FUNDAMENTACIÓN Y APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD CUASILINEAL

EFRAÍN ARANGO SÁNCHEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas

Asesor: JHON JAIRO GARCÍA RENDÓN, PhD.

MEDELLÍN
UNIVERSIDAD EAFIT
FACULTAD DE CIENCIAS
2016

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

Medellín, julio de 2016

Este trabajo está dedicado a las personas que me apoyaron durante estos años, que todos los días me preguntaban ¿Cómo va la tesis?

A mi madre, a mi hermano, a la principessa, a mis compañeros de trabajo: Milin, Vélez, Juli, Jube, el hechicero, Leiny.

A todos mis maestros: Eber, Tavo, Albeiro, gracias por sus enseñanzas. A los que se me quedan por fuera, de antemano, les ofrezco una disculpa. Gracias por recordarme que **“AQUÍ NADIE SE RINDE”.**

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Jhon Jairo García Rendón por sus valiosos aportes y por creer en este trabajo.

Al Economista Fabián Guisao por su inmensa colaboración a pesar de su tiempo tan limitado.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

La economía es la ciencia social que más ha evolucionado en la construcción de un lenguaje simbólico técnico, que le ha permitido la implementación de herramientas formales para el análisis de los problemas del mundo real. En este sentido, esta evolución se ha logrado gracias a la constante búsqueda de la mejor manera de abordar la realidad y sus factores condicionantes; además de la introducción de técnicas cada vez más sofisticadas para lograr dicho fin. Esta constante evolución de la herramienta para el análisis económico debe ser transmitida en los cursos de enseñanza en el pregrado de economía.

Es un reto la incorporación constante de las herramientas nuevas y la profundización, construcción y deconstrucción de las existentes. En este sentido, en el ejercicio de una responsabilidad docente, se pretende contribuir con esta tesis de maestría a la profundización y acercamiento de uno de los aparatos conceptuales y teóricos más importantes de la teoría neoclásica y fundamento de la teoría del consumidor y del productor en los cursos de microeconomía: las funciones de utilidad, con especial énfasis en la función de utilidad cuasilineal.

La presente propuesta se circunscribe en la obligatoriedad docente de la revisión de la teoría microeconómica para el desarrollo y aplicación práctica del uso de las herramientas de análisis, caso concreto: las funciones de utilidad cuasilineales.

En primer lugar se desarrollará como marco teórico, el pensamiento económico que da origen al uso de la formalización matemática de las funciones de utilidad como herramienta de análisis. Para este fin, se hará uso de los conceptos de positivismo lógico y las adopciones que de él hace la economía neoclásica como metodología ordenada de su desarrollo científico.

De acuerdo con las diferentes corrientes del pensamiento económico, se mostrará cómo el aparato analítico actual se desprende, en una situación inicial, de los postulados de la escuela marginalista. Se iniciará con los principales postulados de los primeros marginalistas, quienes introducen las categorías de análisis e intuiciones iniciales, de lo que según ellos es la descripción de la manera cómo se comportan los individuos ante la elección en el consumo (Grosse, Jevons, Menger, Walras). Seguidamente, se abordarán los postulados de la segunda corriente de la escuela marginalista, quienes refinan y adecúan los aportes de los primeros marginalistas para la elaboración de conclusiones más generales y la expansión del análisis del comportamiento de los agentes económicos (Marshall y posteriores).

Adicionalmente, se realizará un breve diagnóstico de los aportes actuales a la teoría del comportamiento de los agentes económicos, en cuanto al uso de funciones de utilidad se refiere.

Después de llevar a cabo este análisis contrastaremos mediante evidencia empírica, la aplicación de este tipo de función en un caso real, el mercado del Retail (Mercado de Venta directa - Ventas por catálogo) en Colombia, específicamente, para la empresa Amelissa. La mayoría de aplicaciones que encontramos a situaciones reales se llevan a cabo mediante funciones de utilidad y/o producción del tipo Cobb-Douglas, o de una manera más general, mediante la función CES (*Constant Elasticity Substitution*). La mayoría de detractores de los modelos económicos hablan de la falta de realismo que encierran los mismos, la cantidad de supuestos, y el tratamiento que se le da a los datos, entre otras características.

Justificación

Inicialmente, cuando llevábamos a cabo todas las pruebas y desarrollo matemático de las condiciones generales que debe cumplir una función de utilidad, nos preguntábamos acerca del contexto tan especial que se debería tener; es decir, si existiría una estructura de mercado tan particular, que permitiese ser explicada desde la teoría microeconómica y respetara sus postulados. Fue en ese momento cuando, después de llevar a cabo algunas pruebas, encontramos resultados alentadores en cuanto a las demandas que arroja el problema de optimización restringida

$$\max U(\boldsymbol{x}) \;\; s.a \;\; \boldsymbol{p} * \boldsymbol{x} \leq m$$
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{+}^{\boldsymbol{n}}$$

A pesar de que los resultados teóricos muestran que en el caso más simple, es decir, cuando solo incorporamos dos bienes al análisis, las demandas exhiben que uno de los bienes únicamente depende de su precio propio de manera indirecta, y del precio del otro bien, de manera directa $\boxed{x_1(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{p_2}{p_1}}$, mientras que la demanda del otro bien depende de su precio y del nivel de renta nominal del individuo $\boxed{x_2(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{m-p_2}{p_2}}$

Hasta este punto parece descabellado, por lo menos en la vida real, que un bien de consumo no dependa de la renta. Esta es una de las preguntas que los estudiantes hacen frecuentemente y ¿qué tipo de bienes presentan este comportamiento?, ¿nos podría dar un ejemplo? Otra de las cuestiones que motivaron la realización de este trabajo, fue el notable desarrollo que ha tenido el mercado de venta directa y su impacto en la economía, no solo en el ámbito local sino también en el internacional.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, este trabajo cobra mayor importancia en la medida en que, cada vez, más organizaciones, en sus portafolios de servicios incorporan el concepto de venta atada o venta empaquetada. Esto se evidencia, por ejemplo, en el sector de las telecomunicaciones, los almacenes de cadena y, por supuesto, las ventas por catálogo. Las organizaciones podrían, incluso, tener criterios adicionales a la hora de tomar sus decisiones, lo que permitiría mejorar sus márgenes y los niveles de eficiencia y, en el caso de los consumidores en este mercado DS (Direct Selling – Venta Directa), también mejorarían sus condiciones, en cuanto aprovechan estas estrategias para aumentar los niveles de autoconsumo y, por ende, sus niveles de utilidad.

Planteamiento del problema

La idea de este trabajo es mostrar que existen mercados o estructuras de mercado que pueden ser modeladas a partir de este tipo de funciones de utilidad *(Funciones de Utilidad Cuasilineal)*, arrojando conclusiones interesantes para la toma de decisiones de los diferentes agentes que componen la economía. Si tenemos en cuenta el desarrollo que ha sufrido el mercado de las ventas por catálogo (venta directa), cobra mayor importancia el estudio de las características microeconómicas sobre las cuales se fundamenta.

El modelo de Venta directa implica la comercialización de productos y servicios directamente a los consumidores de forma cara a cara, lejos de los puntos de venta permanentes (Federación Mundial de Asociaciones de Venta Directa WFDSA, 2015), (Duffy, 2005; Peterson y Wotruba, 1996) definen la venta directa como el proceso de venta de un producto o servicio de una persona a otra bajo las opiniones de los consumidores, en un medio ambiente que no es una ubicación fija. Esta definición es aceptada ampliamente en la Industria y en la literatura.

La Federación Mundial de Asociaciones de Venta Directa (WFDSA) es una organización no gubernamental, que representa a nivel mundial la industria de venta directa (WFDSA, 2015) está compuesta por empresas de 59 países que representan más de 90% del Producto Interno Bruto, PIB, mundial (Ragland, Widmier y Brouthers, 2015).

La venta directa tiene dos tipos de estructuras, una estructura de multinivel y una de un solo nivel. En la primera estructura el DS (Direct Seller - Vendedor Directo) tiene el objetivo de reclutar, entrenar y supervisar otros vendedores directos (DS), y se le compensa por sus ventas y las de su red; en la estructura DSO (Direct Selling Organizations) de un solo nivel, el ingreso se basa en su propia venta (Brodie, Stanworth y Wotruba 2002); en esta, el reclutamiento y el entrenamiento está a cargo de la empresa de venta directa (DSO). En la estructura de multinivel el ingreso depende de otros agentes, el reclutamiento y el entrenamiento está a cargo del vendedor directo.

La venta directa como canal de *marketing* presenta varias ventajas para los diferentes agentes económicos, los vendedores usan el tiempo disponible para incrementar sus ingresos, y para las organizaciones ofrece una alternativa de crecimiento frente a los canales tradicionales. Para los consumidores presenta ventajas pues reciben asesoría personalizada (Alturas y Santos, 2009; Brodie et al., 2002; Duffy, 2005; Lin y Hassay, 2009; Ragland, Brouthers y Widmier, 2015).

En términos generales, el problema puede dividirse en dos: en primer lugar tratamos de probar que la función de utilidad seleccionada para desarrollar este trabajo, cumple con todas las condiciones de ser una función bien definida desde el punto de vista microeconómico y matemático, este ítem corresponde al grueso del trabajo. En este punto se desarrollan las principales pruebas y teoremas con los que cumple una función de estas características, de acuerdo con la teoría del consumidor.

En este sentido, la motivación se encuentra fundamentada en la escasez de información acerca de esta función; en la mayoría de textos de microeconomía en los diferentes niveles, fundamentos, intermedio y avanzado. El trabajo se convierte en una fuente de consulta para los lectores que deseen comprender el tratamiento matemático que se le da a este tipo de funciones de utilidad en particular.

En segundo lugar, mostraremos que en el mercado de las ventas por catálogo, en condiciones controladas, pueden describirse relaciones de demanda entre bienes, que son precisamente aquellas que se obtienen teóricamente mediante la utilización este tipo de función (Función de Utilidad Cuasilineal). Para tal fin utilizaremos un modelo de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG), el cual nos permitirá establecer que este tipo de negocio posee unas características intrínsecas que se pueden explicar mediante la aplicación de dicha función de utilidad.

Pregunta de investigación

De acuerdo con los postulados de la teoría microeconómica, específicamente aquellos que se refieren a la teoría del consumidor, la pregunta es: ¿cuál sería una buena representación en términos de funciones de utilidad para el mercado de las ventas por catálogo o venta directa?

Objetivo general

Analizar algunas de las características más relevantes del mercado de ventas por catálogo o venta directa, mediante la utilización de una función de utilidad del tipo cuasilineal.

Objetivos específicos

- Revisar los conceptos de positivismo lógico y sus adopciones en la economía neoclásica, como metodología ordenada del desarrollo científico.

- Contrastar mediante evidencia empírica, la aplicación de una función de utilidad cuasilineal en un caso real, específicamente el negocio de la venta directa (ventas por catálogo) de la empresa Yves Rocher en Colombia.

Metodología

La metodología de este trabajo está fundamentada en el concepto de investigación de carácter cuantitativo; es decir, se basa en la utilización de herramientas matemáticas y estadísticas que permiten conocer aspectos específicos acerca de la teoría del consumidor.

La primera parte del trabajo se desarrolla con base en los postulados de la teoría microeconómica; en esta sección utilizamos algunos elementos de cálculo diferencial, análisis real, álgebra lineal y algunos elementos de carácter geométrico, además de los elementos concernientes al análisis de la estática comparativa para demostrar que la función seleccionada para el estudio, cumple con todas las características propuestas por la literatura sobre economía; es decir, existe, es única y está bien definida.

En segundo lugar, con el fin de validar la veracidad de la aplicación de esta función a las ventas por catálogo, utilizamos datos de corte transversal, estos datos fueron extraídos directamente de la base de datos de la empresa francesa *Yves Rocher*, la cual participa en el mercado colombiano en venta directa desde el año 2015, bajo el nombre de *Color and Fashion*.

Venta Directa

La venta directa es un canal de distribución utilizado por las mayores marcas globales y también empresas emprendedoras más pequeñas para comercializar todo tipo de bienes y servicios, tales como joyería, utensilios de cocina, productos nutricionales, cosméticos, artículos para el hogar, energía y, seguros, y muchos más. El canal de venta directa difiere de manera importante de la venta minorista. No se trata sólo de conseguir grandes productos y servicios en manos de los consumidores. Es también una avenida donde las gentes con mentalidad empresarial pueden trabajar de forma independiente para construir un negocio con una baja inversión en puesta en marcha y gastos generales.

Los consultores/revendedores de venta directa trabajan por su cuenta, pero afiliados a una compañía que utiliza el canal, conservando la libertad de manejar un negocio en sus propios términos. Los consultores/revendedores forjan sólidas relaciones personales con los clientes potenciales, principalmente a través de discusiones y demostraciones cara a cara. En esta era de las redes sociales, la venta directa es una estrategia de salida al mercado que, para muchas empresas y líneas de productos, puede ser más efectiva que la publicidad tradicional o asegurarse espacio premium en las estanterías

Millones de personas en todo el mundo eligen participar en la venta directa, porque disfrutan de los productos o servicios de una empresa y quieren comprarlos con un descuento. Algunos deciden comercializar estas ofertas a sus amigos, familiares y otras personas ganando comisiones por esas ventas.

Los consultores/revendedores más exitosos pueden decidir ampliar su negocio mediante la construcción de una red de revendedores directos.

Beneficios de la Venta Directa

La venta directa ofrece importantes beneficios a las personas que quieren una oportunidad para obtener ingresos y construir un negocio propio, a los consumidores como una alternativa a las tiendas por menor, y es una manera rentable de negocio para llevar los productos al mercado.

Los consumidores se benefician de la venta directa debido a la comodidad y el servicio que proporciona, incluida la demostración y explicación personal de los productos, la entrega a domicilio, y las generosas garantías de satisfacción.

La venta directa ofrece una alternativa al empleo tradicional para aquellos que quieran una oportunidad flexible para complementar los ingresos familiares, o cuyas circunstancias no le permiten el empleo regular. Oportunidades de venta directa pueden convertirse en una carrera satisfactoria para aquellos que alcanzan el éxito y optan por seguir su negocio independiente de venta directa sobre una base de tiempo completo. Los costos iniciales de la venta directa son generalmente bajos. Por lo general, un kit inicial de ventas de precio modesto es todo lo que se necesita para empezar, y hay poco o ningún inventario u otros compromisos de dinero en efectivo para comenzar. Esto contrasta a otros negocios con costo y riesgo asociados a mayores desembolsos.

La venta directa ofrece un canal de distribución para empresas con productos innovadores o distintivos, que por el costo o por otras razones no son adecuados para la venta al por menor.

Como los Estudios externos de Impacto Socio Económico lo muestran, la venta directa tiene un beneficio positivo para las economías y las personas donde operan compañías de venta directa, y sirve a los consumidores como una conveniente fuente de productos de calidad.

Se utilizó un modelo de mínimos cuadrados generalizados, al hacer las estimaciones de MCO encontramos que la matriz de covarianzas de u era $\sigma^2\Sigma$ con con $\Sigma \neq I_T$, este fue un cambio importante, porque allí probamos que la varianza de $\hat{\beta}_{MCO}$, ya no tenía la menor matriz de varianzas y covarianzas entre todos los estimadores.

En estas circunstancias fue interesante transformar el modelo econométrico en otro, cuyos coeficientes fuesen los mismos que los del modelo original, pero cuyo término error tuviese un matriz de covarianzas escalar. Siendo posible utilizar MCO en este modelo transformado.

Variables del modelo

$Upr =$ Unidad pedida por representante en un porcentaje, Total de productos vendidos/total de clientes

$m =$ Proxi del ingreso, es el cupo del cliente, normalmente los clientes tienen cupos altos que dependen de sus ventas anuales o pagos oportunos, cupos altos están correlacionados con ventas promedio altas y o rentabilidad alta ya que ellos ganan comisión sobre las ventas.

$Ahorra =$ Es la diferencia entre el precio del producto (i) a precio sin oferta menos el precio del producto a precio regular.

$REF =$ Son las referencias de productos analizados con el permiso de la empresa Color and fashion e Yves rocher para este trabajo.

$Paq =$ Es una variable dummy que toma el valor de 1 si el producto salió en oferta empaquetada y 0 en otro caso.

Se seleccionaron seis diferentes productos, los cuales se denominaron en el modelo como REF1, REF2, REF3, REF4, REF5 y REF6 respectivamente. Adicionalmente se involucraron las variables ***(m)**,* la cual representa el nivel de renta de los individuos, que en nuestro modelo, representa el cupo que tiene asignado el vendedor directo; ***(DS)*** el cual hace parte de su restricción de presupuesto.

Además, se introduce una variable de control ***(s)*** conocida con el nombre de ahorra, la cual muestra la diferencia entre el dinero que paga el vendedor directo por el producto individual y el dinero que paga por el producto empaquetado. Su periodicidad es mensual, y comprenden información desde junio del año 2015 hasta abril del año 2016. Para llevar a cabo el análisis, utilizamos el método de Mínimos cuadrados Generalizados (MCG) o *Generalized Least Squares* (GLS) por sus siglas en inglés.

Veamos el modelo de una manera detallada, la primera ecuación a estimar es la siguiente:

$$\boldsymbol{Upr_i = \beta_1 m + \sum_{i=1}^{6} \gamma_i\, REF_i * Px_2 + \alpha_1 Paq * s + \varepsilon_i}$$

Tabla 1. Primera ecuación a estimar.

Errores estándar entre paréntesis.

Niveles de significancia: 1% (*), 5% (**) y 10% (***)

Variable:UPR	Coefficient
LN(m)	0,009*
	-0,001
paq*s	0,0115**
	(0,005)
REF1*Px_2	-0,0035**
	(0,0016)
REF2*Px_2	-0,0034**
	(0,0017)
REF3*Px_2	0,00142
	(0,001)
REF4*Px_2	-0,00012
	(0,0021)
REF5*Px_2	-0,00012
	(0,0021)
REF6*Px_2	0,00012
	(0,0014)
R-squared	0,733
S,E, of regression	0,045
White(5)	4,5546
Golfeld y Quand	0,9443
Breusch – Pagan - Godfrey	2,0287
Durbin-Watson stat	1,95
Rho	0,025

La segunda ecuación a estimar es la siguiente:

$$\boldsymbol{Upr_i}^* = \boldsymbol{\alpha_0} + \boldsymbol{\alpha_1}\mathbf{ln}(\boldsymbol{PI}) + \boldsymbol{\alpha_2}\mathbf{ln}(\mathbf{Px_2}) + \boldsymbol{\delta_2 D1} * \mathbf{ln}(\mathbf{Px_2}) + \boldsymbol{\varepsilon_i}$$, donde

PI = Es el logaritmo del precio individual del producto

Px_2 =Es el precio del producto que está empaquetado

$D1 =$ Es una variable dummy que toma valores de 1 si el precio del producto empaquetado sufre incrementos en el precio, respecto al precio base (Primera vez que se hizo la oferta del paquete).

$\delta_2 =$ Es una variable que Muestra la interacción entre los incrementos en los precios empaquetados y los precios empaquetados, a priori esperamos que $\delta_2 > 0$, lo que indica que cuando los precios de los paquetes se incrementan, la demanda del producto a precio individual también se incrementa.

Tabla 2. Segunda ecuación a estimar

Variable:UPR*	Coefficient
Cons	0,006*
	(0,0028)
$\ln(PI)$	-0,051**
	(0,0265)
$\ln(Px_2)$	0,0039*
	(0,0011)
$D1 * \ln(Px_2)$	0,0017*
	(0,0007)
R-squared	0,512
S,E, of regression	0.0080
Durbin-Watson stat	1,798
Rho	0,101

La realización de cada parámetro estimado genero una distribución empírica al representarse en histogramas de frecuencias. Los estadísticos t-student para los coeficientes del modelo, resulto siempre significativa mediante MCG, los intervalos de confianza al 95% para el contraste de las hipótesis nula en los parámetros resulto con probabilidades bajas. Con estos intervalos se rechazó cada una de las hipótesis nulas en las ecuaciones, en general los coeficientes que se hallaron fueron significativos.

1. PROBLEMA PRIMAL

1.1 CARACTERIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Vamos a suponer una función que permita medir la satisfacción o utilidad de un individuo en términos cardinales por el consumo de dos bienes (x_1) y (x_2), de la forma $U = U(x_1, x_2)$. Nótese que por simplicidad trabajamos únicamente con dos bienes, pero en términos generales la función de utilidad puede ser definida para el caso de (n) bienes, como sigue $U = U(x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots, x_n)$, o simplemente como $U = U(\boldsymbol{x})$, donde $\boldsymbol{x}$ es un vector n-dimensional.

En primer lugar antes de definir el problema al cual se enfrenta el individuo, consideremos aquellas características que deben tener las funciones de utilidad, de acuerdo con Jehle y Reny (2011).

Definición: Una función de utilidad representa la relación de preferencia ($\gtrsim$ $Al\, menos \tan buena\, como$ ...), mediante una función de valor real $U: \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual es llamada función de utilidad *si para todo* $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}^n_+$,
$u(\boldsymbol{x}^0) \geq u(\boldsymbol{x}^1) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^0 \gtrsim \boldsymbol{x}^1$

Teorema 1: Existe una función que representa la relación de preferencia$\succcurlyeq$. Si la relación binaria$\succcurlyeq$, es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona. Existe entonces, una función real y continua $U: \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, que representa $\succcurlyeq$.

1.2 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Teorema 2: Propiedades de la función de utilidad: Como $\succcurlyeq$ es representada por $U: \mathbb{R}_{+}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

1. $U(\boldsymbol{x})$ es estrictamente creciente sí y solo sí $\gtrsim$ es estrictamente monótona.

2. $U(\boldsymbol{x})$ es cuasi-cóncava sí y solo sí $\gtrsim$ es convexa. Es decir, el orden establecido mediante $\gtrsim$ es convexo.

3. $U(\boldsymbol{x})$ es estrictamente cuasi-cóncava sí y solo sí $\gtrsim$ es estrictamente convexa.

Supuesto 1: Las preferencias del consumidor son completas, transitivas, continuas, estrictamente monótonas y estrictamente convexas en $\mathbb{R}_{+}^{N}$. Sin embargo, por el Teorema 1 y 2, esta puede ser representada por una función de utilidad real U, que es continua, estrictamente creciente y estrictamente cuasi cóncava en $\mathbb{R}_{+}^{N}$.

Después de haber definido estas propiedades o características de la relación de preferencia y de las funciones de utilidad, vamos a suponer una función (Función de utilidad) que permita medir la satisfacción, bienestar o utilidad de un individuo por el consumo de dos bienes (Por simplicidad (x_1, x_2)) en términos cardinales. Esta función es de la forma $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, con un parte lineal en x_2 y la otra parte es una función que depende de x_1 , con $\frac{dv(x_1, x_2)}{dx_1} > 0$ y $\frac{d^2v(x_1,x_2)}{dx_1^2} < 0$.

Puede suceder lo contrario, es decir: $U(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$ la parte lineal está en x_1 y la función depende de x_2 con $\frac{dv(x_1, x_2)}{dx_2} > 0$ y $\frac{d^2v(x_1,x_2)}{dx_2^2} < 0$.

Inicialmente supondremos una función de la forma $U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, en términos específicos y bien definida, de acuerdo con las condiciones, la función a considerar será $U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$.

Sea $U: \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$. Observamos que la función así definida es continua en su dominio. Ahora probemos que cumple con las condiciones definidas en el **Teorema 2**, veamos:

1. Una función *f* es estrictamente creciente si $f(\boldsymbol{x}^0) > f(\boldsymbol{x}^1)$, cuando $\boldsymbol{x}^0$ y $\boldsymbol{x}^1$ son distintos y $\boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{x}^1$.

   En términos generales, sea $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ y $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$, además se tiene que $\boldsymbol{x}^0 \geq \boldsymbol{x}^1$, luego se tiene $U(x^0) = Ln(x_1^0) + x_2^0$ y $U(x^1) = Ln(x_1^1) + x_2^1$, es claro que para este tipo de función propuesta se cumple $U(x^0) > U(x^1)$.

   Para ejemplificar, supongamos $\boldsymbol{x}^0 = (2,2) \quad y \quad \boldsymbol{x}^1 = (1,1)$
   $U(\boldsymbol{x}^0) = Ln(2) + 2 = 2{,}69$
   $U(\boldsymbol{x}^1) = Ln(1) + 1 = 1$
   $U(\boldsymbol{x}^0) > U(\boldsymbol{x}^1)$, luego

   La función de utilidad es estrictamente creciente.

2. Una función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, es estrictamente cuasi-cóncava si, para todo $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$ en D, $f(\boldsymbol{x}^t) > min[f(\boldsymbol{x}^1), f(\boldsymbol{x}^2)]$ para todo $t \in (0,1)$.
   $U: \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$

Sean,

$\boldsymbol{x}^1 = (2{,}4)$

$\boldsymbol{x}^2 = (3{,}6)$ Además supongamos que $t = 0{,}5$

$\boldsymbol{x}^t = t\boldsymbol{x}^1 + (1-t)\boldsymbol{x}^2$

Veamos,

$U(\boldsymbol{x}^1) = Ln(2) + 4 \approx 4{,}693$

$U(\boldsymbol{x}^2) = Ln(3) + 6 \approx 7{,}098$

$\boldsymbol{x}^{1t} = 0{,}5(2) + (1-0{,}5)(4) = 3$

$\boldsymbol{x}^{2t} = 0{,}5(3) + (1-0{,}5)(6) = 4{,}5$

$\boldsymbol{x}^t = (3\,, 4.5)$

$U(\boldsymbol{x}^t) = Ln(3) + 4{,}5$

$U(\boldsymbol{x}^t) = 5{,}598$

$U(\boldsymbol{x}^t) \quad min[U(\boldsymbol{x}^1), U(\boldsymbol{x}^2)]$

$5{,}598 \quad min[4.693\,, 7.098]$

$5{,}598 > 4{,}693$

La función de utilidad es estrictamente cuasi-cóncava.

1.3 MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD

En este caso, el individuo racional se enfrenta al típico problema de maximización de la utilidad, restringido a su presupuesto, el cual adopta la forma:

$\text{Maximizar} \;\; U(x_1\,, x_2) = \ln(x_1) + x_2$

$Sujeto\ a\;\; m = p_1x_1 + p_2x_2$

Resolviendo este problema de optimización restringida, utilizando el concepto de multiplicadores de Lagrange, se obtiene:

$$\mathcal{L}(x_1\,, x_2\,, \lambda) = \ln(x_1) + x_2 + \lambda[m - p_1x_1 - p_2x_2]$$

$$\mathcal{L}(x_1\,, x_2\,, \lambda) = \ln(x_1) + x_2 + \lambda m - \lambda p_1x_1 - \lambda p_2x_2$$

Cuyas condiciones de primer orden (F.O.C) son:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x_1\,, x_2\,, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x_1\,, x_2\,, \lambda)}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \qquad (\mathbf{2})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x_1\,, x_2\,, \lambda)}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0\,, luego \;\leftrightarrow\; m = p_1x_1 + p_2x_2 \qquad (\mathbf{3})$$

Despejando e igualando $\lambda\ en\ (\mathbf{1})\ y\ en\ (\mathbf{2})$

$$\lambda = \frac{1}{p_1x_1} \qquad y \qquad \lambda = \frac{1}{p_1} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{1}{p_1x_1} = \frac{1}{p_2}$$

En este tipo de problemas definimos al parámetro λ, como el precio sombra, el cual muestra simplemente cómo cambia el valor óptimo de la función objetivo, en este caso la función de utilidad, cuando varía la renta del individuo. Si la renta de los individuos aumenta, el valor de la función objetivo aumenta aproximadamente en $\frac{1}{p_1x_1}$.

Al despejar obtenemos la demanda Marshalliana del bien (1), la cual para esta función de utilidad es muy particular, pues no depende del nivel de renta del consumidor.

$$\boxed{x_1(m\,,p_1\,,p_2)=\frac{p_2}{p_1}}$$

Sustituyendo en la ecuación (**3**), se obtiene:

$$m=p_1\left[\frac{p_2}{p_1}\right]+p_2x_2$$

$\boxed{x_2(m\,,p_1\,,p_2)=\frac{m-p_2}{p_2}}$ Demanda Marshalliana del bien (2).

Evaluando en la función de utilidad:

$$U(x_1\,,x_2)=Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)+\frac{m-p_2}{p_2}$$

$$\mathbb{V}(m\,,p_1\,,p_2)=max\;U(x_1\,,x_2)=Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)+\frac{m-p_2}{p_2}$$

$\boxed{\mathbb{V}(m\,,p_1\,,p_2)=Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)+\frac{m-p_2}{p_2}}$ Función Indirecta de Utilidad

1.4 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD

1.4.1 Función Indirecta de Utilidad

$$\mathbb{V}(p_1,p_2,m)=Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)+\frac{m-p_2}{p_2}$$

1) Dado que $U(x)$, es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+^N$, entonces, $\mathbb{V}(p_1,p_2,m)$ es continua en $\mathbb{R}_{++}^N\longrightarrow\mathbb{R}_+$.

2) Homogénea de grado cero. $\lambda > 0$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = Ln\left(\frac{\lambda p_2}{\lambda p_1}\right) + \frac{(\lambda m) - (\lambda p_2)}{(\lambda p_2)}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \frac{\lambda p_2 Ln(\lambda p_2) - \lambda p_2 Ln(\lambda p_1) + \lambda m - \lambda p_2}{\lambda p_2}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \frac{\lambda\{[p_2 Ln\lambda + p_2 Lnp_2 - p_2 Ln\lambda - p_2 Lnp_1] + m - p_2\}}{\lambda p_2}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \frac{\lambda\{[p_2 Lnp_2 - p_2 Lnp_1] + m - p_2\}}{\lambda p_2}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \lambda^0 \left\{\frac{p_2(Lnp2 - Lnp1) + m - p_2}{p_2}\right\}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \lambda^0 \left\{\frac{p_2(Lnp2 - Lnp1)}{p_2} + \frac{m - p_2}{p_2}\right\}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \lambda^0 \left\{Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}\right\}$$

$$\mathbb{V}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda m) = \lambda^0[\mathbb{V}(p_1, p_2, m)]$$

La Función es homogénea de grado cero (0)

3) Estrictamente creciente en (m)

$$\mathbb{V}(p_1, p_2, m) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}$$

$$\frac{\partial\, \mathbb{V}(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{1}{p_2} > 0$$

La función indirecta de utilidad es estrictamente creciente con respecto a la renta. Para ejemplificar tenemos:

$m^0 = 100$

$m^1 = 80$

$$\mathbb{V}(1,1,m^0) = Ln(1) + \frac{100-1}{1} = 99$$
$$\mathbb{V}(1,1,m^1) = Ln(1) + \frac{80-1}{1} = 79$$
$$m^0 \geq m$$
$$\mathbb{V}(1,1,m^0) > \mathbb{V}(1,1,m^1)$$

La función es estrictamente creciente en m.

4) Decreciente en $\boldsymbol{P}$.

$$\mathbb{V}(p_1,p_2,m) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m-p_2}{p_2}$$
$$\frac{\partial\mathbb{V}(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} = -\frac{1}{p_1} < 0$$
$$\frac{\partial\,\mathbb{V}(p_1,p_2,m)}{\partial p_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{m}{{p_2}^2} \leq 0$$
$$\frac{1}{p_2} = \frac{m}{{p_2}^2}$$
$$1 = \frac{m}{p_2}$$
$$m = p_2$$

En el caso en el que sería igual a cero. No es estrictamente decreciente en p_2.

5) Cuasi-convexa en $(\boldsymbol{P}, m)$. Una función $f: D \to \mathbb{R}$, es cuasi-convexa si para todo x^1, x^2 en D. $f(x^t) \leq max[f(x^1), f(x^2)]$, para todo $t \in [0,1]$.

Entonces,

$$\mathbb{V}(p^t, m^t) \leq max[\mathbb{V}(p^1, x^1), \mathbb{V}(p^2, m^2)]$$

$$\mathbb{V}(p_1, p_2, m) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}$$

Función indirecta de utilidad.

Para ejemplificar se tiene que:

$$\mathbb{V}(p^1, m^1) = \mathbb{V}(2{,}2{,}20) = Ln\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{20 - 2}{2} = 9$$

$$\mathbb{V}(p^2, m^2) = \mathbb{V}(4{,}4{,}50) = Ln\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{50 - 4}{4} = 11{,}5$$

$$p^t = tp^1 + (1 - t)p^2$$

$$m^t = tm^1 + (1 - t)m^2$$

Supongamos $t = 0{,}7$

$$m^t = 0{,}7(20) + (1 - 0{,}7)50$$

$$m^t = 29$$

$$p^t = 0{,}7\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + (1 - 0{,}7)\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}4\\1{,}4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1{,}2\\1{,}2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2{,}6\\2{,}6\end{bmatrix}$$

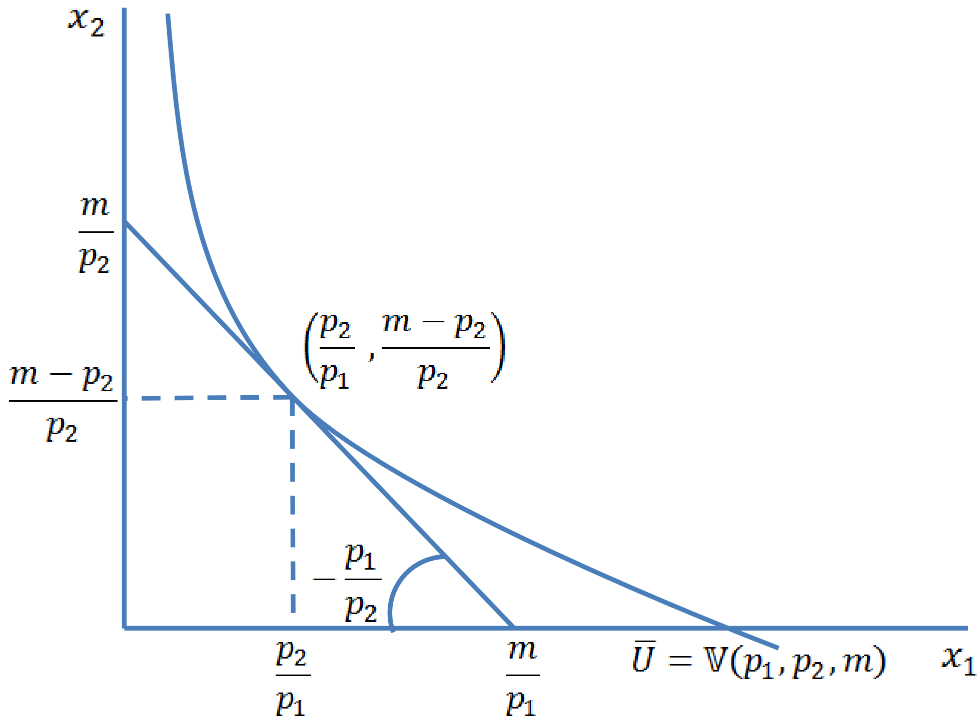
$$\mathbb{V}(p^t, m^t) = Ln\left(\frac{2{,}6}{2{,}6}\right) + \frac{29 - 2{,}6}{2{,}6} = 10{,}1538$$

$$\mathbb{V}(p^t, m^t) \leq max[\mathbb{V}(p^1, m^1), \mathbb{V}(p^2, m^2)]$$

$$10{,}1538 \leq max[9\ ,\ \ 11.5]$$

La función es cuasi convexa en $(\boldsymbol{P}, m)$

Gráfico 1. Equilibrio del consumidor



Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 1, se presenta el equilibrio del consumidor, que muestra la combinación de bienes 1 y 2 que maximizan la utilidad del individuo, agotando toda su renta. De esta manera:

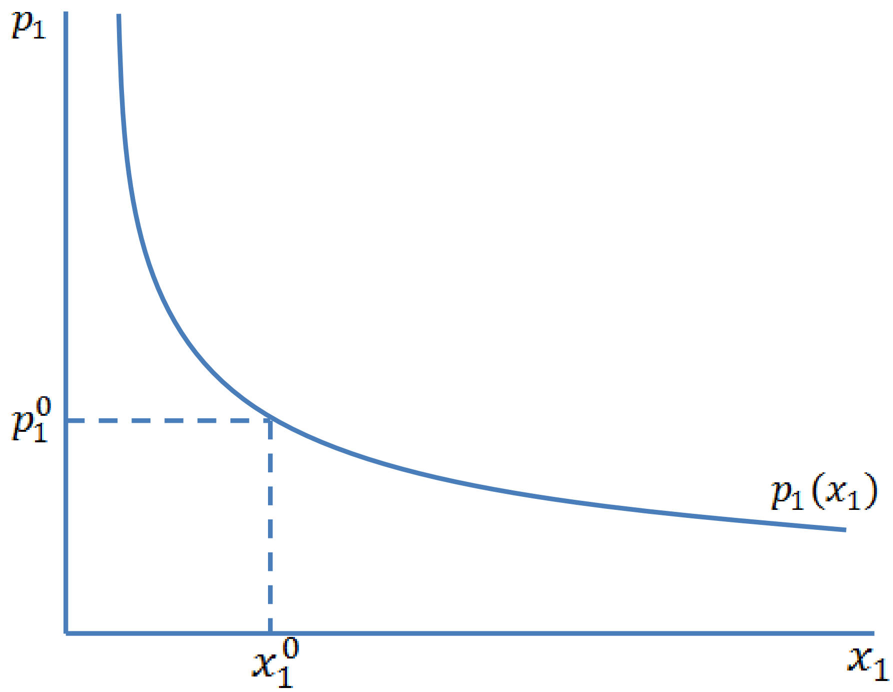
$$m = p_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + p_2\left(\frac{m-p_2}{p_2}\right)$$

$$m = p_2 + m - p_2$$

$$m = m\,, el\ individuo\ agota\ toda\ su\ renta$$

$$Consumiendo\ la\ cesta\ \ \ ptima, \quad x_1(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{p_2}{p_1} \quad y \quad x_2(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{m-p_2}{p_2}$$

Gráfico 2. Demanda Marshalliana del bien 1



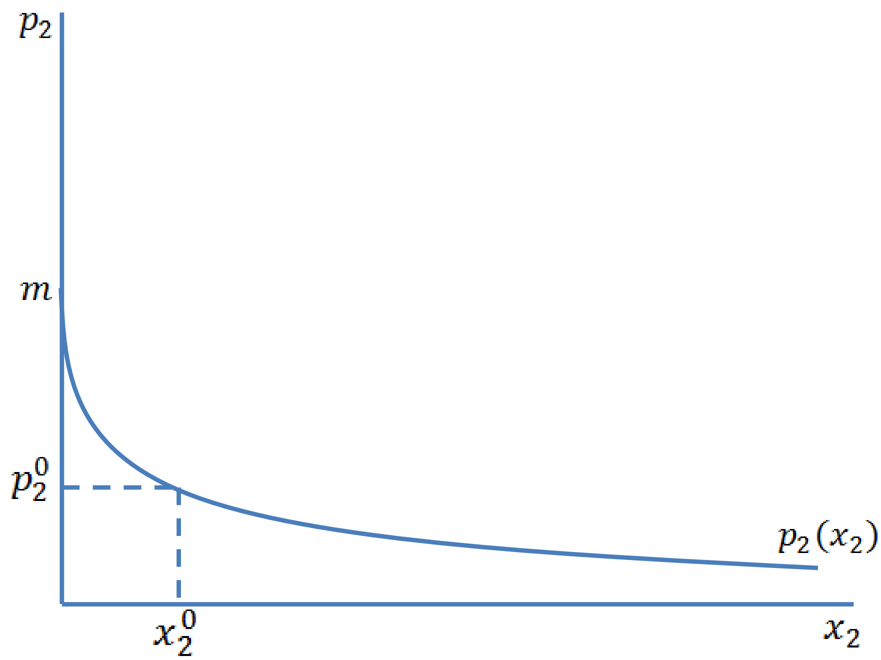
Fuente: Elaboración propia.

$$x_1(m\ ,p_1\ ,p_2) = \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_1(x_1) = \frac{p_2}{x_1}$$

Función inversa de demanda del bien 1.

Gráfico 3. Demanda Marshalliana del bien 2



Fuente: Elaboración propia.

$$x_2(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{m - p_2}{p_2}$$

$$p_2(x_2) = \frac{m}{x_2 + 1}$$

Función inversa de demanda del bien 2.

Tasas de variación correspondientes a las funciones de demanda

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{p_2}{p_1^2} \;\; < 0}$$

En términos generales, la demanda del bien 1 muestra que dicho bien es ordinario; es decir, se comporta de acuerdo a la ley de la demanda, cuando su precio aumenta, las cantidades demandadas disminuyen.

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial m} = 0}$$

En este caso en particular, la tasa de variación de la demanda del bien 1 con respecto a la renta es igual a cero, lo cual indica que la demanda de este bien es un poco atípica, pues no depende de los niveles de renta del individuo. Imagine el lector un manzano plantado en un terreno baldío, del cual cualquier individuo puede tomar de sus frutos sin ninguna restricción acerca de su presupuesto.

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{1}{p_1} \;\; > 0}$$

La demanda del bien 1 aumentará a medida que el precio del bien 2 aumenta, mostrando una relación de sustituibilidad entre los dos bienes.

$$\frac{\partial x_2}{p_2} = \frac{(p_2)(-1) - (m - p_2)(1)}{p_2^2}$$

$$\frac{\partial x_2}{p_2} = \frac{-p_2 - m + p_2}{p_2^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial x_2}{p_2} = -\frac{m}{p_2^2} < 0}$$

El bien 2 se considera un bien ordinario con respecto a su precio; es decir, a medida que el precio propio del bien aumenta, las cantidades demandadas disminuyen.

$$\frac{\partial x_2}{m} = \frac{(p_2)(1) - (m - p_2)(0)}{p_2^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial x_2}{m} = \frac{1}{p_2} > 0}$$

El bien x_2 es un bien normal, con respecto a la renta. Cuando la renta aumenta las cantidades demandadas del bien 2 aumentan.

$$\boxed{\frac{\partial x_2}{p_1} = 0}$$

Las cantidades demandadas del bien 2, no responden a cambios en el precio del bien 1. En este sentido, no existe relación alguna entre la demanda del bien 2 y el precio del bien 1.

1.5 ELASTICIDADES

1.5.1 Elasticidad precio de la demanda

$$\mathcal{E}_{x_1,p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1}$$

$$\mathcal{E}_{x_1,p_1} = \left(-\frac{p_2}{p_1^2}\right)\left(\frac{\frac{p_1}{1}}{\frac{p_2}{p_1}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{x_1,p_1} = \left(-\frac{p_2}{p_1^2}\right)\left(\frac{p_1^2}{p_2}\right)$$

$\boxed{\mathcal{E}_{x_1,p_1} = -1}$ Demanda de elasticidad unitaria, una variación porcentual del precio propio del bien, provoca una disminución de las cantidades demandadas en el mismo porcentaje.

1.5.2 Elasticidad ingreso de la demanda

$$\mathcal{E}_{x_1,m} = (0)\left(\frac{m}{\frac{p_2}{p_1}}\right)$$

$\boxed{\mathcal{E}_{x_1,m} = 0}$ Las cantidades demandadas del bien 1 son independientes del nivel de renta del individuo.

1.5.3 Elasticidad cruzada

$$\mathcal{E}_{x_1,p_2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1}$$

$$\mathcal{E}_{x_1,p_2} = \left(\frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{\frac{p_2}{1}}{\frac{p_2}{p_1}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{x_1,p_2} = \left(\frac{1}{p_1}\right)\left(\frac{p_2 p_1}{p_2}\right)$$

$\boxed{\mathcal{E}_{x_1,p_2} = 1}$ Un aumento en el precio del bien 2, provoca un aumento en las cantidades demandadas del bien 1. Por ejemplo, si el precio del bien 2 se incrementa en 20%, las cantidades demandadas del bien 1, se incrementarán en la misma proporción (Sustituibilidad).

$$\mathcal{E}_{x_2,p_2} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2}$$

$$\mathcal{E}_{x_2,p_2} = \left(-\frac{m}{p_2^2}\right)\left(\frac{\frac{p_2}{1}}{\frac{m-p_2}{p_2}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{x_2,p_2} = \left(-\frac{m}{p_2^2}\right)\left(\frac{p_2^2}{m-p_2}\right)$$

$$\mathcal{E}_{x_2,p_2} = -\frac{m}{m-p_2}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{x_2,p_2} = \left|-\frac{m}{m-p_2}\right| > 1}$$

La demanda del bien 2 es elástica, es decir es muy sensible a las variaciones del precio propio. Si por ejemplo, el precio del bien aumenta en 25%, las cantidades demandadas del bien podrían disminuir en 50%. Esto, finalmente, va a depender de la diferencia entre la renta del individuo y el precio del bien 2.

$$\mathcal{E}_{x_2,m} = \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{m}{x_2}$$

$$\mathcal{E}_{x_2,m} = \left(\frac{1}{p_2}\right)\left(\frac{\frac{m}{1}}{\frac{m-p_2}{p_2}}\right)$$

$$\mathcal{E}_{x_2,m} = \left(\frac{1}{p_2}\right)\left(\frac{mp_2}{m-p_2}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{x_2,m} = \frac{m}{m-p_2} > 0}$$

La demanda del bien 2, muestra una relación directa con la renta del individuo, es decir, afirmamos que el bien 2 es un bien normal con respecto a la renta. Si aumenta la renta aumentan las cantidades demandadas de dicho bien.

$$\mathcal{E}_{x_2,p_1} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2}$$

$$\mathcal{E}_{x_2,p_1} = (0)\left(\frac{p_1}{\frac{m-p_2}{p_2}}\right)$$

$\boxed{\mathcal{E}_{x_2,p_1} = 0}$ Las cantidades demandadas del bien 2, no presentan sensibilidad alguna ante variaciones en el precio del bien 1. Existe una relación de independencia entre las dos variables.

1.6 CURVAS DE OFERTA-PRECIO, OFERTA RENTA Y CURVAS DE ENGEL

$$x_1{}^m = \frac{p_2}{p_1} \qquad y \qquad x_2{}^m = \frac{m-p_2}{p_2}$$

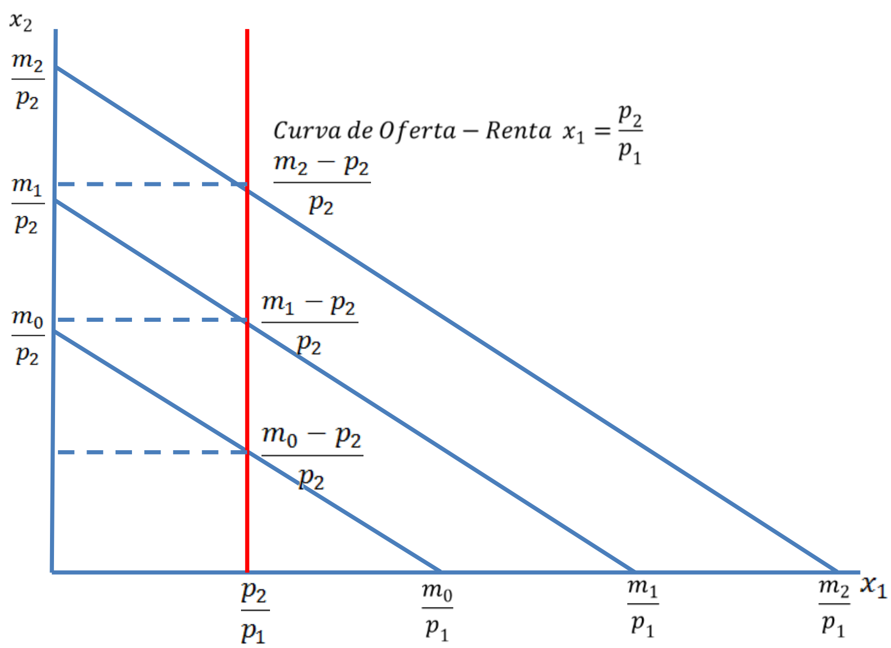
Vamos a suponer variaciones en el nivel de renta de los individuos y determinemos la curva de oferta-renta o ingreso-consumo. Es claro que solamente la demanda del bien 2 depende del nivel de renta. Veamos el comportamiento.

$$TMS = -\frac{p_1}{p_2} \qquad \longrightarrow \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{1}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{P2}{P1}}$$

Curva de oferta-renta o ingreso-consumo

Gráfico 4. Curva de Oferta Renta



Fuente: Elaboración propia.

A medida que la renta aumenta el individuo aumenta las cantidades demandadas o consumidas del bien 2 (el bien 2 es un bien normal), la cantidad consumida del bien 1 no varía, la demanda del bien 1 es independiente del nivel de renta.

1.6.1 Curvas de oferta - precio (ambos bienes)

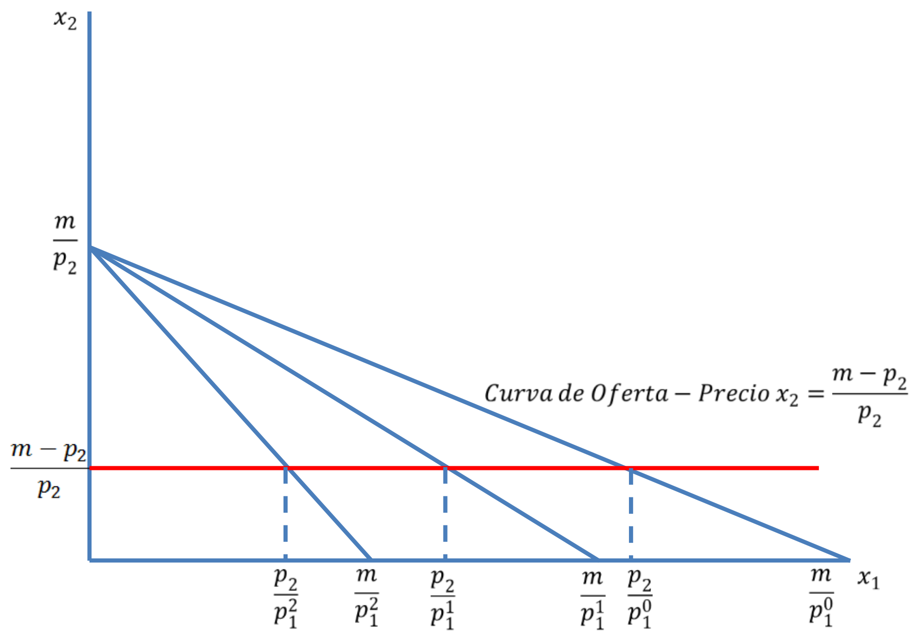
Si suponemos variaciones en el precio del bien 1, partiendo de las demandas Marshallianas tenemos:

$$x_1{}^M = \frac{p_2}{p_1} \qquad y \qquad x_2{}^M = \frac{m - p_2}{p_2}$$

En el Gráfico 9 se aprecia que la variación del precio del bien 1, no afecta a la demanda del bien 2, por esto su forma.

Gráfico 5. Curva de Oferta- Precio

(Variaciones en el precio del bien 1)



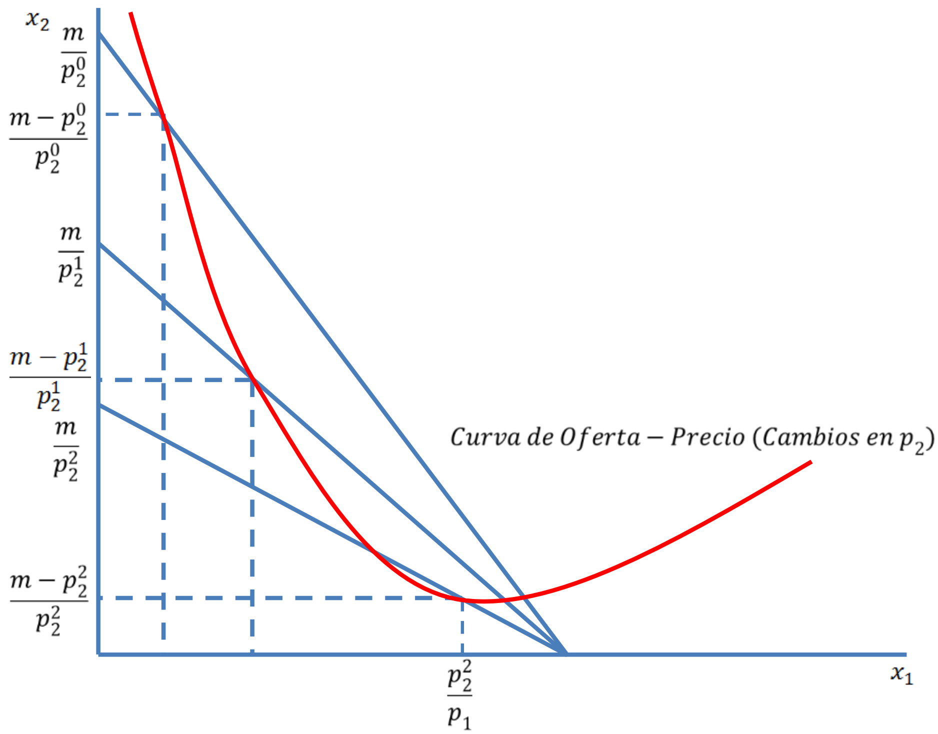
Fuente: Elaboración propia.

Vamos a suponer, entonces, variaciones en el precio del bien 2. En este caso específicamente la curva de oferta–precio, no es lineal como lo explican en la mayoría de los textos de microeconomía, de acuerdo con esto utilizaremos el método de Interpolación de Lagrange a partir de las cestas óptimas obtenidas después de llevar a cabo la modificación de precios.

$$x_1{}^m = \frac{p_2}{p_1} \qquad y \qquad x_2{}^m = \frac{m - p_2}{p_2}$$

Gráfico 6. Curva Oferta-Precio

(Variaciones en el precio del bien 2)



Fuente: Elaboración propia.

Polinomio interpolador de Lagrange

Resolviendo mediante el método de interpolación de Lagrange, se tiene:

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Nota: se utiliza esta notación por facilidad, entiéndase que las ordenadas $(y_{0,}y_1y_2)$ corresponden a las cantidades óptimas demandadas del bien (x_2), después de llevar a cabo las variaciones en el precio del bien 2. De la misma forma, las abscisas $(x_{0,}x_1x_2)$ corresponden a las cantidades óptimas demandas del bien 1.

Dados el cambio en los precios $({p_2}^0, {p_2}^1, {p_2}^2)$ tenemos las siguientes demandas óptimas.

$${x_1}^0 = \frac{{p_2}^0}{p_1} \quad ; \quad {x_1}^1 = \frac{{p_2}^1}{p_1} \quad ; \quad {x_1}^2 = \frac{{p_2}^2}{p_1}$$

$${x_2}^0 = \frac{m - {p_2}^0}{{p_2}^0} \quad ; \quad {x_2}^1 = \frac{m - {p_2}^1}{{p_2}^1} \quad ; \quad {x_2}^2 = \frac{m - {p_2}^2}{{p_2}^2}$$

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{m - {p_2}^0}{{p_2}^0} * \frac{\left[x - \left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right)\right]\left[x - \left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right)\right]}{\left[\left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right)\right]\left[\left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right)\right]} + \frac{m - {p_2}^1}{{p_2}^1} * \frac{\left[x - \left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right)\right]\left[x - \left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right)\right]}{\left[\left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right)\right]\left[\left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right)\right]} + \frac{m - {p_2}^2}{{p_2}^2} * \frac{\left[x - \left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right)\right]\left[x - \left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right)\right]}{\left[\left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^0}{p_1}\right)\right]\left[\left(\frac{{p_2}^2}{p_1}\right) - \left(\frac{{p_2}^1}{p_1}\right)\right]}$$

Simplificando,

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{m{p_1}^2x^2 - p_1mx[p_22^2 + {p_2}^1 + {p_2}^0] + {p_2}^2[{p_2}^1(m - {p_2}^0) + m{p_2}^0] + {p_2}^1m{p_2}^0}{{p_2}^0{p_2}^1{p_2}^2}$$

$$P'(\boldsymbol{x}) = \frac{\left[2m({p_1}^1)x - p_1m\left(({p_2}^2) + ({p_2}^1) + ({p_2}^0)\right)\right]}{({p_2}^0)({p_2}^1)({p_2}^2)} = 0$$

$$2m({p_1}^2)x = p_1m[({p_2}^2) + ({p_2}^1) + ({p_2}^0)]$$

$\boxed{x^* = \frac{{p_2}^2 + {p_2}^1 + {p_2}^0}{2p_1}}$ Este valor corresponde a la abscisa del punto mínimo de la curva de oferta-precio

1.6.2 Curvas de Engel

$$x_1{}^m = \frac{p_2}{p_1} \qquad y \qquad x_2{}^m = \frac{m - p_2}{p_2}$$

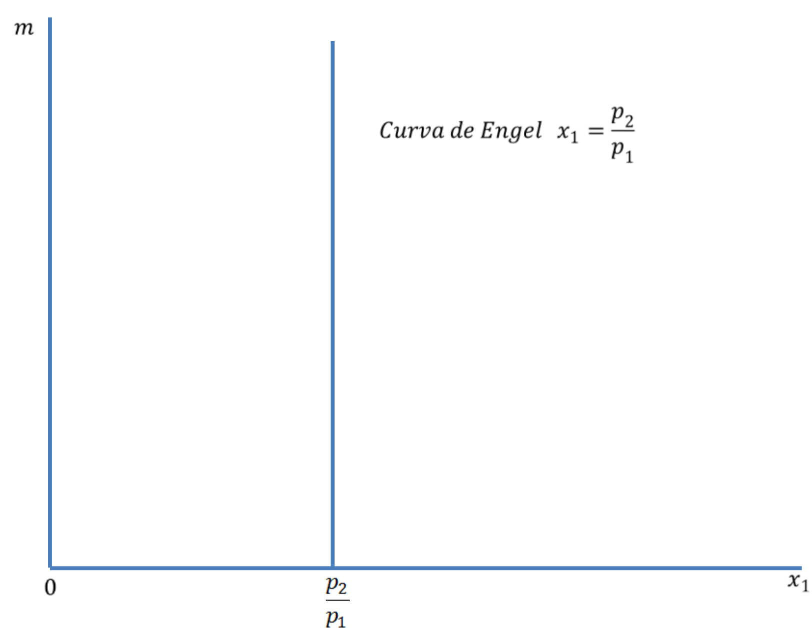
Despejando $x_2{}^m$:

$x_2{}^m = m - p_2$

$m = x_2{}^m p_2 + p_2$

$\boxed{m = p_2(x_2{}^m + 1)}$ $\quad Curva\ de\ Engel$

Gráfico 7. Curva de Engel del bien 1

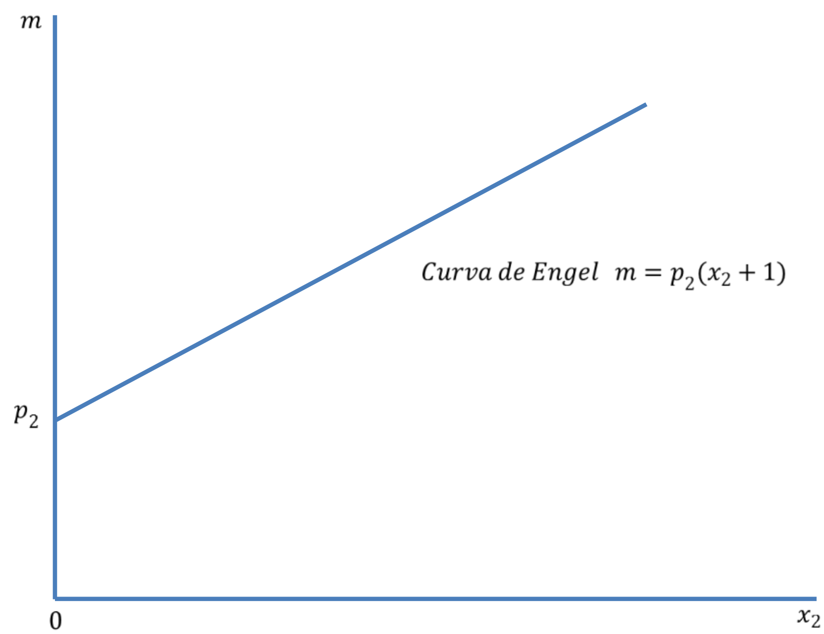


Fuente: Elaboración propia.

Es claro que la demanda del bien 1, no depende de la renta (no responde a las variaciones de la renta), dados los precios la demanda no cambia.

Así mismo, en el caso del bien 2, en el Gráfico 12 se puede ver que mientras la renta aumenta, las cantidades demandadas del bien 2 aumentan, por lo tanto. el bien 2 es un bien normal.

Gráfico 8. Curva de Engel del bien 2

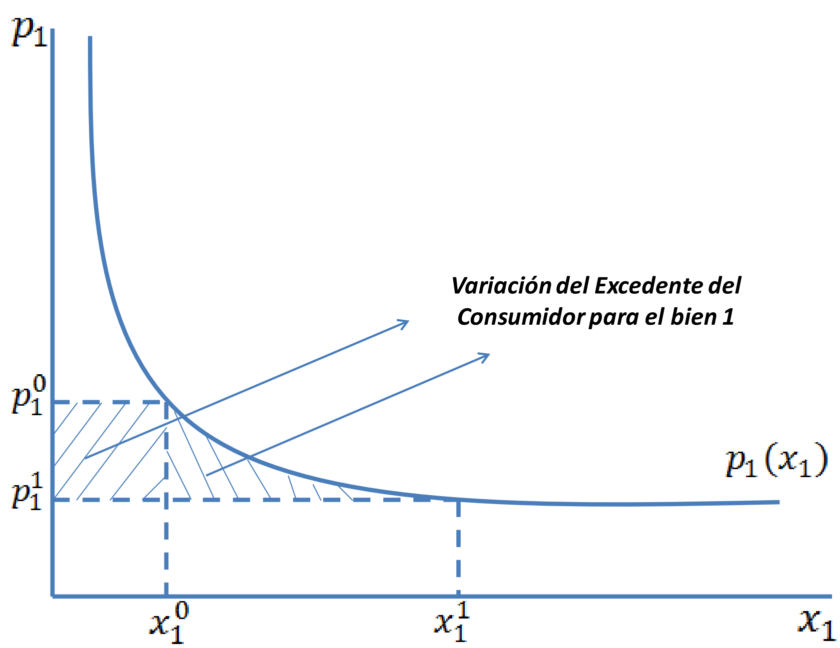


Fuente: Elaboración propia.

Excedente del consumidor

El excedente del consumidor es considerado como una buena medida del bienestar de los individuos; se define como la diferencia entre la disponibilidad a gastar por determinadas unidades de un bien o servicio y el gasto real en el cual incurre. De esta manera, entre mayor sea el excedente, los individuos podrán destinar los recursos disponibles a consumir otros bienes, lo cual aumentará su nivel de utilidad o satisfacción. En el caso del bien 1, tomemos su función inversa de demanda y analicemos; la demanda corresponde a $x_1(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{p_2}{p_1}$, reordenando y simplificando se obtiene $p_1 = \frac{p_2}{x_1}$, lo cual hace que el excedente del consumidor tienda a infinito y resulte mucho más práctico calcular la variación del mismo, cuando el precio del bien se modifica. Veamos:

Gráfico 9. Excedente del Consumidor bien 1



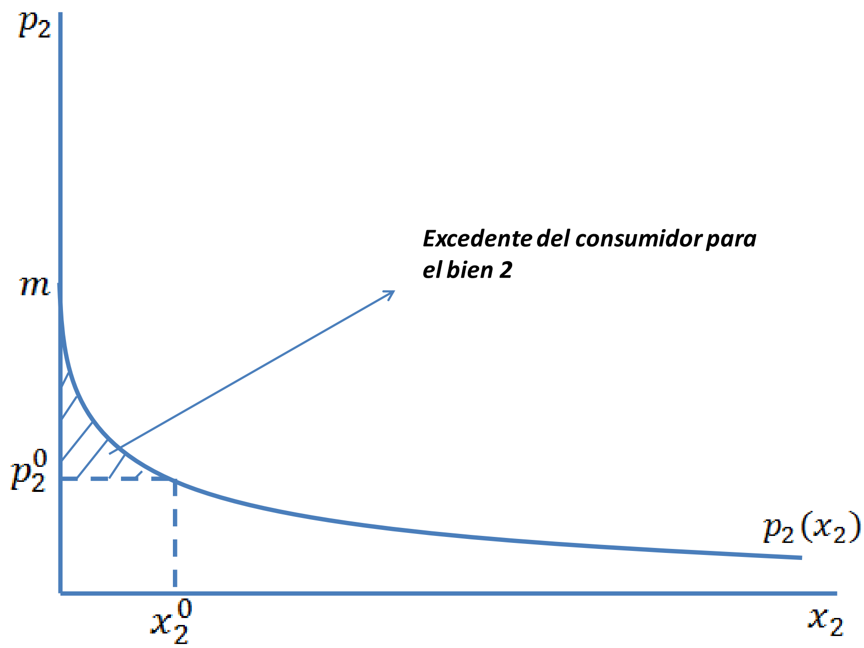
Fuente: Elaboración propia.

$$E.C_1 = x_1^0 * (p_1^0 - p_1^1) + p_2 \int_{x_1^0}^{x_1^1} \left[\frac{1}{x_1} - p_1^1\right] dx_1$$

Esta ecuación corresponde al cálculo del excedente del consumidor para la demanda del bien 1.

En el caso del bien 2, tenemos $x_2(m\,,p_1\,,p_2) = \frac{m-p_2}{p_2}$, reordenando y simplificando obtenemos $p_2 = \frac{m}{x_2+1}$, gráficamente tenemos:

Gráfico 10. Excedente del Consumidor bien 2



Fuente: Elaboración propia.

$E.C_2 = \int_0^{x_2^0}\left[\frac{m}{x_2+1} - p_2^0\right]dx_2$, esta expresión representa el excedente del individuo respecto del bien 2; entre mayor sea esta área, el individuo disfrutará de mayor bienestar.

1.7 VARIACIÓN COMPENSATORIA Y VARIACIÓN EQUIVALENTE

Estos conceptos nos permiten llevar a cabo un análisis monetario de la utilidad, es decir, es posible calcular ante la variación del precio de un bien, cuánto dinero adicional tendría que recibir el consumidor por parte del gobierno para disfrutar del mismo nivel de utilidad del que disfrutaba antes del cambio del precio (Variación compensatoria). Se busca eliminar el efecto del aumento del precio vía renta nominal.

En el caso de la variación equivalente resulta un poco más complicado de interpretar, ya que teóricamente establece que el individuo ante un aumento del precio de un bien, disfrutará un menor nivel de utilidad como consecuencia de una disminución en el poder adquisitivo, lo cual provoca que consuma menos unidades de por lo menos ese bien. Ahora, se asume que el individuo no necesitará un nivel de renta tan alto como el inicial para alcanzar un nuevo nivel de utilidad el cual es menor. El problema en la vida real tiene que ver con el hecho de que es prácticamente imposible que dado un aumento en el precio de un bien, a los individuos se les "sustraiga" una parte de su renta nominal, porque el nivel de utilidad a alcanzar ha disminuido.

$$U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$$

$$x_1{}^0 = \frac{p_2}{p_1} \qquad Y \qquad x_2{}^0 = \frac{m - p_2}{p_2}$$

A continuación, se desarrollará la explicación de ambas variaciones.

1.7.1 Variación compensatoria

Suponemos una variación (un aumento) del precio del bien 1.

Definiendo U^0, como el nivel de utilidad inicial, sin llevar a cabo la variación del precio.

$$U^0 = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}$$

Las demandas óptimas después de la variación del precio corresponden a:

$$x_1{}^1 = \frac{p_2}{p_1} \qquad Y \qquad x_2{}^1 = \frac{m - p_2}{p_2}$$

$$U^0 = Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^1}\right) + \frac{m^C - p_2}{p_2}$$

$$U^0 - Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^1}\right) = \frac{m^C - p_2}{p_2}$$

$$p_2 = \left[U^0 - Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^1}\right)\right] = m^C - p_2$$

$$\boxed{m^C = p_2\left[U^0 - Ln\left(\frac{p_2}{p_2{}^1}\right)\right] + p_2}$$

Este es el nivel de renta necesario para alcanzar la utilidad inicial con los precios nuevos.

1.7.2 Variación equivalente

Si no permitiésemos que el individuo se enfrente a los precios nuevos; es decir, si calculamos la utilidad después de la variación del precio, el individuo no necesitará tener un nivel de renta tan alto (pues no permitimos la variación del precio). Nos estamos adelantando a determinar un nivel de utilidad menor.

Las cestas iniciales son:

$$x_1{}^0 = \frac{p_2}{p_1} \qquad Y \qquad x_2{}^0 = \frac{m - p_2}{p_2}$$

Tenemos que: $p_1{}^0 < p_1{}^1$ y $U^0 > U^1$

Las cestas finales son:

$$x_1{}^1 = \frac{p_2}{p_1} \qquad Y \qquad x_2{}^1 = \frac{m - p_2}{p_2}$$

Utilidad asociada a las cestas finales:

$$U^1 = Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^0}\right) + \frac{m^E - p_2}{p_2}$$

$$U^1 - Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^0}\right) = \frac{m^E - p_2}{p_2}$$

$$p_2\left[U^1 - Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^0}\right)\right] = m^E - p_2$$

$$\boxed{m^E = p_2\left[U^1 - Ln\left(\frac{p_2}{p_1{}^0}\right)\right] + p_2}$$

Este es el nivel de renta necesario para alcanzar la utilidad final con los precios iniciales.

1.8 EFECTO SUSTITUCIÓN Y RENTA DE SLUTSKY

Problema inicial:

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^0 = p_1{}^0 x_1 + p_2{}^0 x_2$ (Recta inicial)
Cuyas demandas corresponden a:

$$x_1{}^m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^0} \qquad Y \qquad x_2{}^m = \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$$

Ahora supongamos que el precio del bien 1 cambia (aumenta) y pasa a $p_1{}^1$, veamos la descomposición de esta variación del precio en los efectos sustitución y renta de Slutsky. El objetivo consiste en encontrar un nuevo nivel de renta m^1, dados los nuevos precios, que le permitan al individuo acceder a la cesta que inicialmente consumía; esto no quiere decir que el individuo elija esta cesta, pero si quisiera lo podría hacer dado su nuevo nivel de renta y, por ende, su poder adquisitivo. Veamos:

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^1 = p_1{}^1 x_1 + p_2{}^1 x_2$ (Recta de balance)
Cuyas demandas corresponden a:

$$x_1{}^m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^1} \qquad Y \qquad x_2{}^m = \frac{m^1 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$$

Esta nueva renta, se calcula de la siguiente forma:

$$\Delta m = x_1 (p_1{}^1 - p_1{}^0)$$

$$\Delta m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^0} (p_1{}^1 - p_1{}^0)$$

$$\Delta m = \frac{{p_2}^0 {p_1}^1}{{p_1}^0} - \frac{p_2 {p_1}^0}{{p_1}^0}$$

$$\Delta m = {p_2}^0 \left(\frac{{p_2}^1}{{p_1}^0} - 1\right)$$

$$m^1 = m^0 + \Delta m$$

$$m^1 = m^0 + {p_2}^0 \left(\frac{{p_2}^1}{{p_1}^0} - 1\right)$$

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^0 = {p_1}^1 x_1 + {p_2}^0 x_2$ (Recta final)

Cuyas demandas corresponden a:

$${x_1}^m = \frac{{p_2}^0}{{p_1}^1} \qquad Y \qquad {x_2}^m = \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$$

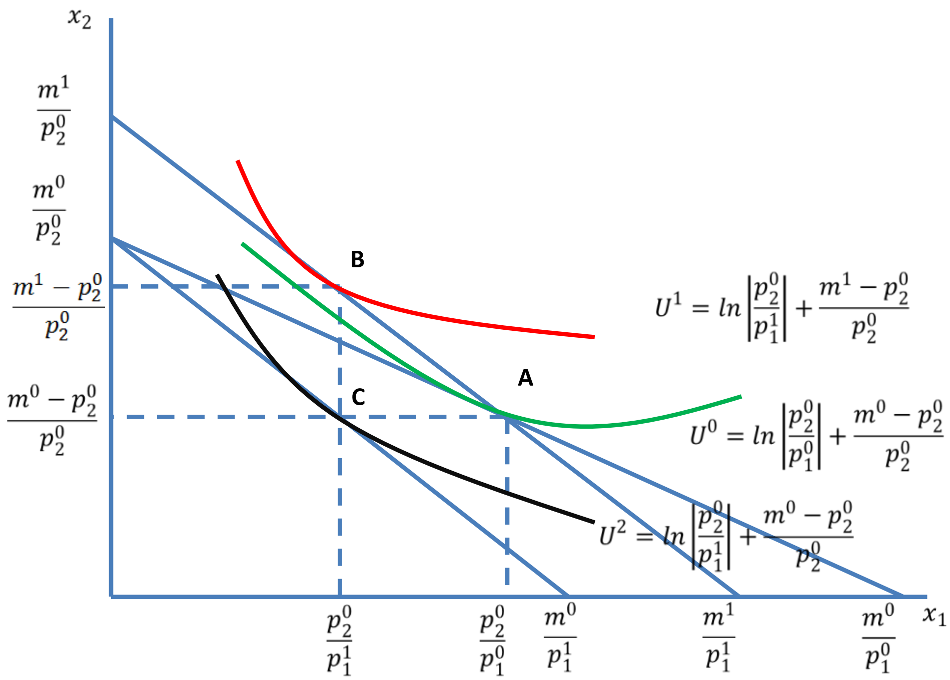
En la siguiente tabla se resumen los efectos:

Tabla 3. Resumen de los efectos sustitución y renta según Slutsky

$\boldsymbol{m = p_1 x_1 + p_2 x_2}$	$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}^{*})$	$\boldsymbol{U = ({x_1}^*, {x_2}^*)}$
$m^0 = {p_1}^0 x_1 + {p_2}^0 x_2$	$\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^0}, \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^0}\right) + \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$
$m^1 = {p_1}^1 x_1 + {p_2}^0 x_2$	$\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}, \frac{m^1 - {p_2}^0}{{p_2}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}\right) + \frac{m^1 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$
$m^0 = {p_1}^1 x_1 + {p_2}^0 x_2$	$\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}, \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}\right) + \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 11. Efecto sustitución y renta según Slutsky



Fuente: Elaboración propia.

Efecto sustitución:

$$\Delta x_1{}^S = x_1(p_1{}^1, p_2{}^0, m^1) - x_1(p_1{}^0, p_2{}^0, m^0)$$

$$\Delta x_1{}^S = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^1} - \frac{p_2{}^0}{p_1{}^0}$$

$$\Delta x_1{}^S = \frac{p_1{}^0 p_2{}^0 - p_1{}^1 p_2{}^0}{p_1{}^0 p_1{}^1}$$

$$\boxed{\Delta x_1{}^S = \frac{p_2{}^0(p_1{}^0 - p_1{}^1)}{p_1{}^0 p_1{}^1}}$$

En este caso en particular $p_1{}^1 > p_1{}^0$, por lo tanto, es fácil ver que el efecto sustitución es negativo; es decir, el individuo sustituye el consumo del bien 1, el cual se encareció por más unidades del bien 2 (efecto sustitución). El individuo se mueve del punto A hacia el punto B.

Efecto Renta:

$$\Delta x_1{}^m = x_1(p_1{}^1, p_2{}^0, m^0) - x_1(p_1{}^1, p_2{}^0, m^1)$$

$$\Delta x_1{}^m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^1} - \frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}$$

$$\boxed{\Delta x_1 = 0}$$

Para este ejercicio el efecto renta es nulo; es decir, toda la variación de la demanda del bien 1, está explicada por el efecto sustitución. De igual manera, podríamos haber calculado ambos efectos sustitución y renta para el bien 2, pero no resultan especialmente interesantes.

1.9 EFECTO SUSTITUCIÓN Y RENTA DE HICKS

Problema inicial:

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^0 = p_1{}^0 x_1 + p_2{}^0 x_2$ (Recta inicial)

Cuyas demandas corresponden a:

$$x_1{}^m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^0} \qquad Y \qquad x_2{}^m = \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$$

Y su utilidad máxima asociada está dada por:

$$U = Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^0}\right) + \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$$

De manera análoga a la descomposición que realizamos según Slutsky, supongamos que el precio del bien 1, cambia (aumenta). En este caso, el objetivo principal consiste en encontrar un nuevo nivel de renta m^1, que le permita al individuo obtener el mismo nivel de utilidad que obtenía dados los precios iniciales.

Es decir, después de la variación del precio del bien 1, el individuo con su recta de balance se ubicara sobre la misma curva de indiferencia; hallemos esta nueva renta. Veamos:

Problema inicial:

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^1 = {p_1}^1 x_1 + {p_2}^0 x_2$ (Recta de balance)

Calculemos la nueva renta m^1:

$$U = Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}\right) + \frac{m^1 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$$

$$U = Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^0}\right) + \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$$

$$Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^0}\right) + \frac{m^0 - {p_2}^0}{{p_2}^0} = Ln\left(\frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}\right) + \frac{m^1 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$$

$$Ln({p_2}^0) - Ln({p_1}^0) + \frac{m^0}{{p_2}^0} - 1 = Ln({p_2}^0) - Ln({p_1}^1) + \frac{m^1}{{p_2}^0} - 1$$

$$Ln\left(\frac{{p_1}^1}{{p_1}^0}\right) = \frac{m^1 - {p_2}^0}{{p_2}^0}$$

$$\boxed{{p_2}^0 Ln\left(\frac{{p_1}^1}{{p_1}^0}\right) + m^0 = m^1}$$

Evaluando tenemos que:

$$U = Ln\left(\frac{p_1{}^0}{p_1{}^1}\right) = \frac{m^1 - m^0}{p_2{}^0}$$

$$U = Ln\left(\frac{p_1{}^0}{p_1{}^1}\right) = \frac{p_2{}^0 Ln\left(\frac{p_1{}^1}{p_1{}^0}\right) + m^0 - m^0}{p_2{}^0}$$

$$U = Ln\left(\frac{p_1{}^0}{p_1{}^1}\right) + Ln\left(\frac{p_1{}^1}{p_1{}^0}\right) - 1 + \frac{m^0}{p_2{}^0}$$

$$U = Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}\right) = \frac{m^0}{p_2{}^0} - 1$$

$$\boxed{U = Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^0}\right) + \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}}$$

Dados los precios nuevos y la renta nueva, el individuo conserva el mismo nivel de utilidad (compensación).

Max $U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2$ sujeto a: $m^0 = p_1{}^1 x_1 + p_2{}^0 x_2$ (Recta final)

Cuyas demandas corresponden a:

$$x_1{}^m = \frac{p_2{}^0}{p_1{}^1} \qquad y \qquad x_2{}^m = \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$$

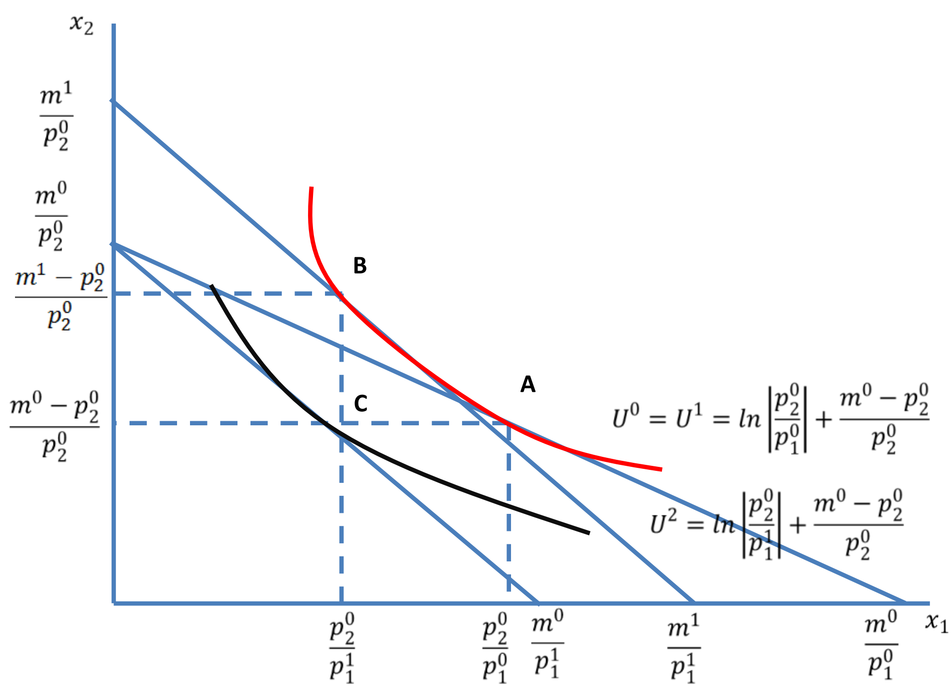
En la siguiente tabla se resumen los efectos:

Tabla 4. Resumen de los efectos sustitución y renta según Hicks

$m = p_1x_1 + p_2x_2$	$(x_1{}^*, x_2{}^{\ddot{}*})$	$U = (x_1{}^*, x_2{}^{\ddot{}*})$
$m^0 = p_1{}^0x_1 + p_2{}^0x_2$	$\left(\frac{p_2{}^0}{P1^0}, \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^0}\right) + \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$
$m^1 = p_1{}^1x_1 + p_2{}^0x_2$	$\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}, \frac{m^1 - p_2{}^0}{p_2{}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}\right) + \frac{m^1 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$
$m^0 = p_1{}^1x_1 + p_2{}^0x_2$	$\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}, \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}\right)$	$Ln\left(\frac{p_2{}^0}{p_1{}^1}\right) + \frac{m^0 - p_2{}^0}{p_2{}^0}$

Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 12. Efecto sustitución y renta de Hicks



Fuente: Elaboración propia.

Efecto sustitución:

$$\Delta {x_1}^S = x_1({p_1}^1, {p_2}^0, m^1) - x_1({p_1}^0, {p_2}^0, m^0)$$

$$\Delta {x_1}^S = \frac{{p_2}^0}{{p_1}^1} - \frac{{p_2}^0}{{p_1}^0}$$

$$\Delta {x_1}^S = \frac{{p_1}^0{p_2}^0 - {p_1}^1{p_2}^0}{{p_1}^0{p_1}^1}$$

$$\boxed{\Delta {x_1}^S = \frac{{p_2}^0({p_1}^0 - {p_1}^1)}{{p_1}^0{p_1}^1}}$$

(A-B)

Llegamos a la misma conclusión desde un punto de vista diferente: En este tipo de función de utilidad, los efectos sustitución de Slutsky y de Hicks son exactamente iguales.

Efecto Renta:

$$\Delta {x_1}^m = x_1({p_1}^1, {p_2}^0, m^0) - x_1({p_1}^1, {p_2}^0, m^1)$$

$$\Delta {x_1}^m = \frac{{p_2}^0}{{p_1}^1} - \frac{{p_2}^0}{{p_1}^1}$$

$$\boxed{\Delta x_1 = 0}$$

(B-C)

Nuevamente se refuerza el hecho de que el efecto renta sea igual a cero; toda la variación de las cantidades demandadas del bien 1, está explicada en su totalidad por el efecto sustitución.

La ecuación de Slutsky

$x(p_1, p_2, m)$ Es el sistema de demandas Marshallianas del consumidor. Sea U^* el nivel de utilidad que el consumidor alcanza con un ingreso m y precios $\boldsymbol{P}$,

Entonces:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(\boldsymbol{P}, m)}{\partial p_j}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^H(\boldsymbol{P}, \bar{U})}{\partial p_j}} - \underbrace{x_j(\boldsymbol{P}, m)\frac{\partial x_i(\boldsymbol{P}, m)}{\partial m}} \quad con \;\; i, j = 1,2, \dots, n.$$

Efecto total   Efecto sustitución   Efecto renta

De acuerdo con esta ecuación, es posible determinar en términos generales, cuáles son los cambios que sufren las cantidades demandadas de los bienes involucrados en el análisis, cuando cambian los precios, de hecho la ecuación permite llevar a cabo la descomposición del efecto total en la suma de los efectos sustitución y renta de una manera más sencilla. Para nuestro caso específico, veamos cómo funciona:

$$\boxed{x_1(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{p_2}{p_1}}$$

$$\boxed{x_2(m\,, p_1\,, p_2) = \frac{m - p_2}{p_2}}$$

$$\boxed{x_1(p_1, p_2, \bar{U}) \;\; = \frac{p_2}{p_1}}$$

$$\boxed{x_2(p_1, p_2, \bar{U}) \;\; = \bar{U} - Ln\left[\frac{p_2}{p_1}\right]}$$

$$\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P}, m)}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1^H(\boldsymbol{P}, \bar{U})}{\partial p_2} - \; x_2(\boldsymbol{P}, m)\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P}, m)}{\partial m}$$

$$\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{m-p_2}{p_2} * (0)$$
$$\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_2} = \frac{1}{p_1}$$

En el caso del bien 1, este sería el cambio de las cantidades demandadas del bien 1 ante variaciones en el precio del bien 2; es decir, el efecto total. Se observa claramente que el efecto renta en este caso es cero.

$$\frac{\partial x_2(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2^H(\boldsymbol{P},\overline{U})}{\partial p_1} - \ x_1(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_2(\boldsymbol{P},m)}{\partial m}$$
$$\frac{\partial x_2(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} * \frac{1}{p_2}$$
$$\frac{\partial x_2(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_1} = 0$$

En el caso del bien 2, el efecto total de las variaciones del precio del bien 1 sobre las cantidades demandadas del bien 2, es igual a cero. Una conclusión previamente obtenida, de acuerdo con la función de demanda del bien 2.

Matriz de Slutsky Semi-definida Negativa y Simétrica

$x(\boldsymbol{P},m)$, Es el sistema de demandas Marshallianas del consumidor. Definiendo los términos i,j de la matriz de Slutsky como:

$$\frac{\partial x_i(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_j} + \ x_j(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_i(\boldsymbol{P},m)}{\partial m}$$

Entonces, la forma entera $n \times n$ de la matriz de Slutsky compuesta por los efectos renta y sustitución es la siguiente:

$$S(\boldsymbol{P},m)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_1}+\ x_1(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial m} & \dots & \frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_n}+\ x_n(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_1(\boldsymbol{P},m)}{\partial m}\\ \downarrow & \dots & \downarrow \\ \frac{\partial x_n(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_1}+\ x_1(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_n(\boldsymbol{P},m)}{\partial m} & \dots & \frac{\partial x_n(\boldsymbol{P},m)}{\partial p_n}+\ x_n(\boldsymbol{P},m)\frac{\partial x_n(\boldsymbol{P},m)}{\partial m}\end{bmatrix}$$

Entonces $S(\boldsymbol{P},m)$ es simétrica y semidefinida negativa.

En nuestro caso, construyamos ahora la matriz de Slutsky a partir del sistema de demandas Marshallianas. Veamos:

$$x_1{}^M=\frac{p_2}{p_1}\ ;\ x_2{}^M=\frac{m-p_2}{p_2}$$

$$\frac{\partial x_1{}^M}{\partial p_1}=-\frac{p_2}{p_1{}^2};\qquad \frac{\partial x_1{}^M}{\partial p_2}=\frac{1}{p_1};\qquad \frac{\partial x_1{}^M}{\partial m}=0$$

$$\frac{\partial x_2{}^M}{\partial p_2}=-\frac{m}{p_2{}^2};\qquad \frac{\partial x_2{}^M}{\partial p_1}=0;\qquad \frac{\partial x_2{}^M}{\partial m}=\ \frac{1}{p_2}$$

Luego vemos que la matriz es simétrica

$$S(\boldsymbol{P},m)=\begin{bmatrix}-\frac{p_2}{p_1{}^2} & \frac{1}{p_1}\\ \frac{1}{p_1} & \frac{m-p_2(m+1)}{p_2{}^2}\end{bmatrix}$$

$$S^T(\boldsymbol{P},m)=\begin{bmatrix}-\frac{p_2}{p_1{}^2} & \frac{1}{p_1}\\ \frac{1}{p_1} & \frac{m-p_2(m+1)}{p_2{}^2}\end{bmatrix}$$

Luego, la matriz de Slutsky es simétrica

$S(\boldsymbol{P},m)=S^T(\boldsymbol{P},m)$

Ahora,

$$S(\boldsymbol{P},m)=\begin{bmatrix}-\frac{p_2}{{p_1}^2}+\frac{p_2}{p_1}(0) & \frac{1}{p_1}+\frac{m-p_2}{p_2}(0)\\ 0+\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{1}{p_2}\right) & -\frac{m}{p_2}+\frac{m-p_2}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}\right)\end{bmatrix}$$

$$S^T(\boldsymbol{P},m)=\begin{bmatrix}-\frac{p_2}{{p_1}^2} & \frac{1}{p_1}\\ \frac{1}{p_1} & \frac{m-p_2(m+1)}{{p_2}^2}\end{bmatrix}$$

Menores principales de primer orden

$$-\frac{p_2}{{p_1}^2};\qquad \frac{m-p_2(m+1)}{{p_2}^2}<0$$

Menores principales de segundo orden

$$\left(-\frac{p_2}{{p_1}^2}\right)\left[\frac{m-p_2(m+1)}{{p_2}^2}\right]-\left[\frac{1}{p_1}\right]\left[\frac{1}{p_1}\right]$$

$$\left(-\frac{1}{{p_1}^2}\right)\left(\frac{m-p_2(m+1)}{{p_2}^2}\right)-\frac{1}{{p_1}^2}$$

$$-\frac{m-p_2(m+1)}{{p_1}^2\,p_2}-\frac{1}{{p_1}^2}=\frac{-\left(m-p_2(m+1)\right)-p_2}{{p_1}^2\,p_2}$$

$$=\frac{-m+p_2(m+1)-p_2}{{p_1}^2\,p_2}$$

$$=\frac{-m+p_2m+p_2-p_2}{{p_1}^2\,p_2}$$

$$=\frac{-m+p_2m}{{p_1}^2\,p_2}\qquad p_2\geq 1$$

$$=\frac{m(p_2-1)}{{p_1}^2\,p_2}\geq 0$$

La matriz es Semi-Definida negativa.

Matriz de sustitución Semi-Definida Negativa

Sea $X^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})$ el sistema de demandas Hicksianas del consumidor, además, sea

$$\sigma(\boldsymbol{P}, \overline{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_1} & \dots\dots\dots & \frac{\partial x_1^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_n} \\ \downarrow & \dots\dots\dots & \downarrow \\ \frac{\partial x_n^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_1} & \dots\dots\dots & \frac{\partial x_n^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_n} \end{bmatrix}$$

En nuestro caso, tenemos lo siguiente:

$$x_1(p_1, p_2, \overline{U}) \quad = \frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2(p_1, p_2, \overline{U}) \quad = \overline{U} - Ln\left[\frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$\frac{\partial x_1^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_1} = -\frac{p_{\mathbf{2}}}{p_1^2} \ ; \ \frac{\partial x_2^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_1} = \frac{1}{p_{\mathbf{1}}} \ ; \ \frac{\partial x_1^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_2} = \frac{1}{p_{\mathbf{1}}} \ ; \ \frac{\partial x_2^H(\boldsymbol{P}, \overline{U})}{\partial p_2} = -\frac{1}{p_{\mathbf{2}}}$$

$$\sigma(\boldsymbol{P}, \overline{U}) = \begin{bmatrix} -\frac{p_{\mathbf{2}}}{p_1^2} & \frac{1}{p_{\mathbf{1}}} \\ \frac{1}{p_{\mathbf{1}}} & -\frac{1}{p_{\mathbf{2}}} \end{bmatrix}$$

Menores principales de primer orden

$$-\frac{p_{\mathbf{2}}}{{p_{\mathbf{1}}}^{\mathbf{2}}}, -\frac{1}{p_{\mathbf{2}}} < 0$$

Menores principales de segundo orden

$$\left(-\frac{p_{\mathbf{2}}}{{p_{\mathbf{1}}}^{\mathbf{2}}}\right)\left(-\frac{1}{p_{\mathbf{2}}}\right) - \left(\frac{1}{p_{\mathbf{1}}}\right)\left(\frac{1}{p_{\mathbf{1}}}\right) = 0 \geq 0$$

De acuerdo con estas condiciones la matriz de sustitución es Semi-Definida negativa.

2. PROBLEMA DUAL

2.1 MINIMIZACIÓN DEL GASTO

2.1.1 Problema Dual. Este enfoque del problema del individuo, consiste en determinar un nivel de gasto mínimo, que le permita alcanzar un nivel dado de utilidad. En términos específicos, consiste en un problema de programación lineal (Dual) contraparte del problema inicial de maximización de la utilidad (Primal).

Generalización del problema

Minimizar $G(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1x_1 + p_2x_2$
Sujeto a $\overline{U} = Lnx_1 + x_2$

Resolviendo mediante multiplicadores de Lagrange, se obtiene:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[\overline{U} - Lnx_1 - x_2]$$
$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda\overline{U} - \lambda Lnx_1 - \lambda x_2$$

Condiciones de primer Orden (F.O.C)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = p_1 - \frac{\lambda}{x_1} = 0 \qquad (\mathbf{1})$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = p_2 - \lambda = 0 \qquad (\mathbf{2})$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = \overline{U} - Lnx_1 - x_2 = 0 \qquad (\mathbf{3})\ \overline{U} = Lnx_1 + x_2$$

$\lambda = p_1x_1 \quad y \quad \lambda = p_2 \quad ; \quad p_1x_1 = p_2$

$$\boxed{x_1(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{p_2}{p_1}}$$

Esta expresión corresponde a la demanda Hicksiana del bien 1. Se observa que para este tipo de función de utilidad, ambas demandas la Marshalliana y la Hicksiana son idénticas. En términos generales, las demandas Hicksianas dependen de los precios y del nivel de utilidad que se busca alcanzar.

Sustituyendo en la ecuación (3), se obtiene:

$$\bar{U} = Ln\left|\frac{p_2}{p_1}\right| + x_2$$

$$\boxed{x_2(p_1, p_2, \bar{U}) \quad = \bar{U} - Ln\left|\frac{p_2}{p_1}\right|} \; Demanda\ Hicksiana\ del\ bien\ 2.$$

Las demandas Hicksianas de los bienes 1 y 2 determinadas anteriormente, garantizan que el individuo alcanza el nivel de utilidad ($\bar{U}$), y que el gasto en el cual incurre con esta combinación de bienes, es el mínimo posible.

$$G(p_1, p_2, \bar{U}) = p_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + p_2\left[\bar{U} - Ln\left|\frac{p_2}{p_1}\right|\right]$$

$$G(p_1, p_2, \bar{U}) = p_2 + \bar{U}p_2 - p_2 Ln\left(\frac{P2}{P1}\right)$$

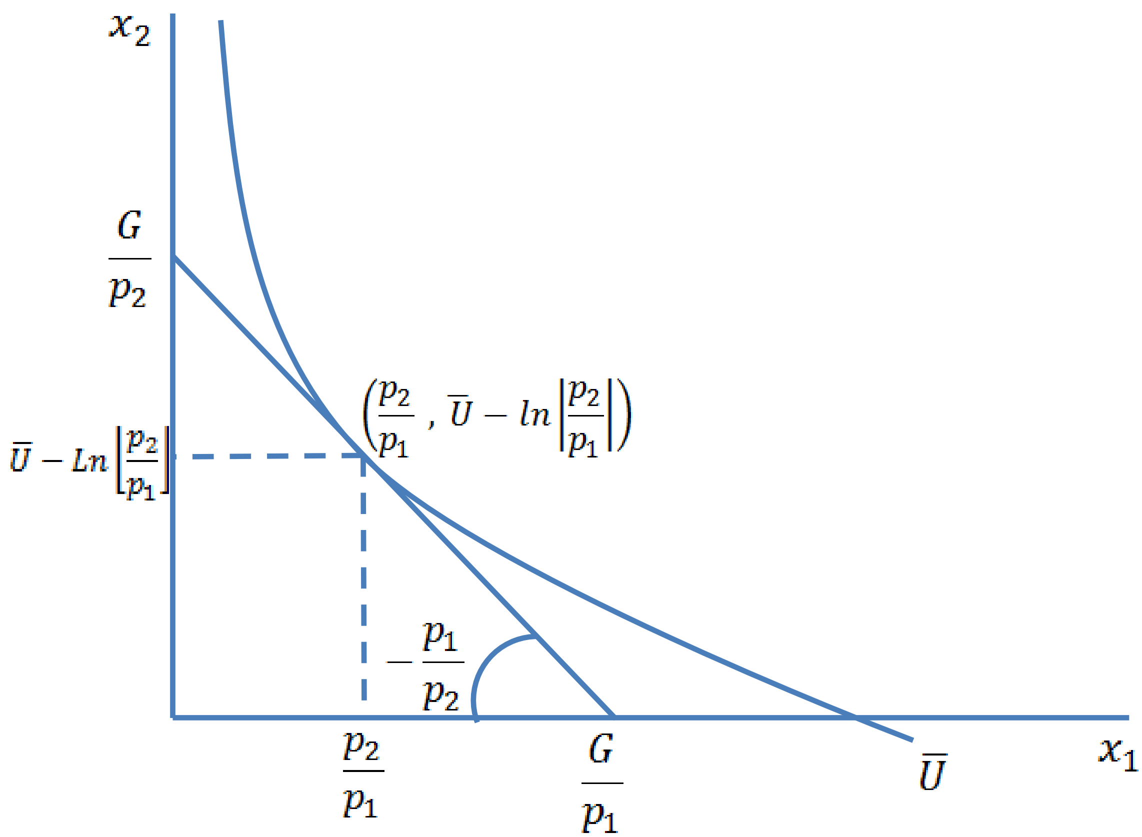
$\boxed{G(p_1, p_2, \bar{U}) = \; p_2\left[1 + \bar{U} - Ln\left|\frac{p_2}{p_1}\right|\right]}$ Función de Gasto mínimo del individuo.

$$\bar{U} = Lnx_1 + x_2$$

$$\bar{U} = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \bar{U} - Ln\left|\frac{p_2}{p_1}\right|$$

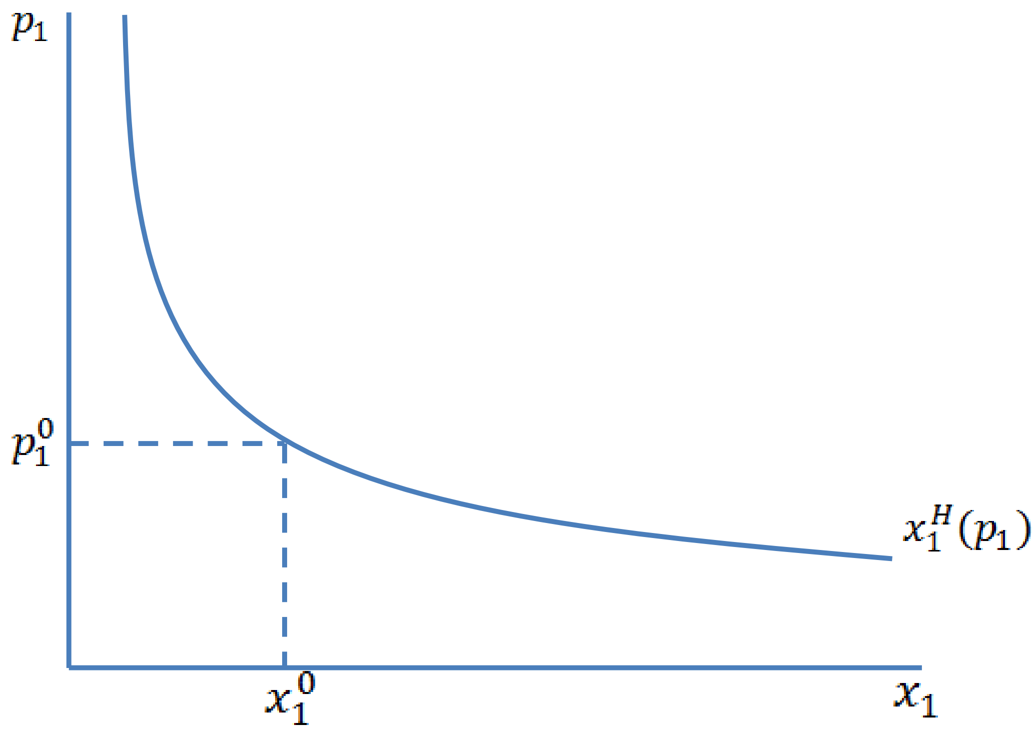
$\bar{U} = \bar{U}$, en este caso las demandas óptimas (Hicksianas) permiten alcanzar el nivel de utilidad deseado.

Gráfico 13. Problema de minimización del gasto del individuo



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 14. Demanda Hicksiana o Compensada del bien 1

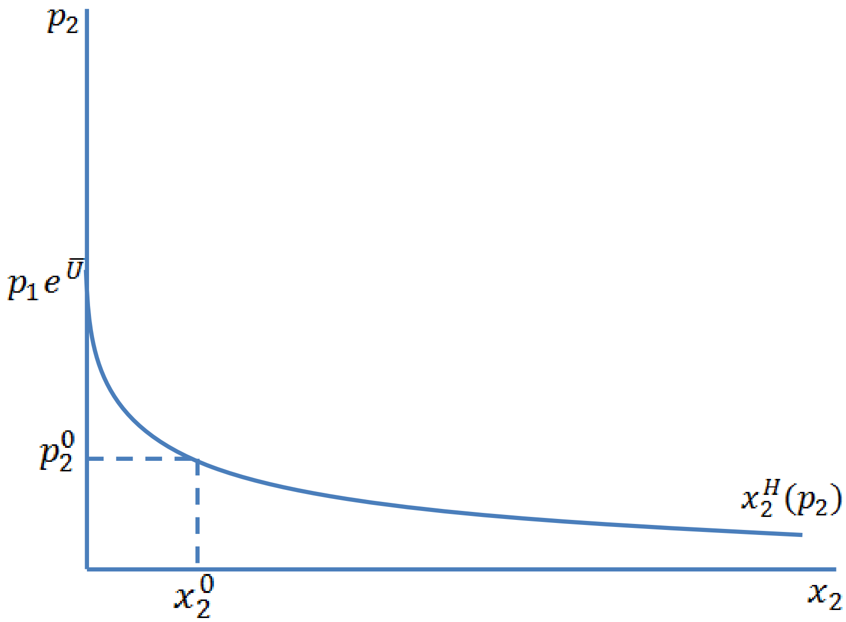


Fuente: Elaboración propia.

$$x_1(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{p_2}{p_1}$$

$\boxed{p_1 = \frac{p_2}{x_1}}$ Función inversa de demanda compensada correspondiente al bien 1.

Gráfico 15. Demanda Hicksiana o Compensada del bien 2



Fuente: Elaboración propia.

$$x_2(p_1, p_2, \bar{U}) \ = \bar{U} - Ln\left[\frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$\ln\left[\frac{p_2}{p_1}\right] = \bar{U} - x_2$$

$$e^{\ln\left[\frac{p_2}{p_1}\right]} = e^{\bar{U} - x_2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{\bar{U} - x_2}$$

$$\boxed{p_2(x_2) = p_1 e^{\bar{U} - x_2}}$$

Función inversa de demanda compensada correspondiente al bien 2.

3. DUALIDAD (TEOREMAS DE LA DUALIDAD)

El principal objetivo del problema dual consiste en determinar y comprender las importantes relaciones que existen entre las funciones directa de utilidad, indirecta de utilidad y la función de gasto, además de las implicaciones sobre las demandas de los individuos. Se convierte en una forma de validar de los supuestos de la teoría microeconómica clásica.

3.1 RELACIONES ENTRE LA FUNCIÓN INDIRECTA DE UTILIDAD Y LA FUNCIÓN DE GASTO MÍNIMO

$\mathbb{V}(m\,, p_1\,, p_2)$, es la función indirecta de utilidad y $G(p_1, p_2, \bar{U})$, es la función de gasto, para algún consumidor cuya función de utilidad es continua y estrictamente creciente. Entonces, $para\ todo\ \boldsymbol{P} \gg 0,\ m \gg 0,$ y $\bar{U}\ \in U$:

1) $G\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(m\,, \boldsymbol{P}\,)\big) = m$
2) $\mathbb{V}(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P},\ \bar{U})) = \bar{U}$

$U = [u(0)\,, \bar{U}]$ Para $\bar{U}\ > u(0)$, donde $\bar{U}$ puede ser finita o incluso $+$

$$(\mathbf{1}) \qquad G(p_1, p_2, \bar{U}), = p_2\left[1 + \bar{U} - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]$$

$$G\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(m\,, \boldsymbol{P}\,)\big) = p_2\ \left\{1 + \left[Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}\right] - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right\}$$

$$G\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(m\,, \boldsymbol{P}\,)\big) = p_2\left[1 + \frac{m - p_2}{p_2}\right]$$

$$G\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(m\,, \boldsymbol{P}\,)\big) = p_2\left[\frac{p_2 + m - p_2}{p_2}\right] = m$$

$$(\mathbf{2}) \qquad \mathbb{V}(m\,,p_1\,,p_2) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m-p_2}{p_2}$$

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P},\ \bar{U})) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{p_2\left[1+\bar{U}-Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]}{p_2} - 1$$

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P}, \bar{U})) = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + 1 + \bar{U} - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - 1 = \bar{U}$$

3.2 DUALIDAD ENTRE LAS FUNCIONES DE DEMANDA MARSHALLIANAS Y HICKSIANAS

Para $\boldsymbol{P} \gg 0,\ \ m \geq 0,\ \ \bar{U}\ \in U \quad e \quad i = 1,2, \ldots, n$

1) $x_i(\boldsymbol{P}, m) = x_i^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big)$

2) $x_i^H(\boldsymbol{P}, \bar{U}) = x_i\big(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P}, \bar{U})\big)$

$$x_1(m\,,p_1\,,p_2) = \frac{p_2}{p_1} \quad ; \quad x_2(m\,,p_1\,,p_2) = \frac{m-p_2}{p_2}$$

1) $x_1(\boldsymbol{P}, m) = x_1^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big) = \frac{p_2}{p_1}$

2) $x_2(\boldsymbol{P}, m) = x_2^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big)$

$$x_2(\boldsymbol{P}, m) = x_2^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big) = \frac{Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \left(\frac{m-p_2}{p_2}\right) - p_2}{p_2} - 1$$

$$x_2(\boldsymbol{P}, m) = x_2^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big) = \left[Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m-p_2}{p_2}\right] - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$x_2(\boldsymbol{P}, m) = x_2^H\big(\boldsymbol{P}, \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, m)\big) = \frac{m-p_2}{p_2}$$

1) $x_1^H(\boldsymbol{P},\overline{U}) = x_1\big(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P},\overline{U})\big) = \frac{p_2}{p_1}$

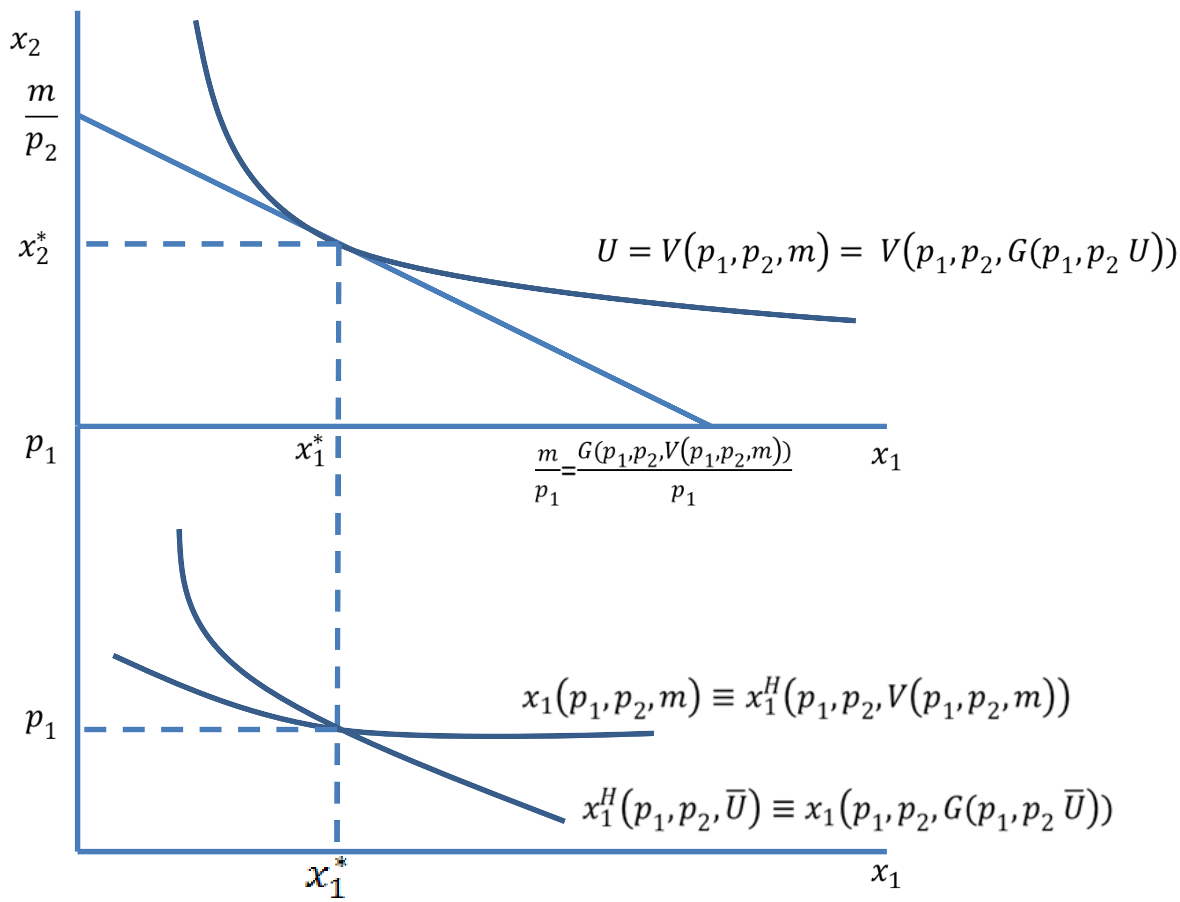
2) $x_2^H(\boldsymbol{P},\overline{U}) = x_2\big(\boldsymbol{P}, G(\boldsymbol{P},\overline{U})\big) = \left[\frac{1+\overline{U}-Ln\left(\frac{P2}{P1}\right)}{P2}\right] - 1$

$$x_2^H(\boldsymbol{P},\overline{U}) = p_2\left[\frac{1+\overline{U}-Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{p_2}\right] - 1$$

$$x_2^H(\boldsymbol{P},\overline{U}) = 1+\overline{U}-Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - 1$$

$$x_2^H(\boldsymbol{P},\overline{U}) = \overline{U}-Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Gráfica 16. Dualidad: Indirecta de Utilidad-Gasto Marshalliana-Hicksiana



Fuente: Elaboración propia.

3.3 DUALIDAD ENTRE LA FUNCIÓN UTILIDAD DIRECTA E INDIRECTA

Suponemos que $U(\boldsymbol{x})$, es cuasi-cóncava y diferenciable en $\mathbb{R}_{++}^{N}$ con derivadas parciales estrictamente positivas. Entonces $\forall$ $X \in \mathbb{R}_{++}^{N}$, $\mathbb{V}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}.\boldsymbol{x})$, la función indirecta de utilidad generada por $U(\boldsymbol{x})$, alcanza un mínimo P en $\mathbb{R}_{++}^{N}$

$U(\boldsymbol{x}) = \min \mathbb{V}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}.\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{P} \in \mathbb{R}_{++}^{N}$

Tenemos entonces el problema:

$$U(x_1, x_2) = min_{p_1,p_2,m} \left[Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2}\right]$$

$$sujeto\ a \qquad m = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\mathcal{L} = \left[Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m-p_2}{p_2}\right] - \lambda[p_1x_1 + p_2x_2 - m]$$

$$\mathcal{L} = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2} - \lambda p_1x_1 + \lambda p_2x_2 + \lambda m$$

Condiciones de primer Orden

$$\mathbf{1}) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} = -\frac{1}{p_1} - \lambda x_1 = 0$$

$$\mathbf{2}) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{m}{{p_2}^2} - \lambda x_2 = 0$$

$$\mathbf{3}) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -p_1x_1 - p_2x_2 + m = 0 \quad \longrightarrow \quad m = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\lambda = -\frac{1}{p_1x_1} \qquad y \qquad \lambda = \frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{m}{{p_2}^2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad -\frac{1}{p_1x_1} = \frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{m}{{p_2}^2}\right)$$

$$\boxed{{p_1}^* = \frac{{p_2}^2x_2}{x_1(m - p_2)}}$$

$$\frac{{p_2}^2x_2}{x_1(m - p_2)}x_1 + p_2x_2 = m$$

$$\frac{p_2{}^2x_2 + p_2x_2(m - p_2)}{m - p_2} = m$$

$$\frac{p_2{}^2x_2 + p_2x_2m - p_2{}^2x_2}{m - p_2} = m$$

$$p_2{}^2x_2m = m(m - p_2)$$

$$\boxed{p_2{}^* = \frac{m}{x_2 + 1}}$$

Reemplazando en $p_1{}^*$

$$p_1{}^* = \frac{\left(\frac{m}{x_2 + 1}\right)^2 x_2}{X1\left(m - \frac{m}{x_2 + 1}\right)}$$

$$p_1{}^* = \frac{\frac{m^2x_2}{(x_2 + 1)^2}}{\frac{mx_1x_2}{(x_2 + 1)}}$$

$$\boxed{p_1{}^* = \frac{m}{x_1(x_2 + 1)}}$$

$$U(x_1, x_2) = Ln\left(\frac{\frac{m}{x_2 + 1}}{\frac{m}{x_1(x_2 + 1)}}\right) + \frac{m - \frac{m}{x_2 + 1}}{\frac{m}{x_2 + 1}}$$

$$U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + \frac{mx_2}{m}$$

$$\boxed{U(x_1, x_2) = Ln(x_1) + x_2}$$

Integrabilidad

$$x_1(m\ , p_1\ , p_2) = \frac{p_2}{p_1} \qquad y \qquad x_2(m\ , p_1\ , p_2) = \frac{m - p_2}{p_2}$$

Nuestra tarea consiste en encontrar la función de $G(p_1, p_2, \overline{U})$ que permite resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\frac{\boldsymbol{\partial G(p_1, p_2, \overline{U})}}{\boldsymbol{\partial p_1}} = \frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{p_1}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial G(p_1, p_2, \overline{U})}}{\boldsymbol{\partial p_2}} = \frac{\boldsymbol{m - p_2}}{\boldsymbol{p_2}}$$

Reescribiendo ambas ecuaciones, se obtiene

$$\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) \ = \frac{p_2}{p_1}\partial p_1$$

$$\int \partial G(p_1, p_2, \overline{U}) = p_2 \int \frac{\partial p_2}{p_1}$$

$$\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) = p_2 Ln(p_1) + C_1\overline{U} \qquad sea\ C_1\overline{U} = 0$$

$$\boxed{\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) = p_2 Ln(p_1)}$$

$$\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) - p_2}{p_2}\partial p_2$$

$$\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) - \frac{\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) - p_2}{p_2}\partial p_2 = 0$$

Multiplicando a ambos lados por

$$\frac{1}{G(p_1, p_2, \overline{U}) - p_2}$$

$$\frac{\partial G(p_1, p_2, \overline{U})}{G(p_1, p_2, \overline{U}) - p_2} - \frac{1}{p_2}\partial p_2 = 0$$

Sea, $M\left(p_2, G(p_1, p_2, \overline{U})\right) = \frac{1}{P2}$

$N\left(p_2, G(p_1, p_2, \overline{U})\right) = \frac{1}{G(p_1,p_2,\overline{U})-p_2}$

Sea, $p_2 = \mathbb{V}.G(p_1, p_2, \overline{U})$

$\partial p_2 = \mathbb{V}.\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) + G(p_1, p_2, \overline{U}).\partial\mathbb{V}$

Reemplazando se obtiene:

$$\frac{\partial G(p_1, p_2, \overline{U})}{\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) - \mathbb{V}.G(p_1, p_2, \overline{U})} - \frac{\mathbb{V}.\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) + G(p_1, p_2, \overline{U})\partial\mathbb{V}}{\mathbb{V}.G(p_1, p_2, \overline{U})} = 0$$

$$\frac{\mathbb{V}G(p_1, p_2, \overline{U}).\partial G(p_1, p_2, \overline{U}) - [G(p_1, p_2, \overline{U}) - \mathbb{V}G(p_1, p_2, \overline{U})][\mathbb{V}G(p_1, p_2, \overline{U}) + G(p_1, p_2, \overline{U})\partial\mathbb{V}]}{\mathbb{V}G(p_1, p_2, \overline{U})[G(p_1, p_2, \overline{U}) - \mathbb{V}G(p_1, p_2, \overline{U})]}$$

$$\frac{\mathbb{V}G\ \partial G - [\mathbb{V}G\ \partial G + G^2\ \partial\mathbb{V} - \mathbb{V}^2 G\ \partial G - \mathbb{V}G^2\ \partial\mathbb{V}]}{\mathbb{V}G[G - \mathbb{V}G]} = 0$$

$\mathbb{V}G\ \partial G - \mathbb{V}G\ \partial G - G^2\partial\mathbb{V} + \mathbb{V}^2 G\ \partial G + \mathbb{V}G^2\ \partial\mathbb{V} = 0$

$\mathbb{V}G^2\ \partial\mathbb{V} - G^2\partial\mathbb{V} + \mathbb{V}^2 G\ \partial G = 0$

$G^2(\mathbb{V} - 1)\partial\mathbb{V} + \mathbb{V}^2 G\ \partial G = 0$

Dividiendo a ambos lados por: $G^2\mathbb{V}^2$

$$\frac{G^2(\mathbb{V} - 1)\partial V}{G^2\mathbb{V}^2} + \frac{\mathbb{V}^2 G\ \partial G}{G^2\mathbb{V}^2} = 0$$

$$\frac{(\mathbb{V} - 1)}{\mathbb{V}2}\partial\mathbb{V} + \frac{\partial G}{G} = 0$$

$$\frac{\partial G}{G} = \frac{1 - \mathbb{V}}{\mathbb{V}^2}\partial\mathbb{V}$$

$$\int\frac{\partial G}{G} = \int\frac{\partial\mathbb{V}}{\mathbb{V}^2} - \int\frac{\partial\mathbb{V}}{\mathbb{V}}$$

$$LnG(p_1, p_2, U) = -\frac{1}{\mathbb{V}} - Ln(\mathbb{V}) + C_3$$

$$LnG(p_1, p_2, U)\ + C_2\ = -\frac{1}{\mathbb{V}} - Ln(\mathbb{V}) + C_3$$

$$LnG(p_1, p_2, U) = -\frac{1}{\mathbb{V}} - Ln(\mathbb{V}) + C_3(\bar{U})C_2(\bar{U})$$

Donde U, es una función estrictamente creciente

$$LnG(p_1, p_2, U) = -\frac{1}{\mathbb{V}} - Ln(\mathbb{V}) + (1 + \bar{U})$$

Donde,

$$LnG(p_1, p_2, U) = -\frac{G(p_1, p_2, \bar{U})}{p_2} - Ln(p_2) + LnG(p_1, p_2, \bar{U}) + (1 + \bar{U})$$

$$C_3(\bar{U}) - C_2(\bar{U}) = 1 + \bar{U}$$

$$G(p_1, p_2, \bar{U}) = -p_2 Ln(p_2) + p_2(1 + \bar{U})$$

La solución final correspondiente está dada por:

$$G(p_1, p_2, U) = p_2 Ln(P1) - p_2 Ln(p_2) + p_2(1 + U)$$

$$\boldsymbol{G(p_1, p_2, U) = p_2 \left[(1 + U) - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]}$$

Esta función satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se planteó inicialmente, además, con todas las propiedades de una función de gasto bien definida.

$$\frac{\partial G}{\partial p_1} = p_2\left(\frac{1}{p_1}\right) = \frac{p_2}{p_1} \ ;$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} = p_2\left(-\frac{1}{p_2}\right) + \left[(1 + U) - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right] = -1 + 1 + \left[U - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} = U - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} = Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m - p_2}{p_2} - Ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} = \frac{m - p_2}{p_2}$$

Hallazgos

La función de utilidad cuasilineal utilizada en este trabajo, específicamente, posee características interesantes, las cuales pueden pasar desapercibidas desde el punto de vista de los postulados de la teoría microeconómica neoclásica, razón por la cual no se convierte, en la mayoría de los casos, en una función atractiva para analizar. Sin embargo llevan a los individuos a preguntarse ¿existe un fenómeno real que puede ser explicado por medio de esta función?

En el desarrollo de este trabajo encontramos que la estructura de las funciones de demanda que se hallan en el proceso de optimización restringida (Maximización de la utilidad), explican en buena medida el comportamiento de las personas que participan en el mercado de ventas por catálogo; es decir, las relaciones entre los precios, la renta y las cantidades demandadas se ajustan a las exigencias de estos agentes.

El trabajo muestra que, en este mercado, empaquetar los productos genera una mayor demanda de los combos y tiende a reducir el consumo de los mismos productos de manera individual; esto puede explicarse por varias razones: una de ellas es el aumento del cupo (renta para nuestro caso), lo cual genera una mayor demanda de los empaquetados; otra de las razones tiene que ver con la disminución del precio del combo.

Además, en la demanda de productos individuales, se hace evidente que si el precio del combo aumenta, la demanda individual también aumenta, esta es una interesante relación de sustituibilidad entre ambos bienes (Empaquetados vs. Individuales). Y si analizamos la demanda de los individuales, se observa un comportamiento ordinario; es decir, el producto individual se comporta de acuerdo a la ley de la demanda, aumenta su precio y disminuyen sus cantidades demandadas.

Por otra parte, en el campo del mercadeo y las ventas, las empresas pueden tomar decisiones en términos de su rentabilidad y la de sus vendedores directos, mejorando sus condiciones y calidad de vida. Los vendedores pueden aprovechar este tipo de estrategias para aumentar lo que llamamos su auto-consumo; es decir sacrificar consumo futuro por consumo presente, y de esta manera obtener mayores ganancias.

En otras estructuras de mercado, es posible contrastar los resultados aquí obtenidos, por ejemplo, las empresas de telecomunicaciones podrían beneficiarse de este trabajo, los almacenes de cadena, etcétera. En fin, todas aquellas empresas que ofrezcan este tipo de productos empaquetados.

CONCLUSIONES

- La función de utilidad elegida para desarrollar este trabajo (función de Utilidad Cuasilineal), cumple con los axiomas y los teoremas propuestos por los diferentes autores en sus textos de microeconomía intermedia y microeconomía avanzada.

- La exposición detallada de las características y el análisis gráfico de la función de utilidad cuasilineal, podría servir como material de apoyo o complementario a los estudiantes de diferentes cursos de microeconomía intermedia, los cuales buscan un mayor nivel de profundidad en la parte analítica.

- De los resultados se pueden evidenciar varios puntos de relevancia para este trabajo: en primer lugar la variable proxy utilizada para el ingreso es positiva y estadísticamente significativa, un incremento del cupo parece generar un incremento en la ***upr*** de 0.009, esto es cerca de 360 unidades.

  Por su parte la variable ***ahorra***, variable utilizada como control, tiene un coeficiente alto y es, además, estadísticamente significativa a un nivel de 5%, sugiriendo que entre mayor sea la diferencia entre los precios regulares y los precios empaquetados, más alta será la demanda de los productos empaquetados, esto es cerca de 450 unidades por cada variación de $1000 pesos.

  Igualmente, es interesante notar como los códigos 55193 (***REF1***) y 55195 (***REF2***), presentan signos negativos y son estadísticamente significativos al 5%. Resultado consistente con la hipótesis planteada y que muestra una evidencia en este sector de la venta directa, para estos dos códigos de que se cumple que incrementos en los precios empaquetados provocan disminuciones en su demanda y además se percibe un incremento en la demanda de los productos en sus precios regulares. Para los demás códigos esta hipótesis no es rechazada, pues sus coeficientes no son estadísticamente significativos.

- Los resultados sugieren que 51.2% de la variabilidad de la demanda a los precios individuales sin ofertas está explicado por las variables expuestas en esta ecuación. Por su parte, el coeficiente del precio individual del producto muestra un impacto negativo y significativo a un nivel de 7%, lo cual sugiere que existe evidencia de que incrementos en el precio individual, han generado disminuciones en su demanda. Además, el coeficiente de los precios en paquetes muestra el signo esperado positivo, sugiriendo evidencia a favor de que cuando los precios de los paquetes se han incrementado respecto al precio base, la demanda de los productos a los precios individuales ha presentado un impacto positivo.

BIBLIOGRAFÍA

ALTURAS, Bráulio. SANTOS, María C. Direct Selling: Consumer Profile, Clusters and Satisfaction. 2009

BELTRÁN, Lucas. Historias de las doctrinas económicas. España: Teide, 1961.

BRODIE, Stewart. STANWORTH, John. WOTRUBA, Thomas. Comparisons of Salespeople in Multilevel vs. Single Level Direct Selling Organizations. 2002

BORGUCCI, Emmanuel. El pensamiento económico neoclásico y el positivismo logico. En: Revista de Ciencias Sociales (Maracaibo), 1999, 35-55.

CARRASCO, Amparo. Microeconomía Intermedia. Problemas y cuestiones. España: McGraw-Hill Interamericana, 2003.

DOSTALER, G. Valor y precio: historia de un debate. México: Terra Nova, 1980.

DUFFY, Dennis L. Direct Selling as The Next Channel. 2005

FRANK, Robert. Microeconomía y conducta. España: McGraw-Hill Interamericana, 2001.

GONNARD, R. Historias de las doctrinas económicas. (8 ed.). España: Aguilar, 1968.

HALL, R. y LIEBERMAN, M. Microeconomía: principios y aplicaciones. México: International Thomson, 2005.

JEHLE, Geoffrey Alexander y RENY, Philip J. Advanced microeconomic theory. (3 ed.). Harlow: Financial Times, 2011.

KATZ, M., ROSEN, H., y MORGAN, W. Microeconomía intermedia (2 ed.). España: McGraw-Hill Interamericana, 2007.

KREPS, D. A course in microeconomic theory. USA: Princenton University, 1990.

KRUGMAN, Paul. Microeconomics. New York: Worth Publishers, 2009.

LANDRETH, H. y COLANDER, David. Historia del pensamiento económico. México: Continental, 2000.

MADDEN, P. Concavidad y optimización en microeconomía. España: Alianza Editorial, 1987.

MASS-COLELL, Andrew, WHINSTON, Michael Dennis y GREEN, Jerry R. Microeconomic theory. New York: Oxford University Press. 1995.

MILLER, Roger L. Microeconomía. Medellin: McGraw-Hill Interamericana, 1984.

MONSALVE, Sergio. Introducción a los conceptos de equilibrio en economía. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Económicas, 2002.

MONSALVE GÓMEZ, Sergio. Optimizacion y dinámica: matemáticas básicas para economistas III. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.

MONSALVE, Sergio, PUERTA ORTIZ, F. y LOZANO GERENA, Francisco Javier. Cálculo: matemáticas básicas para economistas II. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia; Universidad Externado de Colombia, 2004.

MONSALVE, Sergio, SARRIA ZAPATA , H., LOZANO GERENA, Francisco Javier y MANRIQUE, O. Algebra lineal: matemáticas básicas para economistas I. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.

NICHOLSON, Walter. Teoría microeconómica: principios básicos y ampliaciones (8 ed.). España: Thomson, 2005.

NICHOLSON, Walter y CIOCIOANO GONZÁLEZ, Mildred. Microeconomía intermedia y sus aplicaciones (8 ed.). Bogotá: McGraw-Hill, 2001.

PARKIN, Michael, ESQUIVEL, Gerardo., ÁVALOS BRACHO, M., MUES ZEPEDA, María Astrid y GUERRERO ROSAS, P. Microeconomía: versión para América Latina. (7 ed.). México: Pearson Education, 2006.

PERLOFF, Jeffrey M. y MORENO LÓPEZ, Yago. Microeconomía (3 ed.). España: Pearson Education, 2004.

PETERSON, Robert A. WOTRUBA, Thomas R. What is Direct Selling? – Definition, Perspectives, and Research Agenda.

QUIRK, James P. Microeconomía. España: Antoni Bosch, 1984.

RAGLAND, Charles B. WIDMIER, Scott. BROUTHERS, Lance E. A Factor Endowment Approach to International Market Selection for Direct Selling. 2015

ROLL, Eric. Historia de las doctrinas económicas. México: Fondo de Cultura Económica, 1974.

ROLL, Eric, TORNER, Florentino M. y CHAVEZ FERREIRO, Odet. Historia de las doctrinas económicas (3 ed.). México: Fondo de Cultura Económica, 1994.

SANZ SERRANO, José Antonio. Esquemas de historia del pensamiento económico. España: Universidad de Sevilla, 2006.

SCREPANTI, Ernesto y ZAMAGNI, Stefano. Panorama de historia del pensamiento económico. Barcelona: Ariel, 1997.

SLOMAN, John. Introduccion a la microeconomia (3 ed.). Madrid: Prentice Hall, 1997.

TUGORES QUEN, Juan, y Fernández de Castro, Juan. Fundamentos de microeconomía. España: McGraw-Hill Interamericana, 1987.

VARIAN, Hal R. Analisis microeconómico. (3 ed.). España: Bosch Casa Editorial, 1988.

VARIAN, Hal R. Microeconomía intermedia: un enfoque actual. Barcelona: Antoni Bosch, 2006.

VILLAR, Antonio. Curso de microeconomía avanzada: un enfoque de equilibrio general. Barcelona: Antoni Bosch, 1996.

WFDSA (World Federation of Direct Selling Associations – Federación Mundial de Asociaciones de Venta Directa). Annual Report 2015, Reporte Anual 2015.
http://www.acovedi.org.co/fileadmin/documentos/ReporteWFDSA/WFDSA-Annual-Report-2015.pdf
http://wfdsa.org/que-es-la-venta-directa/?lang=es
http://wfdsa.org/los-beneficios-de-la-venta-directa/?lang=es

XIAOHUA, Lin. HASSAY, Derek N. Minority Participation in Direct Selling. 2009
http://www.uregina.ca/business/assets/cmd/SMEE-Review-2009.pdf#page=38

Anexos

RESULTADOS DE LA REGRESIÓN

R-squared	0,733
S.E. of regression	0,045
White(5)	4,5546
Golfeld y Quand	0,9443
Breusch – Pagan - Godfrey	2,0287
Durbin-Watson stat	1,95
Rho	0,025

En el caso de la primera ecuación que se estima se realizan algunas pruebas, como la prueba asintótica de White para detectar problemas de heterocedasticidad $\lambda = nR^2 \sim \chi_q^2$ donde $\boldsymbol{q}$ es el número de variables regresoras en la regresión auxiliar.

El valor Pequeño de la estadística $\boldsymbol{\lambda}$ indica que $\boldsymbol{e_t^2}$ no es explicado por las variables de esta ecuación, y esto nos permite inferir que no hay problemas de heterocedasticidad y, en consecuencia, no debemos rechazar la hipótesis de homocedasticidad.

La prueba de Breusch-Pagan-Godfrey sugiere contrastar $\theta = \frac{1}{2}ESS \sim \chi_{p-1}^2$. El valor pequeño de la estadística $\boldsymbol{\theta}$, nos indica que los residuales estandarizados al cuadrado, no están explicados por las variables $\boldsymbol{Z_j}$ entonces debemos aceptar la hipótesis nula de homocedasticidad.

En la prueba de Prueba de Breusch – Pagan – Godfrey probamos el estadístico $\lambda = \frac{RSS_2/g}{RSS_1/g} = \frac{RSS_2}{RSS_1} \sim F_{(g,g)}$, donde $g = \frac{n-c}{2} - k$ con $\boldsymbol{k}$ número de coeficientes del modelo original.

El valor Pequeño de esta estadística nos indica que el $\boldsymbol{RSS}$ de las observaciones grandes es mucho menor que el $\boldsymbol{RSS}$ de las observaciones pequeñas y, en consecuencia, debemos concluir que no hay problemas de heterocedasticidad y no es causada por las variable explicativas en la ecuación.

Por otra parte, el modelo no presenta problemas de autocorrelación de primer orden según el estadístico de Durbin-Watson.

R-squared	0,512
S,E, of regression	0.0080
Durbin-Watson stat	1,798
Rho	0,101

También estimamos una ecuación utilizando como variable exógena el ahorra, los resultados sugieren que la relación con esta variables es negativa; es decir, que disminuciones en el (S), tienen impacto positivo sobre la demanda a los precios individuales.