

# Modelado, Simulación y control de sistemas con muestreo no convencional

Carlos Mario Vélez

## RESUMEN

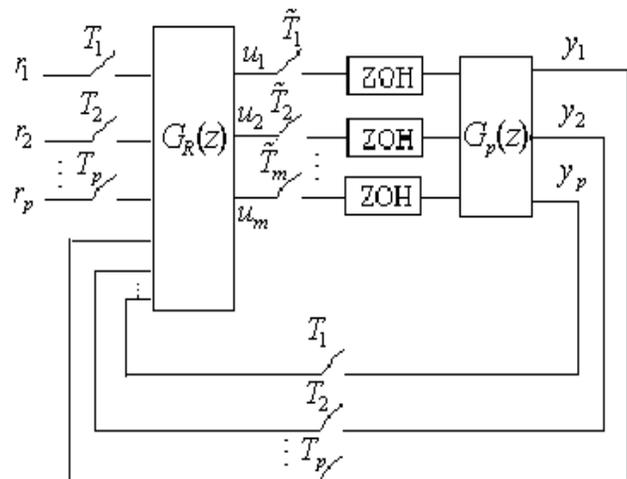
En el presente trabajo se presenta una visión general de los principales desarrollos realizados en el análisis y diseño de un tipo especial de sistemas de control con muestreo no convencional (los sistemas multifrecuencia), desde sus inicios en 1955. En el modelado, diseño y simulación se toman como ejemplo algunos resultados obtenidos por los autores. Los diferentes conceptos se ilustran con ejemplos concretos.

## INTRODUCCIÓN

Un sistema multifrecuencia es un sistema digital en el cual dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas. Las variables pueden pertenecer a un mismo lazo de control (figura 2) o a diferentes lazos, como en el caso de sistemas multivariables (figura 1).

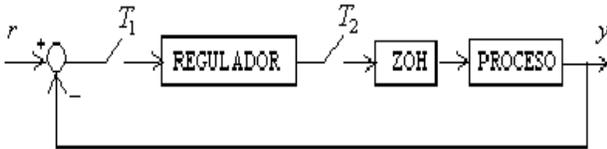
El control multifrecuencia presenta ciertas propiedades que lo hacen interesante al momento de diseñar reguladores digitales de alto desempeño, que tengan en cuenta las distintas dinámicas de los elementos del sistema. Además, como lo han demostrado varios autores, la introducción intencional de esquemas multifrecuencia puede mejorar el comportamiento de un sistema, en comparación con la aplicación de esquemas monofrecuencia.

**FIGURA 1**  
**Sistema multifrecuencia MIMO**  
**(Multiple Inputs Multiple Outputs)**



CARLOS MARIO VÉLEZ SÁNCHEZ. Departamento de Ciencias Básicas. Universidad EAFIT. Doctor en Ciencias Físicas, Universidad Politécnica de Valencia.  
Email: cmvelez@eafit.edu.co

**FIGURA 2**  
**Sistema multifrecuencia SISO**  
**(Single Input Single Output)**



El concepto de multifrecuencia ha sido utilizado ampliamente en el área del procesamiento digital de señales (DSP). Allí hay un extenso material representado en artículos, libros y herramientas (por ejemplo, para MATLAB®). Una simple consulta sobre multifrecuencia (Multirate) por Internet o en bases de datos especializadas, arroja una gran cantidad de fuentes de información en el área del procesamiento digital, muy superior al área del control. El presente trabajo no aborda en ningún sentido este tipo de problemáticas.

**Un sistema multifrecuencia es un sistema digital en el cual dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas. Las variables pueden pertenecer a un mismo lazo de control o a diferentes lazos, como en el caso de sistemas multivariables.**

Aplicaciones del control multifrecuencia:

- En el control digital de un proceso con una frecuencia de control diferente a la de medida. Por ejemplo, en sistemas de control de vuelo, donde el computador de control hace un muestreo a una frecuencia diferente a la del subsistema radar o en sistemas robotizados, donde una videocámara (sensor) se usa para detectar movimientos a una frecuencia menor que la requerida para el control (las cámaras de alta frecuencia son muy costosas).
- En sistemas multiprocesador, ya que mejora la respuesta del sistema. Es posible distribuir las tareas de control en varios procesadores con características diferentes. Si los procesadores no son disparados por un pulso de reloj común y sus cálculos, muestreo y retención no están sincronizados, se tiene el caso de controladores multifrecuencia asíncronos o irregulares.

- En sistemas multivariables, donde es ventajoso disponer de diferentes frecuencias de muestreo en diferentes lazos (el ancho de banda de sensores y actuadores es muy diferente) para reducir la carga de cálculo del computador y mejorar la precisión.
- En sistemas donde se desee mejorar las especificaciones temporales o frecuenciales de la salida de un proceso (sobreimpulso, tiempo de establecimiento, oscilaciones ocultas, márgenes de fase y ganancia), la controlabilidad o la observabilidad.
- En el diseño, ya que se tiene mayor libertad para la implementación de reguladores como: asignación de polos y ceros, mapeo del modelo, estabilización simultánea, estabilización con márgenes de ganancia arbitrariamente grandes, control descentralizado.
- En implementaciones de bajo costo, ya que requiere de computadores menos rápidos.

Es interesante resaltar que el control multifrecuencia ha sido utilizado en diversas áreas y sistemas como: robótica, control de discos duros, aviónica, columnas de destilación, reactores, procesadores, detección de fallos, industria del poliéster, submarinos, sistemas eléctricos, gas, PVC, sistemas neumáticos y motores. En diversas revistas y memorias de eventos se encuentran más de ochenta artículos con referencia clara y directa a la aplicación del control multifrecuencia.

A pesar de las numerosas aplicaciones que ha tenido en los últimos años el control multifrecuencia, sus reales ventajas sobre los sistemas monofrecuencia son un tema actual de discusión. En particular, debido a las diferentes escalas de tiempo es delicado definir apropiadamente normas para la comparación del comportamiento. Muchos autores han afirmado que el control multifrecuencia puede tener problemas de sensibilidad y robustez (Moore, 1993); además, la señal de control puede tomar valores muy altos y con cambios bruscos que pueden llevar a problemas con oscilaciones ocultas y a un mal condicionamiento del modelo multifrecuencia.

No obstante las dificultades encontradas, cada día se van superando los obstáculos y se proponen estrategias más acordes con los problemas reales de control. Por ejemplo, en (Ito, 2000; Paraskevopoulos, 1994) se muestran las claras ventajas de un regulador multifrecuencia sobre la versión monofrecuencia.

**Es interesante resaltar que el control multifrecuencia ha sido utilizado en diversas áreas y sistemas como: robótica, control de discos duros, aviónica, columnas de destilación, reactores, procesadores, detección de fallos, industria del poliéster, submarinos, sistemas eléctricos, gas, PVC, sistemas neumáticos y motores.**

## 1. ASPECTOS HISTÓRICOS DEL MODELADO DE SISTEMA MULTIFRECUENCIA

Desde sus inicios en 1955 se han propuesto y utilizado diversas técnicas para el análisis y diseño de sistemas multifrecuencia, esencialmente para el estudio del comportamiento intermuestreo o debido a la naturaleza multi-dinámica de los sistemas dinámicos en consideración (Glasson, 1988; Araki, 1993). En los primeros trabajos el sistema multifrecuencia se descomponía en sistemas monofrecuencia y se aplicaban técnicas clásicas de análisis y diseño (básicamente la transformada Z modificada). La primera técnica de análisis de sistemas multifrecuencia se conoce como descomposición frecuencial y fue desarrollada por (Sklansky y Ragazzini, 1955) y complementada por Coffey y Williams en 1965. Una filosofía alternativa se conoce como descomposición de interruptores y fue presentada por (Kranc, 1957). (Jury, 1967) demostró que los dos enfoques anteriores son equivalentes. Otros autores que siguieron esta línea fueron (Whitbeck y Didaleusky, 1980), quienes al introducir vectores en el modelado (descomposición vectorial de interruptores) facilitaron la manipulación de los diagramas de bloques, además de permitir el análisis de sistemas con muestreo irregular o asíncrono. Todos los métodos anteriores son aplicados en el dominio de la frecuencia y son muy embarazosos por sus extremas complejidades matemáticas; además, no relacionan ninguna función de transferencia al sistema. Más tarde, (Thompson, 1986) presenta una técnica, conocida como método de los operadores de Kranc, que soslaya estos inconvenientes al permitir, mediante la introducción de los llamados operadores de Kranc, el estudio sistemático de la descomposición de conexiones y su adecuada implementación por computador. El método de los operadores de Kranc es un método matricial basado en la ecuación de estado del sistema SISO.

El enfoque temporal fue introducido por (Kalman y Bertram, 1959), pero se desarrolló poco hasta los trabajos de (Barry,

1975), (Amit, 1980) y (Broussard y Glasson, 1980), en los cuales se aplicó el muestreo multifrecuencia al diseño de controladores óptimos. Barry describe el diseño de un regulador multifrecuencia y muestra que su desempeño es superior a un regulador monofrecuencia con la misma frecuencia base. Algunos problemas de los enfoques anteriores se simplifican con el método de sustituciones progresivas de (Araki y Yamamoto, 1986), desarrollado para sistemas MIMO. El modelo es de gran dimensión, con vectores ampliados de estado, entradas y salidas. Este modelo fue restringido a un sistema con igual número de entradas y salidas y a una configuración de retroalimentación desacoplada utilizando compensación estática. (Godbout, Jordan y Apostolakis, 1990) desarrollaron un modelo para un sistema de control en lazo cerrado que incorpora muestreo multifrecuencia con compensación dinámica, pero su dimensión es aún mayor que la del modelo de Araki-Yamamoto. Más tarde, (Apostolakis y Jordan, 1991) redujeron las dimensiones de dicho modelo de una manera informal.

Un hecho común en la mayoría de estos enfoques es la representación por medio de una ecuación de estado invariable en el tiempo (LTI) y ampliada del sistema multifrecuencia (lifted system). La ecuación está dada a un período global  $T_0$ , igual al mínimo común múltiplo de todos los períodos de muestreo existentes en el sistema y contiene más entradas y salidas que el sistema original. Varios autores han mostrado que esta representación conserva muchas de las propiedades del sistema multifrecuencia original (alcanzabilidad, controlabilidad, observabilidad, estabilidad, etc).

(Meyer, 1990) demostró que un sistema multifrecuencia es un caso especial de un tipo de operador, el cual él introduce y llama "shift-varying operator". Además, para ese operador existe un operador equivalente "shift-invariant", el cual conserva todas las propiedades algebraicas y analíticas del sistema multifrecuencia original (en su artículo, se analiza el caso particular de la estabilidad BIBO). Desde la perspectiva de este nuevo operador, todas las representaciones de sistemas multifrecuencia son equivalentes e incluso Meyer obtiene una generalización del operador de Kranc a sistemas MIMO. El mismo (Meyer, 1988) propone un método CAD para el diseño de reguladores multifrecuencia, con el cual pretende hacer más eficiente y natural dicho proceso. El método tiene como base la representación invariable en el tiempo de los sistemas multifrecuencia. Como ejemplo, aplica la Q-parametrización de reguladores.

El operador Kranc MIMO presenta algunas características interesantes, las cuales han sido analizadas por (Vélez, 1999; Vélez, 2001). En su trabajo, Vélez obtiene el modelo ZOH Kranc MIMO a partir de sustituciones progresivas y lo usa como base para el diseño de reguladores multifrecuencia.

El modelado de sistemas multifrecuencia es posible por medio de sistemas periódicos, con vectores más reducidos que para el caso de modelos lineales invariables. La principal desventaja de estos modelos es la extrema complejidad en el diseño de reguladores. Autores como Colaneri-Scattolini-Schiavoni y Glasson han hecho aportes importantes en este sentido.

Alrededor de los años de 1986 a 1989 se comienza a ver un auge en la teoría y aplicación del control multifrecuencia, debido a la aparición de modelos más fáciles de aplicar computacionalmente y procesadores más rápidos. Se concentra el estudio en las propiedades y características de los métodos de modelado propuestos y en el diseño directo de reguladores.

Un caso de interés en los últimos años es el caso del muestreo multifrecuencia irregular. Aunque varios autores han tratado el tema, es un campo poco explorado. Uno de los trabajos más importantes en el área lo constituye el realizado por (Salt, 1992). En el presente trabajo se expone una generalización de dicho modelo.

El enfoque temporal en variables de estado es el método preferido para el modelado de sistemas multifrecuencia, debido a la reducción de este tipo de sistemas a representaciones invariables en el tiempo que amplían el número de entradas y salidas del sistema (sistemas

MIMO). Es importante indicar que no es posible obtener una representación externa para los sistemas multifrecuencia, exceptuando el caso de esquemas MRIC (Multirate Input Control; la acción de control se aplica rápidamente, mientras que las mediciones se hacen de manera lenta). Los esquemas de muestreo MRIC y MROC (Multirate Output Control; contrario al MRIC) para sistemas MIMO son muy estudiados en la bibliografía.

## 2. MÉTODOS DE CONTROL MULTIFRECUENCIA

A continuación se hace una clasificación por tema de los principales métodos encontrados en la bibliografía y que nos pueden dar una idea del estado del arte de la aplicación de reguladores multifrecuencia: discretización de reguladores analógicos, asignación de polos por realimentación de la salida (caso general), asignación de polos por realimentación de la salida en un esquema MRIC, regulador de cancelación en un esquema MRIC para sistemas SISO, asignación de polos por realimentación de la salida en un esquema MROC (Multirate Output Control), mapeo de modelo en un esquema MRIC, control óptimo, muestreo irregular o asíncrono, control adaptativo, estimadores de estado, control robusto, control predictivo, PID, control no lineal, control de robots.

En general, de un estudio detallado de los artículos se puede concluir lo siguiente:

- La mayor cantidad de resultados se han obtenido en el área de control óptimo.
- Hay una buena cantidad de artículos (25%) dedicado a aspectos de aplicación del control multifrecuencia en áreas muy diversas.

- En el diseño se parte de modelos particulares. El diseño aplicado al caso general de muestreo es poco tratado, pero sobresalen métodos basados en la parametrización de Youla o Q.
- El modelo de muestreo más utilizado es el MRIC debido a que la condición de causalidad (ver capítulo IV) se cumple sin ningún problema (los términos directos en el compensador tienen la forma triangular inferior por bloques) y es posible ubicar arbitrariamente los polos y ceros de fase no-mínima de la planta.
- El control multifrecuencia en esquemas de muestreo MRIC presenta oscilaciones ocultas. Este es uno de los temas de más interés teórico. Su análisis y solución se ha planteado de diversas maneras, entre las que se incluye el uso de integradores y filtros. Una excelente descripción y explicación de este problema se encuentra en (Tangirala, 1999).
- El caso de diseño a partir de modelos MROC se resuelve con la actualización de las señales de control cada período global (se cumple con la condición de causalidad introduciendo un retardo en la actualización de las entradas).
- En general, la restricción de causalidad es garantizada de varias maneras: discretizando reguladores continuos, recurriendo a esquemas MRIC, utilizando la parametrización de Youla o parametrización Q, usando operadores anidado ("nest operators"), uso de precompensadores antes de la planta. Todas las políticas sugeridas se pueden agrupar en dos clases (Araki, 1993): una política construc-

tiva (uso de compensadores "correctos") y una política analítica (parametrización de Youla).

- Siempre es posible garantizar la ubicación de polos y ceros con reguladores estáticos multifrecuencia, aunque puede haber una degradación en el comportamiento.
- Se estudia muy poco el control con muestreo irregular. No se explota la irregularidad del muestreo (grado de libertad adicional) para el cumplimiento de aspectos como la controlabilidad, observabilidad, comportamiento intermuestreo, etc.

### 3. MÉTODO DE MODELADO MULTIFRECUENCIA

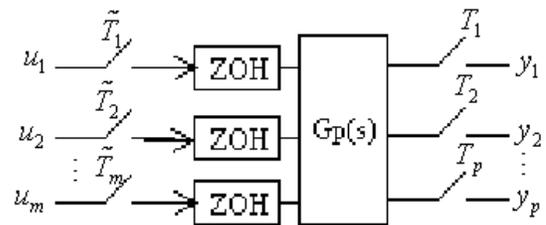
Se puede obtener una descripción de los métodos tradicionales de modelado multifrecuencia en varias fuentes (Glasson, 19383; Araki, 1993; Vélez, 1997). El método ZOH Kranc MIMO se explica detalladamente en (Meyer, 1990; Vélez, 1998). A continuación se describe con detalle la generalización del método ZOH Kranc MIMO para el caso de muestreo irregular, del cual se deducen como casos particulares los métodos tradicionales. En (Vélez, 2000; Vélez, 2001) se explica con más detalle el modelo.

Los anteriores modelos se aplican a sistemas multifrecuencia con muestreo regular (es decir, aunque cada variable puede muestrearse con un período arbitrario, éste es constante). El siguiente modelo generaliza los resultados mencionados anteriormente para el caso de sistemas multifrecuencia MIMO con muestreo irregular (es decir, cada variable se muestrea arbitrariamente y en intervalos irregulares; sin embargo, la secuencia se repite cada período global  $T_o$ ). El caso de muestreo irregular ha sido explorado muy poco; uno de los trabajos más interesantes en este campo es el realizado por (Salt, 1992), quien estudia y modela el caso particular de un sistema SISO en el que la salida se muestrea cada período global  $T_o$ , mientras que la entrada se muestrea  $N$  veces de manera irregular en dicho intervalo.

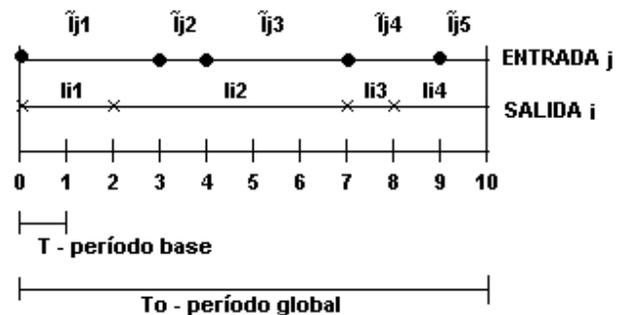
Aquí se considerará un sistema multifrecuencia irregular de orden  $n$  con  $m$  entradas y  $p$  salidas, tal y como se muestra en la figura 3. El esquema de muestreo se muestra en la figura 4.

Se considera que todas las entradas y salidas se sincronizan cada período global.

**FIGURA 3**  
**Sistema Multifrecuencia**



**FIGURA 4**  
**Esquema de Muestreo Irregular**



El modelo de la planta continua es (se considera que la planta continua es controlable y observable):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_p \mathbf{x} + \mathbf{B}_p \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_p \mathbf{x} + \mathbf{D}_p \mathbf{u} \end{cases}$$

donde, (1)

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad \dots \quad u_m]^T, \mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_p]^T$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$$

El modelo discreto a período base  $T$  de la planta es:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1)T = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(T) = e^{\mathbf{A}_p T}, \mathbf{B} = \mathbf{B}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}_p \tau} \mathbf{B}_p d\tau$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_m], \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_p \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_p \end{bmatrix}$$

Por sustituciones progresivas se llega al modelo que se indica en las ecuaciones (3) y (4).

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^D(kT_o) \end{cases} \quad (3)$$

Los vectores en (3) tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT_o) &= [x_1(kT_o) \quad \dots \quad x_n(kT_o)]^T \\ \mathbf{u}^D(kT_o) &= [u_1(kT_o + \tilde{T}_{11}) \quad \dots \quad u_{l_1}(kT_o + \tilde{T}_{1\tilde{N}_1}) \quad | \dots]^T \\ \mathbf{y}^D(kT_o) &= [y_1(kT_o + T_{11}) \quad \dots \quad y_{l_1}(kT_o + T_{1M}) \quad | \dots]^T \end{aligned} \quad (4)$$

Los coeficientes e índices en (3) y (4) se especifican detalladamente en (Vélez, 2001).

$T$  es el período base.

$T_o = NT$  es el período global.

$\tilde{T}_{jv}$  son los instantes de muestreo de la entrada.

$\tilde{N}_j$  es el número de muestras de la entrada  $j$  en el período global  $T_o$ .

$T_{iv}$  son los instantes de muestreo de la salida. Para el caso de muestreo regular:

$N_i$  es el número de muestras de la salida  $i$  en el período global  $T_o$ .

$\tilde{l}_{jv}$  es la dimensión, en períodos  $T$ , de cada intervalo de muestreo irregular de la entrada  $j$ .

$l_{i\mu}$  es la dimensión, en períodos  $T$  de cada intervalo de muestreo irregular de la salida  $i$ . Su definición es semejante a la dada arriba.

Del modelo anterior se deduce de una manera sencilla y directa el modelo para el caso de muestreo regular, mencionado anteriormente.

Se destaca en este modelo los siguientes aspectos:

- Modelado de sistemas multifrecuencia regulares o irregulares (muestreo arbitrario, pero que se repite cada período global  $T_o$ ).
- Las entradas y salidas se sincronizan cada período global.

- Representación invariable en el tiempo.
- Aplicación a sistemas SISO o MIMO.
- Consideración de un número arbitrario de entradas y salidas.
- Representación causal (observar la forma de la matriz).
- Sistema de dimensión mínima (no a máximo común divisor).
- Fácil obtención de casos particulares.

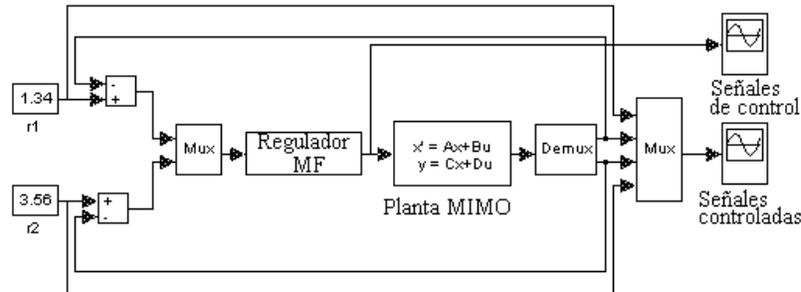
#### 4. SIMULACIÓN DE SISTEMAS MULTIFRECUENCIA

Para la simulación de sistemas multifrecuencia se ha utilizado básicamente el programa CC y programas desarrollados por cada autor para sus fines particulares. En particular, el programa CC incluye los operadores de Kranc, vectorización y reducción.

Se desarrolló el Multirate Control Toolbox para MATLAB (Vélez, 1999) para el modelado de sistemas multifrecuencia con muestreo tanto regular como irregular. Con el toolbox se pueden simular fácilmente sistemas multifrecuencia, de manera semejante a como se simulan sistemas monofrecuencia. Los distintos bloques incluyen retenedores de orden cero en cada una de las entradas y salidas, por lo que se pueden analizar sistemas híbridos análogo-digiales y el comportamiento intermuestreo de las señales.

La simulación de sistemas multifrecuencia con el toolbox se realiza utilizando las S-Functions, las cuales permiten "jugar" (programar) con una mayor flexibilidad con los parámetros de un sistema dinámico (condiciones iniciales, dimensiones de las matrices, número de entradas y salidas, estados continuos y discretos, períodos de muestreo, almacenamiento de estados y condiciones, etc). Aunque la estructura de programación de una S-Function es bastante estándar (sfuntmpl.m es una plantilla documentada de MATLAB que sirve de punto de partida), sus posibilidades son casi ilimitadas, dándole una gran posibilidad de extensión al MATLAB/SIMULINK. Sin embargo, la utilización de estas funciones sería poco práctica si no se tuviera la posibilidad de esconder (enmascarar) los detalles de programación a un usuario normal. Este proceso se puede hacer utilizando la opción de enmascaramiento ("mask") del SIMULINK. La combinación de S-Functions con la opción de enmascaramiento hacen del Multirate Control Toolbox una

**FIGURA 5**  
**Diagrama de Simulación de un Sistema Multifrecuencia**



herramienta potente y de fácil uso. Una máscara es una caja de diálogo que solicita la información exacta requerida para los cálculos; detrás de la máscara se realizan los cálculos intermedios y se llaman las funciones necesarias.

La idea básica de Multirate Control Toolbox (MCT) es la de muestrear cada señal de entrada a período base, verificar si en ese instante se debe tomar alguna muestra, formar el vector expandido (vectorización), calcular la salida expandida, verificar si en ese instante debe aplicar alguna salida (reducción). La simulación puede ser lenta si el período base es muy pequeño. El proceso es transparente y claro. Las "máscaras" facilitan la parametrización de los bloques.

**Para la simulación de sistemas multifrecuencia se ha utilizado básicamente el programa CC y programas desarrollados por cada autor para sus fines articulares. En particular, el programa CC incluye los operadores de Kranc, vectorización y reducción.**

## 5. DISEÑO DE REGULADORES MULTIFRECUENCIA

El diseño de reguladores multifrecuencia ha sido ampliamente tratado en la literatura científica. En cada caso se parte de modelos propios desarrollados por cada autor. A continuación se exponen algunas ideas para el caso regular de control multifrecuencia. Aquí se diseñan los reguladores multifrecuencia a partir de la representación invariable en el tiempo (LTI) de la planta, asegurando la restricción de causalidad.

Se dice que un modelo discreto multifrecuencia satisface la restricción de causalidad si en  $\tilde{\mathbf{D}}$ :

$$d_{ij,\mu\nu}^D = 0 \text{ siempre que } \mu T_i < \nu \tilde{T}_j$$

Es decir,  $\tilde{\mathbf{D}}$  tiene una estructura en bloques diagonal inferior (la salida actual no depende de la entrada futura). El problema de causalidad no se presenta en esquemas de muestreo MRIC (muestreo rápido de entradas y lento de las salidas) o con la discretización de reguladores analógicos. Esta es una de las razones de su uso tan difundido.

Una vez obtenida la representación ampliada LTI del sistema muestreado multifrecuencia, la clave consiste en determinar como usar (o modificar) los métodos de diseño existentes para sistemas monofrecuencia conservando la restricción de causalidad. Para resolver este problema se han sugerido 2 políticas:

- Una constructiva, que usa compensadores "correctos" que satisfacen la restricción de causalidad.
- Una analítica, que usa la parametrización de Youla con la condición de causalidad.

A continuación se presenta un enfoque constructivo para el diseño de un regulador de asignación de polos multifrecuencia. Los modelos multifrecuencia de la planta (aplicando el método de modelado expuesto anteriormente) y el regulador son, respectivamente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^D(kT_o) \end{cases}$$

$$\dim(\mathbf{x}) = n \times 1, \dim(\mathbf{u}^D) = \bar{N} \times 1, \dim(\mathbf{y}^D) = \bar{N} \times 1$$

$$\dim(\tilde{\mathbf{A}}) = n \times n, \dim(\tilde{\mathbf{B}}) = n \times \bar{N}, \dim(\tilde{\mathbf{C}}) = \bar{N} \times n$$

$$\dim(\tilde{\mathbf{D}}) = \bar{N} \times \bar{N}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_R((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}_R \mathbf{x}_R(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}_R [\mathbf{r}^D(kT_o) - \mathbf{y}^D(kT_o)] \\ \mathbf{u}^D(kT) = \tilde{\mathbf{C}}_R \mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{D}}_R [\mathbf{r}^D(kT_o) - \mathbf{y}^D(kT_o)] \end{cases} \quad (5)$$

$\dim(\mathbf{x}_R) = n_R \times 1$ ,  $\dim(\tilde{\mathbf{A}}_R) = n_R \times n_R$ ,  $\dim(\tilde{\mathbf{B}}_R) = n_R \times \bar{N}$ ,  
 $\dim(\tilde{\mathbf{C}}_R) = \bar{N} \times n_R$ ,  $\dim(\tilde{\mathbf{D}}_R) = \bar{N} \times \bar{N}$

Se supone que la planta continua es observable y controlable. El problema de diseño del regulador multifrecuencia se reduce al cálculo de la cuádruple  $[\tilde{\mathbf{A}}_R, \tilde{\mathbf{B}}_R, \tilde{\mathbf{C}}_R, \tilde{\mathbf{D}}_R]$  según ciertas especificaciones de diseño. Obsérvese que el diseño se hace a  $T_o$  y no a  $T$ .

Partiendo de los modelos multifrecuencia de la planta y el regulador, respectivamente, se puede aplicar el álgebra de bloques habitual de los sistemas monofrecuencia para llegar al siguiente modelo en lazo cerrado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}((k+1)T_o) \\ \mathbf{x}_R((k+1)T_o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{C}}_R - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{C}}_R \\ -\tilde{\mathbf{B}}_R\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{A}}_R - \tilde{\mathbf{B}}_R\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{C}}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT_o) \\ \mathbf{x}_R(kT_o) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{N}} \\ \tilde{\mathbf{B}}_R\tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \mathbf{r}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{C}}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT_o) \\ \mathbf{x}_R(kT_o) \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{D}}_R\tilde{\mathbf{C}}_R \mathbf{r}^D(kT_o) \end{cases} \quad (6)$$

donde,  $\mathbf{N} = (\mathbf{I}_{\bar{N}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}_R)^{-1}$  y

$$\begin{aligned} \dim(\tilde{\mathbf{A}}_{cl}) &= (n + n_R) \times (n + n_R) & \dim(\tilde{\mathbf{B}}_{cl}) &= (n + n_R) \times \bar{N} \\ \dim(\tilde{\mathbf{C}}_{cl}) &= \bar{N} \times (n + n_R), & \dim(\tilde{\mathbf{D}}_{cl}) &= \bar{N} \times \bar{N} \end{aligned}$$

Para el caso de compensación estática:  $\tilde{\mathbf{D}}_R = \tilde{\mathbf{F}}$  y las demás matrices son ceros. En ese caso la ecuación anterior toma una forma más simple:

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_o) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{r}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{r}^D(kT_o) \end{cases} \quad (7)$$

Una versión del método de asignación de polos fue desarrollado por (Eckardt, 1989). A continuación se obtiene el respectivo regulador a partir del modelo presentado anteriormente. El regulador que se diseña se representa por una matriz constante  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Teniendo en cuenta que la discretización de la planta (con  $\mathbf{D} = 0$ ) corresponde a un MRIC, se puede aplicar el modelo teniendo en cuenta que  $\tilde{\mathbf{A}}_R = \tilde{\mathbf{B}}_R = \tilde{\mathbf{C}}_R = \mathbf{0}$  y  $\tilde{\mathbf{D}}_R = \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{N} \times p}$ . Reemplazando en (7) se obtiene el siguiente modelo en lazo cerrado:

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_o) = (\mathbf{A}^N - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{r}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(kT_o) \end{cases} \quad (8)$$

La realización es completamente causal, como era de esperar. Por ello, el siguiente diseño es completamente realizable. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$\det(z_o \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^N + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{C}}) = 0 \quad (7)$$

La ecuación se puede resolver por los medios habituales para sistemas monofrecuencia. El regulador de Eckardt y sus condiciones se obtienen aquí de una manera sencilla y directa. La salida de la planta con este regulador presenta oscilaciones ocultas (fenómeno indeseado). El regulador presenta un comportamiento FIR (finite impulse response). (Hagiwara y Araki, 1998) hacen un análisis del regulador anterior: el rizado se presenta sobretodo cuando  $n > m$ .

Para un sistema monofrecuencia el problema de asignación de  $n$  (orden del sistema) polos con un regulador estático solo es posible si  $m + p \geq n - 1$ . Al pasar el problema a multifrecuencia se introducen  $\bar{N} = \tilde{N}_1 + \dots + \tilde{N}_m$  variables que permite que el problema de asignación de polos sea factible.

Las oscilaciones ocultas en los sistemas de control multifrecuencia se pueden explicar como una consecuencia de la expansión de cada una de las variables de control y su consideración, a partir de ese momento, como señales independientes (problema de diseño). Dicho problema no se presenta en esquemas de control MROC, donde se expanden las salidas pero no las entradas.

## 6. EJEMPLOS

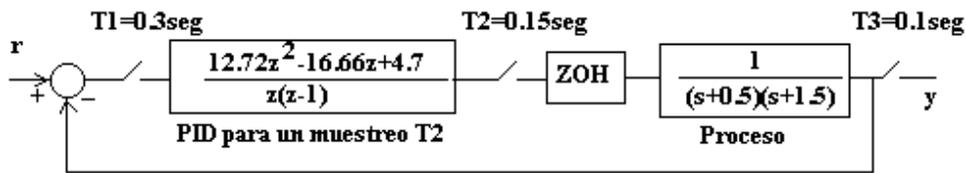
### 6.1 Regulador PID multifrecuencia

Se tomó un regulador PID monofrecuencia previamente diseñado y se le redujo el período de control. Aplicando el método de modelado expuesto en este trabajo se obtiene el siguiente regulador PID multifrecuencia:

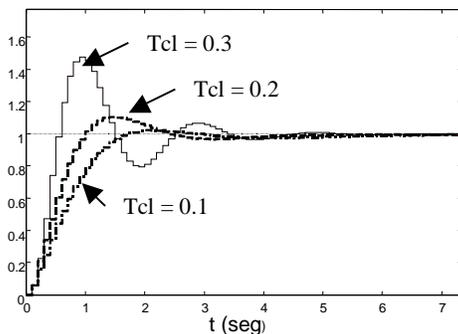
$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -3.94 & 4.7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 12.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se realiza una prueba con  $T_2 = T_{cl} = 0.3$  seg (sistema monofrecuencia),  $T_2 = T_{cl} = 0.15$  seg y  $T_2 = T_{cl} = 0.1$  seg. Los resultados de la simulación se muestran en la figura 7. Al disminuir  $T_{cl}$  el sobreimpulso disminuye y el sistema se estabiliza más rápido. Aquí se observa una de las razones para utilizar el control multifrecuencia: la respuesta transitoria puede mejorar al reducir el período de control  $T_{cl}$ .

**FIGURA 6**  
Regulador PID Multifrecuencia



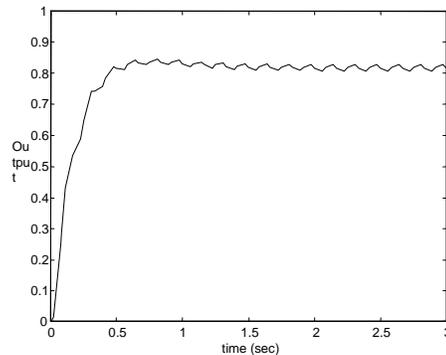
**FIGURA 7**  
Resultados con un regulador PID multifrecuencia



El cálculo del regulador da, para una ubicación de los polos en  $s = -4$ , el siguiente resultado:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 44.38 \\ -35.53 \end{bmatrix}$$

**FIGURA 8**  
Respuesta temporal de un sistema SISO en un esquema MRIC



**6.2 Diseño directo de reguladores multifrecuencia en esquemas MRIC. Sistema SISO**

Sea el siguiente sistema:

$$G_p(s) = \frac{1}{(0.5s+1)(s+1)} \quad \tilde{T}_1 = 1/12, \quad T_1 = 1/6$$

$$m = p = 1, n = 2, \tilde{N}_1 = n = 2, T_o = 1/6, \tilde{l}_1 = 1, N = 2, \tilde{N} = 2$$

Aplicando el modelo presentado para el caso regular se obtiene el siguiente modelo multifrecuencia de la planta:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2.3418 & -1.3758 \\ 1.7665 & -0.7788 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1.7665 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} = [0.0064 \quad 0.0059]$$

Los resultados de la simulación (con el Multirate Control Toolbox) se muestran en la figura 8. El rizado se puede eliminar si se utiliza un integrador de la manera adecuada.

**6.3 Diseño directo de reguladores multifrecuencia en esquemas MRIC. Sistema MIMO**

Sea el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 10 & -1.2 \\ 5/6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$T_o = 0.2$  seg.,  $n = 3$ ,  $p = m = 2$ . Combinaciones de los índices de controlabilidad: (3,0), (2,1) y (1,2).

Sea  $\tilde{N}_1 = \tilde{n}_1 = 2$  y  $\tilde{N}_2 = \tilde{n}_2 = 1$ . Es decir,

$$\tilde{T}_1 = 0.1 \text{ y } \tilde{T}_2 = 0.2.$$

En este caso, el modelo multifrecuencia de la planta es:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.6065 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6703 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8137 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0.1723 & 0.2212 & 0 \\ 0.7421 & 0.9063 & -0.1978 \\ 0.0718 & 0.0793 & 0.1813 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

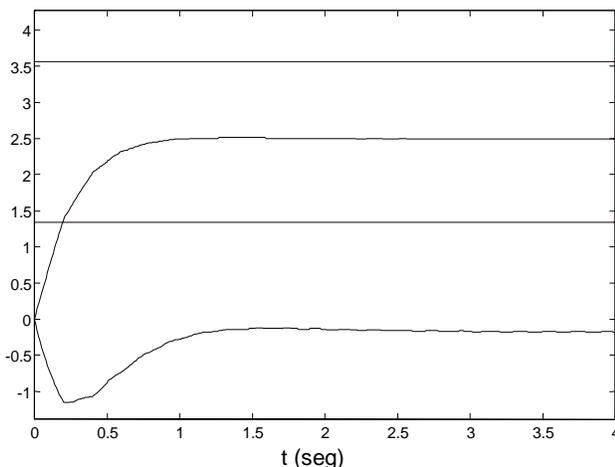
El regulador es, para una ubicación de los polos en el plano continuo en  $s = -3$ :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0.6671 & 0.9007 \\ -0.6222 & 0.9294 \\ -0.1583 & 2.0843 \end{bmatrix}$$

El resultado de la simulación (con el Multirate Control Toolbox) se muestra en la figura 9.

**FIGURA 9**

**Respuesta temporal de un sistema MIMO en un esquema MRIC**



La respuesta temporal es adecuada y no presenta oscilaciones ocultas.

## CONCLUSIONES

Se presentaron las principales ideas y métodos del control multifrecuencia. Se mostró el estado del arte del área, incluyendo métodos de análisis y diseño. Al final se presenta una lista seleccionada de referencias bibliográficas que pueden servir de punto de partida para la profundización en el tema.

Se mostró, como ilustración, un método de modelado multifrecuencia. Este modelo presenta algunas características interesantes: representación compacta (ideal para el diseño y la implementación), arbitrario número de entradas y salidas, régimen arbitrario de muestreo, fácil deducción de casos particulares, entre otros. Se incluyeron expresiones matemáticas y ejemplos.

Se ilustró el uso del Multirate Control Toolbox para MATLAB/SIMULINK, desarrollado por los autores y el cual permite la fácil simulación de sistemas híbridos multifrecuencia, permitiendo el análisis del comportamiento intermuestreo de las diferentes señales.

El diseño se trató a partir del modelo presentado. Se estudió el caso particular de un regulador de asignación de polos para un sistema MRIC (multirate input control) y se mostró el camino para el diseño de otros reguladores semejantes. La eliminación de oscilaciones ocultas es un problema de gran interés en el control multifrecuencia.

## RECONOCIMIENTOS

Los más sinceros agradecimientos a la Universidad EAFIT y a la Universidad Politécnica de Valencia por facilitar el tiempo y los recursos necesarios para realizar este trabajo.

## REFERENCIAS

- Albertos, P. (1990). "Block Multirate Input-Output Model for Sampled-Data Control Systems". En: IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 35. No 9. pp. 1085-1088.
- Amit, N. (1980). Optimal Control of multirate digital control systems. Report SUDAAR #523. Stanford: Stanford University.

- Apostolakis, I.S. and Jordan, D. (1991). "A time invariant approach to multirate optimal regulator design". En: *International Journal of Control*. Vol. 53. pp. 1233-1254.
- Araki, M. and Yamamoto, K. (1986). "Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 31. pp. 145-154.
- Araki, M., Hagiwara, T. and Soma, H. (1992). "Application of multilevel sampled-data controllers to simultaneous pole assignment problem". En: *Proceedings on 31th Conference on Decision and Control*. pp. 1762-1767.
- Araki, M. (1993). "Recent development in digital control theory". En: *Proc. 12th IFAC World Congress*. Vol. 9. pp. 951-960.
- Barry, P.E. (1975). *Optimal control of multirate systems*. Report RN-361. Research Department, Grumman Aerospace Corporation.
- Broussard, J.R. and Glasson D.P. (1980). "Optimal multirate flight control design". En: *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*.
- Choe, Y.W. and Araki, M. (1992). "Control of serial sampling systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 37. pp. 1202-1205.
- Eckardt, D. (1989). "Design of finite response controllers by pole assignment in multirate sampled-data systems". En: *International Journal of Control*. Vol. 49. **No. 4**. pp. 1185-1193.
- Glasson, D.P. (1983). "Development and Applications of Multirate Digital Control". En: *Control System Magazine*. Vol. 3. **No. 4**. pp. 2-8.
- Godbout, L.F., Jordan, D. and Apostolakis, I.S. (1990). "Closed-loop model for general multirate digital control systems". En: *IEE Proceedings*. Vol. 137. pp. 326-336.
- Hagiwara, T. and Araki, M. (1988). "Design of a stable feedback controller based on the multirate sampling of the plant output". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 33. pp. 812-819.
- Hagiwara, T., Fujimura, T. and Araki, M. (1990). "Generalized multirate-output controllers". En: *International Journal of Control*. Vol. 52. **No. 3**. pp. 597-612.
- Ito, H. (2000). "Improvement of deadbeat servomechanism using multirate input control". En: *Proceedings of American Control Conference*. Vol. 1. No. 6. pp 169 -174.
- Jury, E.I. (1967). "A note on multirate sampled-data systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 12. pp. 319-320.
- Kalman, R.E. and Bertram, J.E. (1959). "A unified approach to the theory of sampling systems". En: *Journal of Franklin Institute*. Vol. 267. pp. 405-436.
- Kranc, G.M. (1957). "Input-output analysis of multirate feedback systems". En: *IRE Transactions on Automatic Control*. PGAC-3. Vol 3. pp. 21-28.
- Meyer, D. (1988). "Toward a new CAD method for MIMO multirate digital controllers". En: *Proceedings of 27th Conference on Decision and Control*. pp. 889-1891.
- Meyer, D.G. (1990). "A new class of shift-varying operators, the shift-invariant equivalents and multirate digital systems". En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 35. pp. 429-433.
- Moore, K.L., Bhattacharyya S.P. and Dahleh, M. (1993). "Capabilities and limitations of multirate control schemes". En: *Automatica*. Vol. 29. No.4. pp. 941-951.
- Paraskevopoulos, P.N., Arvanitis, K.G. and Frantzikinakis H.E. (1994). "Digital control of distillation columns using singlerate and multirate periodic controllers". En: *International Conference on Control*. Vol. 1. pp 261-267.
- Salt, J. (1992). *Control de Procesos con Muestreo No-Convencional*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Sklansky, J. and Ragazzini J.R. (1955). "Analysis of errors in sampled-data feedback systems". En: *AIEE Trans*. Vol. 74. a, A.K., Sirish, L.S. and Chen, T. (1999). "Conditions for Removing Intersample Ripples in Multirate Control". En: *IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Vol. 3. pp 1585-1589.
- Thompson, P.M. (1986). "Gain and phase margin of multirate sampled-data feedback systems". En: *International Journal of Control*. Vol. 44. pp. 833-846.

- Vélez, C.M. (1997). "Una visión al control digital con muestreo multifrecuencia". En: II Congreso de la ACA. pp 140-146.
- Vélez, C.M. y Salt, J. (1998). "Métodos, conceptos y perspectivas del diseño de controladores multifrecuencia". En: VIII Congreso Latinoamericano de Control Automático. pp 541-546.
- Vélez, C.M. (1999). "Simulation of multirate control systems in MATLAB/SIMULINK". En: Second Manufacturing Congress. Pp 84-90.
- Vélez, C.M. y Salt, J. (2000). "Modelación de sistemas multifrecuencia con muestreo irregular". En: IX Congreso Latinoamericano de Control Automático. pp 13-19.
- Vélez, C.M. (2001). Modelado y simulación de sistemas con muestreo no convencional. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Whitbeck, R.F. and Didaleusky, D.C.J. (1980). Multirate digital control systems in simulation applications. Report AFWAL-TR-80-3101. Ohio: Air Force Wright Aeronautical Laboratory.