

**SOBRE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
DEFORMADAS SEGÚN KANIADAKIS**

Dora Esther Deossa Casas

ESCUELA DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEDELLÍN

Junio 2011

Sobre funciones exponenciales y logarítmicas deformadas según Kaniadakis

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Dora Esther Deossa Casas

Director

Gabriel Ignacio Loaiza Ossa

Doctor en Ciencias Matemáticas



Escuela de Ciencias y Humanidades

Departamento de Ciencias Básicas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Medellín

Junio 2011

Nota de aceptación

Coordinador de la Maestría

Director del proyecto

Ciudad y fecha (día, mes, año):

Con todo mi amor a mis hijos, esposo y hermana:
mis hijos Hernán Emmanuel, José Miguel
mi esposo Hernán
mi hermana Mary

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos a la universidad EAFIT y con ella a todos los docentes que me acompañaron en el proceso de la maestría, no solo por ofrecer sus conocimientos sino también su gran calidad humana en todos los aspectos, igualmente a todas las personas que colaboraron en el proceso investigativo como el profesor Carlos Cartagena quien me brindo luz con los conceptos físicos en estas notas, a mi asesor el doctor Gabriel Ignacio Loaiza Ossa por su asesoría constante e incondicional, su acogida, confianza y desvelo para que todo marchara como debía, a mi gran compañero, amigo y maestro Hernán Monsalve por su preocupación constante y continuo acompañamiento y a toda la familia y cuando digo familia no me refiero solo a los que nos atan lazos de sangre, sino también a todas aquellas personas que soportaron con amor y firmeza algunos momentos duros, como los grandes amigos que son a todos ellos

GRACIAS, MUCHAS GRACIAS

Resumen

En esta tesis, a partir de un parámetro k , se propone una definición para el operador k -transformada deformada de Laplace, en el marco de la teoría matemática desarrollada por G. Kaniadakis para explicar fenómenos de mecánica estadística en el contexto de la relatividad especial. Cuando k tiende a cero, el nuevo operador reproduce al operador transformada de Laplace. También, respecto al operador k -transformada: se prueban algunas propiedades construyendo una teoría análoga a la que corresponde al operador transformada de Laplace usual, se usa para representar las funciones partición en la mecánica estadística de Kaniadakis y también para calcular explícitamente la función partición para un sistema de partículas idénticas en una caja de potencial. Además, la memoria de tesis presenta dos capítulos en los que divulga las k -matemáticas de Kaniadakis y su aplicación en mecánica estadística.

Índice general

Introducción	1
1. Propuesta inicial	5
1.1. Objetivos	5
2. Matemáticas deformadas según Kaniadakis	7
2.1. Álgebra deformada	7
2.2. Exponencial deformada	16
2.3. Logaritmo deformado	20
2.4. Trigonometría deformada	23
2.5. Funciones inversas deformadas	29
2.6. Suma y producto de funciones deformadas	31
2.7. El k -exponencial y el k -logaritmo	34
3. Sobre mecánica estadística de Kaniadakis	39
3.1. Motivación física a la mecánica estadística de Kaniadakis	39
3.2. Fundamentos en mecánica estadística de Kaniadakis	41
3.3. Una interpretación para el parámetro k	44
3.4. Mecánica de Kaniadakis y deformaciones según Naudts	48
3.4.1. Deformaciones según Naudts	48
3.4.2. La Entropía de Kaniadakis (caso discreto)	53
3.4.3. Relación con La Entropía de Tsallis	55
4. Operador k-transformada de Laplace	57
4.1. Definición y condiciones de existencia	58
4.2. Propiedades de \mathfrak{L}_k	64

5. Fórmulas de partición y k-transformada	81
5.1. Función de partición en el caso discreto	81
5.2. Deducción de la función partición en un gas ideal monoatómico	84
5.3. Relaciones con la k -transformada de Laplace	85
Conclusiones	91
Problemas abiertos	93
Bibliografía	95

Introducción

Así como David Hilbert y sus estudiantes proporcionaron partes significativas de la infraestructura matemática necesaria para la mecánica cuántica y la relatividad general, con frecuencia en la historia de las matemáticas, se encuentran muchos conceptos y desarrollos formales que han sido motivados por el interés en explicar fenómenos o experimentos de la física. De tal forma, en las últimas décadas han surgido investigaciones en matemáticas, y sus aplicaciones, que son motivadas por estudios en física estadística; dando lugar a teorías que aportan al progreso en matemáticas y entre una de las cuales se enmarca el desarrollo de esta tesis.

Precisamente, para describir desde el punto de vista microscópico los fenómenos termodinámicos, Boltzmann y Gibbs desarrollaron el formalismo conocido hoy como mecánica estadística o física estadística. Desde el siglo pasado, esta teoría fue objeto de profundos estudios y diferentes interpretaciones, conducentes a notorios resultados, no sólo en el desarrollo de la termoestadística, sino también en el de su aplicación a diferentes campos, tales como: teoría de información, análisis de riesgo, ecuaciones diferenciales no lineales y el análisis de sistemas complejos, entre otros. Particularmente, dos pilares de la teoría de Boltzmann y Gibbs, son: el funcional de entropía $S(\cdot)$ de Shannon, definido por

$$S((p_i)) = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i) \text{ en caso discreto o } S(f) = -k_B \int_{\Gamma} f \ln(f) \text{ en caso continuo}$$

(donde k_B es la constante de Boltzmann, $\sum_i p_i = 1$ y $\int f = 1$ respectivamente) y el principio de máxima entropía de Jaynes. Este principio establece que la función de densidad de probabilidad menos sesgada que se le puede atribuir a un sistema estadístico, es aquella que maximiza el funcional de entropía bajo ciertas condiciones fijas, esto es, aquella en la que la desinformación es mínima. Esto viene a decir que en una situación de desconocimiento de información la distribución estadística menos sesgada será aquella que contenga menos información extrínseca al problema.

Muchos experimentos en varios campos de la física como son la física nuclear, la materia condensada y astrofísica, sugieren que la descripción proporcionada de la estadística de Boltzmann-Gibbs resulta ser inadecuada para el estudio de fenómenos anómalos presentes en dichas áreas y se necesita por tanto la introducción de nuevos formalismos. Entre la amplia clase de fenómenos estudiados están la difusión anómala ([1], [2]), la turbulencia ([3],[4]), la termalización de los quarks pesados en los procesos de colisión [5], la astrofísica

con interacciones de amplio rango [6] y otros más [7], [8]. Por lo general, estos sistemas poseen una estructura multifractal, memoria a largo plazo e interacciones de amplio rango.

En años recientes el estudio de estos sistemas anómalos ha dado lugar a la necesidad de estudiar deformaciones de las funciones de densidad de probabilidad estándar y, mediante ellas, a dar formulaciones alternativas de la mecánica estadística. Los éxitos de la teoría de Boltzmann-Gibbs han sugerido que las nuevas formulaciones de la mecánica estadística deben preservar mucho de la estructura matemática y epistemológica de la teoría clásica. Es por eso que nuevas formulaciones de la entropía han sido introducidas, que deben generalizar el contexto clásico introducido por Boltzmann, Gibbs y Shanonn.

Hasta ahora, varias expresiones para la entropía con sus subyacentes estadísticas generadoras han sido introducidas, como lo son las formuladas por Druyvenstein [9], Renyi [10], Sharma-Mitta [11], Tsallis [12], Abe [13], Papa [14], Borges-Roditi [15], Landsberg-Vedral [16], Anteneodo-Plastino [17], Frank-Daffertshofer [18], entre otras. Varias de estas modificaciones del funcional de entropía pueden ser expresadas a partir de modificaciones de las funciones logaritmo y exponencial, por medio de ciertos parámetros; algunos de los cuales pueden ser interpretados físicamente. Cada reformulación del funcional de entropía da lugar a densidades de probabilidad generalizadas asociadas, deducidas por medio de un principio análogo al de Jaynes que maximice dicho funcional bajo restricciones adecuadas.

Para fines de la tesis, entre las nuevas formulaciones para el funcional de entropía resulta necesario mencionar dos. La primera definida en 1988 por Constantino Tsallis [12] cuya versión para el caso discreto es dada por

$$S_q((p_i)) = \begin{cases} k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^n (p_i)^q}{q-1}, & \text{si } q \neq 1, \\ S(p), & \text{si } q = 1, \end{cases}$$

donde q es un parámetro y k es una constante; su extensión al caso continuo se define cambiando la suma por integral sobre el respectivo conjunto de estados. Dicho funcional se puede representar por medio de la función logaritmo q -deformado, definida por $ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}$ si $q \neq 1$ y $ln_1(x) = ln(x)$, de la siguiente forma [19]

$$S_q(p) = -k_B \sum_i p_i ln_q(p_i).$$

En su dominio dicha función $ln_q(\cdot)$ es inyectiva; su respectiva inversa es llamada función exponencial q -deformada y esta dada por $\exp_q(x) = (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)}$.

La segunda formulación de funcional de entropía que interesa presentar, es la definida por G. Kaniadakis [20] a partir de un parámetro k con $-1 < k < 1$, dada por

$$S_k((p_i)) = -k_B \sum_i p_i ln_{\{k\}}\left(\frac{1}{p_i}\right) \text{ en caso discreto o } S(f) = -k_B \int_{\Gamma} f ln_{\{k\}}(f) \text{ en caso continuo,}$$

donde $ln_{\{k\}}(\cdot)$ es la función logaritmo k -deformado definida por $ln_{\{k\}}(x) = \frac{1}{2k}(x^k - x^{-k})$, que es biyectiva y a cuya inversa se le llama función exponencial k -deformada definida por $\exp_{\{k\}}(x) = (kx + \sqrt{1 + k^2 x^2})^{1/k}$.

En ambos casos, tanto las funciones logaritmo y exponencial naturales como el funcional S , de Boltzmann-Gibbs-Shanon, son recuperados en caso límite; concretamente: cuando $q \rightarrow 1$, entonces $\ln_q(\cdot) \rightarrow \ln(\cdot)$, $\exp_q(\cdot) \rightarrow \exp(\cdot)$ y $S_q(\cdot) \rightarrow S(\cdot)$, y además. cuando $k \rightarrow 0$, entonces $\ln_{\{k\}}(\cdot) \rightarrow \ln(\cdot)$, $\exp_{\{k\}}(\cdot) \rightarrow \exp(\cdot)$ y $S_k(\cdot) \rightarrow S(\cdot)$.

Ahora, las funciones logarítmicas y exponenciales deformadas (con parámetro q o k) cumplen propiedades análogas a las de las funciones logaritmo y exponencial naturales, de forma que a partir de estas nuevas funciones, se construyen otras que generalizan a funciones básicas en matemáticas. Como ejemplo se pueden citar las funciones q -deformadas de seno hiperbólico y coseno hiperbólico, dadas respectivamente por

$$\sinh_q(x) = \frac{\exp_q(x) - \exp_q(-x)}{2} \quad \text{y} \quad \cosh_q(x) = \frac{\exp_q(x) + \exp_q(-x)}{2}.$$

Dichas funciones permiten una reformulación de la trigonometría hiperbólica, la cual recupera a la trigonometría hiperbólica cuando $q \rightarrow 1$. Al respecto, en la tesis doctoral que C. Tsallis dirigió a E. P. Borges [19], se muestran varias teorías reformuladas, por ejemplo de: q -trigonometría (hiperbólica y circular), funciones q -gaussianas, q -transformada de Laplace, q -onduletas y estructuras algebraicas q -deformadas. De tal forma, C. Tsallis ha desarrollado una teoría matemática q -deformada y, por su parte, G. Kaniadakis lo ha hecho análogamente con k -deformaciones.

La teoría matemática de Tsallis se ha introducido a partir de 1988, por lo que cuenta con más resultados y aplicaciones que la de Kaniadakis introducida desde 2001. A diferencia de la teoría de Tsallis, la de Kaniadakis aún no cuenta con desarrollos en análisis armónico (onduletas, transformada de Fourier y transformada de Laplace).

El objeto de la presente tesis es proponer una teoría sobre la transformada de Laplace k -deformada, de manera que sea aplicable en marcos teóricos de mecánica estadística, y además divulgar tanto la teoría matemática de G. Kaniadakis como algunos aspectos relevantes de su aplicación en el marco físico que inspiró dicha teoría; la relatividad especial.

Respecto a la estructura del documento: en el primer capítulo se plantean los objetivos, en el segundo y tercero se presenta la divulgación de la teoría matemática de G. Kaniadakis y de su aplicación en mecánica estadística, en el cuarto se presenta tanto la propuesta del operador k -transformada de Laplace como algunas propiedades importantes del mismo y, finalmente, en el quinto capítulo se usa el operador k -transformada para representar funciones partición en la mecánica estadística de Kaniadakis; lo que permite mostrar el uso de la k -transformada para calcular explícitamente la función partición para un sistema de partículas idénticas en una caja de potencial.

Capítulo 1

Propuesta inicial

1.1. Objetivos

Objetivos generales

1. Definir un operador \mathfrak{L}_k que se propondrá como k -transformada de Laplace en el marco de la teoría matemática de G. Kaniadakis, probando además algunas propiedades de \mathfrak{L}_k de manera que pueda ser usado en mecánica estadística.
2. Divulgar aspectos relevantes de la teoría matemática de G. Kaniadakis y contextualizarla en su origen; la mecánica estadística involucrada en la relatividad especial.

Objetivos específicos

1. Definir el operador \mathfrak{L}_k y su respectivo operador inverso, estableciendo condiciones suficientes para su existencia.
2. Presentar propiedades del operador \mathfrak{L}_k , análogas a las de la transformada de Laplace.
3. Emplear el operador \mathfrak{L}_k para expresar las funciones de partición en la mecánica estadística de Kaniadakis.
4. Divulgar la teoría matemática de Kaniadakis y algunos aspectos de su aplicación en mecánica estadística.

Capítulo 2

Matemáticas deformadas según Kaniadakis

El planteamiento y muchos aspectos básicos de las matemáticas k -deformadas, según G. Kaniadakis, aparecen en varios artículos recientes, en los cuales la mayoría de resultados básicos se presentan sin demostración. En este sentido, G. Kaniadakis, en el artículo "Statistical mechanics in the context of special relativity"[21], presentó en el año 2002 una breve pero detallada y precisa compilación de resultados matemáticos.

El presente capítulo expone los resultados básicos de las matemáticas k -deformada, según G. Kaniadakis, incluyendo las demostraciones de los mismos. La mayoría de dichos resultados aparecen en [21], por lo que se presentarán sin cita; sólo se citarán aquellos resultados que correspondan a otros artículos.

2.1. Álgebra deformada

G. Kaniadakis consideró una forma de introducir deformaciones que dependan de un parámetro real k y para ello considera la clase de funciones real-ampliadas de variable real-ampliada g , a las cuales denomina **funciones generadoras de la deformación**, tales que satisfagan la siguientes propiedades:

- i) g es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$; continuamente infinitamente diferenciables.
- ii) $g(-x) = -g(x)$, para cada número real x .
- iii) $\frac{dg(x)}{dx} > 0$.
- iv) $g(\pm\infty) = \pm\infty$.
- v) $g(x) \rightarrow x$, cuando $x \rightarrow 0$.

Dados un parámetro real k y una función generadora de deformación g , se introduce la función real de la variable real, denotada por $x_{\{k\}}$ y definida: para $k \neq 0$ por $x_{\{k\}} := y(x)$ tal que y sea solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(kx)}{\sqrt{1 + [g(kx)]^2}}, \quad y(0) = 0$$

y por $x_{\{0\}} = x$. De tal forma, $y(x) = \frac{1}{k} \ln(\sqrt{1 + [g(kx)]^2} + g(kx)) + C$, es decir,

$$y(x) = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,sen} hg(kx) + C.$$

Ahora bien, como $g(kx) \rightarrow kx$, cuando $x \rightarrow 0$ y g es continua por ser de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, resulta que $g(0) = 0$. De lo anterior y dado que $y(0) = 0$, se sigue que $C = 0$, por lo que

$$y(x) = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,sen} hg(kx)$$

y se adopta la notación

$$x_{\{k\}} := \frac{1}{k} \operatorname{arcsenh}(g(kx)). \quad (2.1)$$

Las siguientes propiedades se heredan directamente de las correspondientes propiedades de una función generadora g .

- i) $x_{\{k\}}$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.
- ii) $(-x)_{\{k\}} = -x_{\{k\}}$.
- iii) $\frac{dx_{\{k\}}}{dx} > 0$.
- iv) $(\pm\infty)_{\{k\}} = \pm\infty$.
- v) $x_{\{k\}} \rightarrow x$, para $x \rightarrow 0$ y entonces $0_{\{k\}} = 0$.
- vi) $x_{\{k\}} \rightarrow x$, para $k \rightarrow 0$, lo cual da sentido a la definición que establece $x_{\{0\}} = x$.
- vii) $(x)_{\{-k\}} = x_{\{k\}}$.

Ahora, la función $x_{\{k\}}$ es estrictamente creciente en su dominio, por tanto existe su función inversa. Sea $y = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,sen} hg(kx)$, por lo que

$$x = \frac{1}{k} g^{-1}(\operatorname{senh} ky)$$

e intercambiando x , y se tiene $y = \frac{1}{k} g^{-1}(\operatorname{senh} kx)$. La anterior es función inversa de $x_{\{k\}}$ que será denotada por $x^{\{k\}}$, esto es,

$$x^{\{k\}} = \frac{1}{k} g^{-1}(\operatorname{senh}(kx)). \quad (2.2)$$

y por lo tanto,

$$(x^{\{k\}})_{\{k\}} = (x_{\{k\}})^{\{k\}} = x.$$

La suma de números reales puede ser generalizada como sigue. La **suma k -deformada**, o **k -suma** es la ley de composición $\overset{k}{\oplus}$ definida por

$$x \overset{k}{\oplus} y := (x_{\{k\}} + y_{\{k\}})^{\{k\}} = \frac{1}{k} g^{-1}[\operatorname{senh}[\operatorname{arcsenh}(g(kx)) + \operatorname{arcsenh}(g(ky))]]. \quad (2.3)$$

Es de resaltar que será muy útil expresar lo anterior mediante

$$(x \overset{k}{\oplus} y)_{\{k\}} = x_{\{k\}} + y_{\{k\}}$$

y que la k -suma se reduce a la suma usual cuando $k \rightarrow 0$, esto es,

$$x \overset{0}{\oplus} y = x + y.$$

Proposición 2.1.1. *La estructura algebraica $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus})$ es un grupo abeliano.*

Demostración.

1) Para simplificar argumentaciones, se inicia la prueba con la propiedad conmutativa:

$$x \overset{k}{\oplus} y = y \overset{k}{\oplus} x.$$

$$\begin{aligned} x \overset{k}{\oplus} y &= [(x \overset{k}{\oplus} y)_{\{k\}}]^{\{k\}} \\ &= [x_{\{k\}} + y_{\{k\}}]^{\{k\}} \\ &= [(y \overset{k}{\oplus} x)_{\{k\}}]^{\{k\}} \\ &= y \overset{k}{\oplus} x. \end{aligned}$$

2) Propiedad asociativa: $(x \overset{k}{\oplus} y) \overset{k}{\oplus} z = x \overset{k}{\oplus} (y \overset{k}{\oplus} z)$.

$$\begin{aligned} (x \overset{k}{\oplus} y) \overset{k}{\oplus} z &= [(x \overset{k}{\oplus} y) \overset{k}{\oplus} z]_{\{k\}}^{\{k\}} \\ &= ((x \overset{k}{\oplus} y)_{\{k\}} + z_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= ((x_{\{k\}} + y_{\{k\}}) + z_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= (x_{\{k\}} + (y_{\{k\}} + z_{\{k\}}))^{\{k\}} \\ &= (x_{\{k\}} + (y \overset{k}{\oplus} z)_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= [x \overset{k}{\oplus} (y \overset{k}{\oplus} z)]_{\{k\}}^{\{k\}} \\ &= x \overset{k}{\oplus} (y \overset{k}{\oplus} z). \end{aligned}$$

3) Elemento neutro: el número real cero es el neutro k -aditivo, esto es, $x \overset{k}{\oplus} 0 = 0 \overset{k}{\oplus} x = x$.

$$\begin{aligned}
 x \overset{k}{\oplus} 0 &= [(x \overset{k}{\oplus} 0)_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= [x_{\{k\}} + 0_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= [x_{\{k\}} + 0]_{\{k\}} \\
 &= [x_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

4) Elementos inversos: el inverso k -aditivo de un real x es $-x$, esto es,

$$x \overset{k}{\oplus} (-x) = (-x) \overset{k}{\oplus} x = 0.$$

$$\begin{aligned}
 x \overset{k}{\oplus} (-x) &= [(x \overset{k}{\oplus} (-x))_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= [x_{\{k\}} + (-x)_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= [x_{\{k\}} - x_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= [0_{\{k\}}]_{\{k\}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Como es de esperar, la k -**diferencia** indicada con $\overset{k}{\ominus}$ es definida por

$$x \overset{k}{\ominus} y = x \overset{k}{\oplus} (-y).$$

También se introduce el k -**producto** mediante la ley de composición $\overset{k}{\otimes}$, definida por

$$x \overset{k}{\otimes} y := (x_{\{k\}} \cdot y_{\{k\}})_{\{k\}} = \frac{1}{k} g^{-1}(\sinh[\operatorname{arcsenh}(g(kx)) \cdot \operatorname{arcsenh} g(ky)]). \quad (2.4)$$

Nuevamente $\overset{k}{\otimes}$ se reduce al producto usual cuando $k \rightarrow 0$, esto es,

$$x \overset{0}{\otimes} y = xy.$$

Proposición 2.1.2. *La estructura algebraica $(\mathbb{R} - \{0\}, \overset{k}{\otimes})$ es un grupo abeliano.*

Demostración.

1) Ley asociativa: $(x \overset{k}{\otimes} y) \overset{k}{\otimes} z = x \overset{k}{\otimes} (y \overset{k}{\otimes} z)$

$$\begin{aligned}
(x \otimes y) \otimes z &= ((x \otimes y) \otimes z)_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= ((x \otimes y)_{\{k\}} \cdot z_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= ((x_{\{k\}} \cdot y_{\{k\}}) \cdot z_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= (x_{\{k\}} \cdot (y_{\{k\}} \cdot z_{\{k\}}))_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= (x_{\{k\}} \cdot (y \otimes z)_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= ([x \otimes (y \otimes z)]_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= x \otimes (y \otimes z)
\end{aligned}$$

2) Elemento neutro: el elemento neutro k -multiplicativo es $I = 1^{\{k\}}$, esto es $x \otimes I = I \otimes x = x$.

$$\begin{aligned}
x \otimes I &= [(x \otimes I)_{\{k\}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= [x_{\{k\}} \cdot I_{\{k\}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= [x_{\{k\}}(1^{\{k\}})_{\{k\}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= (x_{\{k\}} \cdot 1)_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= (x_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} = x.
\end{aligned}$$

3) Elemento inverso: para cada real $x \neq 0$ el inverso k -multiplicativo es $\bar{x} = \left(\frac{1}{x_{\{k\}}}\right)_{\{k\}}^{\{k\}}$, es decir, $x \otimes \bar{x} = \bar{x} \otimes x = I$.

$$\begin{aligned}
x \otimes \bar{x} &= [(x \otimes \bar{x})_{\{k\}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= [x_{\{k\}} \cdot \bar{x}_{\{k\}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= (x_{\{k\}} \cdot [(\frac{1}{x_{\{k\}}})_{\{k\}}]_{\{k\}})_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= [x_{\{k\}} \cdot \frac{1}{x_{\{k\}}}]_{\{k\}}^{\{k\}} \\
&= 1^{\{k\}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la prueba de la propiedad conmutativa es inmediata debido a la definición del k -producto.

□

Desde luego la k -**división** $\overset{k}{\otimes}$ está definida por

$$x \overset{k}{\otimes} y = x \overset{k}{\otimes} \bar{y} = x \overset{k}{\otimes} \left(\frac{1}{y_{\{k\}}} \right)^{\{k\}}.$$

Con las deformaciones de las operaciones aritméticas usuales, los reales constituyen un campo, como afirma el teorema siguiente.

Proposición 2.1.3. *La suma deformada $\overset{k}{\oplus}$ y el producto deformado $\overset{k}{\otimes}$ satisface la ley distributiva, esto es,*

$$z \overset{k}{\otimes} (x \overset{k}{\oplus} y) = (z \overset{k}{\otimes} x) \overset{k}{\oplus} (z \overset{k}{\otimes} y) \quad (2.5)$$

y por tanto la estructura algebraica $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus}, \overset{k}{\otimes})$ es un campo.

Demostración. Ya se probó que $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus})$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \overset{k}{\otimes})$ son grupos abelianos, falta probar la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} z \overset{k}{\otimes} (x \overset{k}{\oplus} y) &= ([z \overset{k}{\otimes} (x \overset{k}{\oplus} y)]_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= (z_{\{k\}} \cdot (x \overset{k}{\oplus} y)_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= (z_{\{k\}} \cdot (x_{\{k\}} + y_{\{k\}}))^{\{k\}} \\ &= (z_{\{k\}} \cdot x_{\{k\}} + z_{\{k\}} \cdot y_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= ((z \overset{k}{\otimes} x)_{\{k\}} + (z \overset{k}{\otimes} y)_{\{k\}})^{\{k\}} \\ &= (z \overset{k}{\otimes} x) \overset{k}{\oplus} (z \overset{k}{\otimes} y). \end{aligned}$$

□

Se puede observar que el campo $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus}, \overset{k}{\otimes})$ es isomorfo con el campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Más aún, para $k \neq 0$, $z \cdot (x \overset{k}{\oplus} y) \neq (z \cdot x) \overset{k}{\oplus} (z \cdot y)$ y la estructura $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus}, \cdot)$ no es un campo.

Para probar el isomorfismo, sea $f : \langle \mathbb{R}, \overset{k}{\oplus}, \overset{k}{\otimes} \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, definida por $f(x_{\{k\}}) = x_{\{0\}} = x$. La función f es inyectiva ya que

$$f(x_{\{k\}}) = f(y_{\{k\}}) \Rightarrow x_{\{0\}} = y_{\{0\}} \Rightarrow x = y.$$

También, f es sobreyectiva ya que para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x = y^{\{0\}}$ tal que

$$f(x) = f(y^{\{0\}}) = (y^{\{0\}})_{\{0\}} = y$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f((x \overset{k}{\oplus} y)_{\{k\}}) &= (x \overset{k}{\oplus} y)_{\{0\}} = x_{\{0\}} + y_{\{0\}} \\ &= x + y \\ &= f(x_{\{k\}}) + f(y_{\{k\}}) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} f((x \overset{k}{\otimes} y)_{\{k\}}) &= (x \overset{k}{\otimes} y)_{\{0\}} = x_{\{0\}} \cdot y_{\{0\}} \\ &= x \cdot y \\ &= f(x_{\{k\}}) \cdot f(y_{\{k\}}). \end{aligned}$$

De tal forma $(\mathbb{R}, \overset{k}{\oplus}, \overset{k}{\otimes})$ es campo isomorfo a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Proposición 2.1.4. *La función $x^{\{k\}}$ tiene las propiedades*

$$x^{\{k\}} \overset{k}{\oplus} y^{\{k\}} = (x + y)^{\{k\}} \quad y \quad x^{\{k\}} \overset{k}{\otimes} y^{\{k\}} = (x \cdot y)^{\{k\}}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x^{\{k\}} \overset{k}{\oplus} y^{\{k\}} &= [(x^{\{k\}} \overset{k}{\oplus} y^{\{k\}})_{\{k\}}]_{\{k\}} \\ &= [(x^{\{k\}})_{\{k\}} + (y^{\{k\}})_{\{k\}}]_{\{k\}} \\ &= (x + y)^{\{k\}}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x^{\{k\}} \overset{k}{\otimes} y^{\{k\}} &= [(x^{\{k\}} \overset{k}{\otimes} y^{\{k\}})_{\{k\}}]_{\{k\}} \\ &= [(x^{\{k\}})_{\{k\}} \cdot (y^{\{k\}})_{\{k\}}]_{\{k\}} \\ &= (x \cdot y)^{\{k\}}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.5. *La función $x_{\{k\}}$ y su inversa $x^{\{k\}}$ cumplen las siguientes leyes de escala:*

$$(zx)_{\{k/z\}} = zx_{\{k\}} \quad y \quad (zx)^{\{k/z\}} = zx^{\{k\}}.$$

Demostración. Sean

$$x' = zx \quad y \quad k' = \frac{k}{z}.$$

$$\begin{aligned}
x'_{\{k'\}} &= \frac{1}{k'} \operatorname{arcsenh} g(k'x') = \frac{1}{k/z} \operatorname{arcsenh} g\left((zx)\frac{k}{z}\right) \\
&= \frac{z}{k} \operatorname{arcsenh} g(kx) = z\left(\frac{1}{k} \operatorname{arcsenh} g(kx)\right) \\
&= zx_{\{k\}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x'^{\{k'\}} &= \frac{1}{k'} g^{-1}(\operatorname{senh}(k'x)) = \frac{1}{k/z} g^{-1}(\operatorname{senh} zx\frac{k}{z}) \\
&= \frac{z}{k} g^{-1}(\operatorname{senh} kx) = z\left(\frac{1}{k} g^{-1}(\operatorname{senh} kx)\right) \\
&= zx^{\{k\}}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.6. *Se verifica la siguiente ley pseudo-distributiva*

$$z \cdot (x \oplus^k y) = (z \cdot x) \oplus^{k/z} (z \cdot y)$$

y en consecuencia la estructura $(\mathbb{R}, \oplus^k, \cdot)$ es un pseudo-campo.

Demostración. Sea $x' = zx$ y $k' = \frac{k}{z}$.

$$\begin{aligned}
z \cdot (x \oplus^k y) &= z \cdot ((x \oplus^k y)_{\{k\}})^{\{k\}} \\
&= z \cdot (x_{\{k\}} + y_{\{k\}})^{\{k\}} = z \cdot \left(\frac{1}{z} x'_{\{k'\}} + \frac{1}{z} y'_{\{k'\}}\right)^{\{k\}} \\
&= z \cdot \left(\frac{1}{z} (x'_{\{k'\}} + y'_{\{k'\}})\right)^{\{k\}} = z \cdot \left(\frac{1}{z} (x' \oplus^{k'} y')\right)^{\{k\}} \\
&= \left[z \cdot \left(\frac{1}{z} (x' \oplus^{k'} y')\right)_{\{k'\}}\right]^{\{k'\}} \\
&= [(x' \oplus^{k'} y')_{\{k'\}}]^{\{k'\}} \\
&= x' \oplus^{k'} y' \\
&= (z \cdot x) \oplus^{k/z} (z \cdot y)
\end{aligned}$$

□

Hasta el momento, se han presentado las k -operaciones $(\oplus^k, \ominus^k, \otimes^k \text{ y } \oslash^k)$, dependiendo de alguna función generadora g . La teoría desarrollada en el resto de esta tesis, se hará

tomando en particular a la función identidad ($g(x) = x$) como función generadora. De tal forma se tiene lo siguiente.

Las funciones $x_{\{k\}}$ y $x^{\{k\}}$ definidas por (2.1) y (2.2) son

$$x_{\{k\}} := \frac{1}{k} \operatorname{arcsenh}(kx). \quad (2.6)$$

$$x^{\{k\}} = \frac{1}{k} \operatorname{senh}(kx). \quad (2.7)$$

La k -suma y el k -producto son dadas respectivamente por

$$x \oplus^k y = \frac{1}{k} \operatorname{senh}[\operatorname{arcsenh}(kx) + \operatorname{arcsenh}(ky)] \quad (2.8)$$

$$x \otimes^k y = \frac{1}{k} \operatorname{senh}[\operatorname{arcsenh}(kx) \cdot \operatorname{arcsenh}(ky)] \quad (2.9)$$

En particular, la k -suma asume una forma muy simple dada por

$$x \oplus^k y = x\sqrt{1 + k^2y^2} + y\sqrt{1 + k^2x^2} \quad (2.10)$$

En efecto; si $w = \operatorname{arcsenh}(kx)$ y $z = \operatorname{arcsenh}(ky)$ (y por tanto $kx = \operatorname{senh}w$, $ky = \operatorname{senh}z$), entonces (2.3) se transforma como sigue:

$$\begin{aligned} x \oplus^k y &= \frac{1}{k} \operatorname{senh}[\operatorname{arcsenh}(kx) + \operatorname{arcsenh}(ky)] \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{senh}(w + z) \\ &= \frac{1}{k} [\operatorname{senh}w \operatorname{cosh}z + \operatorname{cosh}w \operatorname{senh}z] \\ &= \frac{1}{k} [kx\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2z} + ky\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2w}] \\ &= x\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2z} + y\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2w} \\ &= x\sqrt{1 + (ky)^2} + y\sqrt{1 + (kx)^2} \\ &= x\sqrt{1 + k^2y^2} + y\sqrt{1 + k^2x^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$x \ominus^k y = x\sqrt{1 + k^2y^2} - y\sqrt{1 + k^2x^2}. \quad (2.11)$$

La diferencia de cuadrados también se puede escribir en términos de lo que se podría llamar producto de k -conjugadas, esto se expresa a continuación y será útil más adelante.

$$(x \oplus^k y)(x \ominus^k y) = x^2 - y^2. \quad (2.12)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(x \overset{k}{\oplus} y)(x \overset{k}{\ominus} y) &= (x \overset{k}{\oplus} y)(x \overset{k}{\oplus} (-y)) \\
&= (x\sqrt{1+k^2y^2} + y\sqrt{1+k^2x^2})(x\sqrt{1+k^2y^2} - y\sqrt{1+k^2x^2}) \\
&= x^2(1+k^2y^2) - y^2(1+k^2x^2) \\
&= x^2 + k^2x^2y^2 - y^2 - k^2x^2y^2 \\
&= x^2 - y^2
\end{aligned}$$

□

2.2. Exponencial deformada

La función exponencial k -deformada se puede introducir mediante una modificación del concepto de derivada (a derivada k -deformada), de manera que la función que se llamará exponencial k -deformada quede invariante bajo dicha derivada. A continuación se presenta la modificación de la derivada propuesta por Kaniadakis, con la cual se pueden extender mejor las propiedades de la función exponencial natural, a las de las funciones exponenciales k -deformadas.

Se introduce el conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^\infty(\mathbb{R})\}$. Se define la k -**derivada** para las funciones f del conjunto \mathcal{F} por

$$\frac{df(x)}{d_{\{k\}}x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(x) - f(z)}{x \overset{k}{\ominus} z}. \quad (2.13)$$

El k -diferencial $d_{\{k\}}x$ se define por $dx_{\{k\}} = d_{\{k\}}x$.

Se observa que la k -derivada, la cual se reduce a la forma usual cuando k tiende a cero, puede ser escrita de la siguiente forma

$$\frac{df(x)}{d_{\{k\}}x} = \frac{df(x)}{dx_{\{k\}}} = \frac{1}{dx_{\{k\}}/dx} \cdot \frac{df(x)}{dx}, \quad (2.14)$$

de donde

$$\frac{df(x)}{d_{\{k\}}x} = \frac{1}{1/\sqrt{1+k^2x^2}} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \sqrt{1+k^2x^2} \cdot \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.15)$$

De lo anterior es claro que la k -derivada es regida por las mismas reglas de la derivada usual u ordinaria.

Ahora bien, se define la función **exponencial k -deformada** o **k -exponencial** por

$$\exp_{\{k\}}(x) := \exp(x_{\{k\}}) = \exp(\operatorname{arcsenh}(kx)), \quad \text{si } k \neq 0 \quad \text{y} \quad \exp_0(x) = \exp(x), \quad (2.16)$$

Para $k \neq 0$, se puede expresar la función k -exponencial por

$$\exp_{\{k\}}(x) = (\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}}. \quad (2.17)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \exp_{\{k\}}(x) &= \exp(x_{\{k\}}) \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} \operatorname{arcsenh} kx\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} \ln(\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)\right) \\ &= \exp(\ln(\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}}) \\ &= (\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la forma en que se aproximan los k -exponenciales al exponencial natural.

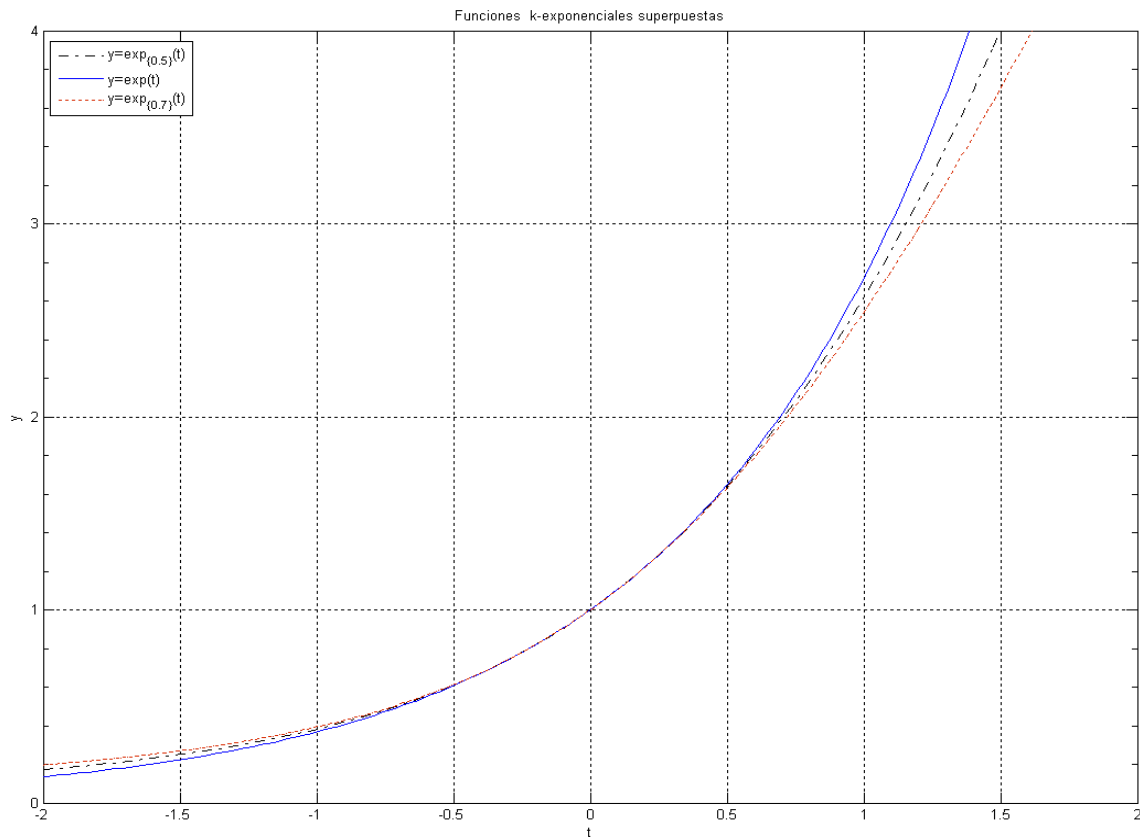


Figura 2.1: en el primer cuadrante $\exp_{\{k\}}$ es menor que \exp y en el segundo la situación se invierte.

La función k -exponencial es función propia para la k -derivada en el siguiente sentido,

$$\frac{d}{d_{\{k\}}x} \exp_{\{k\}}(x) = \exp_{\{k\}}(x). \quad (2.18)$$

Demostración. Para probar lo anterior, se verá primero que

$$\frac{d}{dx} [\exp_{\{k\}}(x)] = \frac{\exp_{\{k\}}(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}, \quad (2.19)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\exp_{\{k\}}(x)] &= \frac{d}{dx} [(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{\frac{1}{k}}] \\ &= \frac{1}{k} [(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{\frac{1}{k}-1}] \left[\frac{2k^2x}{2\sqrt{1+k^2x^2}} + k \right] \\ &= \frac{1}{k} [(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{\frac{1}{k}-1}] \left[\frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}} + k \right] \\ &= \frac{1}{k} [(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{\frac{1}{k}-1}] \left[\frac{k^2x + k\sqrt{1+k^2x^2}}{k\sqrt{1+k^2x^2}} \right] \\ &= [(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)^{\frac{1}{k}-1}] \left[\frac{kx + \sqrt{1+k^2x^2}}{\sqrt{1+k^2x^2}} \right] \\ &= \frac{\exp(x_{\{k\}})}{\sqrt{1+k^2x^2}} \\ &= \frac{\exp_{\{k\}}(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (2.15) se sigue precisamente lo que propone (2.18). \square

De otro lado, se verifica también una simetría respecto al parámetro de deformación, esto es,

$$\exp_{\{-k\}}(x) = \exp_{\{k\}}(x).$$

En efecto,

$$\exp_{\{-k\}}(x) = \exp(x_{\{-k\}}) = \exp(x_{\{k\}}) = \exp_{\{k\}}(x).$$

A continuación se verá que el k -exponencial tiene justamente las propiedades de la exponencial ordinaria.

$$\exp_{\{k\}}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (2.20)$$

La función k -exponencial es un elemento de \mathcal{F} , es definida como la función propia de la k -derivada $\frac{d}{d_{\{k\}}} \exp_{\{k\}}(x) = \exp_{\{k\}}(x)$, este hecho garantiza que $\exp_{\{k\}}(x)$ es de clase $C^\infty\mathbb{R}$ y que

$$\frac{d}{dx} \exp_{\{k\}}(x) > 0. \quad (2.21)$$

Es claro que $\exp_{\{k\}}(-\infty) = 0^+$, $\exp_{\{k\}}(0) = 1$ y $\exp_{\{k\}}(+\infty) = +\infty$. Además,

$$\exp_{\{k\}}(x) \exp_{\{k\}}(-x) = 1 \quad (2.22)$$

ya que

$$\begin{aligned} \exp_{\{k\}}(x) \exp_{\{k\}}(-x) &= (\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}} (\sqrt{1 + k^2 x^2} - kx)^{\frac{1}{k}} \\ &= [1 + k^2 x^2 - k^2 x^2]^{\frac{1}{k}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De otro lado, el k -exponencial tiene las dos propiedades

$$(\exp_{\{k\}}(x))^r = \exp_{\{k/r\}}(rx) \quad \text{y} \quad \exp_{\{k\}}(x) \exp_{\{k\}}(y) = \exp_{\{k\}}(x \oplus^k y) \quad (2.23)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} (\exp_{\{k\}}(x))^r &= ((\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}})^r \\ &= (\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{r}{k}} \\ &= (\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2} r^2 x^2 + \frac{k}{r} rx})^{\frac{1}{k/r}} \\ &= (\sqrt{1 + \frac{k^2}{r} (rx)^2 + \frac{k}{r} rx})^{\frac{1}{k/r}} \\ &= (\sqrt{1 + k_1^2 z^2 + k_1 z})^{\frac{1}{k_1}}, k_1 = \frac{k}{r}, z = rx \\ &= \exp_{\{k_1\}}(z) \\ &= \exp_{\{\frac{k}{r}\}}(rx) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \exp_{\{k\}}(x) \exp_{\{k\}}(y) &= \exp(x_{\{k\}}) \exp(y_{\{k\}}) \\ &= \exp(x_{\{k\}} + y_{\{k\}}) \\ &= \exp((x \oplus^k y)_{\{k\}}) \\ &= \exp_{\{k\}}(x \oplus^k y). \end{aligned}$$

□

Para terminar esta sección se verificará que efectivamente, $\lim_{k \rightarrow 0} \exp_{\{k\}}(x) = e^x$.

sea $y = (\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)^{\frac{1}{k}}$, con lo cual $\ln y = \frac{\ln(\sqrt{1 + k^2 x^2} + kx)}{k}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)}{k} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+k^2x^2} + kx)} \left(x + \frac{kx^2}{\sqrt{1+k^2x^2}} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2} + kx} \cdot \frac{\sqrt{1+k^2x^2} + kx^2}{\sqrt{1+k^2x^2}} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+k^2x^2}} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{k \rightarrow 0} y = e^x$ y así $\lim_{k \rightarrow 0} \exp_{\{k\}}(x) = e^x$.

2.3. Logaritmo deformado

La función k -**logaritmo** $\ln_{\{k\}}(\cdot)$ es definida como la función inversa del k -exponencial, es decir, la que cumple

$$\ln_{\{k\}}(\exp_{\{k\}}(x)) = \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(x)) = x$$

y está dado por

$$\ln_{\{k\}}(x) := (\ln x)^{\{k\}} = \frac{1}{k} \sinh(k \ln x). \quad (2.24)$$

De lo cual resulta que

$$\ln_{\{0\}}(x) = \ln x$$

$\ln_{\{k\}}(x) = \frac{1}{k} \sinh(k \ln x)$ o más apropiadamente

$$\ln_{\{k\}}(x) = \frac{x^k - x^{-k}}{2k}. \quad (2.25)$$

También se observa que $\ln_{\{-k\}}(x) = \frac{x^{-k} - x^k}{-2k} = \frac{x^k - x^{-k}}{2k} = \ln_{\{k\}}(x)$.

La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de los logaritmos k -deformados respecto a la de logaritmo natural.

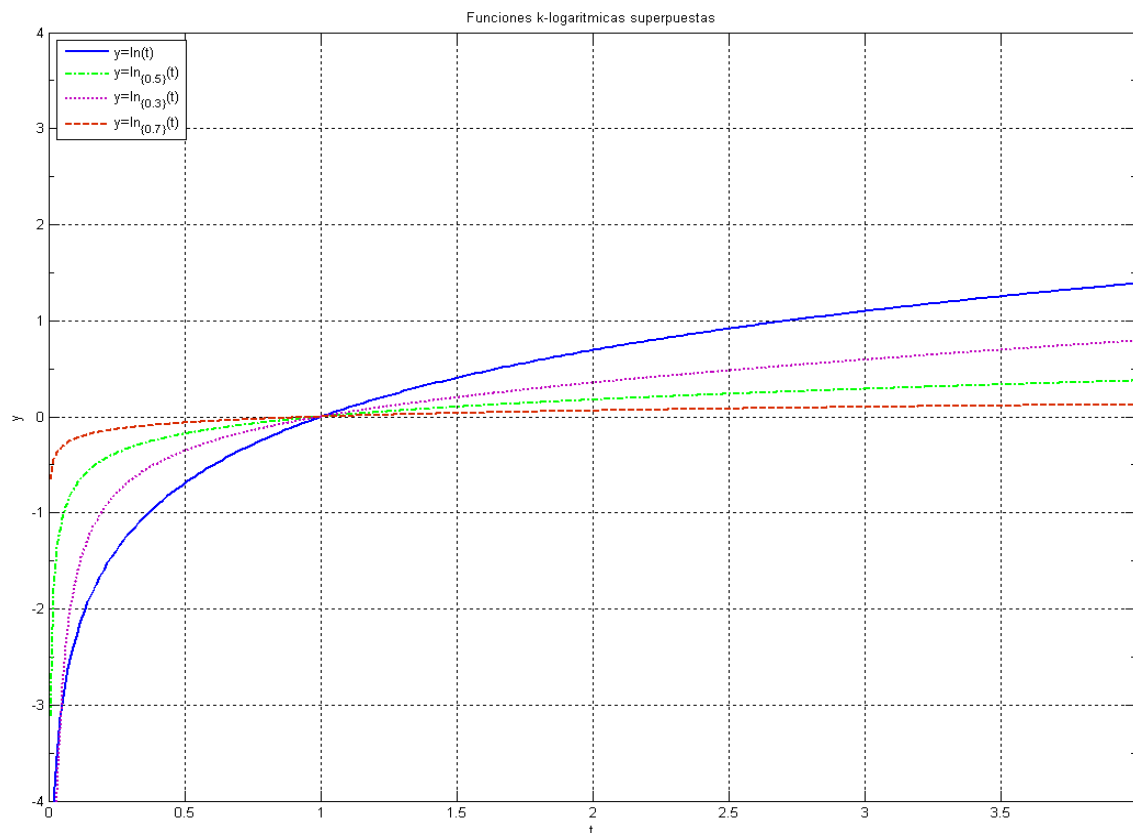


Figura 2.2: después de $t = 1$, la gráfica de $\ln_{\{k\}}(\cdot)$ es menor que la de $\ln(\cdot)$ y para $0 < t < 1$ la situación se invierte.

El k -logaritmo, como el logaritmo ordinario, cumple las siguientes propiedades.

1. $\ln_{\{k\}}(\cdot)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

La prueba es evidente, debido a la forma en que se define $\ln_{\{k\}}(\cdot)$.

2. El k -logaritmo es función no decreciente.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln_{\{k\}}(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^k - x^{-k}}{2k} \right] \\ &= \frac{kx^{k-1} + kx^{-k-1}}{2k} \\ &= \frac{x^{k-1} + x^{-k-1}}{2} \\ &> 0, \text{ pues } x > 0. \end{aligned}$$

□

3. $\ln_{\{k\}}(0^+) = -\infty$.

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \ln_{\{k\}}(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_{\{k\}}(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^k - x^{-k}}{2k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2k} - 1}{2kx^k} \\
 &= \frac{-1}{0^+} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

□

4. $\ln_{\{k\}}(1) = 0$.

5. $\ln_{\{k\}}(+\infty) = +\infty$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \ln_{\{k\}}(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln_{\{k\}}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k - x^{-k}}{2k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2k} - 1}{2kx^k} = \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2k} - 1}{x^k} \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

□

6. $\ln_{\{k\}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln_{\{k\}}(x)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \ln_{\{k\}}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{x}\right)^{-k}}{2k} = \frac{(x^{-1})^k - (x^{-1})^{-k}}{2k} \\
 &= \frac{x^{-k} - x^k}{2k} = \frac{-(x^k - x^{-k})}{2k} \\
 &= -\frac{x^k - x^{-k}}{2k} \\
 &= -\ln_{\{k\}}(x)
 \end{aligned}$$

□

7. $\ln_{\{k\}}(x^r) = r \ln_{\{rk\}}(x)$, para todo real r .

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \ln_{\{k\}}(x^r) &= \frac{(x^r)^k - (x^r)^{-k}}{2k} \\
 &= \frac{x^{rk} - x^{-rk}}{2k} \\
 &= r \left(\frac{x^{rk} - x^{-rk}}{2rk} \right) \\
 &= r \left(\frac{x^w - x^{-w}}{2w} \right), \quad w = rk \\
 &= r \ln \{w\}(x) \\
 &= r \ln \{rk\}(x)
 \end{aligned}$$

□

$$8. \ln_{\{k\}}(xy) = \ln_{\{k\}}(x) \oplus^k \ln_{\{k\}}(y).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \ln_{\{k\}}(xy) &= (\ln xy)^{\{k\}} \\
 &= (\ln x + \ln y)^{\{k\}} \\
 &= (\ln x)^{\{k\}} \oplus^k (\ln y)^{\{k\}} \\
 &= \ln_{\{k\}}(x) \oplus^k \ln_{\{k\}}(y)
 \end{aligned}$$

□

2.4. Trigonometría deformada

La trigonometría circular k -deformada se define a partir de la trigonometría hiperbólica k -deformada, la cual se inicia con las definiciones de seno y coseno k -hiperbólicos como sigue:

$$\sinh_{\{k\}}(x) = \frac{\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)}{2} \quad (2.26)$$

y

$$\cosh_{\{k\}}(x) = \frac{\exp_{\{k\}}(x) + \exp_{\{k\}}(-x)}{2}. \quad (2.27)$$

Teniendo en cuenta que según las expresiones anteriores, $\sinh_k(\cdot)$ es función impar y que $\cosh_k(\cdot)$ es función par, al sumar las dos anteriores expresiones se obtiene la k -fórmula Euler dada por

$$\exp_{\{k\}}(\pm x) = \cosh_{\{k\}}(x) \pm \sinh_{\{k\}}(x). \quad (2.28)$$

Es directo introducir la trigonometría k -hiperbólica, la cual se reduce a la ordinaria cuando $k \rightarrow 0$, por ejemplo, las fórmulas

$$\cosh_{\{k\}}^2(x) - \sinh_{\{k\}}^2(x) = 1 \quad (2.29)$$

$$\tanh_{\{k\}}(x) = \frac{\sinh_{\{k\}}(x)}{\cosh_{\{k\}}(x)} \quad (2.30)$$

$$\coth_{\{k\}}(x) = \frac{\cosh_{\{k\}}(x)}{\sinh_{\{k\}}(x)} \quad (2.31)$$

siguen siendo válidas.

Todas las fórmulas de la trigonometría hiperbólica ordinaria siguen siendo válidas después de una deformación apropiada. La deformación de una fórmula dada puede ser obtenida comenzando con la correspondiente fórmula no deformada, haciendo en el argumento de las funciones trigonométricas hiperbólicas las sustituciones $x + y$ por $x \overset{k}{\oplus} y$, y obviamente nx por $x \overset{k}{\oplus} x \dots \overset{k}{\oplus} x$ (n veces). Por ejemplo, resulta

$$\sinh_{\{k\}}(x \overset{k}{\oplus} y) + \sinh_{\{k\}}(x \overset{k}{\ominus} y) = 2\sinh_{\{k\}}(x)\cosh_{\{k\}}(y)$$

y

$$\tanh_{\{k\}}(x) + \tanh_{\{k\}}(y) = \frac{\sinh_{\{k\}}(x \overset{k}{\oplus} y)}{\cosh_{\{k\}}(x)\cosh_{\{k\}}(y)}$$

La k -fórmula de Moivre incluye funciones trigonométricas hiperbólicas con argumentos del tipo rx con $r \in \mathbb{R}$, asume la forma

$$[\cosh_{\{k\}}(x) \pm \sinh_{\{k\}}(x)]^r = \cosh_{\{k/r\}}(rx) \pm \sinh_{\{k/r\}}(rx)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [\cosh_{\{k\}}(x) \pm \sinh_{\{k\}}(x)]^r &= [\exp_{\{k\}}(\pm x)]^r \\ &= \exp_{\{k/r\}}(\pm rx) \\ &= \cosh_{\{k/r\}}(rx) \pm \sinh_{\{k/r\}}(rx) \end{aligned}$$

Además las fórmulas que incluyen las derivadas de las funciones trigonométricas hiperbólicas siguen siendo ciertas, después de usar una deformación apropiada, por ejemplo se tiene que

$$\frac{d}{dx_{\{k\}}} \sinh_{\{k\}}(x) = \cosh_{\{k\}}(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx_{\{k\}}} \tanh_{\{k\}}(x) = \sec h_{\{k\}}^2(x).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx_{\{k\}}} \operatorname{senh}_{\{k\}}(x) &= \frac{d}{dx_{\{k\}}} \left(\frac{\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx_{\{k\}}} (\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{d \exp_{\{k\}}(x)}{dx_{\{k\}}} - \frac{d \exp_{\{k\}}(-x)}{dx_{\{k\}}} \right] \\
 &= \frac{(\exp_{\{k\}}(x) + \exp_{\{k\}}(-x))}{2} \\
 &= \operatorname{cosh}_{\{k\}}(x)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx_{\{k\}}} \operatorname{tanh}_{\{k\}}(x) &= \frac{d}{dx_{\{k\}}} \left(\frac{\operatorname{senh}_{\{k\}}(x)}{\operatorname{cosh}_{\{k\}}(x)} \right) \\
 &= \frac{\operatorname{cosh}_{\{k\}}(x) \operatorname{cosh}_{\{k\}}(x) - \operatorname{senh}_{\{k\}}(x) \operatorname{senh}_{\{k\}}(x)}{\operatorname{cosh}_{\{k\}}^2(x)} \\
 &= \frac{\operatorname{cosh}_{\{k\}}^2(x) - \operatorname{senh}_{\{k\}}^2(x)}{\operatorname{cosh}_{\{k\}}^2(x)} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{cosh}_{\{k\}}^2(x)} \\
 &= \operatorname{sec} h_{\{k\}}^2(x).
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [\operatorname{cosh}_k(x)] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\exp_k(x) - \exp_k(-x)}{2} \right] \\
 &= \frac{\exp_k(x) - \exp_k(-x)}{2\sqrt{1+k^2x^2}} \\
 &= \frac{\operatorname{senh}_k(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [\operatorname{senh}_k(x)] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\exp_k(x) + \exp_k(-x)}{2} \right] \\
 &= \frac{\exp_k(x) + \exp_k(-x)}{2\sqrt{1+k^2x^2}} \\
 &= \frac{\operatorname{cosh}_k(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}.
 \end{aligned}$$

La k -trigonometría cíclica puede ser construida análogamente. El k -seno y el k -coseno se definen como

$$\operatorname{sen}_{\{k\}}(x) = -i \operatorname{senh}_{\{k\}}(ix) \quad (2.32)$$

$$\operatorname{cos}_{\{k\}}(x) = \operatorname{cosh}_{\{k\}}(ix). \quad (2.33)$$

De lo cual resulta: $\operatorname{sen}_{\{k\}}(x) = \operatorname{sen}(x_{\{ik\}})$ y $\operatorname{cos}_{\{k\}}(x) = \operatorname{cos}(x_{\{ik\}})$.

Se cumple también la identidad pitagórica, en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}_k^2(x) + \operatorname{cos}_k^2(x) &= [-i \operatorname{senh}_k(ix)]^2 + [\operatorname{cosh}_k(ix)]^2 \\ &= -\operatorname{senh}_k^2(ix) + \operatorname{cosh}_k^2(ix) \\ &= [\operatorname{cosh}_k(ix) + \operatorname{senh}_k(ix)][\operatorname{cosh}_k(ix) - \operatorname{senh}_k(ix)] \\ &= \exp_k(ix) \exp_k(-ix) \\ &= \exp_k(ix \ominus (ix)) \\ &= \exp_k(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora, una generalización del teorema de Moivre es

$$(\operatorname{cos}_k(x) \pm i \operatorname{sen}_k(x))^m = \operatorname{cos}_{\frac{k}{m}}(mx) \pm i \operatorname{sen}_{\frac{k}{m}}(mx).$$

ya que

$$\begin{aligned} (\operatorname{cos}_k(x) \pm i \operatorname{sen}_k(x))^m &= [\exp_k(\pm ix)]^m \\ &= \exp_{\frac{k}{m}}(\pm imx) \\ &= \operatorname{cos}_{\frac{k}{m}}(mx) \pm i \operatorname{sen}_{\frac{k}{m}}(mx). \end{aligned}$$

El teorema de Moivre, para funciones k -hiperbólicas está dado por:

$$[\operatorname{cosh}_k(x) + \operatorname{senh}_k(x)]^m = \operatorname{cosh}_{\frac{k}{m}}(mx) + \operatorname{senh}_{\frac{k}{m}}(mx).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [\operatorname{cosh}_k(x) + \operatorname{senh}_k(x)]^m &= [\exp_k(x)]^m \\ &= \exp_{\frac{k}{m}}(mx) \\ &= \operatorname{cosh}_{\frac{k}{m}}(mx) + \operatorname{senh}_{\frac{k}{m}}(mx). \end{aligned}$$

Entre las derivadas de funciones trigonométricas k -deformadas se tiene:

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{sen}_k(x)] = \frac{\operatorname{cos}_k(x)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} [\operatorname{cos}_k(x)] = -\frac{\operatorname{sen}_k(x)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\text{sen}_k(x)] &= \frac{d}{dx}[-i \text{senh}_k(ix)] \\
&= \frac{d}{dx} \left[-i \frac{\exp_k(ix) - \exp_k(-ix)}{2} \right] \\
&= \frac{-i}{2} \frac{d}{dx} [\exp_k(ix) - \exp_k(-ix)] \\
&= \frac{-i}{2} \left[i \frac{\exp_k(ix) + i \exp_k(-ix)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\exp_k(ix) + \exp_k(-ix)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \right] \\
&= \frac{\exp_k(ix) + \exp_k(-ix)}{2\sqrt{1 - k^2 x^2}} \\
&= \frac{\cosh_k(ix)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \\
&= \frac{\cos_k(x)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\cos_k(x)] &= \frac{d}{dx}[\cosh_k(ix)] \\
&= \frac{d}{dx} \left[\frac{\exp_k(ix) + \exp_k(-ix)}{2} \right] \\
&= \left[i \frac{\exp_k(ix) - i \exp_k(-ix)}{2\sqrt{1 - k^2 x^2}} \right] \\
&= i \frac{\exp_k(ix) - \exp_k(-ix)}{2\sqrt{1 - k^2 x^2}} \\
&= i \frac{\text{senh}_k(ix)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} \\
&= -\frac{\text{sen}_k(x)}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}.
\end{aligned}$$

□

Ahora, para encontrar la versión adecuada de la fórmula de Euler, se usará la expansión es serie de Taylor para $\exp_{\{k\}}$ en torno a $x_0 = 0$, la cual está dada por:

$$\exp_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k) \frac{x^n}{n!}, \quad k^2 x^2 < 1$$

con los coeficientes a_n definidos por

$$a_0(k) = 1, \quad a_1(k) = 1$$

$$a_{2m}(k) = \prod_{j=0}^{m-1} [1 - (2j)^2 k^2] \quad y$$

$$a_{2m+1}(k) = \prod_{j=1}^m [1 - (2j-1)^2 k^2].$$

Es claro que $a_n(0) = 1$ y $a_n(-k) = a_n(k)$. Notemos que los primeros tres términos de la expansión en serie de Taylor son los mismos de la exponencial ordinaria, a saber

$$\exp_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + (1 - k^2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

La k -exponencial de un número imaginario ix esta dada por:

$$\begin{aligned} \exp_k(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k) \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= a_0(k) + a_1(k) \frac{ix}{1!} + a_2(k) \frac{(ix)^2}{2!} + a_3(k) \frac{(ix)^3}{3!} \\ &\quad + a_4(k) \frac{(ix)^4}{4!} + a_5(k) \frac{(ix)^5}{5!} + a_6(k) \frac{(ix)^6}{6!} \dots \\ &= 1 + i \frac{a_1(k)x}{1!} - \frac{a_2(k)x^2}{2!} - i \frac{a_3(k)x^3}{3!} \\ &\quad + \frac{a_4(k)x^4}{4!} + i \frac{a_5(k)x^5}{5!} - \frac{a_6(k)x^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{a_2(k)x^2}{2!} + \frac{a_4(k)x^4}{4!} - \frac{a_6(k)x^6}{6!} + \dots \\ &\quad + i \left(\frac{a_1(k)x}{1!} - \frac{a_3(k)x^3}{3!} + \frac{a_5(k)x^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}(k) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos_k(x) + i \operatorname{sen}_k(x). \end{aligned}$$

Se tiene así la fórmula de Euler, es decir,

$$\exp_k(\pm ix) = \cos_k(x) \pm i \operatorname{sen}_k(x)$$

y además,

$$\cos_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{2.34}$$

y

$$\operatorname{sen}_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}(k) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.35}$$

Es claro que si $k \rightarrow 0$, estas expresiones se reducen a las expansiones en series de Taylor de las funciones exponencial, seno y coseno usuales.

Se analiza ahora la convergencia de la serie $\cos_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}(k) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} a_{2n+2}(k) x^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(-1)^n a_{2n}(k) x^{2n}} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2}(k) x^2}{a_{2n}(k) (2n+2)(2n+1)} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-x^2 \prod_{j=0}^n [1 - (2j)^2 k^2]}{(2n+2)(2n+1) \prod_{j=0}^{n-1} [1 - (2j)^2 k^2]} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-x^2 [1 - (2n)^2 k^2] \prod_{j=0}^n [1 - (2j)^2 k^2]}{(2n+2)(2n+1) \prod_{j=0}^n [1 - (2j)^2 k^2]} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(1 - 4n^2 k^2) x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(4n^2 k^2 - 1) x^2}{4n^2 + 6n + 2} \right| \\
&= x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 k^2 - 1}{4n^2 + 6n + 2} \right| \\
&= x^2 k^2.
\end{aligned}$$

De tal forma, el criterio del cociente muestra que la serie dada en (2.34) convergen absolutamente en la región $|x| < |k|^{-1}$.

De manera análoga sucede con la serie $\sen_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}(k) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dada en (2.35).

2.5. Funciones inversas deformadas

Las funciones k -hiperbólicas inversas o las k -trigonométricas cíclicas inversas pueden ser introducidas comenzando por las correspondientes funciones directas como en el caso de las matemáticas no deformadas. Es fácil verificar que las k -funciones inversas están relacionadas con el k -logaritmo de la manera usual por las fórmulas de las matemáticas corrientes. Por ejemplo se tiene

$$\operatorname{arcsen} h_{\{k\}}(x) = -i \ln_{\{k\}}(ix + \sqrt{1 - x^2}) \quad (2.36)$$

$$\operatorname{arctan} h_{\{k\}}(x) = \frac{1}{2} \ln_{\{\frac{k}{2}\}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (2.37)$$

Demostración. Como se indicó anteriormente, partamos de la forma directa. Sea $y = \operatorname{senh}_{\{k\}}(x)$, de tal forma se tiene

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{senh}_{\{k\}}(x) = \frac{1}{2}[\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)] \\ &= \frac{1}{2}[\exp_{\{k\}}(x)] - \frac{1}{\exp_{\{k\}}(x)} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\exp_{\{k\}}(x) \exp_{\{k\}}(x) - 1}{\exp_{\{k\}}(x)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(\exp_{\{k\}}(x))^2 - 1}{\exp_{\{k\}}(x)}\right], \end{aligned}$$

de donde $(\exp_{\{k\}}(x))^2 - 1 = 2y \exp_{\{k\}}(x)$ y por tanto $(\exp_{\{k\}}(x))^2 - 2y \exp_{\{k\}}(x) - 1 = 0$. De lo anterior $\exp_{\{k\}}(x) = y + \sqrt{y^2 + 1}$, más despejando la variable x se sigue que

$$x = \ln_{\{k\}}(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Ahora, x denota a la función $\operatorname{arcsinh}_{\{k\}}(y)$, por lo que intercambiando x, y , se tiene

$$\operatorname{arcsenh}_{\{k\}}(x) = \ln_{\{k\}}(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Ahora, al cambiar x por ix , se sigue que $\operatorname{arcsenh}_{\{k\}}(ix) = \ln_{\{k\}}(ix + \sqrt{1 - (ix)^2}) = \ln_{\{k\}}(ix + \sqrt{1 - x^2})$, esto es,

$$\operatorname{arcsenh}_{\{k\}}(ix) = \ln_{\{k\}}(ix + \sqrt{1 - x^2}).$$

Ahora, se probará 2.36. Sea $y = \operatorname{sen}_{\{k\}}(x) = -i \operatorname{senh}_{\{k\}}(ix)$. De tal forma $-\frac{y}{i} = \operatorname{senh}_{\{k\}}(ix)$ y despejando x se sigue que $x = -i \operatorname{arc sen} h_{\{k\}}(iy)$. Finalmente, intercambiando x, y se tiene $y = -i \operatorname{arcsinh}_{\{k\}}(iy)$ o en forma equivalente

$$\operatorname{arcsenh}_{\{k\}}(x) = -i \operatorname{arcsenh}_{\{k\}}(ix) = -i \ln_{\{k\}}(ix + \sqrt{1 - x^2}).$$

Se probará ahora 2.37. Sea $y = \operatorname{tanh}_{\{k\}}(x)$, con lo cual

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{senh}_{\{k\}}(x)}{\operatorname{cosh}_{\{k\}}(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}[\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)]}{\frac{1}{2}[\exp_{\{k\}}(x) + \exp_{\{k\}}(-x)]} \\ &= \frac{\exp_{\{k\}}(x) - \exp_{\{k\}}(-x)}{\exp_{\{k\}}(x) + \exp_{\{k\}}(-x)} \\ &= \frac{\exp_{\{k\}}(x) - \frac{1}{\exp_{\{k\}}(x)}}{\exp_{\{k\}}(x) + \frac{1}{\exp_{\{k\}}(x)}} \\ &= \frac{[\exp_{\{k\}}(x)]^2 - 1}{[\exp_{\{k\}}(x)]^2 + 1} \end{aligned}$$

y se tiene $y = \frac{[\exp_{\{k\}}(x)]^2 - 1}{[\exp_{\{k\}}(x)]^2 + 1}$. De la anterior expresión se obtiene $([\exp(x_{\{k\}})]^2 + 1)y = [\exp(x_{\{k\}})]^2 - 1$ que se puede transformar en $[\exp_{\{k\}}(x)]^2 = \frac{1+y}{1-y}$ y despejando la variable x se obtiene $x = \ln_{\{k\}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2} \ln_{\{k/2\}} \frac{1+y}{1-y}$. Como x denota a la función $\arctan h_{\{k\}}(y)$, intercambiando x, y se tiene que

$$\arctan h_{\{k\}}(x) = \frac{1}{2} \ln_{\{k/2\}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

□

2.6. Suma y producto de funciones deformadas

Considérese el conjunto de las funciones reales no negativas D y la ley de composición \otimes_k definida por

$$f \otimes_k h = \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}} f + \ln_{\{k\}} h), \quad (2.38)$$

la cual se reduce al producto ordinario cuando $k \rightarrow 0$, esto es, $f \otimes_0 h = f \cdot h$.

Proposición 2.6.1. *La estructura algebraica $(D - \{0\}, \otimes_k)$ forma un grupo abeliano.*

se probarán las siguientes propiedades:

1. Ley conmutativa $f \otimes_k h = h \otimes_k f$
2. Ley asociativa $(f \otimes_k h) \otimes_k w = f \otimes_k (h \otimes_k w)$
3. Elemento neutro $f \otimes_k 1 = 1 \otimes_k f = f$
4. Elemento inverso $f \otimes_k \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f} \otimes_k f = 1$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} f \otimes_k h &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h)) \\ &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(h) + \ln_{\{k\}}(f)) \\ &= h \otimes_k f. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(f \otimes_k h) \otimes_k w &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f \otimes_k h) + \ln_{\{k\}}(w)) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(\exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h)) + \ln_{\{k\}}(w)) \\
&= \exp_{\{k\}}((\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h)) + \ln_{\{k\}}(w)) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + (\ln_{\{k\}}(h) + \ln_{\{k\}}(w))) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(\exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(h) + \ln_{\{k\}}(w)))) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h \otimes_k w)) \\
&= f \otimes_k (h \otimes_k w).
\end{aligned}$$

3. En primer lugar, se supone que existe $h \in D$ tal que $f \otimes_k h = f$, para todo $f \in D$. Para Hallar de que forma sería h , se tiene que si $f \otimes_k h = f$, entonces:

$$\begin{aligned}
\exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h)) &= f \\
\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h) &= \ln_{\{k\}}(f) \\
\ln_{\{k\}}(h) &= 0 \\
h &= \exp_{\{k\}}(0)
\end{aligned}$$

y por tanto $h = 1$. Se verá ahora que efectivamente $h = 1$ cumple la propiedad.

$$\begin{aligned}
f \otimes_k 1 &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(1)) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + 0) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f)) \\
&= f
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f \otimes_k \left(\frac{1}{f}\right) &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}\left(\frac{1}{f}\right)) \\
&= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) - \ln_{\{k\}}(f)) \\
&= \exp_{\{k\}}(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

La división \otimes_k puede ser definida de la siguiente manera:

$$f \otimes_k h = f \otimes_k \left(\frac{1}{h}\right).$$

Además la potencia k -deformada $f^{\otimes r}$ está definida como:

$$f^{\otimes r} = \exp_{\{k\}}(r \ln_{\{k\}}(f)) \quad (2.39)$$

la cual generaliza la potencia ordinaria f^r . En particular, cuando r es un entero se tiene que $f^{\otimes r} = f \underset{k}{\otimes} f \dots \underset{k}{\otimes} f$, r veces.

En la siguiente proposición cuya, prueba se omite, se presenta la estructura de monoide abeliano, es decir, una operación definida en un conjunto no vacío que cumple las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro y conmutativa.

Proposición 2.6.2.

1. La estructura algebraica $(D, \underset{k}{\otimes})$ forma un monoide abeliano. El elemento 0 no admite un elemento inverso. Además, sólo en el caso del producto ordinario resulta que $f \underset{k}{\otimes} 0 = 0 \underset{k}{\otimes} f = 0$.
2. En D , se define la ley de composición $\underset{k}{\otimes}$ mediante

$$f \underset{k}{\oplus} h = \exp_{\{k\}}\{\ln[\exp(\ln_{\{k\}}(f)) + \exp(\ln_{\{k\}}(h))]\}. \quad (2.40)$$

La estructura algebraica $(D, \underset{k}{\oplus})$ forma un monoide abeliano.

El producto $\underset{k}{\otimes}$ y la suma $\underset{k}{\oplus}$ son operaciones distributivas, esto es:

$$w \underset{k}{\otimes} (f \underset{k}{\oplus} h) = (w \underset{k}{\otimes} f) \underset{k}{\oplus} (w \underset{k}{\otimes} h).$$

El producto $\underset{k}{\otimes}$ permite escribir la siguiente propiedad del k -exponencial.

$$\exp_{\{k\}}(x) \underset{k}{\otimes} \exp_{\{k\}}(y) = \exp_{\{k\}}(x + y) \quad (2.41)$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \exp_{\{k\}}(x) \underset{k}{\otimes} \exp_{\{k\}}(y) &= \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(\exp_{\{k\}}(x)) + \ln_{\{k\}}(\exp_{\{k\}}(y))) \\ &= \exp_{\{k\}}(x + y). \end{aligned}$$

□

Equivalentemente la ecuación 2.41 puede ser escrita en la forma

$$\ln_{\{k\}}(f \underset{k}{\otimes} h) = \ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h) \quad (2.42)$$

Demostración. En efecto,

$$f \underset{k}{\otimes} h = \exp_{\{k\}}(\ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h)) \quad \text{implica} \quad \ln_{\{k\}}(f \underset{k}{\otimes} h) = \ln_{\{k\}}(f) + \ln_{\{k\}}(h).$$

□

La ecuación 2.42 da una propiedad pertinente para el k -logaritmo.

Finalmente, partiendo de la definición de la k -potencia, $f^{\otimes r}$, se obtiene la siguiente relación.

$$r \ln_{\{k\}}(f) = \ln_{\{k\}}(f^{\otimes r}), \quad (2.43)$$

ya que de 2.39 se sabe que si $f^{\otimes r} = \exp_{\{k\}}(r \ln_{\{k\}}(f))$, entonces $\ln_{\{k\}}(f^{\otimes r}) = r \ln_{\{k\}}(f)$.

2.7. El k -exponencial y el k -logaritmo

En esta sección se dan algunas de las propiedades basadas en las referencias [20], [22] y [23], de las funciones $\exp_{\{k\}}(\cdot)$ y $\ln_{\{k\}}(\cdot)$.

En la teoría cuántica de grupos, es importante la función dada por, [25] y [26],

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad (2.44)$$

que resulta ser proporcional a $x^{\{k\}}$, es decir, se tiene

$$[x] = \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} x^{\{k\}} \quad (2.45)$$

y puede ser escrita además en la forma

$$[x] = \frac{\ln_{\{k\}}(e^x)}{\ln_{\{k\}}(e)}, \quad (2.46)$$

con $q = e^k$. Es de resaltar que la simetría de la teoría cuántica de grupo $q \leftrightarrow q^{-1}$ está relacionada con la simetría $k \leftrightarrow -k$ para los k -exponenciales de la presente teoría.

Ahora, denotando $k' = \frac{q-q^{-1}}{2}$, se tiene

$$\begin{aligned}
[x + y] &= \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} (x + y)^{\{k\}} \\
&= \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} (x^{\{k\}} \oplus^k y^{\{k\}}) \\
&= \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} (y^{\{k\}} \oplus^k y^{\{k\}}) \\
&= \frac{1}{\frac{q-q^{-1}}{2k}} (x^{\{k\}} \oplus^k y^{\{k\}}) \\
&= \frac{1}{\frac{k'}{k}} (x^{\{k\}} \oplus^k y^{\{k\}}) \\
&= \frac{k}{k'} (x^{\{k\}} \oplus^k y^{\{k\}}) \\
&= \frac{k}{k'} x^{\{k\}} \oplus^k \frac{k}{k'} y^{\{k\}} \\
&= \frac{k}{k'} x^{\{k\}} \oplus^{\frac{k}{k'}} \frac{k}{k'} y^{\{k\}} \\
&= \frac{k}{k'} x^{\{k\}} \oplus^{\frac{k'}{k}} \frac{k}{k'} y^{\{k\}} \\
&= \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} x^{\{k\}} \oplus^k \frac{1}{\ln_{\{k\}}(e)} y^{\{k\}} \\
&= [x] \oplus^{k'} [y]
\end{aligned}$$

y por tanto

$$[x + y] = [x] \oplus^{k'} [y]. \quad (2.47)$$

De forma análoga se puede verificar que

$$[xy] = [x] \otimes^{k'} [y], \quad (2.48)$$

con $k' = \frac{q-q^{-1}}{2}$.

Ahora se exponen otras propiedades importantes sobre k -exponenciales y k -logaritmos. Como en los casos naturales, la función k -exponencial es cóncava y la función k -logaritmo es convexa, esto es,

$$\frac{d^2}{dx^2}(\exp_{\{k\}}(x)) > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \frac{d^2}{dx^2}(\ln_{\{k\}}(x)) < 0, \quad x > 0. \quad (2.49)$$

Demostración. En efecto, de (2.19) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}[\exp_{\{k\}}(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\exp_{\{k\}}(x)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{\exp_{\{k\}}(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}\right] \\
&= \frac{\frac{\exp_{\{k\}}(x)}{\sqrt{1+k^2x^2}}(\sqrt{1+k^2x^2}) - \frac{2k^2x}{2\sqrt{1+k^2x^2}}\exp_{\{k\}}(x)}{1+k^2x^2} \\
&= \frac{\exp_{\{k\}}(x) - \frac{k^2x}{\sqrt{1+k^2x^2}}\exp_{\{k\}}(x)}{1+k^2x^2} \\
&= \frac{(\sqrt{1+k^2x^2} - k^2x)\exp_{\{k\}}(x)}{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(\sqrt{1+k^2x^2} - k^2x)\exp_{\{k\}}(x)}{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

lo cual positivo para, $|k| \leq 1$, como se puede ver en la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned}
|k| \leq 1 &\Rightarrow k^2 - 1 \leq 0 \\
&\Rightarrow k^2x^2(k^2 - 1) \leq 0 < 1 \\
&\Rightarrow k^4x^2 - k^2x^2 < 1 \\
&\Rightarrow k^4x^2 < 1 + k^2x^2 \\
&\Rightarrow k^2x < \sqrt{1+k^2x^2} \\
&\Rightarrow \sqrt{1+k^2x^2} - k^2x > 0 \\
&\Rightarrow \frac{(\sqrt{1+k^2x^2} - k^2x)\exp_{\{k\}}(x)}{(1+k^2x^2 + kx)^{\frac{3}{2}}} > 0.
\end{aligned}$$

finalmente, para $\ln_{\{k\}}(\cdot)$, en los reales positivos se tiene,

$$\frac{d}{dx}[\ln_{\{k\}}(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^k - x^{-k}}{2k}\right] = \frac{kx^{k-1} + kx^{-k-1}}{2k} = \frac{x^{k-1} + x^{-k-1}}{2} > 0, \quad \text{si } x > 0$$

y además,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}[\ln_{\{k\}}(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x^k - x^{-k}}{2k}\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{k-1} + x^{-k-1}}{k}\right] \\
&= \frac{(k-1)x^{k-2} - (k+1)x^{-k-2}}{2} \\
&= \frac{(k-1)x^k - (k+1)x^{-k}}{2} \\
&= \frac{(k-1)x^{2k} - (k+1)}{2x^{k+2}} < 0, \quad \text{si } x > 0
\end{aligned}$$

□

Acorde con [24], la expansión en serie de Taylor de $\ln_{\{k\}}(1+x)$ converge si $-1 < x \leq 1$ y asume la forma

$$\ln_{\{k\}}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k) (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (2.50)$$

con $b_1(k) = 1$ mientras que para $n > 1$, $b_n(k)$ está dada por

$$b_n(k) = \frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2}) \cdots (1-\frac{k}{n-1}) + \frac{1}{2}(1+k)(1+\frac{k}{2}) \cdots (1+\frac{k}{n-1}), \quad (2.51)$$

con $b_n(0) = 1$ y $b_n(-k) = b_n(k)$.

Para ver la expansión anterior, se consideran los primeros términos de la serie, desarrollando en serie de Taylor $f(x) = \ln_{\{k\}}(1+x) = \frac{(1+x)^k - (1+x)^{-k}}{2k}$ centrada en 0. Así, $f(0) = \ln_{\{k\}}(1) = 0$ y considerando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\ln_{\{k\}}(1+x)] &= \frac{k(1+x)^{k-1} + k(1+x)^{-k-1}}{2k} \\ &= \frac{(1+x)^{k-1} + (1+x)^{-k-1}}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [\ln_{\{k\}}(1+x)] &= \frac{(k-1)(1+x)^{k-2} - (k+1)x^{-k-2}}{2} \\ \frac{d^3}{dx^3} [\ln_{\{k\}}(1+x)] &= \frac{(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} + (k+1)(k+2)x^{-k-3}}{2} \\ \frac{d^4}{dx^4} [\ln_{\{k\}}(1+x)] &= \frac{(k-1)(k-2)(k-3)(1+x)^{k-4} - (k+1)(k+2)(k+3)x^{-k-4}}{2} \end{aligned}$$

se llega a

$$\begin{aligned} \ln_{\{k\}}(1+x) &= 0 + (1) \frac{x}{1!} + \frac{k-1 - (k+1)x^2}{2 \cdot 2!} + \cdots \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + (2k^2+4) \frac{x^3}{3!} - (12k^2+12) \frac{x^4}{4!} \cdots \\ &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + (2k^2+4) \frac{x^3}{6} - (12k^2+12) \frac{x^4}{24} \cdots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + (k^2+2) \frac{x^3}{3} - (2k^2+2) \frac{x^4}{4} \cdots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + (\frac{k^2}{2}+1) \frac{x^3}{3} - (2k^2+2) \frac{x^4}{4} \cdots \\ &= x - \frac{1}{2}(1-k) + \frac{1}{2}(1+k) \frac{x^2}{2} + [\frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2}) + \frac{1}{2}(1+k)(1+\frac{k}{2})] \frac{x^3}{3} \\ &\quad - [\frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2})(1-\frac{k}{3}) + \frac{1}{2}(1-k)(1-\frac{k}{2})(1-\frac{k}{3})] \frac{x^4}{4} \cdots, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k) (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

donde $b_n(x)$ está dado por 2.51.

Otra expansión de la página 58 de [24], que involucra al k -exponencial (para $|x| \leq 1$), es

$$\exp_{\{k\}}(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n k^{2n} x^{2n+1}\right), \quad (2.52)$$

siendo,

$$d_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1) 2^{2n} (n!)^2}.$$

Es fácil ver que explotando esta expansión, se puede escribir el k -exponencial como un producto infinito de exponenciales estándar

$$\exp_{\{k\}}(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \exp(d_n k^{2n} x^{2n+1}). \quad (2.53)$$

Capítulo 3

Sobre mecánica estadística de Kaniadakis

En este capítulo se muestran algunos aspectos relevantes de la mecánica estadística de Kaniadakis. En primer lugar, se darán las motivaciones que sirvieron de punto de partida para la elaboración de una extensión de la termoestadística de Boltzmann-Gibbs para sistemas que puedan ser descritos con la relatividad especial; dicha extensión es la mecánica estadística de Kaniadakis. En segundo lugar se presenta el funcional de entropía de Kaniadakis S_k , introducido a partir de una reformulación del principio de máxima entropía de Jaynes. Posteriormente se da una de las posibles interpelaciones del parámetro k en el contexto de la física estadística involucrada en la relatividad especial. Finalmente, se muestra como la mecánica estadística de Kaniadakis puede ser obtenida del formalismo propuesto por Naudts y se muestra la relación entre los funcionales de entropía de Kanadiakis reescalada y de Tsallis.

3.1. Motivación física a la mecánica estadística de Kaniadakis

G. Kaniadakis en [20] planteo varios interrogantes para tratar de comprender el conjunto de entropías encontradas:

1. ¿Es posible encontrar un marco unificador que englobe en una perspectiva más general las propiedades comunes a todas las entropías halladas?.
2. ¿Es posible obtener la distribución estadística estacionaria de los sistemas no lineales involucrados en el estudio en un marco dependiente del tiempo?. Un ejemplo de esto ha sido realizado en la descripción de Fokker-Planck a la difusión anómala que se ha entendido por una distribución estadística de Tsallis dependiente del tiempo ([27], [28]).
3. Otra pregunta que surge es si ¿la entropía de un sistema y su correspondiente distribución estadística estacionaria dependen del tipo de descripción particular usada

para estudiar el sistema?.

4. ¿Existirá un principio subyacente a la evolución temporal del sistema que permita obtener el funcional de entropía y su distribución estadística asociada tanto en descripciones clásicas como cuánticas?.

Resulta importante observar en este último punto que la distribución de Maxwell-Boltzmann no emerge directamente dentro del marco de la mecánica estadística clásica. Es más conveniente decir que la mecánica estadística clásica se construye a partir de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Es comúnmente aceptado que esta distribución surge dentro de la mecánica de Newton. De hecho, la simulación numérica de la dinámica molecular clásica inequívocamente conduce a la distribución exponencial ordinaria. En este punto, la pregunta de si la distribución de Maxwell-Boltzmann se obtiene también en el caso cuando la dinámica microscópica se rige por las leyes de la relatividad especial, es relevante.. En la teoría estadística relativista invariantes de la colisión se imponen por las leyes de la relatividad especial. Por lo tanto la primera diferencia entre las funciones de distribución clásica y relativista se refiere a las diferentes formas de los invariantes de la colisión aparecen en el argumento de la distribución función. Una segunda diferencia es originada por la forma de la entropía que describe un sistema relativista de muchos cuerpos que debe ser distinta de la entropía de Maxwell-Boltzmann-Gibbs. En la mecánica estadística relativista usual es aceptado que el funcional de entropía posee la misma forma como se presenta en la mecánica estadística clásica. Entonces, gracias al principio de Jaynes, (que establece que dado un estado sujeto a ciertas constricciones la distribución de probabilidad que mejor lo representa es la que maximiza el funcional de entropía), se obtiene una distribución exponencial que reproduce con exactitud la distribución de Maxwell-Boltzmann-Gibbs. Podemos encontrar un ejemplo explícito de tal sistema de partículas relativistas en, los rayos cósmicos. El espectro de rayos cósmicos tiene una extensión muy amplia y presenta una ley de potencia de comportamiento asintótica que no puede ser explicada por la distribución de Maxwell-Boltzmann. Esta peculiaridad ha sido observada en otros sistemas relativistas. Por lo tanto para sistemas de partículas relativistas, la evidencia experimental sugiere una función de distribución no exponencial. Esta distribución, se pueden originar exclusivamente por una entropía completamente diferente a la dada por Boltzmann-Gibbs-Shannon. Todos los observables físicos clásicos (momento, energía), cuando son considerados en el marco de la relatividad especial, son convenientemente generalizados, donde cualquier fórmula que los contenga estará dependiendo de un parámetro que es la velocidad de la luz y constituyen una generalización o deformación de las correspondientes expresiones en límite Newtoniano. Por consiguiente, es natural suponer que también la entropía de un sistema relativista admite una generalización con parámetro como la entropía clásica. En este caso el logaritmo que aparece en la expresión de la entropía de Boltzmann-Gibbs-Shannon debe ser reemplazado por otro logaritmo generalizado que dependa de un parámetro. De igual forma, la función exponencial ordinaria que aparece en la distribución de Maxwell-Boltzmann, debe ser reemplazada por una exponencial generalizada. Estas dos funciones generalizadas se han propuesto heurísticamente en [20] y están dadas precisamente mediante la exponencial y logaritmo k -deformados de Kaniadakis.

3.2. Fundamentos en mecánica estadística de Kaniadakis

Considérese la siguiente función para la energía E de un sistema termoestadístico, que recupera (cuando $k \rightarrow 0$) a la función de densidad de probabilidad de Boltzmann-Gibbs no normalizada,

$$f(E) = \exp_{\{k\}}(-\beta(E - \mu)), \quad (3.1)$$

donde $\beta = \frac{1}{\lambda K_B T}$, siendo λ un nuevo parámetro, real K_B la constante de Boltzmann y T la temperatura del sistema. Se denotará

$$n := \alpha \exp_{\{k\}}\left(-\frac{E - \mu}{\lambda K_B T}\right), \quad (3.2)$$

de tal forma $n = \alpha f$, siendo α un parámetro real tal que $\int_{-\infty}^{\infty} n dE = 1$, es decir, tal que n sea una función de densidad de probabilidad.

Ahora bien, en mecánica estadística el valor medio de una cantidad física dada $A(p, n)$ que depende de un observable físico representado por variable p (como posición, velocidad, ...) y la función de densidad de probabilidad $n = n(p)$, está definida en el caso tridimensional ($p = (p_x, p_y, p_z)$) por

$$\langle A(p, n) \rangle = \frac{\int d^3p (A(p, n)n(p))}{\int d^3p (n(p))}, \quad (3.3)$$

donde $\int d^3p (\cdot)$ denota $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\cdot) dp_x dp_y dp_z$. Análogamente, en el caso donde $A = A(p_1, p_2, n_1, n_2)$ que depende de dos variables independientes p_1, p_2 y de dos funciones de densidad de probabilidad independientes, $n_1(p_1)$ y $n_2(p_2)$, se tienen que el valor medio está dado por

$$\langle A \rangle = \frac{\int d^3p_1 d^3p_2 A n_1(p_1) n_2(p_2)}{\int d^3p_1 d^3p_2 n_1(p_1) n_2(p_2)}. \quad (3.4)$$

Se puede verificar que la distribución estacionaria n puede ser obtenida como solución de la siguiente ecuación variacional (donde δ denota a la derivada distribucional y μ es el potencial químico)

$$\frac{\delta}{\delta n} \int d^3p \left[-K_B \lambda \int \ln_{\{k\}}\left(\frac{n}{\alpha}\right) dn - \frac{1}{T} E n + \frac{\mu}{T} n \right] = 0. \quad (3.5)$$

De tal forma, la distribución n puede ser vista como el máximo de la función contenido de información I_k dada por

$$I_k = \int d^3p J_k(n), \quad \text{donde,} \quad J_k(n) = \lambda \int \ln_{\{k\}}\left(\frac{n}{\alpha}\right) dn, \quad (3.6)$$

bajo las restricciones correspondientes a la conservación de la energía media U y el número de partículas N , dadas respectivamente por

$$\int d^3p En = U \quad \text{y} \quad \int d^3p n = N.$$

Es de resaltar que el potencial químico u puede ser escogido de tal manera que el conjunto de número de partículas sea igual a la unidad, esto es $N = 1$.

Ahora, cuando $k = 0$ resulta que $J_0 = n \ln n$ y la función contenido de información I_0 es el valor medio del logaritmo ordinario y en ese caso, la ecuación variacional dada anteriormente expresa el principio de máxima entropía de Jaynes que conduce a la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs. De ahora en adelante, en analogía con la mecánica estadística estándar, se requerirá que I_k pueda ser expresada como el valor medio de $\ln_{\{k\}}(n)$. Para hacerlo así se debe considerar la subclase de logaritmos deformados que obedece la condición

$$\lambda \int \ln_{\{k\}}\left(\frac{n}{\alpha}\right) dn = n \ln_{\{k\}}(n) \quad (3.7)$$

La condición anterior, permite ver la forma del k -logaritmo y los valores de los parámetros libres α y λ , en efecto, la clase contiene el logaritmo estándar $\ln n$, será la que resulta de $k = 0$, $\alpha = \frac{1}{e}$, $\lambda = 1$ ya que en ese caso,

$$\lambda \int \ln_{\{k\}}\left(\frac{n}{\alpha}\right) dn = \int \ln(ne) dn = \int (\ln(n) + 1) dn = n \ln(n).$$

Reemplazando (3.7) en (3.5) la ecuación variacional se puede escribir de la forma

$$\frac{\delta}{\delta n} \int d^3p \left(-K_B n \ln_{\{k\}}(n) - \frac{1}{T} En + \frac{\mu}{T} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Kaniadakis define la k -entropía S_k por

$$S_k = -K_B \int d^3p n \ln_{\{k\}}(n) \quad (3.9)$$

y así S_k puede ser vista como proporcional al valor medio $\ln_{\{k\}}(n)$, esto es,

$$S_k = -K_B \langle \ln_{\{k\}}(n) \rangle. \quad (3.10)$$

En esta definición de S_k se tiene una analogía perfecta con la entropía S_0 de Shannon la cual es proporcional al valor de $\ln(n)$. Es de destacar que en ambas definiciones de S_k y S_0 aparece el valor medio estándar dado por la ecuación 3.3.

La ecuación 3.8 asume la forma

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(-K_B \langle \ln_{\{k\}}(n) \rangle - \frac{1}{T} \langle E \rangle + \frac{\mu}{T} \right) = 0 \quad (3.11)$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(S_k - \frac{1}{T} U + \frac{\mu}{T} \right) = 0. \quad (3.12)$$

La anterior ecuación variacional puede ser vista como definición del **principio de máxima entropía de Jaynes para la mecánica estadística de Kaniadakis**, análogo al de la mecánica estadística estándar de Boltzmann-Gibbs.

Es de resaltar que el principio de máxima entropía, en la forma dada por la ecuación integral 3.7, se sigue sólo, y exclusivamente, para las subclases de k -logaritmos que sean soluciones de dicha ecuación.

Las familias de entropías, definidas a través de 3.9, que involucran los k -logaritmos que son soluciones de la ecuación 3.7, tienen la propiedad de concavidad. Para ver esto se expresan las propiedades 2.42 y 2.43, de los k -logaritmos, de la siguiente forma:

$$\ln_{\{k\}}(n_1) + \ln_{\{k\}}(n_2) = \ln_{\{k\}}(n_{12}) \quad (3.13)$$

$$r \ln_{\{k\}}(n) = \ln_{\{k\}}(n^*) \quad (3.14)$$

donde $n_{12} = n_1 \oplus^k n_2$ y $n^* = n^{\otimes r}$.

Cuando los sistemas 1 y 2 descritos a través de n_1 y n_2 respectivamente son estadísticamente independientes, y tomando en cuenta tanto las definiciones de los valores medios 3.3 y 3.4, como la expresión de la k -entropía 3.10, las dos propiedades de k -logaritmo implican las propiedades siguientes para la k -entropía:

$$S_k[n_1] + S_k[n_2] = S_k[n_{12}] \quad (3.15)$$

$$r S_k[n] = S_k[n^*] \quad (3.16)$$

Ahora, n_{12} describe un sistema compuesto obtenido a partir de los subsistemas 1 y 2 mientras n^* describe el sistema descrito por medio de n . Note que el estado descrito a través de la distribución n_{12} es diferente respecto al del estado descrito por medio de la distribución $n_1 n_2$, resultando que

$$S_k[n_{12}] \leq S_k[n_1 n_2].$$

Finalmente, de la propiedad de concavidad del logaritmo k -deformado se sigue la concavidad de S_k ,

$$S_k[tn_1 + (1-t)n_2] \geq tS_k[n_1] + (1-t)S_k[n_2] \quad (3.17)$$

3.3. Una interpretación para el parámetro k

A diferencia de la mecánica estadísticas no extensivas formulada en el contexto de la entropía de Tsallis [12], bajo ciertas condiciones la formulación propuesta por Kaniadakis ofrece un vínculo entre la teoría relativista de un sistema de partículas, descrito por propiedades macroscópicas como la temperatura, y el parámetro de deformación k . Esto implica que la mecánica estadística descrita en la propuesta de Kaniadakis, se puede derivar e interpretar en diferentes contextos físicos, lo cual se hará, en esta sección, en el contexto de la relatividad especial detallando los calculos de las afirmaciones de [21]. Esta circunstancia, respecto a la relatividad especial, no es posible encontrarla directamente en el formalismo de Tsallis, ya que el parámetro que sirve como deformación (q) no posee un significado unívoco y no hay una descripción microscópica general a partir de la cual derivarlo.

También en esta sección, se mostrará la forma en que Naudts [29], a partir de las propiedades de la suma k -deformada y la relación de la descripción del momento en dos sistemas inerciales (uno en movimiento con respecto al otro), deriva una interpretación para el parámetro k ; teniendo en cuenta la ley de adición de velocidades.

Como en [21], considérese dos partículas de masas m_1 y m_2 que viajan en direcciones opuestas con velocidades v_1 y v_2 , con respecto al sistema de referencia inercial S y con momentos dados por el producto de las masas relativas y velocidades, esto es,

$$p_i(v_i) = \frac{m_i v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \quad i = 1, 2 \quad \text{siendo } m_i \text{ la masa en reposo de la partícula } i. \quad (3.18)$$

Por medio de la relación entre las mediciones de las velocidades, en otro sistema de referencia inercial móvil S' que se desplaza a una velocidad v_2 con respecto al sistema S , se puede definir una operación entre las velocidades que refleja la conocida ley de transformación entre las velocidades descritas en dos sistemas de referencia inercial. La operación se define por

$$v_1 \oplus^c v_2 := \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (3.19)$$

Respecto al sistema S' se tiene que $v'_2 = 0$ y $v'_1 = v_1 \oplus^c v_2$, de lo cual se obtiene la siguiente interesante propiedad que describe los momentos según S' conociendo los momentos según el sistema de referencia S . Precisamente,

$$\frac{p_1(v_1)}{m_1} \oplus^k \frac{p_2(v_2)}{m_2} = \frac{p_1(v_1 \oplus^c v_2)}{m_1}, \quad \text{con } k = \frac{1}{c}. \quad (3.20)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{p_1(v_1)}{m_1} \oplus^k \frac{p_2(v_2)}{m_2} &= \frac{p_1(v_1)}{m_1} \sqrt{1 + \left[\frac{p_2(v_2)}{m_2 c} \right]^2} + \frac{p_2(v_2)}{m_2} \sqrt{1 + \left[\frac{p_1(v_1)}{m_1 c} \right]^2} \\
&= \frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_2}{c} \right)^2}{1 - \left(\frac{v_2}{c} \right)^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c} \right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_1}{c} \right)^2}{1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2}} \\
&= \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{v_2}{c} \right)^2 \right]}} \\
&= \frac{(v_1 \oplus^c v_2) \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{v_2}{c} \right)^2 \right]}} \\
&= \frac{v_1 \oplus^c v_2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \right)^2}} \\
&= \frac{v_1 \oplus^c v_2}{\sqrt{1 - \frac{(v_1 \oplus^c v_2)^2}{c^2}}} \\
&= \frac{p_1(v_1 \oplus^c v_2)}{m_1}.
\end{aligned}$$

Otra forma de encontrar una manifestación del parámetro k en la formulación de Kaniadakis es dada directamente del análisis de las densidades de probabilidad que describen los grados de libertad microscópicos del sistema. Sean f_1 y f_2 dos densidades de probabilidad descritas por $f_i(E_i) = \exp_k(-\frac{E_i}{\lambda k_B T})$ para $i = 1, 2$, que describen de dos sistemas estadísticamente independientes. A partir de f_1 y f_2 se considera el sistema compuesto representado por $f_3 = f_1 f_2$, para el cual también se asume la forma $f_3(E_3) = \exp_k(-\frac{E_3}{\lambda k_B T})$. Como $f_3 = f_1 f_2$, entonces

$$\exp_k\left(-\frac{E_1}{\lambda k_B T}\right) \exp_k\left(-\frac{E_2}{\lambda k_B T}\right) = \exp_k\left(-\frac{E_3}{\lambda k_B T}\right)$$

y por tanto

$$\exp_k\left(-\frac{E_1}{\lambda k_B T} \oplus^k -\frac{E_2}{\lambda k_B T}\right) = \exp_k\left(-\frac{E_3}{\lambda k_B T}\right). \quad (3.21)$$

Siendo $\exp_k(\cdot)$ inyectiva, se sigue que $-\frac{E_1}{\lambda k_B T} \oplus^k -\frac{E_2}{\lambda k_B T} = -\frac{E_3}{\lambda k_B T}$ o equivalentemente $\frac{E_1}{\lambda k_B T} \oplus^k \frac{E_2}{\lambda k_B T} = \frac{E_3}{\lambda k_B T}$. Ahora, teniendo en cuenta la definición de la k -suma y que la energía en reposo es $E_0 = \frac{\lambda K_B T}{k}$ [20], se obtiene que

$$E_3 = E_1 \sqrt{1 + \frac{E_2^2}{E_0^2}} + E_2 \sqrt{1 + \frac{E_1^2}{E_0^2}}.$$

Por otro lado, para $m_1 = m_2 = m$ y teniendo en cuenta las relación entre los momentos se tiene

$$\frac{p_1(v_1)}{kmc} \stackrel{k}{\oplus} \frac{p_2(v_2)}{kmc} = \frac{p_1(v_1 \oplus^c v_2)}{kmc}. \quad (3.22)$$

En efecto de (3.18) se tiene

$$\frac{p_i(v_i)}{kmc} = \frac{v_i}{kc\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \quad i = 1, 2$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{p_1(v_1)}{kmc} \stackrel{k}{\oplus} \frac{p_2(v_2)}{kmc} &= \frac{p_1(v_1)}{kmc} \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{p_2(v_2)}{kmc} \right)^2} + p_2(v_2) \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{p_1(v_1)}{kmc} \right)^2} \\ &= \frac{mv_1}{kmc\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{mv_2}{kmc\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \right)^2} \\ &\quad + \frac{mv_2}{kmc\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + k^2 \left(\frac{mv_1}{kmc\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right)^2} \\ &= \frac{v_1}{kc\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}} + \frac{v_2}{kc\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}} \\ &= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}{\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right] \end{aligned}$$

y siguiendo con la cadena de igualdades,

$$\begin{aligned}
\frac{p_1(v_1)}{kmc} \oplus^k \frac{p_2(v_2)}{kmc} &= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} + \frac{v_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1 + v_2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right]} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2\right]}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \left[\frac{(v_1 \oplus^c v_2) \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right]} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2\right]}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \left[\frac{v_1 \oplus^c v_2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}\right)^2}} \right] \\
&= \frac{1}{kc} \frac{v_1 \oplus^c v_2}{1 - \frac{(v_1 \oplus^c v_2)^2}{c^2}} \\
&= \frac{1}{kc} \frac{p(v_1 \oplus^c v_2)}{m} \\
&= \frac{p_1(v_1 \oplus^c v_2)}{kmc}.
\end{aligned}$$

Ahora usando (3.22) se tiene

$$\exp_k\left(-\frac{p(v_1)}{kmc}\right) \exp_k\left(-\frac{p(v_2)}{kmc}\right) = \exp_k\left(-\frac{p(v_1)}{kmc} \oplus^k \frac{p(v_2)}{kmc}\right) = \exp_k\left(-\frac{p(v_1 \oplus^c v_2)}{kmc}\right).$$

Ahora, si el parámetro k no depende de la energía de la partícula y además teniendo en cuenta que para $v \rightarrow c$ se da la relación $p(v) \approx \frac{E(v)}{c}$, entonces la anterior igualdad se transforma en

$$\exp_k\left(\frac{-E(v_1)}{kmc^2}\right) \exp_k\left(\frac{-E(v_2)}{kmc^2}\right) = \exp_k\left(\frac{-E(v_1 \oplus^c v_2)}{kmc^2}\right).$$

Como $v_3 = v_1 \oplus^c v_2$ y $E_3 = E(v_3)$, entonces al comparar la última expresión con (3.21) se sigue que $kmc^2 = \lambda K_B T$. Finalmente la ecuación (416) de [20] expresa $\lambda = \sqrt{1 - k^2}$ y

así obtiene

$$\frac{1}{k^2} = 1 + \left(\frac{mc^2}{k_B T} \right)^2.$$

3.4. Mecánica de Kaniadakis y deformaciones según Naudts

Naudts [29], [30] propone un marco general para entender las deformaciones posibles de las funciones logarítmicas y exponenciales, que sirve para definir el funcional de entropía y la distribución de probabilidad respectivamente. Se crea así una manera de entender varias termoestadísticas generalizadas. En esta sección se mostrará la forma en que Naudts [29], [30], muestra que la deformación propuesta por Kaniadakis es un caso particular de su marco general.

3.4.1. Deformaciones según Naudts

Sea $\phi(x)$ no decreciente estrictamente positiva en el intervalo $(0, +\infty)$. A partir de esta función se define el logaritmo deformado por

$$\ln_\phi(u) = \int_1^u \frac{dv}{\phi(v)}. \quad (3.23)$$

Así \ln_ϕ es una función cóncava monótonamente creciente, cumpliendo

$$\ln_\phi(1) = 0 \quad y \quad \frac{d}{du} \ln_\phi(u) = \frac{1}{\phi(u)}. \quad (3.24)$$

Además, se observa que \ln_ϕ es negativa en el intervalo $(0, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$. Como casos particulares de \ln_ϕ se tiene:

1. si $\phi(u) = u$, entonces $\ln_\phi(u) = \int_1^u \frac{dv}{v} = \ln u$ que es el logaritmo natural.
2. si $\phi(u) = u \ln a$, entonces: $\ln_\phi(u) = \int_1^u \frac{dv}{v \ln a} = \frac{\ln u}{\ln a} = \log_a u$, que es el logaritmo con base a .
3. si $\phi(u) = u^q$, entonces: $\ln_\phi(u) = \int_1^u \frac{dv}{v^q} = \int_1^u v^{-q} dv = \frac{u^{1-q} - 1}{1-q} = \ln_q u$ es el q -logaritmo de Tsallis [12], [19].

4. si $\phi(u) = \frac{2u}{u^k + u^{-k}}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \ln_{\phi}(u) &= \int_1^u \frac{dv}{\frac{2v}{v^k + v^{-k}}} \\
 &= \int_1^u \frac{v^k + v^{-k}}{2v} dv \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_1^u v^{k-1} dv + \int_1^u v^{-k-1} dv \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{v^k}{k} \Big|_1^u + \frac{v^{-k}}{-k} \Big|_1^u \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^k - 1}{k} + \left(-\frac{u^{-k}}{k} + \frac{1}{k} \right) \right] \\
 &= \frac{u^k - u^{-k}}{2k} \\
 &= \ln_{\{k\}}(u)
 \end{aligned}$$

que es el logaritmo deformado introducido por Kaniadakis y es así que la mecánica estadística de Kaniadakis se puede ver a partir de las deformaciones de Naudts.

La derivada de la función $\phi(u)$ del cuarto numeral anterior es

$$\phi'(u) = \frac{2[(1-k)u^k + (1+k)u^{-k}]}{(u^k + u^{-k})^2},$$

así $\phi(u)$ es una función creciente positiva para los valores del parámetro $k \in [-1, 1]$. Por tanto $\ln_{\{k\}}(u)$ es un logaritmo deformado.

La función inversa de la función logaritmo deformado es la función exponencial deformada $\exp_{\phi}(u)$. Dicha función puede ser escrita con la ayuda de alguna función auxiliar $\Psi(u)$ como:

$$\exp_{\phi}(u) = 1 + \int_0^u \Psi(v) dv \tag{3.25}$$

Es entonces claro que

$$\exp_{\phi}(0) = 1 \quad y \quad \frac{d}{du} \exp_{\phi}(u) = \Psi(u) \tag{3.26}$$

y la función auxiliar $\Psi(u)$ puede ser calculada si la función $\phi(u)$ es conocida. En efecto, tomando la derivada de $u = \exp_{\phi}(\ln_{\phi}(u))$, se tiene

$$1 = \Psi(\ln_{\phi}(u)) \frac{1}{\phi(u)} \tag{3.27}$$

y ésta última expresión puede ser escrita como

$$\phi(u) = \Psi(\ln_\phi(u)). \quad (3.28)$$

En otras palabras, $v = \ln_\phi(u)$ implica que $\Psi(v) = \phi(u)$. Si $v < \ln_\phi(u)$ para todo u entonces se puede definir $\Psi(v) = 0$. Si $v > \ln_\phi(u)$ para todo u se define $\Psi(v) = +\infty$.

Se observa además que $\Psi(v)$ no puede ser negativa y es una función creciente. Además de 3.26 se sigue que $\exp_\phi(u)$ es na función convexa creciente. También se puede notar que

$$\Psi(u) = \frac{d}{du} \exp_\phi(u) = \phi(\exp_\phi(u)). \quad (3.29)$$

Esta última relación generaliza la conocida propiedad de que la derivada de la función exponencial usual es la función exponencial misma. Ahora, como casos particulares de \exp_Ψ se tiene:

1. si $\phi(u) = \ln u$, entonces $\Psi(v) = e^v$. Por tanto

$$\exp_\phi(u) = 1 + \int_0^u e^v dv = 1 + e^u - 1 = e^u = \exp(u)$$

que es la función exponencial usual.

2. si $\phi(u) = \ln_q(u) = \frac{u^{1-q}-1}{1-q}$, entonces $\Psi(v) = [1 + (1-q)v]_+^{\frac{q}{1-q}}$ donde $[\cdot]_+$ es la parte positiva y es definida por $[u]_+ = \max\{0, u\}$ y por tanto

$$\exp_\phi(u) = 1 + \int_0^u [1 + (1-q)v]_+^{\frac{q}{1-q}} dv$$

haciendo $z = 1 + (1-q)v$ y $dz = (1-q)dv$. Así que

$$\begin{aligned} \exp_\phi(u) &= 1 + [1 + (1-q)v]_+^{1-q} \Big|_0^u \\ &\Rightarrow \exp_\phi(u) = [1 + (1-q)u]^{1-q} \end{aligned}$$

que es la función exponencial de Tsallis.

3. si $\phi(u) = \ln_{\{k\}}(u)$, entonces $\Psi(v) = \frac{[kv + \sqrt{1+k^2v^2}]^{1/k}}{\sqrt{1+k^2v^2}}$ y así

$$\exp_\phi(u) = 1 + \int_0^u \frac{[kv + \sqrt{1+k^2v^2}]^{1/k}}{\sqrt{1+k^2v^2}} dv = \exp_{\{k\}}(u).$$

Naudts introduce las siguientes funciones duales deformadas

$$\exp_\phi^*(u) = \frac{1}{\exp_\phi(-u)} \quad y \quad \ln_\phi^*(u) = \ln_\phi\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3.30)$$

Estas funciones no siempre satisfacen las condiciones para ser de nuevo una función exponencial deformada o un logaritmo deformado. En efecto, de

$$\frac{d}{du} \ln_{\phi}^*(u) = \frac{1}{u^2 \phi(\frac{1}{u})}$$

se sigue que

$$\phi^*(u) = u^2 \phi(\frac{1}{u}),$$

que debe ser una función creciente.

Si $\frac{d}{du} \exp_{\phi}^*(u) = (\exp_{\phi}^*(u))^2 \Psi(-u)$, entonces $\exp_{\phi}^*(u) = 1 + \int_0^u \Psi^*(v) dv$, con $\Psi^*(u) = (\exp_{\phi}^*(u))^2 \Psi(-u)$.

En el caso del logaritmo natural, se tiene $\phi^*(u) = \phi(u) = u$ y $\Psi^*(u) = \Psi(u) = e^u$. Por tanto se dice que el logaritmo natural es función auto dual. Sin embargo, existen ejemplos no triviales de funciones exponencial y logaritmo deformadas que son autoduales. Por ejemplo, se puede verificar que:

$$\exp_k(-u) \exp_k(u) = (-ku + \sqrt{1 + k^2 u^2})^{1/k} (ku + \sqrt{1 + k^2 u^2})^{1/k} = 1.$$

lo cual significa que las funciones son autoduales.

Cuando se usa el logaritmo deformado para definir la entropía se puede notar que se pierde la propiedad del logaritmo dada por

$$\frac{d}{du} (u \ln \frac{1}{u}) = -\ln u - 1. \tag{3.31}$$

Lo anterior conlleva a la introducción del concepto de función logaritmo deducida $w_{\phi}(u)$. Esto requiere que la condición adicional de que la posible divergencia de $\ln_{\phi}(u)$ en $u = 0$ es lo suficientemente débil para que la integral

$$-\int_0^1 \ln_{\phi}(u) du = \int_1^0 \frac{v dv}{\phi(v)} < +\infty$$

converja.

Sea

$$F_{\phi}(x) = \int_1^x \ln_{\phi}(y) dy = \int_1^x \frac{(x-y)}{\phi(y)} dy. \tag{3.32}$$

Como antes, la posible divergencia de $\ln_{\phi}(x)$ en $x = 0$ debe ser lo suficientemente leve para que $F_{\phi}(0)$ sea finito.

La función logarítmica deducida $w_{\phi}(x)$, asociada con $\ln_{\phi}(x)$ es definida por

$$w_{\phi}(x) = (x-1)F_{\phi}(0) - xF_{\phi}(\frac{1}{x}), \tag{3.33}$$

que es de nuevo una función logaritmo deformado ya que:

$$\int_0^1 \ln_{\phi}(\frac{1}{x}) dx < +\infty.$$

y tiene las siguientes propiedades:

1. $w_\phi(x)$ es una función cóncava estrictamente creciente. Para ver esto, se debe notar que la integral $F_\phi(x)$ del logaritmo deformado $\ln_\phi(x)$ puede ser escrita como:

$$F_\phi(x) = x \ln_\phi(x) - \int_1^x \ln_\phi(y) dy.$$

Esta expresión es usada para calcular la derivada de $w_\phi(x)$ como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} w_\phi(x) &= F_\phi(0) - F_\phi\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) \ln_\phi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{x}} y d \ln_\phi(y) \end{aligned}$$

Debido a que $\ln_\phi(y)$ es una función estrictamente creciente la última expresión es estrictamente positiva para todo $x > 0$. Así que $w_\phi(x)$ es estrictamente creciente. Pero también se puede observar que la derivada de $w_\phi(x)$ es una función decreciente. Así que $w_\phi(x)$ es una función cóncava.

2. $w_\phi(1) = 0$. Esto es obvio ya que $F_\phi(1) = 0$.
3. $\int_0^1 w_\phi(x) dx < +\infty$. Esto es cierto ya que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_\phi(x) dx &= -F_\phi(0) - \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1}{x}} \ln_\phi(y) dy \\ &= -F_\phi(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \ln_\phi(y) dy \right) + \ln_\phi\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} F_\phi(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln_\phi\left(\frac{1}{x}\right) dx < +\infty \end{aligned}$$

Ahora se observa que:

$$\frac{d}{dx} \left[x w_\phi\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -\ln_\phi\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^1 \frac{y}{\phi(y)} dy = -F_\phi(0) - \ln_\phi(x).$$

Se puede probar que la función logaritmo deducido $w_\phi(x)$ es de nuevo un logaritmo deformado, esto es, existe una función creciente y positiva $x(u)$ tal que $w_\phi(x) = \ln_x(u)$. En efecto, sea $x(u)$ definida por

$$x(u) = \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{u}} \frac{v dv}{\phi(v)}}.$$

Entonces es fácil ver que $\frac{d}{du} w_\phi(u) = \int_0^{\frac{1}{u}} \frac{v dv}{\phi(v)} = \frac{1}{x(u)}$ y $\frac{d}{du} x(u) = \frac{x(u)^2}{u^3 \phi\left(\frac{1}{u}\right)} > 0$. Así que $w_\phi(u) = \ln_x(u)$ es un logaritmo deformado.

3.4.2. La Entropía de Kaniadakis (caso discreto)

La entropía $S_\phi(\rho)$ de una densidad de probabilidad discreta $\rho = \{\rho_1, \rho_2 \dots\}$ es definida por Naudts mediante la función logaritmo deducida $w_\phi(x)$, en lugar de la función logaritmo deformada $\ln_\phi(x)$, es decir,

$$S_\phi(\rho) = \sum_j \rho_j w_\phi\left(\frac{1}{\rho_j}\right) \leq +\infty \quad (3.34)$$

que puede ser escrito también como

$$S_\phi(\rho) = \sum_j \int_0^{\rho_j} \frac{v dv}{\phi(v)} - \sum_j \rho_j \ln_\phi(\rho_j) - F_\phi(0), \quad (3.35)$$

con $F_\phi(0) = \int_1^0 \ln_\phi(v) dv = \int_0^1 \frac{v dv}{\phi(v)}$.

El funcional $S_\phi(\rho)$ es una función cóncava. Esto significa que:

$$S_\phi(\rho)(\lambda + (1 - \lambda)q) \geq \lambda S_\phi(\rho) + (1 - \lambda)S_\phi(q) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

En efecto, como $\ln_\phi(v)$ es una función creciente de v , tenemos que la segunda derivada de $\int_0^u \ln_\phi(v) dv = F(u) > 0$. Esto quiere decir que $F(u)$ es una función convexa, así que:

$$\int_0^{\lambda\rho_j + (1-\lambda)q_j} \ln_\phi(v) dv \leq \lambda \int_0^{\rho_j} \ln_\phi(v) dv + (1 - \lambda) \int_0^{q_j} \ln_\phi(v) dv.$$

Esto combinado con 3.35 implica la propiedad de concavidad para $S_\phi(\rho)$.

En el caso continuo, la definición para $S_\phi(\rho)$ con $\rho = \rho(x)$ es

$$S_\phi(\rho) = \int \rho(x) w_\phi\left[\frac{c(x)}{\rho(x)}\right] dx \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \int \rho(x) w_\phi\left[\frac{c(x)}{\rho(x)}\right] dx &= \int c(x) dx \int_0^{\frac{\rho(x)}{c(x)}} \frac{v dv}{\phi(v)} - \int \rho(x) \ln_\phi\left(\frac{\rho(x)}{c(x)}\right) - F_\phi(0) \\ &= - \int c(x) dx \int_0^{\frac{\rho}{c(x)}} \ln_\phi(v) dv - F_\phi(0) \end{aligned}$$

Para el caso discreto, de la definición de $w_\phi(x)$ se sigue inmediatamente que:

$$S_\phi(\rho) = \sum_j [(1 - \rho_j)F_\phi(0) - F_\phi(\rho_j)] \quad (3.37)$$

Con todo lo antes expuesto, el funcional de entropía de Kaniadakis reescalado puede ser deducido como se muestra a continuación. Tomando $\phi_k(u) = \frac{2u}{u^k + u^{-k}}$ se tiene $\ln_{\phi_k}(u) = \ln_{\{k\}}(u) = \frac{u^k - u^{-k}}{2k}$ y entonces

$$\begin{aligned}
F_{\phi_k}(x) &= \int_1^x \ln_{\phi}(y) dy = \int_1^x \left(\frac{y^k - y^{-k}}{2k} \right) dy \\
&= \frac{1}{2k} \left[\frac{y^{k+1}}{k+1} - \frac{y^{1-k}}{1-k} \right]_1^x = \frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{2k} \left[\frac{x^{k+1}}{1+k} - \frac{x^{1-k}}{1-k} \right].
\end{aligned}$$

En particular se tiene que

$$F_{\phi}(0) = \frac{1}{1-k^2}.$$

y el logaritmo deducido es entonces dado por

$$\begin{aligned}
w_{\phi_k} &= (x-1)F_{\phi}(0) - xF_{\phi}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (x-1)\frac{1}{1-k^2} - x\left[\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{2k}\left(\frac{(\frac{1}{x})^{k+1}}{(1+k)} - \frac{(\frac{1}{x})^{1-k}}{1-k}\right)\right] \\
&= \frac{x}{1-k^2} - \frac{1}{1-k^2} - \frac{x}{2k}\left(\frac{1}{(1+k)x^{1+k}} - \frac{1}{(1-k)x^{1-k}}\right) \\
&= -\frac{x}{1-k^2} - \frac{1}{2k}\left[\frac{1}{(1+k)x^k} - \frac{1}{(1-k)x^{-k}}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} - \frac{1}{2k}\left[\frac{x^{-k}}{(1+k)} - \frac{x^k}{(1-k)}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{2k}\left[\frac{x^k}{(1-k)} - \frac{x^{-k}}{(1+k)}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{2k}\left[\frac{(1+k)x^k - (1-k)x^{-k}}{(1-k)(1+k)}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{1-k^2}\left[\frac{(1+k)x^k - (1-k)x^{-k}}{2k}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{(1+k)x^k - (1-k)x^{-k}}{2k\sqrt{1-k^2}}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{\sqrt{1+k}x^k}{\sqrt{1-k}} - \frac{\sqrt{1-k}x^{-k}}{\sqrt{1+k}}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{(\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2}}x^k - (\frac{1-k}{1+k})^{\frac{1}{2}}x^{-k}}{2k}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{(\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2}}x^k - (\frac{1+k}{1-k})^{-\frac{1}{2}}x^{-k}}{2k}\right] \\
&= -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{((\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2k}}x)^k - ((\frac{1+k}{1-k})^{\frac{1}{2k}}x)^{-k}}{2k}\right]
\end{aligned}$$

Así que

$$w_{\phi_k}(x) = -\frac{1}{1-k^2} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln_{\{k\}}\left[\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2k}}x\right]. \quad (3.38)$$

El primer término en la expresión anterior es un factor de reescalamiento. Llamando $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ y $\alpha = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{-\frac{1}{2k}} = \mu^{-1}$ se define una función reescalada dada por

$$w_{\phi_k}^\varepsilon(x) = \lambda[w_{\phi_k}(\mu^{-1}(x)) - w_{\phi_k}(\mu^{-1})].$$

Volviendo a las expresiones 3.34 y 3.35 se tiene

$$\begin{aligned} S_{\phi_k}(\rho) &= \sum_j \rho_j w_{\phi_k}\left(\frac{1}{\rho_j}\right) \\ &= \sum_j [(1 - \rho_j)F_{\phi_k}(0) - F_{\phi_k}(\rho_j)] \\ &= -F_{\phi_k}(0) - \sum_j \int_0^{\rho_j} \ln_{\phi_k}(x) dx \\ &= \frac{-1}{1-k^2} - \sum_j \frac{1}{2k} \left[\frac{\rho_j^{k+1}}{1+k} - \frac{\rho_j^{1-k}}{1-k} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left(\frac{-2k}{1-k^2} \right) + \sum_j \frac{1}{2k} \left[\frac{\rho_j^{1-k}}{1-k} - \frac{\rho_j^{k+1}}{1+k} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left[\frac{(1-k) - (1+k)}{(1-k)(1+k)} \right] + \sum_j \frac{1}{2k} \left[\frac{\rho_j^{1-k}}{1-k} - \frac{\rho_j^{k+1}}{1+k} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left[\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1-k} \right] + \sum_j \frac{1}{2k} \left[\frac{\rho_j^{1-k}}{1-k} - \frac{\rho_j^{k+1}}{1+k} \right]. \end{aligned}$$

De tal forma, una expresión para la entropía de Kaniadakis reescalada es dada por

$$S_{\phi}(\rho) = \frac{1}{2k(1+k)} \left(1 - \sum_j \rho_j^{1+k} \right) + \frac{1}{2k(1-k)} \left(\sum_j \rho_j^{1-k} - 1 \right) \quad (3.39)$$

3.4.3. Relación con La Entropía de Tsallis

Partiendo de la ecuación 3.39 se puede probar una interesante relación entre la entropía de Kaniadakis reescalada y la de Tsallis de la siguiente forma. La entropía de Tsallis [12] se define como

$$S_q(\rho) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_j \rho_j^q \right)$$

Si $q = k + 1$, entonces $S_q(\rho) = \frac{1}{k+1-1} \left(1 - \sum_j \rho_j^{1+k} \right) = \frac{1}{k} \left(1 - \sum_j \rho_j^{1+k} \right)$.

Si $q = 1 - k$, entonces $S_q(\rho) = \frac{1}{1-k-1} \left(1 - \sum_j \rho_j^{1-k} \right) = \frac{1}{k} \left(\sum_j \rho_j^{1-k} - 1 \right)$.

Por tanto, la expresión 3.39 puede escribirse como

$$S_{\phi_k}(\rho) = \frac{1}{2(1+k)} S_{k+1}(\rho) + \frac{1}{2(1-k)} S_{1-k}(\rho),$$

es decir, la entropía de Kaniadakis reescalad puede ser generada por una combinación lineal de entropías de Tsallis con índices $q = k + 1$ y $q = 1 - k$ de la siguiente forma,

$$S_\phi(\rho) = \sum_j \rho_j w_\phi\left(\frac{1}{\rho_j}\right) = \frac{1}{2(1+k)} S_{1+k}(\rho) + \frac{1}{2(1-k)} S_{1-k}(\rho),$$

para $\phi_k(x) = \frac{2k}{x^k + x^{-k}}$.

Capítulo 4

Operador k -transformada de Laplace

Hasta el momento, no se conocen en la literatura trabajos relacionados con análisis armónico en el marco de matemáticas k -deformadas; no se han dado versiones de la transformada de Laplace, de la transformada de Fourier ni ondículas. Este capítulo pretende iniciar un estudio en ese sentido, centrándose en la definición de un operador que se llamará k -transformada de Laplace y presentando el desarrollo de algunas de sus propiedades, de manera que se recupere la teoría de la transformada de Laplace cuando k tienda a cero y que el nuevo operador pueda ser empleado en mecánica estadística como se puede hacer con el de Laplace. Un uso en mecánica estadística se mostrará en el último capítulo.

Se quiere generalizar (k -deformar) la transformada de Laplace que se define para una función f por

$$\mathfrak{L}\{f(t)\}(s) \equiv F_{(s)} \equiv \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt.$$

Ahora, para definir el operador k -transformada de Laplace, $\mathfrak{L}_k\{f(t)\}(s)$, se pueden considerar las siguientes opciones:

1. $\int_0^{\infty} f(t) \exp_k(-st) dt.$
2. $\int_0^{\infty} f(t) [\exp_k(-t)]^s d_{\{k\}t} = \int_0^{\infty} \frac{f(t) [\exp_k(-t)]^s dt}{\sqrt{1+k^2 t^2}}.$
3. $\int_0^{\infty} f(t) [\exp_k(-t)]^s dt.$

La primera opción, que parece la más natural, no permite expresiones simples para propiedades tales como la atenuación y por tanto no es muy útil para ser utilizada en cálculos. La segunda y tercera opción si permiten propiedades como las de la transformada de Laplace, pero es la tercera opción la que es útil para su aplicación natural en mecánica estadística, lo cual se mostrará en el último capítulo. Por lo anterior, se definirá la k -transformada como en la tercera opción y su estudio se presenta en la primera sección de este capítulo, dejando a la segunda sección la presentación de propiedades.

4.1. Definición y condiciones de existencia

En esta sección se introducen los operadores k -transformada de Laplace y su respectiva transformada inversa, a la vez que se establecen condiciones para las clases de funciones que tengan imagen bajo la acción de ellos. En general, se considerará un número real fijo k entre -1 y 1 .

Definición 4.1.1. *La k -transformada de Laplace de una función f se define: para $k \neq 0$ mediante la integral*

$$\mathfrak{L}_k\{f(t)\}(s) := F_k(s) := \int_0^{\infty} f(t)[\exp_k(-t)]^s dt \quad (4.1)$$

y para $k = 0$ mediante la transformada de Laplace usual, esto es, $\mathfrak{L}_0\{f(t)\}(s) = F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$.

Así como la transformada de Laplace existe para funciones de orden exponencial con ciertas condiciones, se probará más adelante que la k -transformada de Laplace existirá para funciones que satisfagan, entre otras condiciones, la siguiente definición.

Definición 4.1.2. *Una función f , definida en el intervalo $a \leq t < \infty$, se dice que es de orden k -exponencial σ_0 ($\sigma_0 \in \mathbb{R}$) si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(t)| \leq M[\exp_{\{k\}}(-t)]^{-\sigma_0}$.*

Para establecer condiciones suficientes para la existencia de la k transformada de Laplace, es pertinente recordar lo siguiente.

Definición 4.1.3.

1. *Una función f en $[a, b]$ tiene una discontinuidad de salto en $t_0 \in (a, b)$ si f es discontinua en t_0 , pero los límites laterales $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ existen.*
2. *Una función f definida en un intervalo $a \leq t < \infty$ se dice que es continua por partes en (a, ∞) , si para todo intervalo finito $[a, b]$ la función es discontinua únicamente en un número finito de puntos y las discontinuidades son de salto.*
En otras palabras una función f es continua por partes en $[a, N]$ para todo $N > 0$.

El teorema que establece condiciones suficientes para la existencia de $\mathfrak{L}_k\{\cdot\}(s)$ se expresa como sigue.

Teorema 4.1.1. *Si f una función continua por partes para $0 \leq t \leq \infty$ y de orden k -exponencial σ_0 , entonces la integral (4.1) converge para $\Re_e(s) > \sigma_0 - k$, donde $\Re_e(s)$ denota a la parte real de un número complejo s .*

Demostración. Para la demostración considérese un caso más general donde la variable s pueda ser compleja,

$$s = \sigma + iw.$$

Sea $F_{k,R}$ la función definida por

$$F_{k,R}(s) = \int_0^R |[\exp_k(-t)]^s| |f(t)| dt = \int_0^R [\exp_k(-t)]^\sigma |f(t)| dt.$$

Por ser f continua por partes, se puede admitir que f tiene un número finito m de discontinuidades en el intervalo $[0, R]$, localizadas en $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$, con $t_0 = 0$. Se puede ahora escribir la función $F_{k,R}$ como

$$F_{k,R}(s) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\exp_k(-t)]^{+\sigma} |f(t)| dt + \int_{t_m}^R [\exp_k(-t)]^\sigma |f(t)| dt \quad (4.2)$$

y siendo f de orden k -exponencial σ_0 , entonces

$$\begin{aligned} F_{k,R}(s) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} M \int_{t_i}^{t_{i+1}} M [\exp_k(-t)]^{+\sigma} [\exp_k(-t)]^{-\sigma_0} dt + \int_{t_m}^R [\exp_k(-t)]^\sigma [\exp_k(-t)]^{-\sigma_0} dt \\ &= M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\exp_k(-t)]^{+\sigma} [\exp_k(-t)]^{-\sigma_0} dt + M \int_{t_m}^R [\exp_k(-t)]^\sigma [\exp_k(-t)]^{-\sigma_0} dt \\ &= M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma}{k}} [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{-\frac{\sigma_0}{k}} dt \\ &\quad + M \int_{t_{i+1}}^R [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma}{k}} [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{-\frac{\sigma_0}{k}} dt \\ &= M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt + M \int_{t_m}^R [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt. \end{aligned}$$

Para calcular $\int [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt$, sea $w = \sqrt{1+k^2t^2} - kt$ con lo cual $dt = -\frac{(w^2+1)}{2kw^2} dw$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt &= \int \frac{-(w^2+1)}{2kw^2} w^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dw \\ &= \int -\frac{1}{2k} (1+w^{-2}) w^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dw \\ &= -\frac{1}{2k} \int \left(w^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} + w^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}-2} \right) dw \\ &= -\frac{1}{2k} \left[\frac{k}{\sigma-\sigma_0+k} w^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}} + \frac{k}{\sigma-\sigma_0-k} w^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}} \right] \\ &= \frac{-w^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} - \frac{w^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} + C \\ &= \frac{-[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} + C. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
F_{k,R}(s) &\leq M \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt + M \int_{t_m}^R [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0}{k}} dt \\
&= M \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right) \\
&\quad + M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \Big|_{t_m}^R - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \Big|_{t_m}^R \right] \\
&= M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \Big|_{t_0}^{t_m} - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \Big|_{t_0}^{t_m} \right] \\
&\quad + M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \Big|_{t_m}^R - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \Big|_{t_0}^R \right] \\
&= M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \Big|_{t_0}^R - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \Big|_{t_0}^R \right] \\
&= M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} + \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} + \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \right] \\
&= M \left[\frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k} + \frac{1}{2(\sigma-\sigma_0+k)}}}{2(\sigma-\sigma_0+k)} - \frac{[\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k} + \frac{1}{2(\sigma-\sigma_0-k)}}}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \right] \\
&= \frac{M}{2(\sigma-\sigma_0+k)} \left(1 - [\sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0+k}{k}} \right) \\
&\quad + \frac{M}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \left([1 - \sqrt{1+k^2t^2} - kt]^{\frac{\sigma-\sigma_0-k}{k}} \right) \\
&\leq \frac{M}{2(\sigma-\sigma_0+k)} + \frac{M}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \leq \frac{2M}{2(\sigma-\sigma_0-k)} \\
&= \frac{M}{\sigma-\sigma_0-k} < \infty,
\end{aligned}$$

donde la cota superior para $F_{k,R}(s)$ no depende de R .

Finalmente,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F_{k,R}(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R [\exp_k(-t)]^s |f(t)| dt = \int_0^\infty [\exp_k(-t)]^s |f(t)| dt.$$

□

La k -transformada de Laplace inversa se da como indica el siguiente teorema, generalizando la misma situación para la transformada de Laplace.

Teorema 4.1.2. *Si $F_k(s)$ es tal que existe un real c que excede a la parte real de todas las singularidades de $F_k(s)$, entonces $F_k(s)$ tiene k -transformada inversa de Laplace y está dada por*

$$\mathfrak{L}_k^{-1}\{F_k(s)\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_k(s)[\exp_k(-t)]^{-s} ds}{\sqrt{1+k^2t^2}}.$$

Demostración. Para probar que $\mathfrak{L}_k^{-1}\{\mathfrak{L}_k\{f(t)\}\} = f(t)$, se usarán las siguientes propiedades de la distribución delta de Dirac:

$$\delta(g(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(sg(p)) ds, \quad (4.3)$$

$$\delta(g(p)) = \frac{1}{\left| \frac{dg(p)}{dp} \right|_{p=t}} \delta(p-t), \quad (4.4)$$

$$\text{y } \int_0^\infty \delta(x-a)f(x)dx = f(a). \quad (4.5)$$

Sea $g(p) = \ln \left(\frac{\sqrt{1+k^2p^2-kp}}{\sqrt{1+k^2t^2-kt}} \right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\sqrt{1+k^2p^2-kp}}{\sqrt{1+k^2t^2-kt}} \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dg(p)}{dp} &= \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{\sqrt{1+k^2p^2-kp}}{\sqrt{1+k^2t^2-kt}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\sqrt{1+k^2t^2-kt}}{\sqrt{1+k^2p^2-kp}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2t^2-kt}} \right) \left(\frac{2k^2p}{2\sqrt{1+k^2p^2}} - k \right) \\ &= \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1+k^2p^2-kp}} k \left(\frac{kp - \sqrt{1+k^2p^2}}{\sqrt{1+k^2p^2}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2p^2}} \end{aligned}$$

y por tanto, por (4.4) se tiene

$$\delta(g(p)) = \frac{1}{\left| \frac{dg(p)}{dp} \right|_{p=t}} \delta(p-t) = \frac{1}{\left| \frac{-1}{\sqrt{1+k^2p^2}} \right|_{p=t}} \delta(p-t) = \sqrt{1+k^2p^2} \delta(p-t). \quad (4.6)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k^{-1}\{\mathfrak{L}_k\{f(t)\}\} &= \mathfrak{L}_k^{-1}\{F_q(s)\}(t) \\
&= \mathfrak{L}_k^{-1}\left\{\int_0^\infty f(p)[\exp_k(-p)]^s dp\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{\int_0^\infty f(p)[\exp_k(-p)]^s dp\right\} \frac{[\exp_k(-t)]^{-s} ds}{\sqrt{1+k^2t^2}} \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\exp_k(-p)]^s [\exp_k(-t)]^{-s} ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\sqrt{1+k^2p^2}-kp]^{\frac{s}{k}} [\sqrt{1+k^2t^2}-kt]^{-\frac{s}{k}} ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\sqrt{1+k^2p^2}-kp}{\sqrt{1+k^2t^2}-kt}\right]^{\frac{s}{k}} ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2p^2}-kp}{\sqrt{1+k^2t^2}-kt}\right)^{\frac{s}{k}}\right) ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\left(s \ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2p^2}-kp}{\sqrt{1+k^2t^2}-kt}\right)^{\frac{1}{k}}\right) ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(sg(p)) ds\right] dp \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \delta(g(p)) dp, \text{ por (4.3)} \\
&= \int_0^\infty \frac{f(p)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \sqrt{1+k^2t^2} \delta(p-t) dp, \text{ por (4.6)} \\
&= f(t), \text{ por (4.5)}.
\end{aligned}$$

De otro lado, para probar $F_k(s) = \mathfrak{L}_k\{\mathfrak{L}_k^{-1}\{F_k(s)\}\}$, se denotará

$$g(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_q(z)[\exp_k(-t)]^{-z} dz}{\sqrt{1+k^2t^2}}. \quad (4.7)$$

Interesa tomar k -transformada en la expresión anterior y quedará en términos de la integral $\int_0^\infty \frac{[\exp_k(-t)]^{s-z} dt}{\sqrt{1+k^2t^2}}$, la cual se resolverá a continuación.

Sea $u = \exp_k(-t) = [\sqrt{1+k^2t^2}-kt]^{\frac{1}{k}}$, con lo cual $du = -u \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}}$, o mejor aún $\frac{-du}{u} = \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}}$. También, $u \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y $u = 1$ si $t = 0$. Con lo anterior se tiene

$$\int_0^\infty \frac{[\exp_k(-t)]^{s-z} dt}{\sqrt{1+k^2t^2}} = -\int_1^0 u^{s-z-1} du = \int_0^1 u^{s-z-1} du = \frac{1}{s-z}.$$

Ahora si, tomando k -transformada en la expresión (4.7) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{g(t)\} &= \int_0^\infty g(t)[\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_k(z)[\exp_k(-t)]^{-z} dz}{\sqrt{1+k^2 t^2}} \right] [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_k(z) \int_0^\infty \frac{[\exp_k(-t)]^{s-z} dt}{\sqrt{1+k^2 t^2}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_k(z)}{s-z} dz
\end{aligned}$$

Para evaluar la integral anterior, se elije un contorno definido por la línea recta $\mathbb{R}_e(z) = c$ y un arco Γ de radio R simétrico al eje real y a derecha de $\mathbb{R}_e(z) = c$, donde el polo quede localizado en el interior del contorno C limitado por $\mathbb{R}_e(z) = c$ y Γ . Como $F_k(z)$ no posee singularidades a derecha de $\mathbb{R}_e(z) = c$, entonces para algún $w > 0$, $F_k(z)$ es de orden $O(z^{-w})$ en este semiplano, es decir, $|F_k(z)| \leq M|z|^w$ cuando $z \rightarrow \infty$. Por lo anterior, la integral sobre el arco Γ es cero; y en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \frac{F_k(z)}{s-z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F_k(z)}{s-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F_k(z)}{s-z} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F_k(z)}{s-z} dz \\
&= F_k(s).
\end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia del teorema integral de Cauchy, válido en este caso porque al no tener $F_k(z)$ singularidades a derecha de $\mathbb{R}_e(z) = c$, entonces $F_k(z)$ es analítica dentro y sobre la curva cerrada simple C .

Tomando límite sobre la expresión anterior, cuando $R \rightarrow \infty$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F_k(z)}{s-z} dz = F_k(s).$$

de ahora en adelante se asumirá que las funciones que aparecen tienen k -transformada o k -transformada inversa, según el caso.

De tal forma, queda probado que $\mathfrak{L}_k\{\mathfrak{L}_k^{-1}\{F_k(s)\}\} = F_k(s)$.

□

4.2. Propiedades de \mathfrak{L}_k

Las propiedades de la k -transformada de Laplace tienen forma análoga a las de la transformada de Laplace, si se expresan eligiendo deformaciones adecuadas. La forma de elegir deformaciones para generalizar alguna de las propiedades de la transformada de Laplace, no es necesariamente única. El siguiente teorema presenta algunas propiedades básicas.

Teorema 4.2.1.

1. Linealidad

Si c_1, c_2 son constantes, entonces

$$\mathfrak{L}_k\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathfrak{L}_k\{f_1(t)\} + c_2 \mathfrak{L}_k\{f_2(t)\}.$$

2. Cambio de escala

$$\mathfrak{L}_k\{f(at)\} = \frac{1}{a} F_k\left(\frac{s}{a}\right)$$

3. Atenuación o sustitución

$$F_k(s - s_0) = \mathfrak{L}_k\{f(t)[\exp_k(-t)]^{s_0}\}.$$

4. Transformada de la función escalón Si $\mu(\cdot)$ es la función de grado unitario de Heaviside, entonces

$$\mathfrak{L}_k\{\mu(t - t_0)\} = \frac{s[\exp_k(-t_0)]^{\frac{s-k}{s}}}{s^2 - k^2}.$$

Demostración. 1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \int_0^\infty \{c_1 f_1(t) [\exp_k(-t)]^s + c_2 f_2(t) [\exp_k(-t)]^s\} dt \\ &= \int_0^\infty \{c_1 f_1(t) [\exp_k(-t)]^s dt + \int_0^\infty c_2 f_2(t) [\exp_k(-t)]^s dt\} \\ &= c_1 \int_0^\infty f_1(t) [\exp_k(-t)]^s dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= c_1 \mathfrak{L}_k\{f_1(t)\} + c_2 \mathfrak{L}_k\{f_2(t)\}. \end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{L}_k\{f(t)\} = F_k(s)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{f(at)\} &= \int_0^\infty f(at) [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \int_0^\infty f(at) \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt. \end{aligned}$$

Haciendo $k_1 = \frac{k}{a}$ y el cambio de variable $w = at$ se tiene $dw = a dt$, por tanto

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{f(at)\} &= \int_0^\infty f(w) \left[\sqrt{1 + a^2 k_1^2 \frac{w^2}{a^2}} - a k_1 \frac{w}{a} \right]^{\frac{s}{a k_1}} \frac{dw}{a} \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(w) \left[\sqrt{1 + k_1^2 w^2} - k_1 w \right]^{\frac{s}{a k_1}} dw \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(w) [\exp_{k_1}(-w)]^{\frac{s}{a}} dw \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty f(w) [\exp_{\frac{k}{a}}(-w)]^{\frac{s}{a}} dw \\
&= \frac{1}{a} F_{\frac{k}{a}}\left(\frac{s}{a}\right).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
F_k(s - s_0) &= \int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^{s-s_0} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s-s_0}{k}} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{-\frac{s_0}{k}} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^s [\exp_k(-t)]^{-s_0} dt \\
&= \int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^{-s_0} [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \mathfrak{L}_k\{f(t) [\exp_k(-t)]^{-s_0}\}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{\mu(t - t_0)\} &= \int_0^\infty \mu(t - t_0) [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_{t_0}^\infty [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_{t_0}^\infty \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt.
\end{aligned}$$

Sea $w = \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}}$, con lo cual $dt = \frac{-\sqrt{1+k^2 t^2}}{sw} dw = -\frac{w^{\frac{2k}{s}+1}}{2sw^{\frac{k}{s}}} dw$.

Si $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$ y si $t = t_0$, $w = [\exp_k(-t_0)]^s$. Con lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{\mu(t-t_0)\} &= \int_{[\exp_k(-t_0)]^s}^0 \frac{-w(w^{\frac{2k}{s}}+1)dw}{2sww^{\frac{k}{s}}} \\
&= -\frac{1}{2s} \int_{[\exp_k(-t_0)]^s}^0 w^{-\frac{k}{s}}(w^{\frac{2k}{s}}+1)dw \\
&= -\frac{1}{2s} \int_{[\exp_k(-t_0)]^s}^0 (w^{\frac{k}{s}}+w^{-\frac{k}{s}})dw \\
&= -\frac{1}{2s} \left[\frac{s}{k+s}w^{\frac{k+s}{s}} + \frac{s}{k-s}w^{\frac{k-s}{s}} \right]_{[\exp_k(-t_0)]^s}^0 \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{k+s}w^{\frac{k+s}{s}} + \frac{1}{k-s}w^{\frac{k-s}{s}} \right]_{[\exp_k(-t_0)]^s}^0 \\
&= -\frac{1}{2} \left[-\frac{[\exp_k(-t_0)]^{\frac{k+s}{s}}}{s+k} - \frac{[\exp_k(-t_0)]^{\frac{k-s}{s}}}{k-s}w^{\frac{k-s}{s}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{[\exp_k(-t_0)]^{\frac{k+s}{s}}}{s+k} + \frac{[\exp_k(-t_0)]^{\frac{k-s}{s}}}{k-s}w^{\frac{k-s}{s}} \right] \\
&= \frac{s[\exp_k(-t_0)]^{\frac{s-k}{s}}}{s^2-k^2}.
\end{aligned}$$

□

Respecto a la transformada de la primera derivada se tiene la siguiente propiedad.

$$\mathfrak{L}_k\{f'(t)\} = s\mathfrak{L}_k\left\{\frac{f(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}}\right\} - f(0), \quad (4.8)$$

la cual equivale a

$$\mathfrak{L}_k\left\{\frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+k^2t^2}f(t)\right]\right\} = s\mathfrak{L}_k\{f(t)\} - f(0). \quad (4.9)$$

Demostración. Para probar (4.8), nótese que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{f'(t)\} &= \int_0^\infty f'(t)[\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_0^\infty f'(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt\right]^{\frac{s}{k}} dt.
\end{aligned}$$

Usando integración por partes se considera

$$\begin{aligned}
u &= \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt\right]^{\frac{s}{k}}, & dv &= f'(t)dt \\
du &= -s \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt\right]^{\frac{s}{k}-1} \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}-kt}, & v &= f(t).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{f'(t)\} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{df}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ [\exp_k(-t)]^s f(t) \Big|_0^b + s \int_0^b [\exp_k(-t)]^s f(t) \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ [\exp_k(-b)]^s f(b) - f(0) + s \int_0^b [\exp_k(-t)]^s \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} \\
&= -f(0) + s \int_0^\infty [\exp_k(-t)]^s f(t) \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}} \\
&= -f(0) + s \int_0^\infty \frac{f(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}} [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= -f(0) + s \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{f(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} \\
&= s \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{f(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} - f(0).
\end{aligned}$$

□

Para probar (4.9), basta sustituir a $f(t)$ por $\sqrt{1+k^2t^2}f(t)$ en (4.8). Otra prueba se muestra a continuación.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \right\} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right]^{\frac{s}{k}} dt
\end{aligned}$$

Haciendo:

$$\begin{aligned}
u &= \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}}, & dv &= \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] dt \\
du &= -s \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}-1} \frac{dt}{\sqrt{1+k^2t^2}-kt}, & v &= \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right],
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \right\} &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} \right] \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} \sqrt{1+k^2t^2} f(t) \Big|_0^b \right. \\
&\quad \left. + s \int_0^b \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} f(t) dt \right\} \\
&= -f(0) + s \int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0).
\end{aligned}$$

□

De otro lado, los valores límite para la transformada de Laplace son $\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathfrak{L} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ y $\lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t))$, el siguiente teorema los expresa para la k -transformada.

Teorema 4.2.2. Valores Límite

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad y \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right).$$

Demostración. Por (4.9) se sabe que existe $\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \right\}$, lo cual implica, por el teorema de existencia, que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \right\} = 0.$$

De lo anterior se tiene

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1+k^2t^2} f(t) \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0)),$$

es decir, $\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} = f(0)$ y por tanto $\lim_{s \rightarrow \infty} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.

Para la segunda afirmación se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] [\exp_k(-t)]^s dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] dt \lim_{s \rightarrow 0} [\exp_k(-t)]^s \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right|_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(b) - f(0) \right] \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(b) \right] - f(0) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] - f(0).
\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] \right\} = s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0} (s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0)) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0)] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \} - f(0)
\end{aligned}$$

$$\text{y por tanto } \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} f(t) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{L}_k \{ f(t) \}.$$

□

El siguiente teorema presenta propiedades referentes a derivadas de k -transformadas e integración de k -transformadas, en analogía con las correspondientes a la transformada de Laplace.

Teorema 4.2.3.

1.

$$F'_k(s) = \mathfrak{L}_k \{ f(t) \ln(\exp_k(-t)) \}.$$

2.

$$F''_k(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left[\int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^s dt \right].$$

3.

$$F_k^{(n)}(s) = \mathfrak{L}_k \{ f(t) \ln^n(\exp_k(-t)) \}.$$

4.

$$\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{\int_0^t f(w)dw}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} = \frac{1}{s} \mathfrak{L}_k \{f(t)\}.$$

5.

$$\int_s^\infty F_k(w)dw = \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{f(t)}{\ln(\exp_k(t))} \right\}.$$

6.

$$\int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F_k(w)d^n w = \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{(-1)^n f(t)}{\ln^n(\exp_k(-t))} \right\}.$$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} F'_k(s) &= \frac{d}{ds} \left[\int_0^\infty f(t)[\exp_k(-t)]^s dt \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[\int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt \right] \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} \frac{1}{k} \ln \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right] dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} \ln \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{1}{k}} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \ln(\exp_k(-t)) [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \mathfrak{L}_k \{f(t) \ln(\exp_k(-t))\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} F''_k(s) &= \frac{d^2}{ds^2} \left[\int_0^\infty f(t)[\exp_k(-t)]^s dt \right] \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \left[\int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[\int_0^\infty f(t) \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} \ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)^{\frac{1}{k}} dt \right] \\ &= \int_0^\infty f(t) \ln^2 \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)^{\frac{1}{k}} \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \ln^2(\exp_k(-t)) [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \mathfrak{L}_k \{f(t) \ln^2(\exp_k(-t))\} \end{aligned}$$

3. La prueba se hace por inducción matemática.

4. Se tiene $\mathfrak{L}_k \left\{ \int_0^t f(w)dw \right\} = \int_0^\infty \int_0^t f(w)dw [\exp_k(-t)]^s dt$. Sea $g(t) = \int_0^t f(w)dw$.

En consecuencia, $g'(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(w)dw \right] = f(t)$. Ahora:

$$\mathfrak{L}_k \{g'(t)\} = s \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} - g(0) = s \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} \quad \text{pues } g(0) = 0.$$

Por tanto, $\mathfrak{L}_k \{f(t)\} = s \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{\int_0^t f(w)dw}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\}$, es decir,

$$\mathfrak{L}_k \left\{ \frac{\int_0^t f(w)dw}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right\} = \frac{1}{s} \mathfrak{L}_k \{f(t)\}.$$

5.

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F_k(w)dw &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t) [\exp_k(-t)]^w dt \right) dw \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \int_s^\infty [\exp_k(-t)]^w dw \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \int_s^\infty \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{w}{k}} dw \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \lim_{b \rightarrow \infty} \int_s^b \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{w}{k}} dw \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \lim_{b \rightarrow \infty} k \frac{\left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{w}{k}}}{\ln \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]} \Big|_s^b \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{k \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{b}{k}} - k \left[\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}}}{\ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)} \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{k [\exp_k(-t)]^b - k [\exp_k(-t)]^s}{\ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)} \\ &= \int_0^\infty -k f(t) \frac{[\exp_k(-t)]^s}{\ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{-f(t)}{\frac{1}{k} \ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)} [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \int_0^\infty \frac{-f(t)}{\ln \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)^{\frac{1}{k}}} [\exp_k(-t)]^s dt \\ &= \int_0^\infty \frac{-f(t)}{\ln(\exp_k(-t))} [\exp_k(-t)]^s dt. \\ &= \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{-f(t)}{\ln(\exp_k(-t))} \right\} = \mathfrak{L}_k \left\{ \frac{f(t)}{\ln(\exp_k(t))} \right\}. \end{aligned}$$

6. La prueba se hace por inducción matemática. □

A continuación, se propone la k -convolución entre funciones de manera que su k -transformada sea igual al producto de las k -transformadas de las funciones. Para establecer lo anterior, se define la k -convolución entre dos funciones f y g por

$$(f *_k g)(t) = \int_0^t f(t \ominus^k \lambda) g(\lambda) \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda t}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) d\lambda.$$

En consecuencia se tiene el resultado mencionado.

Teorema 4.2.4.

$$\mathfrak{L}_k\{f(t)\} \mathfrak{L}_k\{g(t)\} = \mathfrak{L}_k\{(f *_k g)(t)\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{f(t)\} \mathfrak{L}_k\{g(t)\} &= \left[\int_0^\infty f(\tau) [\exp_k(-\tau)]^s d\tau \right] \left[\int_0^\infty g(\lambda) [\exp_k(-\lambda)]^s d\lambda \right] \\ &= \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda \left[\int_0^\infty f(\tau) [\exp_k(-\lambda) \exp_k(-\tau)]^s d\tau \right] \\ &= \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda \left[\int_0^\infty f(\tau) [\exp_k(-(\lambda \oplus^k \tau))]^s d\tau \right] \end{aligned}$$

Sea $t = \lambda \oplus^k \tau \Rightarrow \tau = t \ominus^k \lambda, \quad d\tau = \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda t}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) dt$
 si $\tau = 0 \quad t = \lambda \quad$ si $\tau \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$
 tenemos así:

$$\mathfrak{L}_k\{f(t)\} \mathfrak{L}_k\{g(t)\} = \int_0^\infty g(\lambda) d\lambda \left[\int_\lambda^\infty f(t \ominus^k \lambda) [\exp_k(-t)]^s \frac{d}{dt} (t \ominus^k \lambda) dt \right]$$

Cambiamos ahora el límite de integración λ de la integral interna anterior usando la función de grado unitario de Heaviside,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{f(t)\} \mathfrak{L}_k\{g(t)\} &= \left[\int_0^\infty f(t \ominus^k \lambda) \mu(t \ominus^k \lambda) [\exp_k(-t)]^s \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda t}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) dt \right] \\ &= \int_0^\infty [\exp_k(-t)]^s dt \left[\int_0^\infty f(t \ominus^k \lambda) \mu(t \ominus^k \lambda) g(\lambda) \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda t}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) dt \right] \\ &= \int_0^\infty [\exp_k(-t)]^s dt \left[\int_0^\infty f(t \ominus^k \lambda) g(\lambda) \left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda t}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) dt \right] \\ &= \int_0^\infty [\exp_k(-t)]^s (f *_k g)(t) dt \\ &= \mathfrak{L}_k\{(f *_k g)(t)\} \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado presenta algunas propiedades de la k -convolución.

Teorema 4.2.5.

1. $f *_k (ag + bh) = a(f *_k g) + b(f *_k h)$.
2. $f *_k g = g *_k f$.
3. $f *_k (g *_k h) = (f *_k g) *_k h$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned}
[F *_k (ag + bh)](x) &= \int_0^x f(x \ominus^k \lambda)(ag + bh)(\lambda) \left[\left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) \right] d\lambda \\
&= \int_0^x f(x \ominus^k \lambda)[ag(\lambda) + bh(\lambda)] \left[\left(\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right) \right] d\lambda \\
&= \int_0^x af(x \ominus^k \lambda)g(\lambda) \left[\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right] d\lambda \\
&\quad + \int_0^x bf(x \ominus^k \lambda)h(\lambda) \left[\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right] d\lambda \\
&= a \int_0^x f(x \ominus^k \lambda)g(\lambda) \left[\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right] d\lambda \\
&\quad + b \int_0^x f(x \ominus^k \lambda)h(\lambda) \left[\sqrt{1 + k^2 \lambda^2} - \frac{k^2 \lambda x}{\sqrt{1 + k^2 \lambda^2}} \right] d\lambda \\
&= a(f *_k g)(x) + b(f *_k h)(x) \\
&= [a(f *_k g) + b(f *_k h)](x)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f *_k g &= \mathfrak{L}_k^{-1} \{ \mathfrak{L}_k \{ f *_k g \} \} \\
&= \mathfrak{L}_k^{-1} \{ \mathfrak{L}_k \{ f \} \mathfrak{L}_k \{ g \} \} \\
&= \mathfrak{L}_k^{-1} \{ \mathfrak{L}_k \{ g \} \mathfrak{L}_k \{ f \} \} \\
&= g *_k f
\end{aligned}$$

3. Supóngase que $u = g *_k h$, así que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k \{ u \} &= \mathfrak{L}_k \{ g *_k h \} \\
&= \mathfrak{L}_k \{ g \} \mathfrak{L}_k \{ h \}
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{f *_k u\} &= \mathfrak{L}_k\{f\}\mathfrak{L}_k\{u\} \\
&= \mathfrak{L}_k\{f\}\mathfrak{L}_k\{g *_k h\} \\
&= (\mathfrak{L}_k\{f\}\mathfrak{L}_k\{g\})\mathfrak{L}_k\{h\} \\
&= \mathfrak{L}_k\{f *_k g\}\mathfrak{L}_k\{h\} \\
&= \mathfrak{L}_k\{(f *_k g) *_k h\}
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathfrak{L}_k\{f *_k (g *_k h)\} = \mathfrak{L}_k\{(f *_k g) *_k h\}$$

y aplicando el operador \mathfrak{L}_k^{-1} a ambos lados de la expresión anterior se tiene,

$$f *_k (g *_k h) = (f *_k g) *_k h.$$

□

Para terminar la sección, se establece la k -transformada para potencias. En primer lugar se presenta un resultado en términos de la función Γ para la k -transformada de t^{r-1} , con r real y posteriormente se muestran expresiones más directas para el caso en que los exponentes sean números enteros no negativos.

Teorema 4.2.6. *Para cualquier real r se cumple*

$$\mathfrak{L}_k\{t^{r-1}\} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{(2k)} - \frac{r}{2}\right)\Gamma(r)}{|2k|^r \left[1 + \frac{r|k|}{s}\right]\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)}, \quad (4.10)$$

$$\text{con } \frac{r|k|}{s} < 1 \quad \text{ó mejor aún } r|k| < s. \quad (4.11)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_k\{t^{r-1}\} &= \int_0^\infty t^{r-1} [\exp_{\{k\}}(-t)]^s dt \\
&= \int_0^\infty t^{r-1} \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt\right)^{\frac{s}{k}} dt
\end{aligned}$$

Haciendo $u = \sqrt{1+k^2t^2} - kt$, se tiene

$$du = \left[\frac{2k^2t}{2\sqrt{1+k^2t^2}} - k\right] dt = \left[\frac{k^2t}{\sqrt{1+k^2t^2}} - k\right] dt = \left[\frac{k^2t - k\sqrt{1+k^2t^2}}{\sqrt{1+k^2t^2}}\right] dt, \text{ es decir,}$$

$$du = \left[\frac{-k(\sqrt{1+k^2t^2} - kt)}{\sqrt{1+k^2t^2}}\right] dt.$$

Por otro lado $u = kt + \sqrt{1+k^2t^2}$, elevando al cuadrado en ambos lados y despejando t se tiene $t = \frac{1-u^2}{2uk}$. Por tanto ,

$$t^{r-1} = \left[\frac{1-u^2}{2uk}\right]^{r-1}.$$

Así $t^2 = \frac{(1-u^2)^2}{4u^2k^2}$, o bien, $k^2t^2 = \frac{k^2(1-u^2)^2}{4u^2k^2} = \frac{(1-u^2)^2}{4u^2}$, con lo cual

$$\begin{aligned} 1 + k^2t^2 &= 1 + \frac{k^2(1-u^2)^2}{4u^2} = \frac{4u^2 + (1-u^2)^2}{4u^2} = \frac{4u^2 + 1 - 2u^2 + u^4}{4u^2} \\ 1 + k^2t^2 &= \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{4u^2} = \frac{(u^2 + 1)^2}{4u^2} \sqrt{1 + k^2t^2} = \frac{(u^2 + 1)}{2u}. \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{1}{\sqrt{1+k^2t^2}} = \frac{2u}{u^2+1}$ y en consecuencia, $du = \left[\frac{-k(\sqrt{1+k^2t^2}-kt)}{\sqrt{1+k^2t^2}} \right] = -ku \cdot \frac{2u}{u^2+1} dt = \frac{-2ku^2}{u^2+1} dt$, de donde $dt = \frac{-(u^2+1)}{2ku^2} du$. Luego:

$$\int_0^\infty t^{r-1} [\exp_{\{k\}}(-t)]^s dt = \int_0^\infty t^{r-1} \left(\sqrt{1+k^2t^2} - kt \right)^{\frac{s}{k}} dt.$$

Si $u = \sqrt{1+k^2t^2} - kt$, $t = 0$, entonces $u = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1+k^2t^2} - kt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+k^2t^2} - kt)(\sqrt{1+k^2t^2} + kt)}{[\sqrt{1+k^2t^2} + kt]} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+k^2t^2 - k^2t^2}{\sqrt{1+k^2t^2} + kt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+k^2t^2} + kt} = 0 \end{aligned}$$

es decir si $t = \infty$, $u = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{r-1} [\exp_{\{k\}}(-t)]^s dt &= \int_0^1 \left[\frac{(1-u^2)}{2uk} \right]^{r-1} u^{\frac{s}{k}} \left(\frac{-1}{2k} \right) \frac{(u^2+1)}{u^2} du \\ &= \frac{-1}{2k} \int_0^1 \frac{(1-u^2)^{r-1}}{(2uk)^{r-1}} u^{\frac{s}{k}} \frac{(u^2+1)}{u^2} du \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^1 \frac{(1-u^2)^{r-1}}{(2k)^{r-1} u^{r-1}} u^{\frac{s}{k}} \frac{(u^2+1)}{u^2} du = \frac{1}{(2k)^r} \int_0^1 \frac{(1-u^2)^{r-1} u^{\frac{s}{k}} (1+u^2)}{u^{r+1}} du \\ &= \frac{1}{(2k)^r} \int_0^1 (1-u^2)^{r-1} u^{\frac{s}{k-r-1}} (1+u^2) du \\ &= \frac{1}{(2k)^r} \int_0^1 u^{\frac{s}{k-r-1}} (1-u^2)^{r-1} (1+u^2) du \end{aligned}$$

Haciendo $t = u^2$ se tiene $dt = 2udu$ y $\frac{dt}{2u} = du$, de donde $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = du$ y en consecuencia la integral es como sigue,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|2k|^r} \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}})^{\frac{s}{k-r-1}} (1-t)^{r-1} (1+t) \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{|2k|^r} \int_0^1 t^{\frac{s}{2k}-\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \frac{(1-t)^{r-1} (1+t) dt}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{|2k|^r} \int_0^1 t^{\frac{s}{2k}-\frac{r}{2}-1} (1-t)^{r-1} (1+t) dt \\
&= \frac{1}{|2k|^r} \left[\int_0^1 t^{\frac{s}{2k}-\frac{r}{2}-1} (1-t)^{r-1} dt + \int_0^1 t^{\frac{\beta}{2k}-\frac{r}{2}-1} (1-t)^{r-1} t dt \right] \\
&= \frac{1}{|2k|^r} \left[\int_0^1 t^{\frac{\beta}{2k}-\frac{r}{2}-1} (1-t)^{r-1} dt + \int_0^1 t^{(\frac{\beta}{2k}-\frac{r}{2})-1} (1-t)^{r-1} dt \right] \quad (*)
\end{aligned}$$

Ahora la integral beta es definida para $Re(x) > 0$ y $Re(y) > 0$ como:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Por tanto tenemos las siguientes condiciones de convergencia

$$\text{si } x = \frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} > 0 \text{ y } y = r > 0$$

$$\frac{s}{|2k|} > \frac{r}{2} \Rightarrow 1 < \frac{r|2k|}{2s} \Rightarrow \frac{r|k|}{s} < 1$$

Es decir $r|k| < s$

Para la segunda integral se cumple lo mismo y por tanto

$$\int_0^1 t^{(\frac{s}{|2k|}-\frac{r}{2}-1)} (1-t)^{r-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma|r|}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + r\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma|r|}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \quad (4.12)$$

y

$$\int_0^1 t^{(\frac{s}{|2k|}-\frac{r}{2}+1)-1} (1-t)^{r-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + 1\right) \Gamma|r|}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + 1 + r\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + 1\right) \Gamma|r|}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2} + 1\right)}$$

Para todos los numeros complejos excepto para enteros negativos, la función gamma $\Gamma(x)$ es definida tal que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y Por tanto

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + 1\right) &= \left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \\
\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2} + 1\right) &= \left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)
\end{aligned}$$

Así

$$\int_0^1 t^{\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2} + 1\right) - 1} (1-t)^{r-1} dt = \frac{\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma|r|}{\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \quad (4.13)$$

reemplazando las dos integrales (4.12) y (4.13) en la expresión (*) tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{r-1} [\exp_{\{k\}}(-t)]^s dt \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| + \frac{\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \right] \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \left[1 + \frac{\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \left[1 + \frac{\frac{2s-r|2k|}{2|2k|}}{\frac{2s+r|2k|}{2|2k|}} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \left[1 + \frac{(2s-r|2k|) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{(2s+r|2k|) \Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \right] \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \left[\frac{(2s+r|2k|) + (2s-r|2k|)}{(2s+r|2k|)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \\ &= \frac{1}{2|2k|^r} \frac{4s}{[2s+r|2k|]} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \\ &= \frac{1}{|2k|^r} \frac{2s}{[2s+r|2k|]} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \\ &= \frac{1}{|2k|^r} \frac{1}{\left[1 + \frac{r|k|}{s}\right]} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{|2k|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma|r| \end{aligned}$$

□

El resultado anterior se establece mediante una expresión más simple para cada número natural n , mediante la siguiente propiedad.

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = \frac{n!}{2^{n+1}k^n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[\frac{1}{s + (2i - (n+1))k} + \frac{1}{s + (2i - (n-1))k} \right]$$

con las restricciones:

$$s > (n+1)k, \quad \text{para } k > 0$$

$$s < (n+1)k, \quad \text{para } k < 0$$

Demostración. Aplicando la definición de k -transformada a $f(t) = t^n$ se tiene

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = \int_0^\infty t^n \left[\sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \right]^{\frac{s}{k}} dt. \quad (4.14)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = \sqrt{1 + k^2 t^2} - kt \quad (4.15)$$

se tiene

$$t = \frac{1 - u^2}{2ku} \quad (4.16)$$

y

$$dt = -\frac{1 + u^2}{2ku^2} du. \quad (4.17)$$

Además: si $t \rightarrow 0$, $u \rightarrow 1$ si $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$ y reemplazando (4.15),(4.16),(4.17) en (4.14) se obtiene

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = - \int_1^0 \left[\frac{1 - u^2}{2ku} \right]^n u^{\frac{s}{k}} \frac{1 + u^2}{2ku^2} du, \quad (4.18)$$

expresión que puede escribirse como

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = -\frac{1}{(2k)^{n+1}} \int_1^0 (u^{-1} - u)^n u^s k(1 + u^{-2}) du. \quad (4.19)$$

Aplicando el binomio de Newton a la expresión $(u^{-1} - u)^n$ y simplificando exponentes se obtiene

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = -\frac{1}{(2k)^{n+1}} \int_1^0 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^n n!}{i!(n-i)!} (u^{\frac{s}{k} + 2i - n - 2} + u^{\frac{s}{k} + 2i - n}) du. \quad (4.20)$$

Integrando termino a termino, se llega a

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = -\frac{n!}{(2k)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^n}{i!(n-i)!} \left[\frac{u^{\frac{s}{k} + 2i - n - 1}}{\frac{s}{k} + 2i - n - 1} + \frac{u^{\frac{s}{k} + 2i - n + 1}}{\frac{s}{k} + 2i - n + 1} \right]_1^0. \quad (4.21)$$

Las restricciones impuestas a s se obtiene al evaluar

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = -\frac{n!}{(2k)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^n}{i!(n-i)!} \left[-\left(\frac{k}{s + (2i - (n+1))k} + \frac{k}{s + (2i - (n-1))k} \right) \right] \quad (4.22)$$

que finalmente, es equivalente a

$$\mathfrak{L}_k\{t^n\} = \frac{n!}{2^{n+1}k^n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[\frac{1}{s + (2i - (n+1))k} + \frac{1}{s + (2i - (n-1))k} \right]. \quad (4.23)$$

□

Más aún, se puede obtener otra expresión de la siguiente forma recurrente. A partir cualquiera de los dos resultados anteriores se pueden obtener las siguientes transformadas:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{t\} &= \frac{1}{s^2 - 4k^2} \\ \mathfrak{L}_k\{t^2\} &= \frac{2s}{(s^2 - k^2)(s^2 - 9k^2)} \\ \mathfrak{L}_k\{t^3\} &= \frac{6}{(s^2 - 4k^2)(s^2 - 16k^2)} \\ \mathfrak{L}_k\{t^4\} &= \frac{24s}{(s^2 - k^2)(s^2 - 9k^2)(s^2 - 25k^2)} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores sugieren una forma alterna para (4.23), según la paridad de n :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k\{t^n\} &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^m (s^2 - (2ik)^2)}, \quad \text{con } n = 2m - 1, m \in \mathbb{Z}^+ \\ \mathfrak{L}_k\{t^n\} &= \frac{n!s}{\prod_{i=1}^{m+1} (s^2 - ((2i-1)k)^2)}, \quad \text{con } n = 2m, m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Capítulo 5

Fórmulas de partición y k -transformada

Partiendo de las premisas básicas que caracterizan el tratamiento de los subsistemas en la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs, para construir la función partición (que da información sobre la energía total en el sistema), en la primera sección de este capítulo se generaliza el concepto de función partición para el microensamble canónico en caso discreto, utilizando la deformación de la función exponencial según Kaniadakis. Lo anterior, permite que en la segunda sección, se exprese dicha función de partición para el caso continuo como una integral evaluada (no sobre el espacio de fases de velocidades y posición como en [21]) en los posibles valores que representa la variable continua de energía. Consecuentemente, en la tercera sección, se da una interpretación matemática, caso continuo, para la función partición en términos del operador k -transformada de Laplace y además usando dicho operador, se calcula en forma explícita la función partición para un sistema de partículas idénticas en una caja de potencial.

5.1. Función de partición en el caso discreto

Los problemas más simples en mecánica estadística son aquellos relacionados con sistemas compuestos de moléculas, grupos de moléculas o grados de libertad que son efectivamente independientes uno del otro. No se tiene una característica de independencia debido usualmente a dos asuntos: fuerzas intermoleculares y restricciones de la simetría sobre las funciones de onda mecánico cuánticas. La independencia implicará solamente interacción débil, es decir, las moléculas o grados de libertad interactúan suficientemente para mantener el equilibrio térmico por intercambio de energía, pero no hasta tal punto de requerir fuerzas intermoleculares. La interacción débil puede ser directa (esto es, debido a las colisiones) o indirecta (por medio de las paredes o un baño de calor). Un ejemplo claro es el de un gas ideal; la densidad es lo suficientemente baja para que las fuerzas intermoleculares hagan una contribución despreciable a las propiedades termodinámicas (ecuación del estado), pero el equilibrio se mantendrá por las interacciones moleculares o por las colisiones con las paredes.

Para los subsistemas, en lugar de moléculas se pueden considerar: grados diferentes de

libertad con las mismas moléculas (traslación, rotación, etc.), modos vibracionales independientes en un cristal monoatómico, o bien, moléculas absorbidas sobre grupos independientes de sistemas de absorción sobre una superficie sólida, etc.

Sea H la función Hamiltoniana clásica para el sistema macroscópico bajo consideración. Si el sistema está compuesto por moléculas independientes o subsistemas, por definición H será dado por una suma de contribuciones independientes

$$H = H_a + H_b + \dots,$$

donde con H_a , H_b etc. se hace referencia a moléculas individuales, grados de libertad, etc. Similarmente para el operador Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + \dots.$$

Se denotan por $\epsilon_a, \epsilon_b \dots$ etc. y $\psi_a, \psi_b \dots$ etc., a los autovalores y autofunciones de $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b \dots$ etc. En tal caso se propone como una solución de $\mathcal{H}\psi = E\psi$, la función de onda $\psi = \psi_a\psi_b \dots$ y se encuentra que

$$\mathcal{H}\psi = (\mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b + \dots)\psi_a\psi_b \dots = (\epsilon_a + \epsilon_b + \dots)\psi = E\psi.$$

El punto esencial aquí es el siguiente: para un sistema de moléculas independientes o subsistemas distinguibles, no es necesario resolver la ecuación completa de Schrödinger $\mathcal{H}\psi = E\psi$ (que es de orden de 10^{20} coordenadas), sino sólo las ecuaciones separadas $\mathcal{H}_a\psi_a = \epsilon_a\psi_a$, $\mathcal{H}_b\psi_b = \epsilon_b\psi_b \dots$ etc. cada una con pocas coordenadas.

Para una molécula o subsistema en un tiempo, se definen funciones partición del tipo ensamble canónico, dadas por

$$z_a = q_a = \sum_i e^{-\epsilon_{a_i}/k_B T} = \sum_i e^{-\beta\epsilon_{a_i}} \quad \text{y}$$

$$z_b = q_b = \sum_j e^{-\epsilon_{b_j}/k_B T} = \sum_j e^{-\beta\epsilon_{b_j}},$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$ y las sumas son sobre los estados de energía moleculares o del subsistema j , (un nivel de energía en degeneración es representado por varios términos en la suma).

Ahora bien, si se tiene una descripción como la introducida por Kaniadakis para el caso continuo [20], se puede definir una versión modificada de las funciones de partición del siguiente modo:

$$z_a^{\{k\}} = q_a^{\{k\}} = \sum_i \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_{a_i})$$

$$z_b^{\{k\}} = q_b^{\{k\}} = \sum_j \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_{b_j}).$$

Como ejemplo, supóngase que existen dos subsistemas, uno con tres y otro con dos estados de energía. De tal forma,

$$\begin{aligned} q_a q_b &= (e^{-\epsilon_{a_1}/k_B T} + e^{-\epsilon_{a_2}/k_B T} + e^{-\epsilon_{a_3}/k_B T})(e^{-\epsilon_{b_1}/k_B T} + e^{-\epsilon_{b_2}/k_B T}) \\ &= e^{-(\epsilon_{a_1} + \epsilon_{b_1})/k_B T} + e^{-(\epsilon_{a_1} + \epsilon_{b_2})/k_B T} + e^{-(\epsilon_{a_2} + \epsilon_{b_1})/k_B T} \\ &\quad + e^{-(\epsilon_{a_2} + \epsilon_{b_2})/k_B T} + e^{-(\epsilon_{a_3} + \epsilon_{b_1})/k_B T} + e^{-(\epsilon_{a_3} + \epsilon_{b_2})/k_B T}. \end{aligned}$$

La suma de los ϵ (los autovalores de la energía) en los exponentes, pone de manifiesto los posibles estados de energía E para el sistema conjunto. Así se tiene en este ejemplo, y en general,

$$\begin{aligned} Q = Z &= \sum_h e^{E_h/k_B T} = \left(\sum_i e^{-\beta \epsilon_{a_i}} \right) \left(\sum_j e^{-\beta \epsilon_{b_j}} \right) \dots \\ &= z_a z_b. \end{aligned}$$

Así, en el caso de Boltzmann-Gibbs la función de partición canónica Z para todo el sistema, es un producto de las q correspondientes a las moléculas independientes o subsistemas. En el ejemplo mencionado anteriormente, para el caso de mecánica estadística de kaniadakis, se tiene

$$\begin{aligned} z_a^{\{k\}} z_b^{\{k\}} &= [\exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_1}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_2}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_3})][\exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_1}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_2})] \\ &= \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_1}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_1}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_1}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_2}) \\ &\quad + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_2}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_1}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_2}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_2}) \\ &\quad + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_3}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_1}) + \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_3}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_2}). \end{aligned}$$

Por otro lado, $\exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_i}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_j}) = \exp_{\{k\}}[(-\beta \epsilon_{a_i}) \oplus^k (-\beta \epsilon_{b_j})]$, donde

$$(-\beta \epsilon_{a_i}) \oplus^k (-\beta \epsilon_{b_j}) = (-\beta \epsilon_{a_i}) \sqrt{1 + k^2 (-\beta \epsilon_{b_j})^2} + (-\beta \epsilon_{b_j}) \sqrt{1 + k^2 (-\beta \epsilon_{a_i})^2}$$

que también se puede expresar, usando la identidad $\exp_{\{k\}}(ax) = [\exp_{\{ak\}}(x)]^a$, como sigue

$$\begin{aligned} \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{a_i}) \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_{b_j}) &= [\exp_{\{-\beta k\}}(\epsilon_{a_i})]^{-\beta} [\exp_{\{-\beta k\}}(\epsilon_{b_j})]^{-\beta} \\ &= [\exp_{\{-\beta k\}}(\epsilon_{a_i}) \cdot \exp_{\{-\beta k\}}(\epsilon_{b_j})]^{-\beta} \\ &= [\exp_{\{-\beta k\}}(\epsilon_{a_i} \oplus^k \epsilon_{b_j})]^{-\beta} \\ &= \exp_{\{k\}}[-\beta(\epsilon_{a_i} \oplus^k \epsilon_{b_j})]. \end{aligned}$$

Por otra parte, si las moléculas o subsistemas son independientes e idénticos, los estados de energía para cada una de las moléculas idénticas serán los mismos. En tal caso, $z_a = z_b =$

... = $q = \sum_j e^{-\beta\epsilon_j}$, y para el caso en mecánica estadística de Kaniadakis $z_a^k = z_b^k = \dots = q^{\{k\}} = \sum_j \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_j)$. En consecuencia, para ambos casos, las funciones de partición totales serán respectivamente,

$$Q = Z = \left(\sum_j e^{-\beta\epsilon_j}\right)\left(\sum_j e^{-\beta\epsilon_j}\right)\dots\left(\sum_j e^{-\beta\epsilon_j}\right) = \left[\sum_j e^{-\beta\epsilon_j}\right]^N$$

$$\text{y } Q_{\{k\}} = Z_{\{k\}} = \left[\sum_j \exp_k(-\beta\epsilon_j)\right]^N.$$

Desde la perspectiva de la mecánica cuántica las partículas idénticas son indistinguibles, es decir, cada n -tupla $(j_1 \dots j_N)$ tiene $N!$ permutaciones idénticas, así que en realidad la función de partición (en ambos casos) debe ser dividida por $N!$;

$$Q = \frac{q^N}{N!} \quad \text{y} \quad Q_{\{k\}} = \frac{(q^{\{k\}})^N}{N!}.$$

5.2. Deducción de la función partición en un gas ideal monoatómico

En primer lugar se reescribirá la función partición en términos de los niveles de energía presentes en un estado. Como en la sección anterior, la función partición (o suma sobre estados), en la descripción de Boltzmann-Gibbs y en la de Kaniadakis para una partícula a es, respectivamente, de la forma

$$q_a = \sum_{j_a} \exp(-\beta\epsilon_{a,j_a}) \quad \text{y} \quad q_a^{\{k\}} = \sum_{j_a} \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_{a,j_a}).$$

Para el caso de energía discreta, la suma en la función partición para una única partícula puede ser escrita en dos formas: en términos de los estados cuánticos y en términos de los niveles de energía, esto es,

$$q = \sum_j \exp(-\beta\epsilon_j) = \sum_n g_n \exp(-\beta\epsilon_n)$$

$$q^{\{k\}} = \sum_j \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_j) = \sum_n g_n \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon_n),$$

donde los términos g_n representan las densidades de estados de energía correspondientes a cada nivel n .

Modificando el índice de la sumatoria, al cambiar la suma sobre estados representados por subíndice j por la suma sobre la energía ϵ , siendo ϵ una variable discreta que toma valores en el conjunto de niveles de energía distintos entre si ($\epsilon \in \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots\}$), se obtiene

$$q = \sum_j \exp(-\beta\epsilon_j) = \sum_\epsilon g(\epsilon) \exp(-\beta\epsilon) \quad \text{y}$$

$$q^{\{k\}} = \sum_\epsilon g(\epsilon) \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon)$$

Para el caso de energía continua, tenemos

$$q = z = \int_0^\infty g(\epsilon) \exp(-\beta\epsilon) d\epsilon$$

$$q^{\{k\}} = z_{\{k\}} = \int_0^\infty g(\epsilon) \exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon) d\epsilon. \quad (5.1)$$

Aquí, $g(\epsilon)$ es el número de estados cuánticos por unidad de energía en el nivel de energía ϵ , es decir, la función correspondiente a la densidad de estados de energía. De tal forma, $g(\epsilon)d\epsilon$ es el número de estados con energías que están entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$.

Es resaltar que (5.1) es equivalente al resultado

$$z = \int_R d^n v \exp_k(-\beta E),$$

expuesto en [21], en el caso que la energía potencial es cero y la integral es tomada sobre el espacio n -dimensional R de velocidades v . La última expresión fue desarrollada por Kaniadakis a partir de maximizar el funcional de entropía S_k , para encontrar la función de densidad para la distribución de velocidades.

5.3. Relaciones con la k -transformada de Laplace

Así como para el modelo de Boltzman-Gibbs, la función de partición obtenida a partir de la densidad $g(\epsilon)$ es

$$z = z(\beta) = \int_0^\infty g(\epsilon) \exp(-\beta\epsilon) d\epsilon = \mathfrak{L}\{g(t)\}_{s=\beta},$$

en la mecánica estadística de kaniadakis la función partición, acorde con (5.1), es

$$z_{\{k\}}(\beta) = \int_0^\infty g(\epsilon) [\exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon)] d\epsilon.$$

¿Cómo escribirla en términos de la k -transformada propuesta en el capítulo anterior?. Para resolver el interrogante se parte de las propiedades expuestas para el k -exponencial, por las cuales se tiene que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\exp_{\{k\}}(ax) = [\exp_{ak}(x)]^a$, así que haciendo $x = -t$ y $a = \beta$ se tiene

$$\exp_{\{k\}}(-\beta t) = [\exp_{\beta k}(-t)]^\beta.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 z_{\{k\}}(\beta) &= \int_0^\infty g(\epsilon) [\exp_{\{k\}}(-\beta\epsilon)] d\epsilon \\
 &= \int_0^\infty g(\epsilon) [\exp_{\{\beta k\}}(-\epsilon)]^\beta d\epsilon \\
 &= \mathfrak{L}_{\{\beta k\}}(g(\epsilon))|_{s=\beta},
 \end{aligned}$$

es decir

$$z_{\{k\}}(\beta) = \mathfrak{L}_{\{\beta k\}}(g(\epsilon))|_{s=\beta}, \quad (5.2)$$

Ahora consideremos un gas monoatómico lo suficientemente diluido, de tal forma que las fuerzas intermoleculares pueden ser ignoradas. En principio cada átomo es tratado como una masa puntual con tres grados traslacionales de libertad. En virtud de esto, las moléculas del gas son independientes una de la otra. Ellas son también indistinguibles y por lo tanto, la función partición del ensamble canónico es para los dos casos:

$$Z = \frac{q^N}{N!} \quad \text{y} \quad Z_{\{k\}} = \frac{(q^{\{k\}})^N}{N!}.$$

Dado que el número de estados cuánticos moleculares permitidos es mayor comparado con N . La primera cuestión es obtener el valor de q y $q^{\{k\}}$. Para el caso Boltzmann-Gibbs, consideremos N partículas situadas en una caja cúbica de lado L , indistinguibles, independientes y por tanto desde la mecánica cuántica, idénticas. Para computar la función partición Z de este sistema, es necesario conocer los niveles de energía de una sola partícula.

En una caja de potencial en tres dimensiones, la partícula puede desplazarse libremente en las tres dimensiones. La ecuación de Schrödinger es entonces

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) + \nabla(x, y, z) \psi(x, y, z) = \epsilon \psi(x, y, z).$$

El potencial puede ser descrito como:

$$V(x, y, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq z \leq L$$

$$V(x, y, z) = \infty, \quad L < x < 0, \quad L < y < 0, \quad L < z < 0.$$

La única solución posible correspondiente a los lugares fuera de la caja es $\psi(x, y, z) = 0$. Por tanto

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) = \epsilon \psi(x, y, z).$$

Esta ecuación es separable en tres ecuaciones básicas idénticas a las de la partícula en la caja unidimensional. Las autofunciones y los autovalores del sistema son:

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \text{sen}\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right).$$

y

$$\begin{aligned} E_{n_x, n_y, n_z} &= \frac{\hbar}{8m} \left(\frac{n_x^2}{L^2} + \frac{n_y^2}{L^2} + \frac{n_z^2}{L^2} \right) \\ &= \frac{\hbar}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \end{aligned}$$

donde n_x, n_y, n_z son los tres números cuánticos que caracterizan el movimiento en esas tres dimensiones $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3 \dots$.

En las sumas $q = \sum_j e^{-\beta \epsilon_j}$ y $q_{\{k\}} = \sum_j \exp_{\{k\}}(-\beta \epsilon_j)$, las energías ϵ_j en este caso, son aquellas asociadas con una molécula o átomo, que posee tres grados traslacionales de libertad y confinado en esta caja. En el espacio n_x, n_y, n_z de valores posibles de los números cuánticos, existe una correspondencia uno a uno entre los posibles estados cuánticos moleculares o atómicos y puntos en el espacio con coordenadas enteras positivas. Consideremos una esfera en el espacio de números cuánticos, centrado en el origen y teniendo radio R , tal que

$$R^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{8mL^2}{h^2} \epsilon_{n_x, n_y, n_z}$$

Denotando $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \epsilon$ y dado que $V = L^3$, o bien $V^{2/3} = L^2$, entonces

$$R^2 = \frac{8mV^{2/3}}{h^2} \epsilon$$

es la ecuación de una esfera de radio R en el espacio n_x, n_y, n_z de números cuánticos. Ya que los números cuánticos n_x, n_y, n_z son todos positivos, el volumen del octante positivo de una esfera de radio R es $\frac{1}{8} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) = \frac{\pi R^3}{6}$. Pero debemos recordar que este volumen resulta igual al número de estados cuánticos con una energía menor que ϵ , $n(\epsilon)$, es decir,

$$n(\epsilon) = \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) = \frac{\pi R^3}{6} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{8mV^{2/3}\epsilon}{h^2} \right)^{3/2} = n(\epsilon) = \frac{\pi}{6} \left(\frac{8m\epsilon}{h^2} \right)^{3/2} V.$$

Para que las funciones de partición antes mencionadas sean coherentes, se debe tener $n(\epsilon) \gg N$ (el símbolo \gg representa “mucho mayor que”), cuando el valor de la energía es del orden de $k_B T$ (ya que los estados de energía ϵ mucho mayores que $k_B T$ no serán apreciablemente ocupadas y, por tanto, son no permitidos.) Así que $n(\epsilon) \approx n(kT) \cong \frac{\pi}{6} \left(\frac{8mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} V = \frac{\pi}{6} \left[\frac{2^3 mk_B T}{h^2} \right]^{3/2} V$ ó $\frac{\pi}{6} \left(\frac{8mk_B T}{h^2} \right)^{3/2} V \gg N$ ó $\frac{V}{N} \gg \frac{6}{\pi} \left(\frac{2\pi}{8} \right)^{3/2} \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \right)^3 = 1, 33\Lambda^3$, donde $\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ es la longitud de onda termal de Broglie. Es decir,

$$\left(\frac{V}{N} \right)^{1/3} \gg \Lambda.$$

Así para que las funciones de partición, en ambos casos, sean una buena aproximación, la distancia promedio entre las partículas debe ser mucho mayor que la longitud de onda termal de Broglie. Esto es por tanto la condición suficiente para la validez de la aplicación de la estadística de Boltzmann-Gibbs y la de Kaniadakis para expresar las funciones de partición Z y $Z_{\{k\}}$, respectivamente.

Ahora, el mínimo de estados cuánticos moleculares o atómicos entre ϵ y $\epsilon + d\epsilon$ es

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon}d\epsilon = \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

es decir

$$g(\epsilon) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\epsilon^{1/2}. \quad (5.3)$$

Por lo expuesto anteriormente, esta función de densidad, que describe el número de estados de estados cuánticos por unidad de energía ϵ , en el sistema previamente descrito es válida para calcular las funciones de partición, tanto en el caso de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs como en la de Kaniadakis.

Se pasará ahora al cálculo de la función de partición en el caso de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs, que puede hacerse usando la transformada de Laplace usual.

$$\begin{aligned} z(\beta) &= \int_0^\infty g(\epsilon) \exp(-\beta\epsilon) d\epsilon \\ &= \mathfrak{L}_k\{g(\epsilon)\}_{s=\beta} \\ &= \mathfrak{L}_k\left\{\frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\epsilon^{1/2}\right\}_{s=\beta} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\mathfrak{L}_k\{\epsilon^{1/2}\}_{s=\beta} \end{aligned}$$

Como $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2 + 1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $\beta = \frac{1}{k_B T}$, entonces

$$\begin{aligned} z(\beta) &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}\Big|_{s=\beta} \\ &= \frac{\pi}{8}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}V}{s^{\frac{3}{2}}}\Big|_{s=\beta} \\ &= \left(\frac{8m}{h^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{8}\sqrt{\pi^3}V \\ &= \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V. \end{aligned}$$

Así que $z(\beta) = \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V = \left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}V$. Además, la función partición para el ensamble canónico es

$$Q = Z(\beta) = \left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{\frac{3N}{2}}\frac{V^N}{N!}.$$

Ahora se presenta al cálculo de la función de partición en el caso de la mecánica estadística de Kaniadakis, que puede hacerse a partir de (5.3) usando la k -transformada de Laplace, la propiedad (4.10) y la expresión (5.2) para la función de partición.

$$\begin{aligned}
z_{\{k\}}(\beta) &= \mathfrak{L}_{\{\beta k\}}(g(\epsilon))|_{s=\beta} \\
&= \mathfrak{L}_{\{\beta k\}}\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\epsilon^{1/2}\right)|_{s=\beta} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\mathfrak{L}_{\{\beta k\}}(\epsilon^{1/2})|_{s=\beta} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{(2k\beta)} - \frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{|2k\beta|^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{\frac{3}{2}|k\beta|}{\beta}\right]\Gamma\left(\frac{\beta}{|2k\beta|} + \frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{|2k\beta|^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}|k|\right]\left(\frac{1}{|2k|} - \frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2}V\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{|2k\beta|^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}|k|\right)\left(1 - \frac{3}{2}|k|\right)} \\
&= \left(\frac{\pi m}{|k|\beta h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{1 - \frac{9}{4}k^2} \\
&= \left(\frac{\pi m K_B T}{|k| h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{1 - \frac{9}{4}k^2}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$Z_{\{k\}}(\beta) = \frac{\left(\left(\frac{\pi m K_B T}{|k| h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{1 - \frac{9}{4}k^2}\right)^N}{N!}.$$

Conclusiones

1. El operador k -transformada de Laplace, introducido en la definición 4.1.1 reproduce como límite, cuando k tiende a cero, al operador transformada de Laplace y en general ambos tienen propiedades análogas como se muestra en el cuarto capítulo.
2. Acorde con el quinto capítulo, el uso de la k -transformada de Laplace para expresar funciones de partición de la mecánica estadística de Kaniadakis, es natural como sucede entre la transformada usual y la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs.
3. Las propiedades obtenidas para la k -transformada, muestran que la teoría propuesta es pertinente y útil para ciertos cálculos.
4. La teoría matemática subyacente en la mecánica estadística propuesta por G. Kaniadakis, permite nuevos desarrollos en matemáticas y en particular es potencialmente productiva en análisis armónico. Si bien en esta tesis sólo se propone la k -transformada de Laplace, también se muestra el camino para indagar sobre la transformada de Fourier.

Problemas abiertos

En la literatura no aparecen publicaciones de trabajos sobre análisis armónico en el contexto de las matemáticas que ha desarrollado G. Kaniadakis para explicar fenómenos de mecánica estadística que involucren la relatividad especial. Esta tesis presenta un primer paso en esa dirección, por lo que queda abierto:

1. continuar desarrollando la teoría de la k -transformada de Laplace,
2. desarrollar y aplicar una teoría sobre k -transformada de Fourier,
3. desarrollar y aplicar una teoría sobre ondículas en el marco de las matemáticas k -deformadas,
4. encontrar nuevos marcos para la aplicación de la k -transformadas de Laplace y de funciones k -gaussianas.

Bibliografía

- [1] Bouchaud and A. Georges.: *Diffusion and drift of charge carriers in a random potential: Deviation from Einstein's*, Phys. Rev. p. 195, 127 (1991).
- [2] M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky and J. Klafter: *Strange kinetics* Nature, 363, 31 (1993).
- [3] B.M. Boghosian: *Non-extensive statistics and three-dimensional fully developed turbulence* Phys. Rev. E 53, 4754 (1996).
- [4] B.M. C. Beck: *Application of generalized thernostatistics to fully developed turbulence*. Physica A 277, 115 (2000).
- [5] D.B. Walton and J. Rafelski: *Langevin dynamics of J in a parton plasma* Phys. Rev. Lett. 84, 31 (2000).
- [6] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton Univesity Press, Princeton, NJ, (1987), p. 267.
- [7] Physica A 305 (1/2) (2002), *Non extensive Thermodynamics and physical applications*, edited by G. Kaniadakis, M. Lissia, and A. Rapisarda
- [8] G. Kaniadakis and M. Lissia: Physica A 340, *News and Expectations in Thermo-statistics*. 1,3 (2004)
- [9] M. Druyvenstein: *Non Linear Kinetics underlying Generalized Statistics* Physica (Eindhoven) 10, 6 (1930), 1003 (1934)
- [10] A. Renyi: *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam 1970
- [11] B.D. Sharma and D.P. Mittal, J.: *Shannon's entropy in exponential families: Statistical applications*, Math. Sci., 1, 28 (1975).
- [12] Tsallis, C.: *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J.Stat. Phys.52, 479-487 (1988)
- [13] S. Abe: *A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics*, Phys. Lett. A, 224, 326 (1997).
- [14] A.R.R. Papa, J.: *Statistical mechanics based on Renyi entropy*, Phys. A: Math. Gen., 31, 5271 (1998).

- [15] E.P. Borges and I. Roditi: *A family of nonextensive entropies*, Phys. Lett. A, 246, 399 (1998).
- [16] P.T. Landsberg and V. Vedral: *Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics*, Phys. Lett. A, 247, 211 (1998).
- [17] C. Anteneodo and A.R. Plastino: *Maximum entropy approach to stretched exponential probability distributions*, J. Phys. A: Math. Gen., 32, 1089 (1999).
- [18] T.D. Frank and A. Daffertshofer: *A step beyond Tsallis and Renyi entropies*, Physica A, 272, 497 (1999).
- [19] Borges, E.P.: *Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas não-extensivos*. Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro (2004).
- [20] G. Kaniadakis: *Statistical Mechanics and its Applications*, Physica A, Volume 296, Issues 3-4, 15 July 2001, Pages 405-425
- [21] G. Kaniadakis: Physicl Review E, *Statistical mechanics in the context of special relativity*, E 66, 056125, 2002, P. 1-17.
- [22] G. Kaniadakis: *The relativistic statistical theory and Kaniadakis entropy: an approach through a molecular chaos hypothesis*, Physica Lett. A 288, 283 (2001).
- [23] G. Kaniadakis and A.M. Scarfone: Physica A 305, 69 (2002)
- [24] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Product*, Academic Press, London, (2000)
- [25] J.A. Tuszyński, J.L. Rubin, J. Meyer, and M. Kibler: *Experimental limit on the blue shift of the frequency of light implied by a q-nonlinearity*, Phys. Lett. A 175, 173 (1993).
- [26] M. R. Ubriaco: *Quantum group invariant, nonextensive quantum statistical mechanics*, Phys. Rev. E 57, 179 (1998).
- [27] A.R. Plastino, A. Plastino: *Maximum entropy minimum norm method for the determination of level densities*. Physica A, 222, 347 (1995).
- [28] G. Kaniadakis and G Lapenta: *Computer experiments on the relaxation of collisionless plasmas*, Phys. Rev. E, 62, 3246 (2000)
- [29] Naudts, J: *Continuity of a class of entropies and relative entropies*. Rev. Math. Phys. Vol 16 N6, (2004) pp 809-822.
- [30] Naudts, J: *Deformed exponentials and logarithms in generalized thermostatics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications Volume 316, Issues 1-4, (2002) pp 323-334.