista de la ecuación (2.7) para

la transformada de Fourier de la función escala, el primer intento puede ser $p(\xi) = p_0(\xi)^n = e^{-in\xi/2 \cos(\xi/2)^n}$ para alguna potencia adecuada n como la función que genera la función escala continua. Sin embargo, la propiedad (2.36) ya no se tiene (a menos que $n = 1$ caso Haar) por lo que este primer intento falla.

En lugar de simplemente elevar p_0 a una potencia n , elevamos ambos lados de la identidad $\cos^2(\xi/2) + \sin^2(\xi/2) = 1$ a la n . Con $n = 3$, obtenemos

$$1 = (\cos^2(\xi/2) + \sin^2(\xi/2))^3 \quad (2.38)$$

o

$$1 = \cos^6(\xi/2) + 3 \cos^4(\xi/2) \sin^2(\xi/2) + 3 \cos^2(\xi/2) \sin^4(\xi/2) + \sin^6(\xi/2)$$

Usando las identidades $\cos(u) = \sin(u + \pi/2)$ y $\sin(u) = -\cos(u + \pi/2)$ en los dos términos del lado derecho, tenemos

$$1 = \cos^6(\xi/2) + 3 \cos^4(\xi/2) \sin^2(\xi/2) + 3 \sin^2((\xi + \pi)/2) \cos^4((\xi + \pi)/2) + \cos^6((\xi + \pi)/2)$$

Si tomamos

$$|p(\xi)|^2 = \cos^6(\xi/2) + 3 \cos^4(\xi/2) \sin^2(\xi/2)$$

entonces la ecuación previa se convierte en

$$1 = |p(\xi)|^2 + |p(\xi + \pi)|^2$$

y la propiedad (2.36) es satisfecha. La propiedad (2.37) también se satisface ya que $\cos(\xi/2) \geq 1/\sqrt{2}$ para $|\xi| \leq \pi/2$. Note que $|p(0)| = 1$. Lo único que queda es la identificación de p (tenemos sólo $|p|$). Primero, reescribimos la ecuación que define $|p|$ como

$$\begin{aligned} |p(\xi)|^2 &= \cos^4(\xi/2)(\cos^2(\xi/2) + 3 \sin^2(\xi/2)) \\ &= \cos^4(\xi/2) \left| \cos(\xi/2) + \sqrt{3}i \sin(\xi/2) \right|^2 \end{aligned}$$

tomando raíz cuadrada, se tiene

$$p(\xi) = \cos^2(\xi/2)(\cos(\xi/2) + \sqrt{3}i \sin(\xi/2))\alpha(\xi)$$

donde $\alpha(\xi)$ es un valor complejo con $|\alpha(\xi)| = 1$ que será elegido después.

Para identificar el polinomio P [con $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$], usamos las identidades

$$\cos(\xi/2) = \frac{e^{i\xi/2} + e^{-i\xi/2}}{2} \quad \text{sen}(\xi/2) = \frac{e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}}{2i}$$

obtenemos

$$p(\xi) = \frac{1}{8}(e^{i\xi} + 2 + e^{-i\xi})(e^{i\xi/2} + e^{-i\xi/2} + \sqrt{3}e^{i\xi/2} - \sqrt{3}e^{-i\xi/2})\alpha(\xi).$$

Elegimos $\alpha(\xi) = e^{-3i\xi/2}$ con el fin de eliminar todas las potencias positivas y fracciones en el exponente. Expandiendo y agrupando términos, se obtiene

$$p(\xi) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8} + e^{-i\xi} \frac{3 + \sqrt{3}}{8} + e^{-2i\xi} \frac{3 - \sqrt{3}}{8} + e^{-3i\xi} \frac{1 - \sqrt{3}}{8} \right)$$

La ecuación $p(\xi) = P(e^{-i\xi})$ es por lo tanto satisfecha por el polinomio

$$P(z) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8} \right) + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{8} \right) z + \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{8} \right) z^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{8} \right) z^3$$

De esta forma p satisface (2.35) a (2.37), P satisface la hipótesis del Teorema 2.4.1.

Recordemos que $P(z) = (1/2) \sum_k p_k z^k$. Por lo tanto, para el ejemplo de Daubechies,

$$p_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \quad p_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \quad p_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \quad p_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \quad (2.39)$$

La función escala Daubechies, ϕ , se encuentra aplicando el proceso iterativo descrito en el Teorema 2.4.1. La figura 2.4 muestra una aproximación gráfica de ϕ que resulta de la iteración de este procedimiento varias veces.

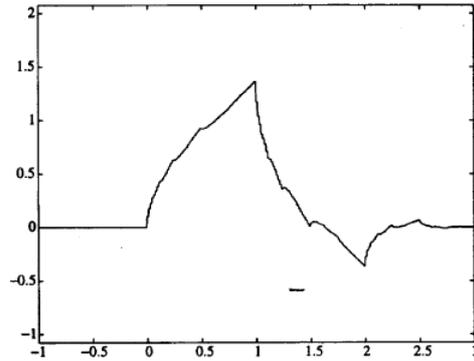


Figura 2.4. Función escala Daubechies

Una vez los coeficientes, p_k , se han identificado y la función escala ϕ ha sido construida, entonces la wavelet asociada está dada por la fórmula

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k} \phi(2x - k)$$

La figura 2.5 muestra una aproximación gráfica de la función wavelet asociada.

A diferencia de las funciones escala y wavelet Haar, las funciones escala y wavelet Daubechies son continuas. Sin embargo, éstas no son diferenciables.

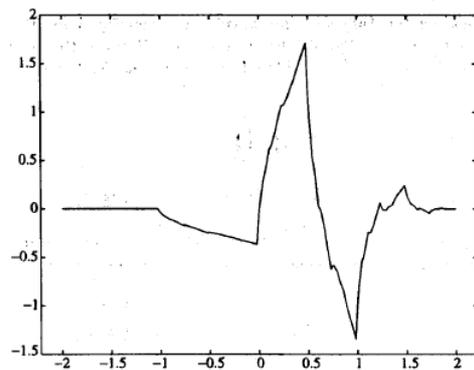


Figura 2.5. Función wavelet Daubechies

Capítulo 3

Redes neuronales

Las redes neuronales se encuentran en muchos campos de aplicación, los más conocidos son los relacionados con la clasificación, estimación funcional y optimización; en general, el de reconocimiento de patrones es muy común. Entre otras, algunas de las áreas de aplicación de los sistemas neuronales son: reconocimiento del habla, reconocimiento de caracteres, visión, robótica, control, procesamiento de señal, economía, defensa, bioingeniería, etc.

En este trabajo se usará la herramienta de matlab, neural pattern recognition tool (nprtool) para la clasificación de patrones, la cual permitirá clasificar, basados en unas características estadísticas que diferencian un artefacto de una punta, una señal de EEG dada.

Dentro de las ventajas que ofrece el trabajo con redes neuronales podemos destacar:

La capacidad que tienen de resolver una determinada tarea basándose en un entrenamiento o experiencia anterior, lo cual se conoce como aprendizaje adaptativo.

Una red neuronal puede crear su propia organización o representación de la información que recibe mediante una etapa de aprendizaje, esto lo llamamos la auto-organización.

A pesar de que la red pueda sufrir una destrucción parcial, algunas capacidades de la red se pueden retener, incluso sufriendo un gran daño, es decir, la red es tolerante a fallas.

Entre otras ventajas, también se cuenta con que se pueden operar en tiempo real y son de fácil inserción dentro de la tecnología que ya existe.

3.1. Elementos básicos en una red neuronal

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) son sistemas hardware o software, de procesamiento, que copian esquemáticamente la estructura neuronal del cerebro para tratar de reproducir sus cualidades. Por lo tanto, las RNA son capaces de aprender de la experiencia a partir de señales o datos provenientes del exterior [8].

Desde el punto de vista del grupo PDP (Parallel Distributed Processing Research Group, de la Universidad de California en San Diego) y como se menciona en [8], un sistema neuronal está compuesto por los siguientes elementos:

1. Un conjunto de procesadores elementales o neuronas artificiales.
2. Un patrón de conectividad o arquitectura.
3. Una dinámica de activaciones.
4. Una regla o dinámica de aprendizaje.
5. El entorno donde opera.

3.2. Modelo general de neurona artificial

Una neurona se puede considerar como una unidad de cálculo, que a partir de un vector de entrada procedente del exterior o de otras neuronas, proporciona una única respuesta o salida.

En la figura 3.1 siguiente se muestran los elementos que constituyen una neurona artificial i .

- Conjunto de entradas, $x_j(t)$.
- Pesos sinápticos, w_{ij} que representan la intensidad de interacción entre cada neurona presináptica j y la neurona postsináptica i .

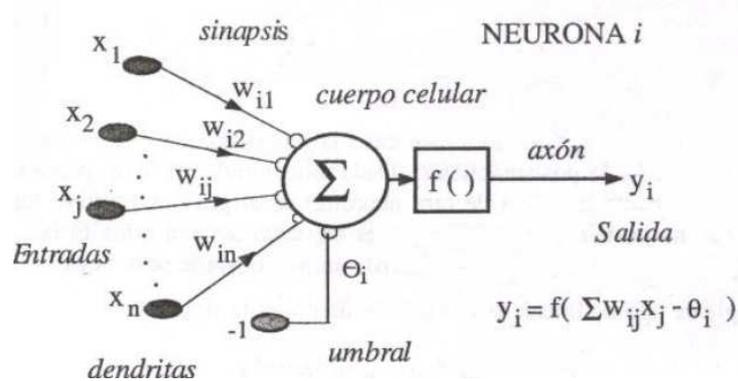


Figura 3.1. Neurona Artificial

- Regla de propagación $\sigma(w_{ij}, x_j(t))$, que proporciona el valor del potencial postsináptico $h_i(t) = \sigma(w_{ij}, x_j(t))$ de la neurona i en función de sus pesos y entradas.
- Función de activación $f_i(a_i(t - 1), h_i(t))$, que proporciona el estado de activación actual $a_i(t) = f_i(a_i(t - 1), h_i(t))$ de la neurona i , en función de su estado anterior $a_i(t - 1)$ y del potencial postsináptico actual.
- Función de salida $F_i(a_i(t))$, que proporciona la salida actual $y_i(t) = F_i(a_i(t))$ de la neurona i en función de su estado de activación.

Basados en lo anterior, la operación de la neurona i puede expresarse como

$$y_i(t) = F_i(f_i[a_i(t - 1), \sigma_i(w_{ij}, x_j(t))]) \quad (3.1)$$

Una descripción más profunda sobre los elementos expuestos anteriormente se puede encontrar en [8].

3.3. Topología o arquitectura de una red neurona artificial

Cuando se habla de la arquitectura de la red neuronal nos referimos a la forma de conexión de ésta. En una RNA los nodos se conectan por medio de sinapsis, y ésta estructura de conexión determinará el comportamiento de la red.

En la figura 3.2 se muestra un esquema básico que representa una red neuronal artificial. Como se puede observar las redes neuronales artificiales

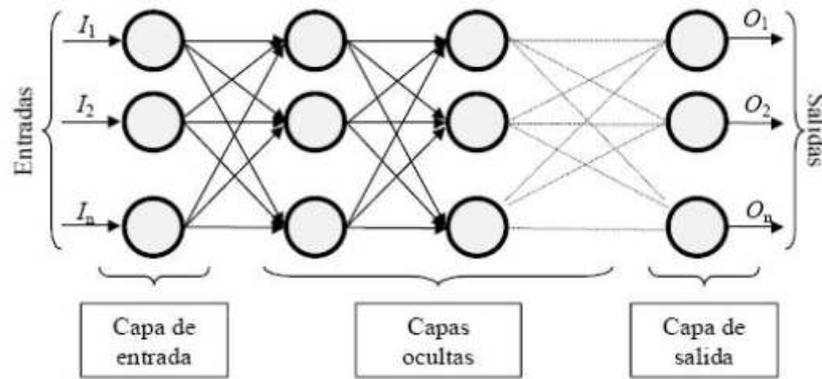


Figura 3.2. Red Neuronal Artificial

están constituidas por neuronas interconectadas y arregladas en una o varias capas, la capa de entrada, las capas ocultas y la capa de salida, los datos de entrada pasan a través de la capa oculta y salen por la capa de salida.

Las conexiones entre las neuronas pueden ser excitadoras, cuando un peso sináptico es positivo o inhibitorias cuando es negativo. Estas conexiones no se definen a priori, es por medio del aprendizaje que se obtiene un valor para el peso, que incluye signo y magnitud.

Desde el punto de vista de la estructura de la RNA se pueden establecer las redes monocapa compuestas por una única capa de neuronas y las redes multicapa (layered networks) donde las neuronas se organizan en varias capas.

Por otro lado, si se tiene en cuenta el flujo de los datos en la RNA podemos hablar de redes unidireccionales (feedforward) y redes recurrentes (feedback). En las primeras la información circula en un único sentido, de atrás hacia adelante. Mientras que en las redes recurrentes o realimentadas la información puede circular entre las capas en cualquier sentido. (Ver figura 3.3)

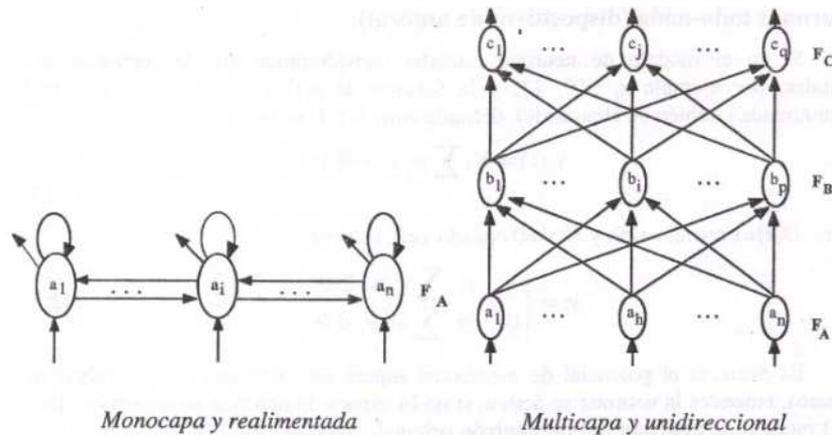


Figura 3.3. Red Feedback y Red Feedforward

3.4. Aprendizaje

Existen dos fases en toda aplicación de las redes neuronales: la fase de aprendizaje o entrenamiento y la fase de prueba.

La Fase de Aprendizaje es una característica de las redes neuronales que describe su capacidad de aprender. Aprenden por la actualización o cambio de los pesos sinápticos que caracterizan a las conexiones. Los pesos son adaptados de acuerdo a la información extraída de los patrones de entrenamiento nuevos que se van presentando. Normalmente, los pesos óptimos se obtienen optimizando (minimizando o maximizando) alguna "función de energía". Por ejemplo, un criterio popular en el entrenamiento supervisado es minimizar el least-square-error (error cuadrático medio) entre el valor deseado y el valor de salida de la red.

Una vez calculados los pesos de la red, se realiza la Fase de Prueba, donde las salidas de las neuronas de la última capa se comparan con la salida deseada para determinar la validez del diseño.

Dentro de los métodos de aprendizaje se pueden resaltar:

El Supervisado, los datos están consistituidos por varios patrones de entrada y de salida. El hecho de conocer la salida implica que el entrenamiento se beneficia de la supervisión de un maestro.

Para los modelos de entrenamiento No Supervisado, el conjunto de datos de entrenamiento consiste sólo en los patrones de entrada. Por lo tanto, la red es

entrenada sin el beneficio de un maestro. La red aprende a adaptarse basada en las experiencias recogidas de los patrones de entrenamiento anteriores.

| Supervisado | No Supervisado |
|---------------------------------------|--|
| Perceptrón/multicapa, mod. Temporales | Mapa de características, R. Competitivas |

3.5. El perceptrón multicapa

Dentro de la amplia gama de redes unidireccionales organizadas en capas (feed-forward) y con aprendizaje supervisado, las cuales son utilizadas con mucha frecuencia en la clasificación de patrones y estimadores de funciones, está el perceptron multicapa o MPL (Multi-Layer Perceptron). En ésta sección trataremos los aspectos básicos de este tipo de red neuronal puesto que es una RNA de este tipo la que nos permitirá clasificar las señales de EEG.

El perceptrón multicapa es un modelo unidireccional, compuesto por varias capas de neuronas, una capa de entrada, una capa de salida y varias capas intermedias o también llamadas capas ocultas. Esta arquitectura suele entrenarse mediante el algoritmo denominado retropropagación de errores o BP, en muchas ocasiones este tipo de arquitectura junto con el algoritmo de aprendizaje BP suele denominarse red de retropropagación.

En la figura 3.4 se muestra la estructura del MPL. En un perceptron de tres capas, llamemos x_i a las entradas de la red, y_j a las salidas de la capa oculta, z_k a las de la capa final y t_k como las salidas objetivo. Sean w_{ij} los pesos de

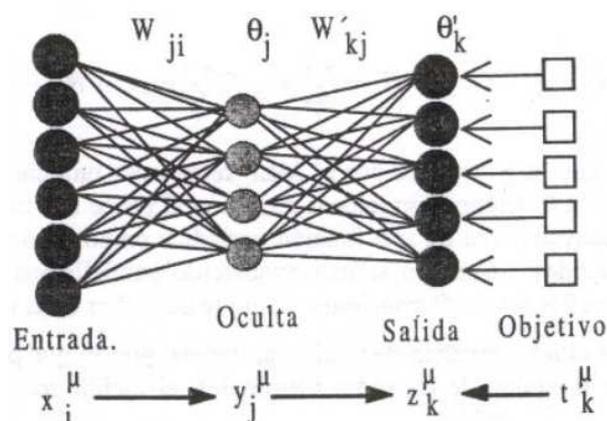


Figura 3.4. Perceptrón Multicapa

la capa oculta y θ_j sus umbrales, w'_{kj} los pesos de la capa de salida y θ'_k sus umbrales. Teniendo en cuenta esta notación, una expresión matemática del MPL sería:

$$z_k = \sum_j w'_{kj} y_j - \theta'_k = \sum_j w'_{kj} f \left(\sum_i w_{ji} x_i - \theta_j \right) - \theta'_k \quad (3.2)$$

donde $f(\cdot)$ es de tipo sigmoideo, como

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (3.3)$$

Como se mencionó arriba el algoritmo de aprendizaje aplicado a este tipo de red neuronal es el algoritmo denominado back-propagation (retropopagación) o BP, el cual se describira brevemente en la sección siguiente.

3.6. Aprendizaje por retropogación de errores (BP)

Considere un MPL de tres capas, como el de la figura 3.4, con las entradas, salidas, pesos y umbrales de las neuronas definidas en la sección anterior.

Dado un patrón de entrada x^μ , ($\mu = 1, 2, \dots, p$), entonces

$$z_k^\mu = \sum_j w'_{kj} y_j^\mu - \theta'_k = \sum_j w'_{kj} f \left(\sum_i w_{ji} x_i^\mu - \theta_j \right) - \theta'_k \quad (3.4)$$

El aprendizaje que suele usarse en este tipo de redes es el de retropopagación de errores (backpropagation). Como función de coste global, se usa el error cuadrático medio. Es decir, que dado un par (x_k^μ, t_k^μ) correspondiente a la entrada k de los datos de entrenamiento y salida deseada asociada se calcula el error cuadrático medio dado por

$$E(w_{ji}, \theta_j, w'_{kj}, \theta'_k) = \frac{1}{2} \sum_\mu \sum_k \left[t_k^\mu - f \left(\sum_j w'_{kj} y_j^\mu - \theta'_k \right) \right]^2 \quad (3.5)$$

Sobre esta función de coste global se aplica algún procedimiento de minimización. En el caso del MPL se hace mediante un descenso por el gradiente [8].

Capítulo 4

Detección y clasificación de puntas epilépticas

4.1. Electroencefalograma

Desde que Hans Berger realizase el primer electroencefalograma (EEG) en 1929, la evolución de esta técnica ha sido constante, y se considera hoy en día como un método de evaluación de la función cerebral en situaciones normales y patológicas. El registro de la actividad eléctrica cerebral es de gran ayuda en la evaluación y diagnóstico de patologías cerebrales, en el caso de pacientes con epilepsia la utilidad del EEG reside básicamente en tres puntos: permite apoyar el diagnóstico clínico, ayuda a clasificar la crisis epiléptica o la epilepsia y permite monitorear la evolución del cuadro.

El electroencefalograma es una exploración neurofisiológica que se basa en el registro de la actividad bioeléctrica cerebral en condiciones basales de reposo, en vigilia o sueño, y durante diversas activaciones. La duración total aproximada de un EEG es variable y puede estar entre 25 y 45 minutos. La señal de EEG es generada básicamente por la suma de actividad eléctrica de distintas poblaciones neuronales, las cuales pueden generar potenciales eléctricos y magnéticos que pueden ser registrados a nivel de la superficie de la corteza cerebral mediante electrodos en el cuero cabelludo.

Se colocan pequeños discos metálicos con cables delgados (electrodos) sobre el cuero cabelludo y después se envían señales a una computadora para registrar los resultados. La actividad eléctrica normal del cerebro forma un

patrón reconocible. Por medio de un EEG, los médicos pueden buscar patrones anormales que indiquen convulsiones u otros problemas.

4.2. Epilepsia

La epilepsia es la tendencia del cerebro a presentar descargas eléctricas en forma desordenada, interrumpiendo otras funciones cerebrales. Desarrollar un ataque no significa necesariamente que una persona tiene epilepsia. La epilepsia es la tendencia continua a presentar ataques recurrentes, debido a una lesión permanente o a inestabilidad intermitente de las vías eléctricas dentro del cerebro.

En algunas personas la epilepsia se desarrolla debido a un traumatismo cerebral. Los daños penetrantes tienen la mayor probabilidad de provocar epilepsia, pero también ésta puede resultar de un traumatismo cerrado. La evaluación de las convulsiones postraumáticas debe incluir una historia clínica, un examen físico, un electroencefalograma (EEG) y una tomografía computarizada (CT en sus siglas en inglés), o un estudio de resonancia magnética (MRI).

Requisitos técnicos del EEG en la epilepsia

Se recomienda realizar registros de 16 canales utilizando un mínimo de 21 electrodos, colocados de acuerdo al sistema* 10-20. Deben emplearse montajes referenciales y bipolares con disposición longitudinal y transversal. Ocasionalmente, sobre todo en epilepsia temporal, pueden necesitarse electrodos suplementarios que registren actividad originada en la región temporal anterior. Los parámetros de sensibilidad y filtros de alta y baja frecuencia se utilizan siguiendo criterios internacionales. La velocidad normal de registro debe ser 15-30 mm/s. La duración mínima del registro es de 30 minutos libres de artefactos. Los procedimientos de activación mínimos son la hiperventilación durante tres minutos, tras los que se requieren dos minutos de post-hiperventilación para la vuelta a una fase de reposo. La fotoestimulación consiste en pulsos de luz intermitente de diez segundos de duración a

*El sistema de 10/20 del sistema internacional es un método reconocido internacionalmente para describir la ubicación en el cuero cabelludo de electrodos para un examen de EEG.

distintas frecuencias (1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100) en los que el paciente abre y cierra los ojos cinco segundos en cada frecuencia. La duración total no debe exceder los seis minutos y se suspende ante respuestas fotoparoxísticas.

Crisis generalizadas

Las descargas anómalas que generan crisis generalizadas se originan en la porción central del encéfalo y se extienden simultáneamente a toda la superficie, en una interacción entre la corteza cerebral y el centro del encéfalo. La persona que se encuentra en esta situación rara vez sabe que va a producirse una crisis. Las descargas eléctricas generalizadas en el encéfalo siempre conducen a la pérdida de la conciencia. Dentro de esta clasificación se han identificado varios tipos de crisis generalizadas como las convulsiones generalizadas y las ausencia o "pequeño mal" (GTC = generalized tonic - clonic).

Crisis Parciales

En contraste con las crisis generalizadas, las crisis parciales son causadas por descargas eléctricas anormales en una área localizada del encéfalo. Los síntomas observados durante este tipo de crisis dependen del área encefálica en la que se produce la actividad eléctrica anormal, ya que se mantengan localizadas o se extiendan a todo el encéfalo; dentro de esta clasificación se encuentran las crisis parciales simples (SP = simple partial) y las crisis parciales complejas (CP = complex partial). Aunque la epilepsia no tiene cura en la actualidad, la enfermedad finalmente desaparece en algunas personas. Teniendo en cuenta que la epilepsia es una patología crónica del cerebro, sin embargo, el cerebro para funcionar depende de múltiples órganos y sistemas, además de muchos metabolitos, por lo cual el estudio de la epilepsia y del síndrome convulsivo debe ser hecho basándose en una historia clínica y familiar completa y un examen físico bien realizado preferiblemente por un neurólogo, epileptólogo o por un internista. Luego de realizar la historia y el examen físico se necesitan, de acuerdo con los hallazgos, una serie de exámenes que van a variar dependiendo de dichos hallazgos. Sin embargo

hay estudios que son útiles, entre los cuales podemos destacar el electroencefalograma, tomografía axial computarizada, resonancia magnética nuclear, estudios metabólicos, estudio de líquido cefalorraquídeo.

4.3. Eventos Epilépticos

Los eventos epilépticos o los signos de enfermedad en electroencefalografía pueden sintetizarse en tres (3) grafoelementos (Eventos):

- 1) Picos: Deflexiones de curso rápido
- 2) Ondas: Fenómenos de curso lento
- 3) Picos - Onda, Polipicos - Ondas ... :Asociaciones de dichos elementos

Picos

Son deflexiones de curso rápido, frecuencia alta (generalmente 25 deflexiones a 30 deflexiones por segundo) y de alto voltaje. Representan una descarga rápida, de carácter paroxístico, que corresponde a la activación brusca de un grupo importante de neuronas. El pico es el grafoelemento de la irritación cortical y por ello, la representación o expresión bioeléctrica por excelencia de la epilepsia. Los picos son por lo general mayores de 100 microvoltios (μV), alcanzando valores de $300\mu V$, $400\mu V$ y aún más en forma ocasional. Para ser considerada como **pico**, una deflexión rápida debe exceder por lo menos 50 por ciento del voltaje de ritmo de base. Esto permite distinguir los picos de las ondas normales de aspecto puntiagudo. En cuanto a su anchura, debe ser alrededor de 1 mm, que daría una frecuencia de 30 picos/s. En la práctica, la anchura de los picos oscila en forma muy amplia; no es raro que haya 12 picos/s en vez de 30 picos/s, que equivale a 1/12 s y en algunos casos se "lentifique" en forma marcada: 1/5 picos/s, que arroja una frecuencia de 5 picos/s, que es, justamente, la frecuencia de la banda theta.

El **pico** esta integrado por 3 componentes:

- 1) Una rama ascendente.
- 2) Una rama descendente.

3) Una tercera rama, nuevamente ascendente, que rebasa la línea media o isoeléctrica.

A veces, la primera rama de la punta se dirige hacia abajo, en forma descendente. En raras ocasiones no tiene fases negativa y positiva, resultando una onda monofásica.

Con el pico, como con otros grafoelementos, pueden presentarse múltiples variantes, en anchura, altura y aspecto morfológico. Las ramas, una y otra, se pueden empastar, acortar o superponer, de modo que no siempre observemos una representación esquemática. Con respecto a la secuencia, se puede decir que es posible encontrarlas aisladas o en salvas, más o menos numerosas; también esas salvas pueden mostrar picos rítmicos, con una secuencia uniforme, o ser arrítmicas e irregulares. Algunas veces, junto a la variación en la sucesión de picos, se observa diversidad en su voltaje. Es necesario recordar que existen picos sin significación patológica. Son los llamados **picos funcionales**, provocadas por estímulos auditivos o de centelleo, que aparecen sobre todo en el vértex y en la región occipital. Resumiendo se puede decir que son ondas de curso rápido, alto voltaje y frecuencia rápida, que representan el estado de irritación electrocortical; aunque se asume que su anchura es de 1 mm, es habitual hallar picos de anchura mayor. La morfología no es siempre homogénea; tampoco es nítida; unas veces la rama ascendente, otras la rama descendente, sufren alteraciones en su aspecto. Esto ha originado incluso que se den nombres especiales para algunos picos “enlentecidos”. La sucesión no es siempre regular. Tampoco es uniforme el voltaje; en una salva (grupo) de picos vemos distintos tamaños y también irregularidades en el ritmo. El pico representa en la electroencefalografía lo que el extrasístole y las taquicardias paroxísticas en electrocardiografía.

Ondas lentas

Corresponden a las frecuencias bajas, por lo que pertenecen a las bandas de frecuencia Theta y Delta. Aparecen en forma generalizada o circunscrita; estas últimas como expresión de lesión de una determinada región cerebral. Cuando no expresan estados de sueño o aparecen en pruebas de estimulación, debemos considerar su presencia como un signo de presunta anormalidad. Son

el grafoelemento de mayor valor en el diagnóstico de una tumoración cerebral. Suelen ser de alto voltaje. Raras veces se rompe la ecuación por la que, a mayor frecuencia, corresponde menor voltaje y viceversa. Por ello, ante una presunta onda lenta que no sea de alto voltaje, debemos examinar detenidamente el trazado, pues puede tratarse de un artefacto. En resumen se puede decir que si el pico es la expresión de la irritación cortical, la onda lenta es el grafoelemento de la depresión de la corteza. La onda lenta puede encontrarse normalmente en los niños, en el sueño fisiológico y como respuesta a las pruebas de estimulación, en especial a la hiperventilación, particularmente en los niños. En el adulto despierto, la onda lenta es siempre patológica. La onda lenta es el lenguaje de los centros subcorticales; por esa razón aparece en el sueño. De igual modo, suele aparecer cuando existen tumores profundos. Los grafoelementos lentos son muy poliformes; también su ritmo es variable, pudiéndoseles observar en forma regular o irregular. Su asociación con los picos es de gran valor diagnóstico en distintas formas de epilepsia; solo muy raras veces son de bajo voltaje. Por lo general a mayor lentitud de las ondas, mayor es su voltaje. Si el pico es el idioma habitual de la epilepsia, la onda lenta es el lenguaje por excelencia de los tumores y de otros procesos como las encefalitis y los infartos cerebrales. La onda es también el grafoelemento de los trastornos de la conciencia. En los estados comatosos, el ritmo suele hacerse lento y está constituido en su totalidad por: 0.5 ondas - ondas/s. Sustituye entonces a los ritmos Alfa y Beta naturales de la vigilia.

Asociación de ambos fenómenos: complejos pico-onda

Este es un grafoelemento mixto, de inestable valor semiológico. Esta casi siempre asociado a la epilepsia, aunque puede ser hallado en relación con tumoraciones cerebrales. Se constituye a base de uno o varios picos con una onda lenta. Cuando la relación es igual a 1, es decir, un pico por cada onda lenta, se trata de la clásica figura pico-onda, típica del **pequeño mal**, que tiene por lo común una frecuencia de 3.5 ciclos/s. A medida que el Pequeño Mal tiende a desaparecer, por el avance de la edad o por el tratamiento médico, esa imagen va perdiendo su aspecto típico, ya que las puntas tienden a variar su voltaje y ubicación. Otras veces, la asociación se establece a base

de varios picos y una onda lenta. A este grafoelemento le llamamos polipico-onda, que tiene también valor semiológico de la enfermedad epiléptica. En la polipico-onda, se observan a sí mismo variaciones en el voltaje y la sucesión de los picos. En resumen, las imágenes pico-onda y polipico-onda son el valor diagnóstico en la epilepsia. Su morfología puede cambiar con el tiempo, al disminuir el voltaje de los picos o la regularidad en la sucesión de los elementos rápidos y lentos de su asociación. Es útil agrupar en 3 categorías las posibilidades de expresión patológica del EEG. Esto impide la natural tendencia a tratar de reconocer enfermedades mediante grafoelementos específicos; refuerza además la inclinación correcta: distinguir lo normal y lo anormal y establecer diferencias entre lo focal y lo generalizado; solo así, el trazado puede brindarnos un beneficio óptimo.

4.4. Detección de puntas epilepticas

4.4.1. Materiales y métodos

Para llevar acabo la clasificación de puntas y artificios se dispuso de 200 épocas de dos segundos seleccionados en registros EEG de superficie de pacientes hospitalizados en el Instituto Neurológico de Antioquia (INDEA), con epilepsia refractaria del lóbulo temporal y edades entre 25 y 40 años. Los registros EEG fueron tomados por medio de un electroencefalógrafo de 32 canales (Cadwell Laboratories Inc) y con un amplificador de 12 bit, siguiendo las normas internacionales del sistema 10-20 [21]. La temperatura de la sala era de 17°C para evitar artificios de alta frecuencia dados por la sudoración. Las señales EEG fueron obtenidas de los pacientes en los distintos estados de vigilia y sueño. La frecuencia de digitación (frecuencia de muestreo) utilizada fue de 200 Hz. Almacenada y procesada con un conversor análogo digital, incluido en el equipo, y la adquisición de datos se obtuvo con el software Easy EEG 2.1 (Cadwell Laboratories Inc). Se ha seguido las guías éticas para el registro de datos para seres humanos, así como las políticas internas del INDEA para estudio y procesamiento de señales EEG. A los pacientes se les informó del estudio y dieron su consentimiento favorable para realizar dicho trabajo experimental.

4.4.2. Procesamiento de la señal EEG e inspección visual

Las señales registradas fueron filtradas utilizando un filtro Butterworth de respuesta al impulso infinito, con un corte bajo de 1 Hz y un corte alto de 70 Hz. Las señales fueron visualmente analizadas en un montaje longitudinal bipolar (doble banana) para identificar los potenciales eléctricos. En estos registros se indentificaron puntas (ondas de amplitud variable anormales o patológicas) y artificios (ondas normales originadas fuera de la corteza cerebral), que fueron confirmados por dos observadores expertos e imparciales. Para este análisis sólo se seleccionó un canal, el temporal anterior (de ambos lados). Posteriormente los registros EEG fueron fragmentados en épocas, cada una de dos segundos, en las que está incluido el potencial eléctrico clasificado. Se seleccionó un conjunto de puntas y artificios de los registros de los pacientes de estudio para ser convertidos en formato EDF (European Data Format) y de éste, convertirlas en formato ASCII, lo que permite obtener archivos *.txt que son leídos en el programa Matlab-7 (The Mathworks Inc., USA) y almacenados en archivos *.mat para visualizarlos como señales en el Toolbox de Matlab.

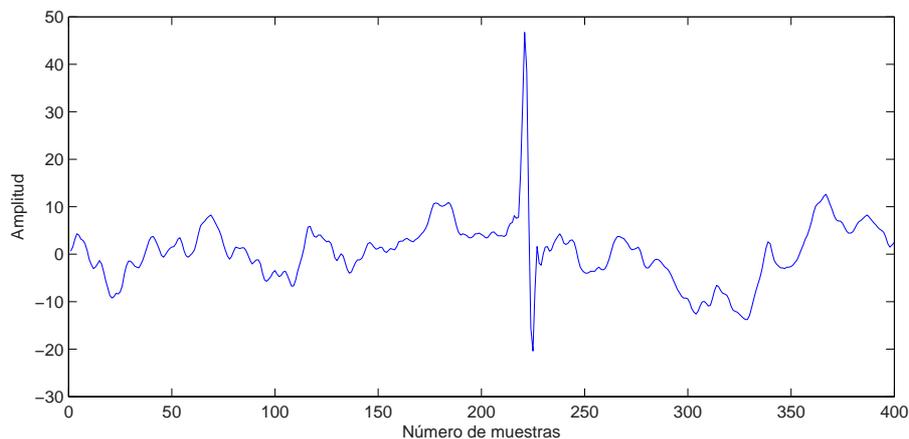


Figura 4.1. Artificio

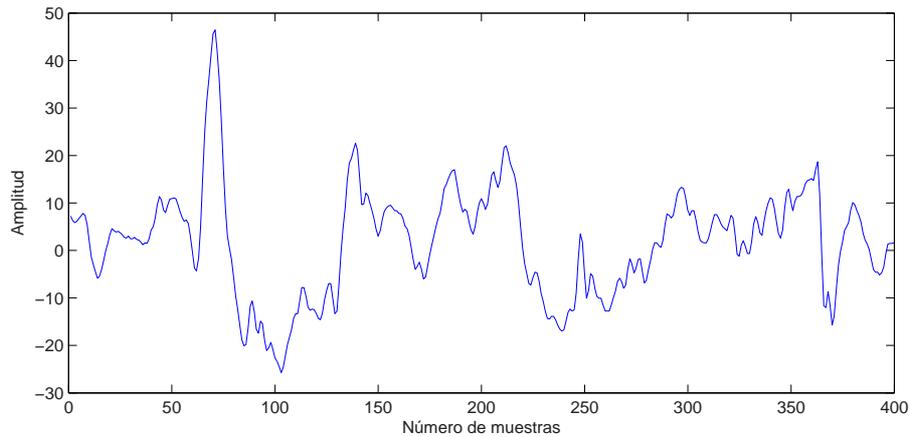


Figura 4.2. Punta

4.4.3. Análisis de las señales usando la transformada wavelet y extracción de características

Una característica deseable en una wavelet para el análisis de las señales EEG es la propiedad de simetría, y la wavelet Daubechies cuenta con dicha propiedad. Se aplicó la wavelet db4 con 5 niveles de descomposición a 100 puntas y 100 artificios para obtener una representación detallada de las características de cada señal basados en los coeficientes wavelet, se definieron como vectores característicos los valores estadísticos representativos de cada sub-banda: media, mínimo, máximo, rango y desviación estándar que permiten analizar el entorno de la señal en cada uno de los niveles de descomposición $D1$ a $D5$ y $A5$. En la figura 4.3 se muestra la descomposición de una punta.

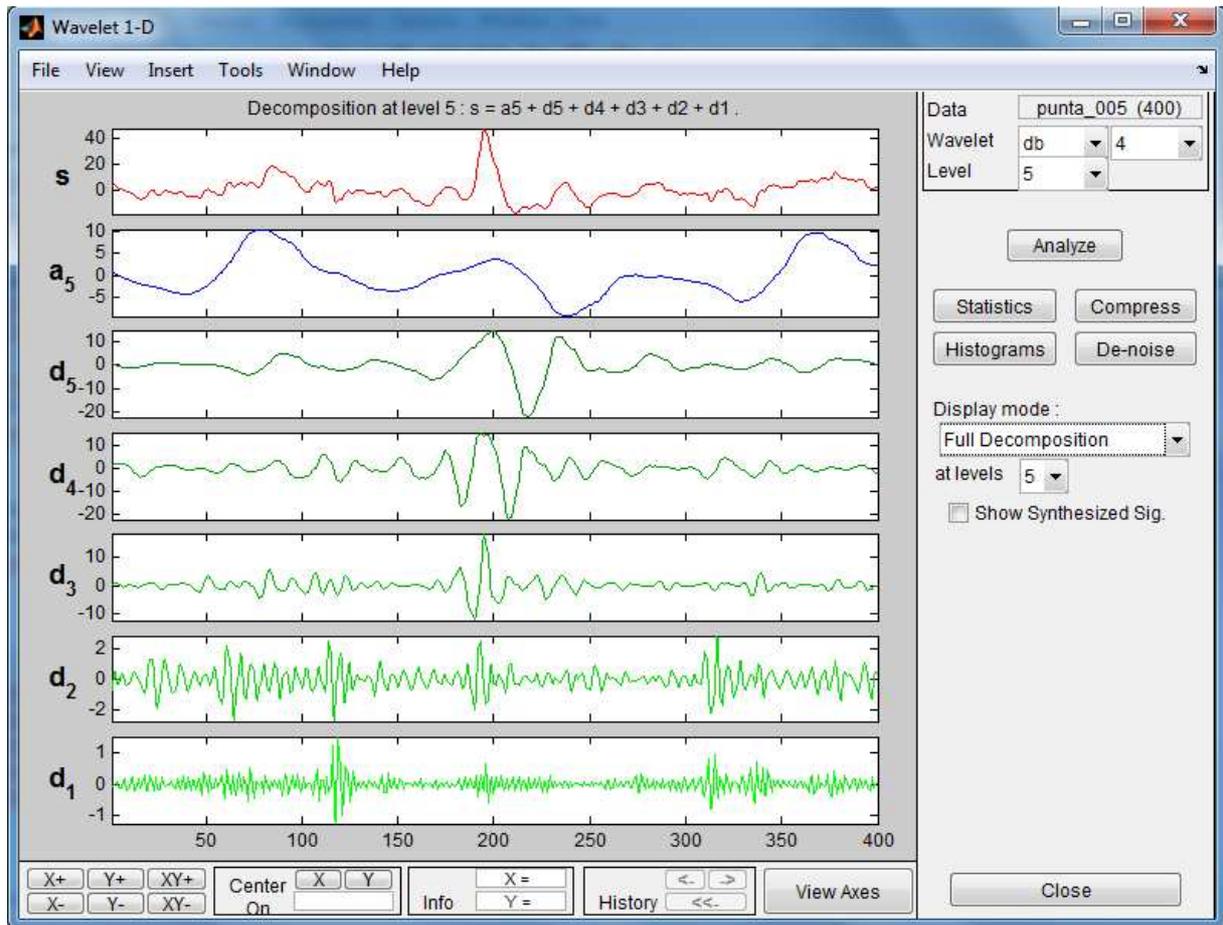


Figura 4.3. Descomposición de una punta

Se extrajeron las características estadísticas de 20 artificios y 20 puntas eliminando los picos representativos de cada señal con el fin de indagar sobre el comportamiento de los coeficientes wavelet con esta condición. En la siguiente tabla se muestran los promedios de cada estadístico en los diferentes niveles de descomposición.

| | Estadísticos | Promedio (artificios) | Promedio (puntas) |
|----|----------------|-----------------------|-------------------|
| D1 | Media | 0,00361 | 0,02677 |
| | Máximo | 15,75135 | 13,55715 |
| | Mínimo | -14,89835 | -10,7359 |
| | Rango | 30,58900 | 24,1427 |
| | Desv. Estandar | 2,7562 | 1,71651 |
| D2 | Media | 0,146165 | -0,002488 |
| | Máximo | 17,33695 | 15,2213 |
| | Mínimo | -15,59185 | -15,0755 |
| | Rango | 32,9175 | 30,297 |
| | Desv. Estandar | 4,53525 | 3,45705 |
| D3 | Media | -0,0276155 | -0,059975 |
| | Máximo | 17,52755 | 15,3532 |
| | Mínimo | -17,67385 | -17,9086 |
| | Rango | 35,2025 | 33,2615 |
| | Desv. Estandar | 6,4816 | 5,95215 |
| D4 | Media | 0,113247 | 0,179896 |
| | Máximo | 19,3654 | 19,5613 |
| | Mínimo | -19,73385 | -18,54735 |
| | Rango | 39,0995 | 38,11 |
| | Desv. Estandar | 8,95865 | 9,31635 |
| D5 | Media | 0,839216 | 0,90268 |
| | Máximo | 21,46725 | 23,40915 |
| | Mínimo | -17,57015 | -22,73555 |
| | Rango | 39,051 | 46,1965 |
| | Desv. Estandar | 11,0606 | 12,49695 |
| A5 | Media | 38,561 | 40,228 |
| | Máximo | 73,1215 | 74,5255 |
| | Mínimo | 16,43805 | 15,80535 |
| | Rango | 56,68 | 58,72 |
| | Desv. Estandar | 16,1873 | 17,14495 |

Cuadro 4.1. Promedio para cada estadístico por nivel de descomposición sin picos representativas de la señal original

En la Figura 4.4 se observa la gráfica de estos promedios y es de notar que los coeficientes para cada nivel de descomposición son muy similares, lo cual nos indica que al eliminar los valores mayores que 32 en la amplitud de las señales estos estadísticos no proporcionan unas entradas importantes para una red neuronal que busque clasificarlas.

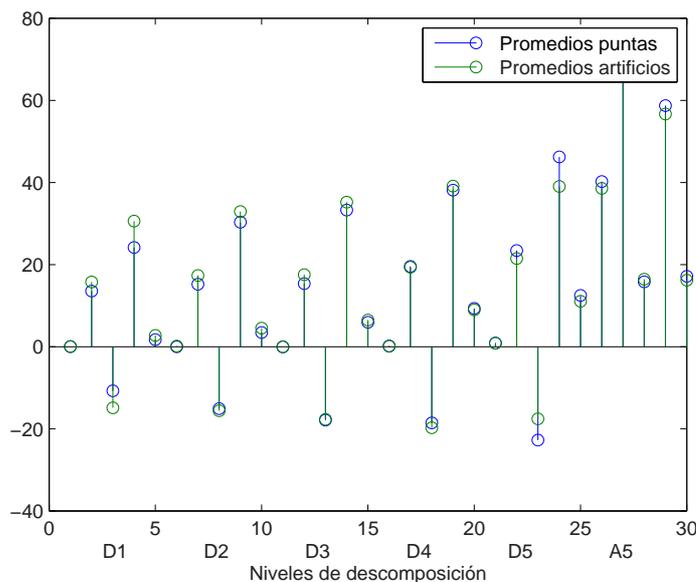


Figura 4.4. Promedios de los estadísticos en cada nivel de descomposición reduciendo el rango de las señales

Los valores máximos y mínimos en cada una de las señales es un factor determinante a la hora de establecer una diferenciación importante entre puntas y artificios.

En los cuadros 4.2 y 4.3 se muestran los estadísticos para 5 artificios y 5 puntas en cada uno de los niveles de descomposición seleccionados, tomando las señales completas sin eliminar sus valores extremos.

| | Estadístico | Art. 1 | Art. 6 | Art. 8 | Art. 16 | Art. 23 |
|----|----------------|----------|-----------|----------|------------|----------|
| D1 | Media | 0,005206 | -0,001298 | 0,007005 | -0,0001329 | 0,005186 |
| | Máximo | 5,671 | 19,23 | 10,42 | 3,213 | 9,085 |
| | Mínimo | -9 | -25,65 | -11 | -4,616 | -9,525 |
| | Rango | 14,671 | 44,88 | 21,42 | 7,829 | 18,61 |
| | Desv. Estandar | 2,356 | 3,776 | 1,917 | 1,059 | 1,23 |
| D2 | Media | -0,53 | -0,1358 | 0,09898 | -0,2846 | 0,07043 |
| | Máximo | 24,14 | 38,57 | 23,73 | 21,87 | 44,89 |
| | Mínimo | -23,48 | -27,54 | -18,32 | -31,62 | -30,45 |
| | Rango | 47,62 | 66,11 | 42,05 | 53,49 | 75,34 |
| | Desv. Estandar | 7,589 | 7,776 | 5,938 | 5,921 | 6,009 |
| D3 | Media | 2,438 | 3,235 | 0,7001 | -0,4135 | 0,2249 |
| | Máximo | 36,33 | 77,74 | 77,05 | 78,38 | 126 |
| | Mínimo | -46,37 | -37,01 | -21,35 | -117 | -148,7 |
| | Rango | 82,7 | 114,75 | 98,4 | 195,38 | 274,7 |
| | Desv. Estandar | 16,09 | 14,7 | 13,68 | 25,45 | 29,82 |
| D4 | Media | -7,217 | 3,06 | -7,432 | -4,683 | 8,744 |
| | Máximo | 93,46 | 42,87 | 28,3 | 237,6 | 267,5 |
| | Mínimo | -187,4 | -36,6 | -84,59 | -357,7 | -131,2 |
| | Rango | 280,86 | 79,47 | 112,89 | 595,3 | 398,7 |
| | Desv. Estandar | 58,17 | 16,02 | 25 | 108,5 | 65,14 |
| D5 | Media | 1,587 | -13,14 | -6,835 | -45,59 | 78,57 |
| | Máximo | 4334,3 | 42,2 | 31,99 | 245,5 | 784,7 |
| | Mínimo | -169,8 | -129,6 | -66,42 | -680,4 | -7,641 |
| | Rango | 504,1 | 171,8 | 98,41 | 925,9 | 792,341 |
| | Desv. Estandar | 144,9 | 45,8 | 22,74 | 236,5 | 215,4 |
| A5 | Media | -31 | -39,19 | 22,57 | 0,3012 | 20,42 |
| | Máximo | 631,4 | 88,05 | 114,7 | 1408 | 195,6 |
| | Mínimo | -683,9 | -122,9 | -142,7 | -1549 | -121,5 |
| | Rango | 1315,3 | 210,95 | 257,4 | 2957 | 317,1 |
| | Desv. Estandar | 305,2 | 66,69 | 58,21 | 759,5 | 67,12 |

Cuadro 4.2. Estadísticos de 5 artificios para cada nivel de descomposición

| | Estadístico | Punta 1 | Punta 5 | Punta 9 | Punta 10 | Punta 22 |
|----|----------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| D1 | Media | 0,004927 | 0,000863 | -0,007408 | 0,001542 | 0,0009779 |
| | Máximo | 1,724 | 1,948 | 0,7973 | 6,227 | 3,658 |
| | Mínimo | -1,813 | -1,311 | -0,5653 | -4,462 | -3,978 |
| | Rango | 3,537 | 3,259 | 1,3626 | 10,689 | 7,636 |
| | Desv. Estandar | 0,5639 | 0,3677 | 0,1952 | 1,459 | 0,7096 |
| D2 | Media | -0,01267 | 0,008379 | 0,02882 | -0,01999 | -0,07146 |
| | Máximo | 5,045 | 5,635 | 3,567 | 18,22 | 6,168 |
| | Mínimo | -6,429 | -4,206 | -2,133 | -13,54 | -5,809 |
| | Rango | 11,474 | 9,841 | 5,7 | 31,76 | 11,977 |
| | Desv. Estandar | 2,265 | 1,548 | 0,8591 | 5,166 | 2,547 |
| D3 | Media | -0,1457 | 0,9157 | 0,002519 | 0,1839 | -0,2372 |
| | Máximo | 13,62 | 36,87 | 11,73 | 18,63 | 13,34 |
| | Mínimo | -41,84 | -18,99 | -12,78 | -14,49 | -14,67 |
| | Rango | 55,46 | 55,86 | 24,51 | 33,12 | 28,01 |
| | Desv. Estandar | 8,775 | 7,307 | 3,821 | 7,984 | 5,907 |
| D4 | Media | -3,479 | 1,069 | -1,348 | 0,878 | -1,974 |
| | Máximo | 44,7 | 31,48 | 30,24 | 48,13 | 57,46 |
| | Mínimo | -93,47 | -67,16 | -25,47 | -45,84 | -40,67 |
| | Rango | 138,17 | 98,64 | 55,71 | 93,97 | 98,13 |
| | Desv. Estandar | 28,76 | 18,33 | 10,7 | 20,19 | 21,65 |
| D5 | Media | 8,027 | -2,876 | 10,22 | -9,97 | 2,496 |
| | Máximo | 73,21 | 18,89 | 74,37 | 42,9 | 73,5 |
| | Mínimo | -25,27 | -92,25 | -16,42 | -65,04 | -26,15 |
| | Rango | 98,48 | 111,14 | 90,79 | 107,94 | 99,65 |
| | Desv. Estandar | 24,51 | 28,09 | 25,78 | 35,22 | 23,57 |
| A5 | Media | 4,114 | 6,366 | 17,26 | 6,687 | 8,121 |
| | Máximo | 77,69 | 44,94 | 64,86 | 141,8 | 43,32 |
| | Mínimo | -68,12 | -40,38 | -51,92 | -139,4 | -40,59 |
| | Rango | 145,81 | 85,32 | 116,78 | 281,2 | 83,91 |
| | Desv. Estandar | 36,62 | 23,28 | 30,18 | 91,11 | 23,32 |

Cuadro 4.3. Estadísticos de 5 puntas para cada nivel de descomposición

En el cuadro 4.4 se muestra el promedio para cada estadístico por nivel de descomposición de 10 artificios y 10 puntas.

| | Estadísticos | Promedio (artificios) | Promedio (puntas) |
|----|----------------|-----------------------|-------------------|
| D1 | Media | -0,0062975 | 0,00143141 |
| | Máximo | 74,366 | 2,09594 |
| | Mínimo | -56,586 | -1,82227 |
| | Rango | 130,952 | 3,91821 |
| | Desv. Estandar | 7,698 | 0,50143 |
| D2 | Media | 0,170681 | 0,0011419 |
| | Máximo | 137,453 | 6,9365 |
| | Mínimo | -105,803 | -6,6726 |
| | Rango | 243,256 | 13,6091 |
| | Desv. Estandar | 20,0835 | 2,12908 |
| D3 | Media | 0,9037 | 0,182189 |
| | Máximo | 165,821 | 19,123 |
| | Mínimo | -93,548 | -21,19 |
| | Rango | 259,369 | 40,313 |
| | Desv. Estandar | 35,886 | 6,4025 |
| D4 | Media | 4,63931 | 0,24075 |
| | Máximo | 152,787 | 43,951 |
| | Mínimo | -57,593 | -56,012 |
| | Rango | 210,38 | 99,963 |
| | Desv. Estandar | 39,3435 | 18,876 |
| D5 | Media | -1,63062 | -1,20339 |
| | Máximo | 74,29 | 47,101 |
| | Mínimo | -68,827 | -69,053 |
| | Rango | 143,117 | 116,154 |
| | Desv. Estandar | 38,965 | 29,821 |
| A5 | Media | 17,79975 | 6,3777 |
| | Máximo | 170,9627 | 75,454 |
| | Mínimo | -172,936 | -85,816 |
| | Rango | 343,8987 | 161,27 |
| | Desv. Estandar | 107,928 | 48,557 |

Cuadro 4.4. Promedio para cada estadístico por nivel de descomposición.

Realizando un análisis detallado del cuadro anterior, se pueden extraer algunas conclusiones con respecto a cada uno de los estadísticos seleccionados:

1. Se observa que la media de los coeficientes en ambos casos, artificios y puntas, va aumentando a medida que aumenta el nivel de descomposición,

a excepción del nivel $D5$, sin embargo, en el caso de los artificios la media aumenta más rápidamente, a tal punto, que en el nivel 5 de aproximación $A5$, la diferencia en media de los coeficientes es casi el triple, 6,3777 para las puntas y 17,79975 para los artificios.

2. A diferencia de la media, el máximo de los coeficientes en el caso de los artificios, aumenta en los 3 primeros niveles para después decrecer en los niveles $D4$ y $D5$ y tomar el mayor valor en el nivel $A5$, mientras que para las puntas este estadístico va aumentando a medida que aumenta el nivel de descomposición. En este caso lo más relevante es que el máximo en los artificios es siempre mayor que el máximo en las puntas sin importar el nivel de descomposición.

3. Para el estadístico mínimo de los coeficientes, el comportamiento es similar a el del máximo, tanto para los artificios como para las puntas, aunque en los niveles $D4$ y $D5$ la diferencia no sea grande, la característica más importante es que el mínimo de los coeficientes de los artificios es siempre menor que el mínimo de los coeficientes de las puntas en 5 de los 6 niveles de descomposición.

4. Las marcadas diferencias en los estadísticos mínimo y máximo de los coeficientes en los diferentes niveles de descomposición, contribuyen, a que el rango, sea el estadístico más diferenciador entre los artificios y las puntas, con una diferencia mínima en el nivel $D5$ de 26,963 y máxima en el nivel $D2$ de 229,6469.

5. Un patrón similar al de los estadísticos analizados, presenta la desviación estandar, cuya diferencia se mantiene en cada nivel de descomposición siendo mayor en cada caso para los artificios.

Se observa una clara diferenciación entre los estadísticos de los artificios y de las puntas en cada nivel de descomposición, diferencia que se puede apreciar mejor en las gráficas siguientes.

En la Figura 4.5 cada círculo representa los estadísticos (media, máximo, mínimo, rango y desv. Estandar) de una señal correspondiente a cada nivel de descomposición, donde cada rango (R en la gráfica) en un nivel representa la característica más diferenciadora.

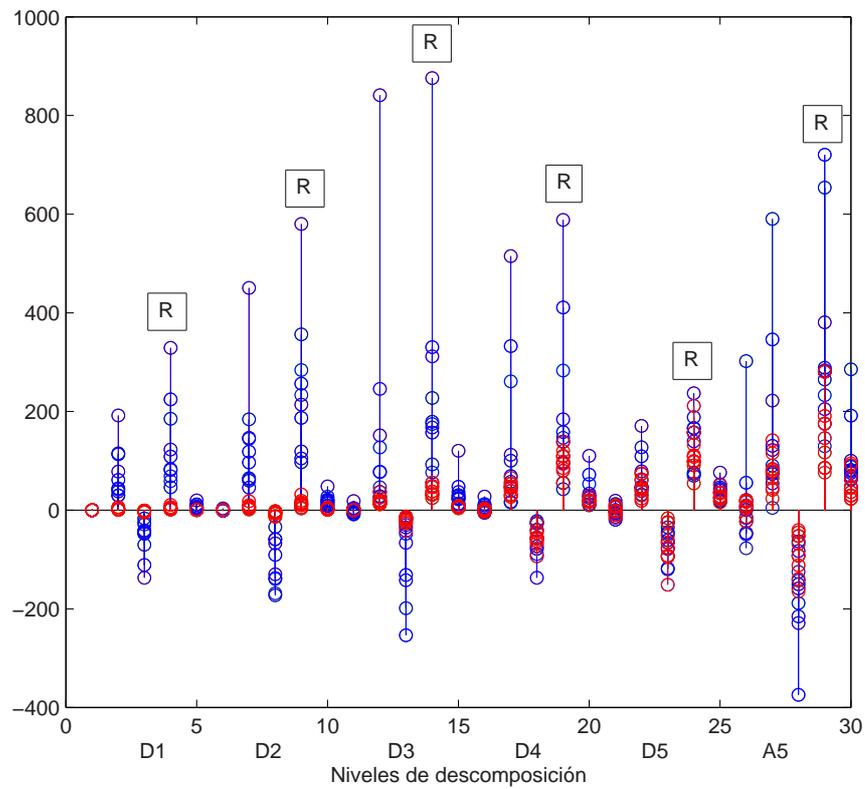


Figura 4.5. Estadísticos por nivel de descomposición para 10 artificios (azul) y 10 puntas (rojo)

En la Figura 4.6 cada línea representa los promedios de dichos estadísticos para cada nivel de descomposición de las 10 puntas y 10 artificios seleccionados.

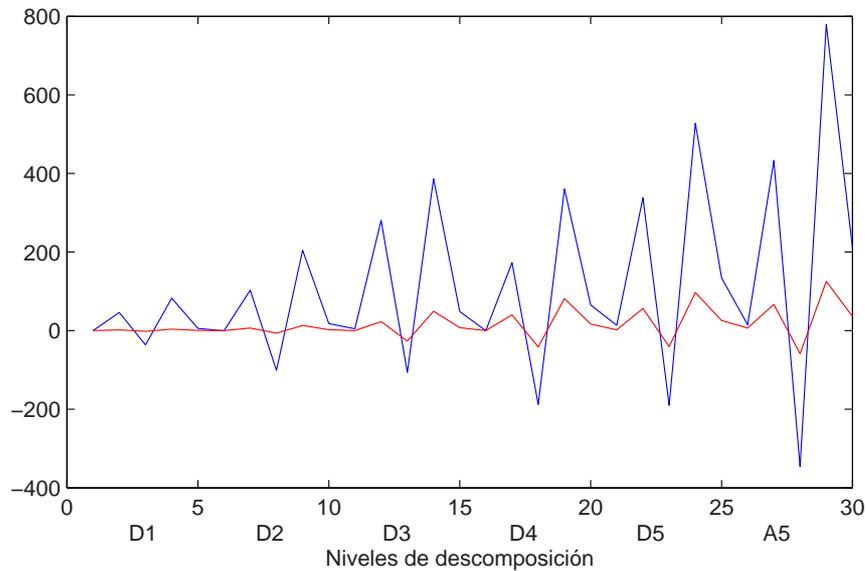


Figura 4.6. Media de cada uno de los estadísticos por nivel de descomposición para 10 artificios (azul) y 10 puntas (rojo)

Con base en el análisis anterior, éstos estadísticos se pueden usar como patrones diferenciadores que nos permitirán alimentar la red neuronal, que, después de ser entrenada, podrá clasificar las señales de EEG en artificios o puntas, según corresponda.

4.4.4. Clasificación de las señales usando una red neuronal artificial

Una vez obtenidos los vectores característicos ordenados por nivel, que representan una punta o un artificio, se procedió a entrenar una red neuronal artificial que clasificará dichos vectores de acuerdo a la información contenida, para esta etapa de la investigación se utilizó la herramienta Toolbox Neural Pattern Recognition (nprtool) de Matlab 7.

El Toolbox Neural Pattern Recognition es una herramienta para fines de clasificación, se presentó como insumo 100 vectores columna que representaron las puntas y 100 vectores representando los artificios, estos vectores se suministraron a la red neuronal en forma intercalada, las salidas deseadas se presentaron en un vector fila con elementos 0 y 1 donde 0 representaba un artificio y 1 una punta.

De las 200 muestras que se presentaron a la red neuronal, se consideró que un 70 % fuese para el entrenamiento, 15 % para validez, y 15 % para el test final. En la tabla siguiente se muestra dicha distribución.

| Fase | Artificios | Puntas | Total |
|----------------------|------------|--------|-------|
| Entrenamiento (70 %) | 67 | 73 | 140 |
| Validez (15 %) | 16 | 14 | 30 |
| Test (15 %) | 17 | 13 | 30 |
| Total (100 %) | 100 | 100 | 200 |

Cuadro 4.5. Distribución para el entrenamiento, validez y test.

Para el caso del reconocimiento de patrones la estructura estándar, es una red multicapa con dos capas, una capa oculta con 23 neuronas, número al cual se llegó después de entrenarla con distinta cantidad de neuronas y observar mejores resultados, y una capa de salida, ambas capas con funciones de transferencia sigmoideal como la mostrada en la ecuación 3.3 [20].

En la figura 4.7 se muestra la estructura de la red utilizada, cuyas entradas estan compuestas por 30 números reales que corresponden a cada uno de los 5 estadísticos (media, mínimo, máximo, rango y desviación estándar) en cada uno de los 5 niveles de descomposición $D1, D2, D3, D4, D5$ y $A5$ y 1 salida real con valores en el intervalo $(0, 1)$.

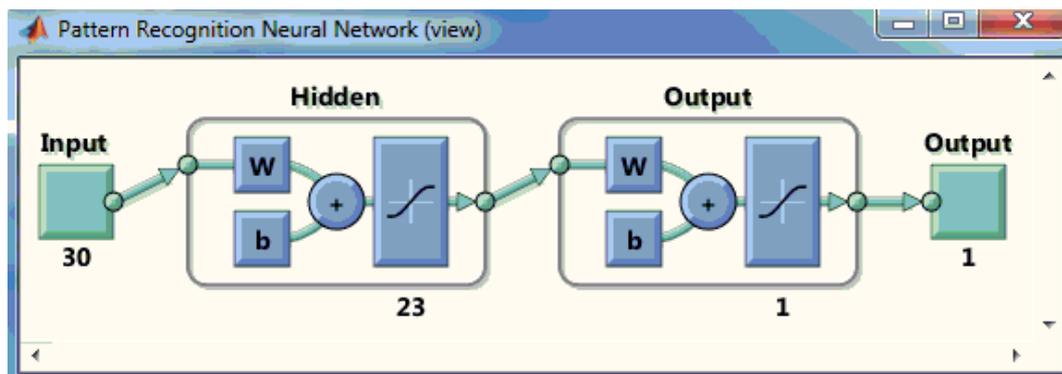


Figura 4.7. Estructura de la Red Neuronal

4.4.5. Validez, sensibilidad y especificidad

Es evidente que una buena prueba diagnostica es la que ofrece resultados positivos en enfermos y negativos en sanos. Una de las condiciones exigidas

a un test como el que se presenta en este trabajo, es el de validez.

La validez se puede definir como la frecuencia con que es confirmado el test por procedimientos más complejos y rigurosos. La sensibilidad y la especificidad de un test son medidas de su validez [11].

La sensibilidad es la probabilidad de clasificar correctamente a un individuo enfermo, es decir, la probabilidad de que para un sujeto enfermo se obtenga en la prueba un resultado positivo. Por lo tanto, para nuestro caso, la sensibilidad es la capacidad del test para detectar las puntas [11].

Por otro lado, la especificidad es la probabilidad de clasificar correctamente un individuo sano, es decir, la probabilidad de que para un sujeto sano se obtenga un resultado negativo [11].

El Toolbox Neural Pattern Recognition de Matlab, nos muestra, durante la fase de entrenamiento de la red neuronal la matriz de confusión, matriz que nos brinda información sobre las medidas de sensibilidad y especificidad de la red neuronal, tanto para los artificios (0), como para las puntas (1). La Figura 4.8 muestra la matriz de confusión para la red neuronal entrenada en este trabajo.

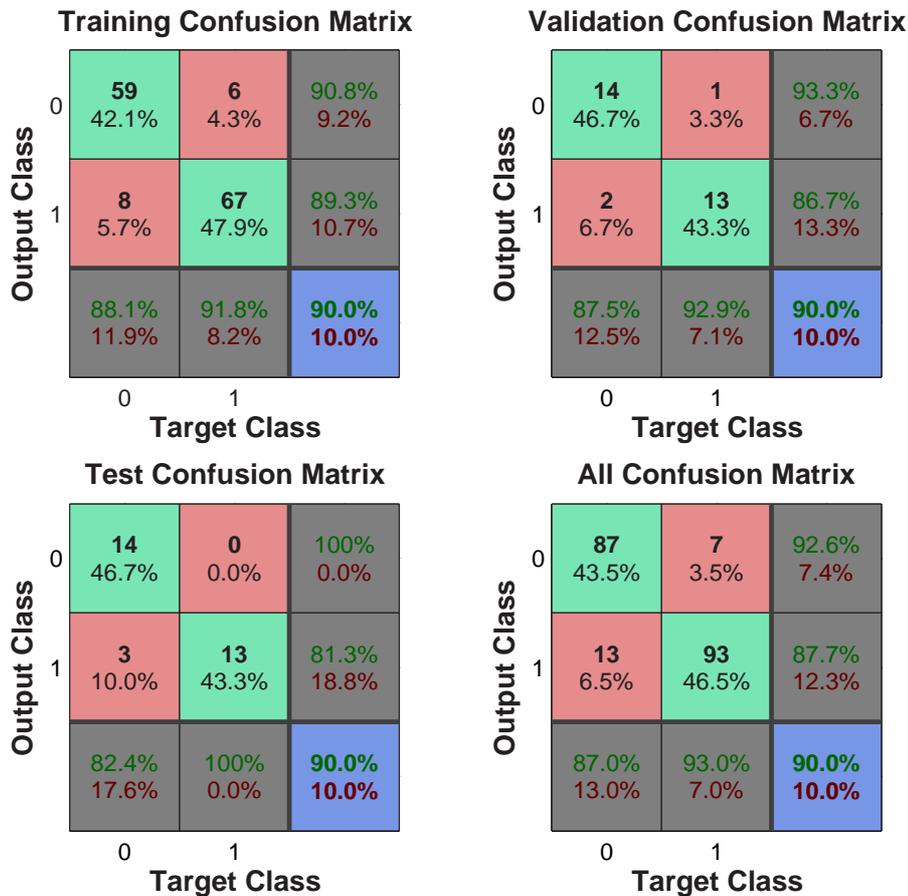


Figura 4.8. Matriz de confusión

Al detallar los datos expresados en la matriz de confusión concluimos que:

Fase de entrenamiento con 67 artificios y 73 puntas:

De las 140 señales suministradas a la red, ésta clasifico 65 como artificios de los cuales 59 (90,8 %) eran efectivamente artificios y 6 eran puntas (9,2 %).

De las 140 señales suministradas a la red, ésta clasifico 75 como puntas de las cuales 67 (89,3 %) eran efectivamente puntas y 8 eran artificios (10,7 %).

Para la clasificación de las puntas realizada por la red, dejen de clasificar 6 puntas de las 73 (8,2 %) existentes para una sensibilidad del 91,8 %, y clasifico como puntas, 8 artificios (11,9 %) para una especificidad del 88,1 %.

Fase de validación con 16 artificios y 14 puntas:

De las 30 señales suministradas a la red, ésta clasifico 15 como artificios de los cuales 14 (93,3 %) eran efectivamente artificios y 1 era punta (6,7 %).

De las 30 señales suministradas a la red, ésta clasifico 15 como puntas de las cuales 13 (86,7 %) eran efectivamente puntas y 2 eran artificios (13,3 %).

Para la clasificación de las puntas realizada por la red, dejo de clasificar 1 punta de las 14 (7,1 %) existentes para una sensibilidad del 92,9 %, y clasifico como puntas, 2 artificios (12,5 %) para una especificidad del 87,5 %.

Fase de test con 17 artificios y 13 puntas:

De las 30 señales suministradas a la red, ésta clasifico 14 como artificios de los cuales 14 (100 %) eran efectivamente artificios.

De las 30 señales suministradas a la red, ésta clasifico 16 como puntas de las cuales 13 (81,3 %) eran efectivamente puntas y 3 eran artificios (18,8 %).

Para la clasificación de las puntas realizada por la red, esta no dejo de clasificar ninguna punta de las 13 suministradas para una sensibilidad del 100 %, y clasifico como puntas, 3 artificios (17,6 %) para una especificidad del 82,4 %.

De acuerdo con estos resultados podemos deducir que la red neuronal artificial desarrollada clasifica las puntas y los artificios con muy buenos porcentajes de acierto, permitiendo prestar un apoyo a especialistas de la salud en la detección de puntas epilépticas.

En la siguiente tabla se muestra la sensibilidad y la especificidad para los 30 datos independientes (test) que la red no usó para entrenamiento, es decir, cuyas salidas no fueron conocidas por la red.

| Registro | Experto | Red neuronal | Clasifica | Sensibilidad | Especificidad |
|------------|---------|--------------|-----------|--------------|---------------|
| Artificios | 17 | 14 | 100 % | 82,4 % | 100 % |
| Puntas | 13 | 16 | 81,3 % | 100 % | 82,4 % |

Análisis para el total de datos suministrados a la red

En general, para el total de los 200 datos suministrados a la red neuronal (100 artificios y 100 puntas) para llevar a cabo las distintas fases, se obtuvo que:

De las 200 señales suministradas a la red, ésta clasifico 94 como artificios de los cuales 87 (92,6 %) eran efectivamente artificios.

De las 200 señales suministradas a la red, ésta clasifico 106 como puntas de las cuales 93 (87,7%) eran efectivamente puntas y 13 eran artificios (12,3%).

Para la clasificación de las puntas realizada por la red, dejo de clasificar 7 puntas de las 100 (7%) existentes para una sensibilidad del 93%, y clasifico como puntas, 13 artificios (13%) para una especificidad del 87%.

Otra representación gráfica que permite evaluar la capacidad de la red neuronal para detectar artificios y/o puntas y que ofrece Toolbox Neural Pattern Recognition (nprtool) de Matlab 7, son las Curvas ROC o Curvas de rendimiento diagnóstico, para nuestro caso.

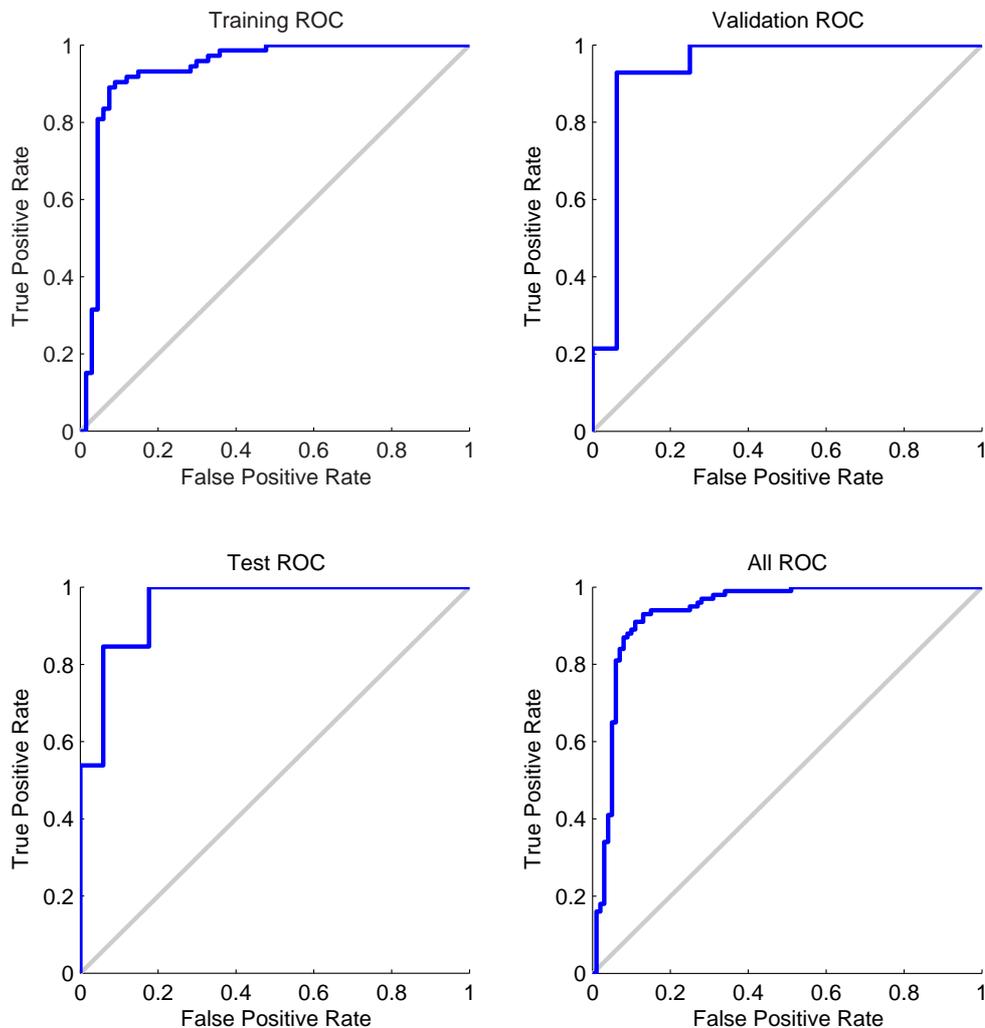


Figura 4.9. Curvas ROC

Se observa que el área bajo la curva para el caso del test ROC es mayor que 0,9 lo que indica que existe más de un 90% de probabilidad de que se diagnostique correctamente una punta que el de un arteficio al azar para esta red neuronal, lo cual se considera como un test bueno.

4.4.6. Aplicación de la red neuronal artificial

A modo de corroborar los resultados anteriormente expresados, se introducirán a la red, las características que representan a 40 señales de EEG, de las cuales, 20 son artificios y 20 son puntas. Al simular la red con los datos seleccionados se obtiene:

| Señal | Clasificación | Valor de red | Señal | Clasificación | Valor de red |
|-------|------------------|--------------------------|-------|------------------|--------------------------|
| 1 | <i>Arteficio</i> | $8,3267 \times 10^{-16}$ | 21 | <i>Arteficio</i> | 0,9839 |
| 2 | <i>Punta</i> | 0,9438 | 22 | <i>Punta</i> | 0,9425 |
| 3 | <i>Arteficio</i> | $2,4190 \times 10^{-10}$ | 23 | <i>Arteficio</i> | 0,0011 |
| 4 | <i>Punta</i> | 0,9676 | 24 | <i>Punta</i> | 0,6047 |
| 5 | <i>Arteficio</i> | $1,1102 \times 10^{-16}$ | 25 | <i>Arteficio</i> | 0,0772 |
| 6 | <i>Punta</i> | 0,8172 | 26 | <i>Punta</i> | 0,7878 |
| 7 | <i>Arteficio</i> | $1,9136 \times 10^{-12}$ | 27 | <i>Arteficio</i> | $1,5617 \times 10^{-9}$ |
| 8 | <i>Punta</i> | 0,9613 | 28 | <i>Punta</i> | 0,8655 |
| 9 | <i>Arteficio</i> | $6,3090 \times 10^{-9}$ | 29 | <i>Arteficio</i> | $3,3307 \times 10^{-16}$ |
| 10 | <i>Punta</i> | 0,8927 | 30 | <i>Punta</i> | 0,6912 |
| 11 | <i>Arteficio</i> | $5,0507 \times 10^{-9}$ | 31 | <i>Arteficio</i> | $6,5670 \times 10^{-14}$ |
| 12 | <i>Punta</i> | 0,5085 | 32 | <i>Punta</i> | 0,8943 |
| 13 | <i>Arteficio</i> | $8,8073 \times 10^{-8}$ | 33 | <i>Arteficio</i> | $1,3378 \times 10^{-11}$ |
| 14 | <i>Punta</i> | 0,8028 | 34 | <i>Punta</i> | 0,7434 |
| 15 | <i>Arteficio</i> | $5,8130 \times 10^{-8}$ | 35 | <i>Arteficio</i> | $1,7018 \times 10^{-5}$ |
| 16 | <i>Punta</i> | 0,9455 | 36 | <i>Punta</i> | 0,7255 |
| 17 | <i>Arteficio</i> | $1,1102 \times 10^{-16}$ | 37 | <i>Arteficio</i> | 0,0269 |
| 18 | <i>Punta</i> | 0,8775 | 38 | <i>Punta</i> | 0,6753 |
| 19 | <i>Arteficio</i> | $8,9705 \times 10^{-6}$ | 39 | <i>Arteficio</i> | $5,5102 \times 10^{-10}$ |
| 20 | <i>Punta</i> | 0,9187 | 40 | <i>Punta</i> | 0,8340 |

Cuadro 4.6. Clasificación de la red para 40 señales suministradas

Según los valores de la red en la tabla anterior, se observa que dicho valor para la señal 21 es de 0,9839 lo cual indica que lo clasificó como punta siendo

artificio, para el resto de la señales la clasificación fue acertada.

En la Figura 4.10 se muestra la matriz de confusión para las 40 señales de EEG suministradas.

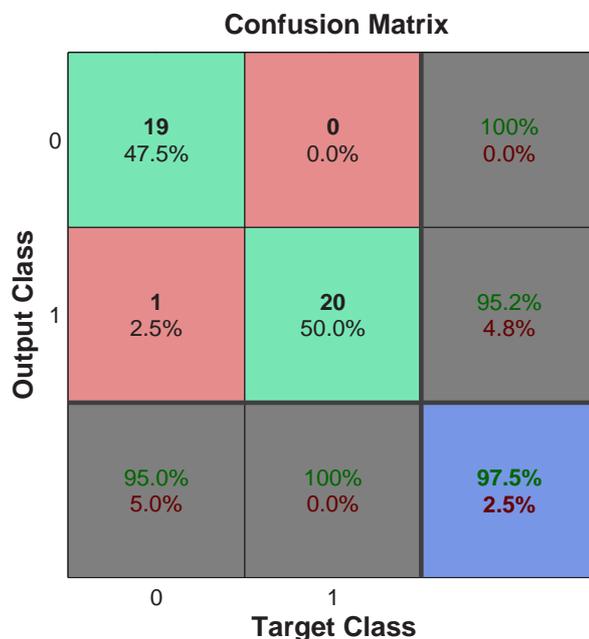


Figura 4.10. Matriz de confusión para 40 señales de EEG

| Registro | Experto | Red neuronal | Clasifica | Sensibilidad | Especificidad |
|------------|---------|--------------|-----------|--------------|---------------|
| Artificios | 20 | 19 | 100 % | 95 % | 100 % |
| Puntas | 20 | 21 | 95, 2 % | 100 % | 95 % |

4.4.7. Resultados y discusión

En este trabajo se utilizó la transformada wavelets Daubechies 4.0 y 5 niveles de frecuencia para extraer características estadísticas de señales EEG, de 100 señales patológicas (puntas) de pacientes con epilepsia y de 100 señales (artificios) normales, estas características se introdujeron a una red neuronal multicapa de tal forma que el 70 % de la totalidad de las señales se usarán para entrenar la red, 15 % para validación y el 15 % restante como prueba o test de la red neuronal.

Primero se seleccionaron 20 artificios y 20 puntas, a estas señales se les fueron eliminados los picos más representativos de cada una para determinar el comportamiento de las señales, luego se extrajeron las características estadísticas

media, mínimo, máximo, rango y desviación estandar, dentro de los resultados obtenidos se observa que dichos estadísticos son muy similares en cada uno de los niveles de descomposición, por lo tanto, no proporcionan información diferenciadora significativa que pueda ser tomada como patrón de entrada para la red. De esta forma concluimos que los valores máximos y mínimos en cada una de las señales es un factor determinante a la hora de establecer una diferenciación importante entre puntas y artificios utilizando estos estadísticos.

Para observar esta diferencia se extrajeron nuevamente los estadísticos pero con las señales completas, y los resultados fueron que en los 5 niveles de descomposición incluidos el de aproximación, el rango fue una de las características con mayor diferenciación entre las señales patológicas y las no patológicas, así como también la desviación estándar en los niveles *D3* y *A5*.

Dentro de los resultados arrojados por la red neuronal en la fase de test según la matriz de confusión se destaca que para los artificios se obtuvo un 82,4 % de sensibilidad y un 100 % para las puntas, lo que significa que de las 30 señales suministradas a la red, ésta clasificó 14 como artificios de los cuales 14 (100 %) eran efectivamente artificios y clasificó 16 como puntas de las cuales 13 (81,3 %) eran efectivamente puntas y el resto eran artificios (18,8 %).

Adicionalmente, y con el fin de corroborar los resultados arrojados por la red se decidió suministrar otras 40 señales (20 puntas) y (20 artificios) obteniéndose para los artificios un 95 % de sensibilidad y para las puntas un 100 %, es decir, la red clasificó la totalidad de las puntas correctamente.

Entre los resultados más importantes de este trabajo se pueden destacar la amplia información que se puede obtener de los coeficientes de descomposición de las diferentes señales tomando estadísticos básicos como la media, mínimo, máximo, rango y desv. estándar, lo cual permite una construcción sencilla de los vectores de entrada para la red neuronal. También cabe resaltar, la simulación de una red neuronal artificial multicapa con gran capacidad de clasificación de las señales EEG, con un alto porcentaje de sensibilidad en la clasificación de puntas.

Con base en estos resultados, la red simulada en este trabajo puede prestar

apoyo a especialistas de la salud con interés en el diagnóstico de la epilepsia.

4.5. Conclusiones

Las señales de EEG son una herramienta importante en la detección y clasificación de anomalías cerebrales, por lo tanto, la correcta interpretación de estas señales debe realizarse con cierto detalle. Es por este motivo que varias herramientas y procesos diferentes han surgido para llevar a cabo dicha interpretación [2], [5], [22], [39], [16]. El análisis wavelet es una herramienta matemática relativamente reciente que permite, entre otras aplicaciones, realizar el análisis de señales en diferentes niveles de frecuencia y de esta forma detectar anomalías en una señal [1], [19].

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten demostrar una vez más que las wavelets es una herramienta que puede ser utilizada para extraer información de señales cuya caracterización sea importante en cualquier campo del conocimiento.

Una vez extraídas características de las señales en estudio, estas son una representación más compacta de la información que contienen, sin embargo, se requiere de una herramienta que reconozca estas características que diferencian una señal patológica de una no patológica, para esta clasificación las redes neuronales son un medio eficiente que permite con muy buena exactitud reconocer cuando un conjunto de características, provienen de una señal patológica o una señal normal.

Es por esto y otros motivos que para futuros trabajos sería interesante simular una red neuronal con unas wavelets como las biortogonales, puesto que se ha probado en otros trabajos su eficiencia en el análisis y síntesis de señales EEG [5]. También convendría realizar un análisis de los coeficientes de más de un nivel de aproximación puesto que algunas de las diferencias más significativas encontradas en este trabajo tuvieron lugar entre los coeficientes del nivel de aproximación A_5 . Por otro lado, y en vista del poder de clasificación que poseen las redes neuronales sería útil estudiar otras estructuras multicapa en una red neuronal y comparar los resultados entre estas estructuras y así obtener una clasificación cada vez más eficiente.

Bibliografía

- [1] Akin, M., Arserim, M., Kiymik, M., Turkoglu, I. (Oct. 25-28,2001). A new approach for diagnosing epilepsy by using wavelet transform and neural networks. *Proceedings - 23rd Annual Conference - IEEE/EMBS*, Istanbul, TURKEY.
- [2] Ballesteros, D. (2004). Aplicación de la transformada wavelet discreta en el filtrado de señales bioeléctricas. *Umbral Científico*, diciembre, número 005. Fundación universitaria Manuela Beltrán. Bogotá, Colombia. p. 92-98.
- [3] Bogess, A., Narcowich, F. (2001). *A first course in wavelets with Fourier analysis*. Prentice Hall, Texas university.
- [4] Caicedo, E., López, J. (2009). *Una aproximacion practica a las redes neuronales artificiales*. Universidad del Valle. Cali.
- [5] Castaño, N., Zapata, J., Villegas, J. (junio-sin mes 2009). Detección de puntas epilépticas en señales electroencefalográficas para pacientes con epilepsia del lóbulo temporal utilizando wavelets. *Ingeniería y Ciencia*, Vol. 5, Núm. 9, p. 145-165 Universidad EAFIT Colombia.
- [6] Castro, L., Castro S. Wavelets y sus Aplicaciones. *1er. Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*. Universidad Nacional del Sur. Argentina. p. 195-204.
- [7] Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia.
- [8] Del Brío, B. (2002). *Redes neuronales y sistemas difusos*. Alfaomega, Universidad de Zaragoza,

- [9] Delgado, A. (Oct.-Dic. 1999). Aplicacion de las redes neuronales en medicina. *Revista de la facultad de medicina Universidad Nacional*. Vol. 47. N° 4. p. 221-223.
- [10] Delgado, E., Cordero, E. (2010). *Estimacion de la velocidad de los movimientos basicos de la mano, a partir de las senales electromiograficas y usando redes neuronales artificiales*. Escuela de ingeniería electrónica. UIS.
- [11] Fernández, P., Díaz, P. Pruebas diagnósticas: Sensibilidad y especificidad. *Unidad de Epidemiología Clínica y Bioestadística*, Coruña, España. En: http://www.fisterra.com/mbe/investiga/pruebas_diagnosticas/pruebas_diagnosticas.asp
- [12] García, H., Alzate, S., Padilla, J. (2009). Detección y Clasificación de Artefactos en Señales EEG. *XIV Simposio de tratamiento de señales, imagenes y visión artificial - stsiva*.
- [13] Gomes, J., Velho, L. *From Fourier analysis to wavelets*. IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.
- [14] Goswami, J., Chan, A. (1999). *Fundamentals of wavelets, theory, algorithms y applications*. John Wiley and Sons, Inc, Texas A and Muniversity.
- [15] Grossberg, S. (1988). *Neural networks and natural intelligence*. The Mit Press. Cambridge, MA.
- [16] Guarnizo, C. (Diciembre de 2008). Análisis de reducción de ruido en señales EEG orientado al reconocimiento de patrones. *Tecnológicas*. N° 21 p. 67-80.
- [17] Gutiérrez, J. (Mayo 23 al 25 2001). Detección del foco epiléptico y su ruta de propagación. *Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía*. Memorias II Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica. Habana. Artículo 00241.
- [18] Haykin, S. (2001). *Kalman filtering and neural networks*. John Wiley. New York.

- [19] Hazarika, N., Chen, J., Tsoi, A., Sergejew, A. (1997). Classification of EEG signals using the wavelet transform. *Signal Processing* 59. p. 61-72. Elsevier.
- [20] Hudson, M., Hagan, M., Demuth, H. (2010). *Neural Network Toolbox 7 User's Guide*. The MathWorks. Natick, MA.
- [21] Ilmore, American Electroencephalographic Society guidelines in electroencephalography, evoked potentials, and polysomnography, *J. Clin. Neurophysiol.*, 11 147.
- [22] Jahankhani, P., Kodogiannis, V., Revett, K. (2006). EEG signal classification using wavelet feature extraction and neural networks. *International Symposium on Modern Computing*. Harrow School of Computer Science.
- [23] James, A. (2007). *Redes Neuronales*. Alfaomega. Mexico.
- [24] Kosko, B. (1992). *Neural networks for signal processing*. Prentice Hall.
- [25] Kouro, S., Musalen, R. Tutorial introductorio a la Teoría Wavelet. *Técnicas Modernas en Automática*. p. 1-8.
- [26] Marin, J., Muñoz, P., Ibarguen, F. (Agosto de 2006). Reconocimiento de comandos de voz usando la transformada wavelet y máquinas de vectores de soporte. *Scientia et Technica*. Año XII, N° 31, UTB. ISSN 0122-1701. p. 35-40.
- [27] Márquez, P. (Julio de 2013). *Procesamiento Digital de Señales Mediante la Teoría de Wavelets*. Universidad Pontificia Comillas. Madrid.
- [28] Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., Poggi, J. (2009). *Wavelet Toolbox 4 User's Guide*. The MathWorks. Natick, MA.
- [29] Mora, B. (1995). *Reconocimiento de voz basado en el uso de redes neuronales*. UIS. Bucaramanga.
- [30] Morales, G., Prieto, I. Estudio sobre técnicas de análisis de encefalogramas basados en redes neuronales.

- [31] Orosco, L., Garcés, A., Laciari, E. (28 al 30 de septiembre de 2011). Detección de crisis epilépticas basada en la Descomposición Empírica de Modos en registros EEG intracraneales. *XVIII Congreso Argentino de Bioingeniería*. SABI (2011), VII Jornadas de Ingeniería Clínica Mar del Plata.
- [32] Proakis, J. (1998). *Tratamiento digital de señales*. Prentice Hall, tercera edición.
- [33] Rosenlicht, M. (1968). *Introduction to analysis*. Dover Publications.
- [34] Ruiz, C., Basualdo, M. *Redes neuronales: Conceptos básicos y aplicaciones*. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Rosario Departamento de Ingeniería Química Grupo de Investigación Aplicada a la Ingeniería Química (GIAIQ).
- [35] Serrano, A., Soria, E., Martín, J. (2009-2010). *Redes Neuronales Artificiales*. Vniversitat id Valencia OpenCourseWare. Curso.
- [36] Sotos, J. (Julio de 2012). *Aplicación de redes neuronales artificiales en el procesado versátil de señales electrocardiográficas*. Universidad Politécnica de Valencia.
- [37] Shaker, M. EEG Waves Classifier using Wavelet Transform and Fourier Transform. (2007). *World Academy of Science, Engineering and Technology* 3 p. 723-728.
- [38] Subasi, A. (2005). Automatic recognition of alertness level from EEG by using neural network and wavelet coefficients. *Expert Systems with Applications* 28 701-711. Elsevier.
- [39] Subasi, A., Ercelebi, E. (2005). Classification of EEG signals using neural network and logistic regression. *Computer Methods and Programs in Biomedicine* p 78, 87-99.
- [40] Valderrama, C., Ulloa, G. Análisis espectral de parámetros fisiológicos para la detección de emociones. *Revista S & T*, 10(20), p. 27-49.
- [41] Van, P. (2008). *Discrete wavelet transformations*. University of St. Thomas. Wiley-Interscience.

- [42] Walnut, D. (2002). *An introduction to wavelet analysis*. Birkhauser. Boston.
- [43] Weeks, M. (2011). *Digital signal processing using matlab and wavelets*. Segunda edición. Jones and Barlett publishers. Sudbury, MA.