



**MODELO DE PARIDAD DE RIESGO JERÁRQUICO: OPTIMIZACIÓN DE  
PORTAFOLIO MULTIACTIVO**

Por:

**Neyler Amado Mena Valencia**

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Magíster en Administración Financiera

Asesor

German Adolfo Peña Higuavita. Mag, CFA, FRM.

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE FINANZAS, ECONOMÍA Y GOBIERNO

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

MEDELLÍN

2023

## **Resumen**

Al momento de realizar la asignación de capital de un portafolio , uno de los problemas más relevantes para quienes lo hacen es cómo optimizar su portafolio, donde la relación retorno-riesgo sea la mejor combinación posible entre los activos seleccionados; el método más conocido y que dio las bases para el resto de los modelos, es el de Media Varianza de Markowitz, pero algunos autores han señalado que en casos prácticos presenta problemas de estabilidad y concentración. En el presente estudio se implementa un caso práctico del modelo de Paridad de Riesgo Jerárquico del autor López de Prado, un modelo relativamente reciente de optimización que aprovecha las bondades de las ciencias computacionales para implementar en un portafolio multiactivo internacional y estudiar el ajuste de este nuevo modelo aplicado al mercado bursátil.

**Palabras claves:** Mercado Financiero, Mercado de Valores, Paridad de Riesgo Jerárquico, Diversificación, Elección de Portafolio

### **Abstract:**

When we make investments, one of the most relevant problems for investors is how to optimize their portfolio, finding the best possible combination of selected assets in terms of the return-risk ratio. The best-known method, which served as the basis for other models, is Markowitz's Mean Variance. However, some authors have pointed out that it presents stability and concentration issues in practical cases. In this study, it is implemented a practical case of the Hierarchical Risk Parity model by López de Prado. This relatively recent optimization model leverages the benefits of computer science to implement it in an international multi-asset portfolio and examine how this new model adjusts when applied to the stock market.

**key words:** Financial Market, Stock Market, Hierarchical Risk Parity, Diversification, Portfolio Choice

## Contenido

1. Introducción .....	8
1.1. Objetivo general y específicos .....	10
1.1.1. <i>Objetivo general</i> .....	10
1.1.2. <i>Objetivos específicos</i> .....	10
2. Marco teórico .....	10
2.1. Revisión de la literatura. ....	10
2.1.1. <i>Teoría Moderna del Portafolio</i> .....	11
2.1.2. <i>Modelo de Markowitz.</i> ....	11
2.1.3. <i>Modelo CAPM</i> .....	13
2.1.4. <i>Inicio de los modelos jerárquicos o clusterización en finanzas.</i> .....	15
2.2. Paridad de Riesgo Jerárquico – HRP .....	17
2.2.1. <i>Concepto de Clusterización.</i> .....	17
2.2.2. <i>Modelo HRP</i> .....	18
2.2.3. <i>Modelo HRP, un cambio de enfoque a los modelos tradicionales.</i> .....	20
2.2.4. <i>Modelo HRP, una visión reciente en crecimiento.</i> .....	22
3. Metodología .....	23
3.1. Datos de estudio. ....	23
3.2. Modelo de Paridad de Riesgo Jerárquico: .....	26
4. Resultados.....	29
4.1. Resultados modelo HRP frente MV, muestra 1: .....	30
4.2. Resultados modelo HRP frente MV, muestra 2: .....	35
5. Conclusiones y Recomendaciones.....	40
Referencias .....	43

## Lista de Tablas

Tabla 1. Ponderación de activos, portafolios óptimos 1. ....	34
Tabla 2. Indicadores de desempeño muestra 1.....	35
Tabla 3. Ponderación de activos, portafolios óptimos 2 .....	39
Tabla 4. Indicadores de desempeño muestra 2.....	39

## Lista de gráficas

Gráfica 1. Gráfico de dispersión, rentabilidad versus riesgo muestra 1 .....	30
Gráfica 2. Dendograma, activos clusterizados .....	31
Gráfica 3. Correlación entre activos del portafolio .....	32
Gráfica 4. Pesos óptimos modelo HRP .....	33
Gráfica 5. Pesos óptimos modelo MVP .....	33
Gráfica 6. Gráfico de dispersión, rentabilidad versus riesgo muestra 2.....	35
Gráfica 7. Dendograma, activos clusterizados. ....	36
Gráfica 8. Pesos óptimos modelo HRP .....	37
Gráfica 9. Pesos óptimos modelo MVP .....	38

## Lista de Ecuaciones

Ecuación 1. Modelo de optimización de Markowitz.....	12
Ecuación 2. Retorno esperado modelo CAPM.....	14
Ecuación 3. Rentabilidad de los activos.....	24
Ecuación 4. Matriz de correlación.....	26
Ecuación 5. Matriz de correlación-distancia (D) .....	26
Ecuación 6. Matriz distancia aumentada $\bar{D}$ .....	26
Ecuación 7. Conjunto de clúster.....	27
Ecuación 8. Algoritmo de punto más cercano.....	27
Ecuación 9. Ponderación de activos .....	28
Ecuación 10. Varianza de los subclúster .....	28
Ecuación 11. Factor de ponderación .....	29

## **Lista de anexos**

Anexo 1. Descripción de activos elegidos para el modelo HRP y MV, muestra 1.....	45
Anexo 2. Descripción de activos elegidos para el modelo HRP y MV, muestra 2.....	47
Anexo 3. Enlace de líneas de programación, códigos de Python en Colab .....	47

## 1. Introducción

Cada día, los mercados financieros, van desarrollando nuevos modelos a través de algoritmos que facilitan el desarrollo de las inversiones y la toma de decisiones de una forma más eficiente. Uno de los temas más importantes de los mercados financieros, es la optimización de portafolios, donde se busca tener la mejor combinación de activos con base en la relación riesgo-retorno. Es de precisar que el desarrollo de este tema generalmente ha partido de los modelos clásicos.

Uno de los más importantes artículos sobre selección de portafolios, fue el desarrollado por Harry Markowitz, quien en la década de cincuenta desarrolló dos publicaciones *Portfolio Selection* (1952) y *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (1959), que lo llevaron a ser reconocido como el padre de la Teoría Moderna de Portafolio, o por sus siglas en inglés MPT (Modern Portfolio Theory). En sus apartados expone la relevancia de considerar no solo los rendimientos individuales de un activo al momento de realizar una inversión, sino también la importancia del riesgo que conlleva ese activo en el portafolio global, es por esto que uno de los procesos más relevantes dentro de la selección de portafolios, es la asignación de activos, que genera un gran beneficio al portafolio, ya que distribuye el capital entre diferentes tipos de activos para ofrecer una mejor diversificación.

Es así como en algunas investigaciones, como Brinson, Hood, & Beebower (1986), muestran cómo la asignación de activos es uno de los principales determinantes de los rendimientos, con más del 90%, la selección y asignación explica mayormente la variabilidad de la rentabilidad de un inversor; de allí la importancia de estudiar las diferentes herramientas y modelos para obtener una muy buena selección y asignación de activos, que nos lleve a tener el portafolio óptimo. En este trabajo se pretende aplicar la teoría de un modelo reciente, desarrollado por De Prado (2016), denominado Paridad de Riesgo Jerárquico o de ahora en adelante HRP, por sus singlas en

inglés (Hierarchical Risk Parity), que busca optimizar portafolios de inversión mediante un modelo alternativo a los métodos clásicos de selección y optimización de portafolios; de esta forma pretende resolver algunos interrogantes que surgen con el modelo: ¿Tiene un buen ajuste el modelo HRP, comparado con los modelos tradicionales? ¿Logra el modelo de HRP el objetivo de tener una cartera diversificada y evita soluciones concentradas en la asignación de capital en el portafolio?

Con este trabajo se busca aplicar el HRP en un portafolio multiactivo, enfocado principalmente en acciones del S&P500, para revisar el desempeño y ajuste que puede tener este modelo en el mercado y pueda ser la guía a nuevos estudios. Con los resultados obtenidos se pretende que el modelo HRP sea conocido entre los académicos e inversionistas.

Este trabajo se desarrollará con la siguiente estructura: en el numeral 1 se presenta la introducción, posteriormente, en el 2, se brindará una revisión de literatura y el marco conceptual relacionado con la teoría de optimización de portafolios; en el numeral 3 veremos la metodología utilizada en el trabajo para encontrar y revelar; en el numeral 4, los resultados obtenidos con el modelo de paridad de riesgo jerárquico aplicado a la optimización de portafolios; con base en todo lo anterior se llegará al numeral 5, donde estarán las conclusiones y recomendaciones.

## **1.1. Objetivo general y específicos**

### ***1.1.1. Objetivo general***

Construir un portafolio óptimo multiactivo por medio del modelo de paridad de riesgo jerárquico, con el fin de validar si se obtiene una mejor diversificación y ajuste con respecto a los modelos tradicionales.

### ***1.1.2. Objetivos específicos***

- Verificar empíricamente que, tanto en el modelo HRP como en el Modelo MV, las soluciones óptimas no concentren el 50% del portafolio en los 5 principales activos.
- Identificar y analizar a través de métricas, si el modelo con una mayor diversificación logra disminuir el riesgo de portafolio, como se especifica en las teorías revisadas.
- Implementar el modelo de paridad de riesgo jerárquico al mercado bursátil internacional y evaluar su ajuste con respecto a los modelos clásicos.

## **2. Marco teórico**

### **2.1. Revisión de la literatura**

Aunque la finalidad del presente trabajo no es consolidar todas las teorías de portafolios y modelos de optimización, se hace necesario para la investigación conocer, tanto los modelos clásicos como los inicios de modelos jerárquicos, ya que estos han servido de base a los estudios que han presentado algunos autores para elaborar sus trabajos de forma teórica y empírica en la creación de modelos de optimización de portafolios. Como vamos a ver durante el recorrido de la literatura, tanto los modelos correspondientes a la teoría moderna de portafolio, como los modelos de estructuras jerárquicas, surgieron casi a la par; pero el primero tuvo mayor acogida entre los académicos e inversionistas. Por lo tanto, el tema de optimización de portafolios viene siendo

relevante desde 1952 con Markowitz, luego en 1964 el modelo CAPM desarrollado por Sharpe, Lintner y Mossin y finalmente, desde el modelo Black-Litterman en 1991. Solo hasta 2016 con De Prado, el tema de estructuras jerárquicas tomo relevancia entre los autores, como una alternativa de modelos centrados en el riesgo.

### ***2.1.1. Teoría Moderna del Portafolio:***

Esta época se considera que inició desde la década del cincuenta, la autora Ríos (2008), expresa que se generó por “el interés por temas relacionados con el rápido desarrollo económico y tecnológico, presiones competitivas, y cambios en los mercados, que requerían un cuidadoso racionamiento de los fondos disponibles” ( p. 151).

De allí que se dieran grandes avances en finanzas no solo a nivel teórico, sino también empírico, con modelos matemáticos en temas como: “administración del capital, flujos de fondos, asignación óptima de recursos, rendimientos esperados, la presupuestación de capitales, la formulación de la estrategia financiera de la empresa y la teoría de los mercados de capitales” (Rios, 2008 p. 151).

De esta época sobresale Harry Markowitz (1952), con su escrito de Selección de Portafolios, centrado en el análisis de media-varianza; y otros autores como William Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Mossin (1966), quienes con sus aportes enriquecieron el modelo conocido como CAPM.

### ***2.1.2. Modelo de Markowitz.***

Mediante este modelo es posible, bajo ciertos supuestos y criterios, obtener un portafolio óptimo en medio de un conjunto de oportunidades de activos; en este se puede seleccionar un determinado nivel de riesgo-retorno dentro de la frontera eficiente; que es precisamente esa canasta compuesta por todas las posibilidades de inversión dentro del portafolio, que bajo un rendimiento esperado

dato tienen el mínimo riesgo. Es decir, que en este conjunto se puede encontrar la mayor rentabilidad esperada y una mínima varianza dentro del conjunto de activos que conforman la frontera eficiente y se puede seleccionar el portafolio óptimo; con la palabra óptimo no solo nos referimos a considerar la rentabilidad más alta, sino que para diferentes portafolios se tiene un nivel de riesgo asociado en el que los inversionistas puedan invertir según su perfil y aversión hacia el riesgo. El modelo de Markowitz permitió sentar las bases cuantitativas para modelos de selección de portafolios, no solo de una forma teórica, sino también práctica. Es así como formuló el siguiente modelo, donde se minimiza la varianza para encontrar el portafolio óptimo:

**Ecuación 1.** *Modelo de optimización de Markowitz*

$$\text{Min } \sigma_c^2$$

$$\text{s. a. } \sum_{i=1}^N \bar{R}_i X_i = R$$

$$\text{Donde } \sigma_c^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

Para la realización de este modelo se necesita ingresar datos como los retornos esperados de los activos del portafolio y una matriz que contenga la varianza y covarianza.

La minimización del modelo anterior se puede resolver bajo un entorno de programación matemática, dando como resultado precisamente la ponderación de los activos que componen el portafolio, de acuerdo con las restricciones indicadas en el modelo.

Otro de los grandes aportes de este modelo es el concepto de diversificación, que implica que entre más activos adiciones a un portafolio, este disminuye el riesgo específico del sector. Ahora, la diversificación no es infinita, aunque no hay un consenso sobre cuántas acciones o activos debe tener un portafolio para lograr el beneficio de esta, algunos expertos financieros considerarán que tal variedad tiene un límite, y se considera que esos números están entre 20 y 40 acciones para gozar de los beneficios de la misma. Está el caso de Statman (1987), quien encuentra que un portafolio bien diversificado de acciones debe tener al menos 30 – 40 acciones. Ahora, no solo basta con diversificar, sino que también se deben elegir aquellos activos con baja correlación dentro del portafolio; esto con el fin de disminuir el riesgo no sistemático o específico.

### **2.1.3. Modelo CAPM**

Para el año 1964, Sharpe junto a otros autores de la década, Lintner (1965) y Mossin(1966), desarrollaron de forma separada, a través de sus textos, el modelo para valorar activos financieros en un entorno de mercado en equilibrio, denominado por sus siglas en ingles CAPM (Capital Asset Pricing Model), y brindaron al mercado un modelo que responde, a una duda que surgió entre los inversionistas: ¿Qué rendimiento debe pedirse considerando el nivel de riesgo de determinado activo?, esto lo respondieron con una función que tiene varios factores que soportan el *trade-off* riesgo- retorno. En esa función de retorno se tienen en cuenta la tasa libre de riesgo o requerimiento mínimo de una inversión, junto con una prima de riesgo de mercado y una beta. Para este modelo se debe tener en cuenta que se tienen algunos supuestos donde los mercados son eficientes, no

existen costos de transacción y que los inversionistas son aversos al riesgo y racionales, entre otros supuestos.

A continuación, la formula del modelo CAPM:

**Ecuación 2.** *Retorno esperado modelo CAPM*

$$E(r_i) = rf + \beta * \{E(rm) - rf\}$$

Donde:

$E(r_i)$ : rentabilidad esperada del activo.

$rf$ : risk free, rentabilidad esperada de un activo sin riesgo.

$E(rm)$ : rentabilidad esperada del mercado.

$\beta$ : medida de sensibilidad relativa del activo con respecto al mercado.

Uno de los parámetros y medidas más importantes introducidos en este modelo por Sharpe (1964), Lintner (1965), And Mossin (1966) es la beta, que los autores asocian al riesgo de mercado de un activo, y este precisamente va a representar esa rentabilidad o requerimiento de rendimiento asociado a un activo por su volatilidad.

En consideración de lo anterior, en el mercado tenemos inversionistas con diferentes niveles de riesgo, es así como los inversionistas con un nivel de riesgo bajo, invertirán en bonos o títulos del tesoro para obtener la tasa libre de riesgo, pero a medida que quieren asumir más riesgo, el mercado va a generar una prima de riesgo, como lo consideran los autores en el modelo, según el mayor grado de volatilidad e incertidumbre que genera el activo, teniendo en cuenta la industria del activo, por ello se incorpora también el beta, como un factor de sensibilidad relativa de mercado.

#### ***2.1.4. Inicio de los modelos jerárquicos o clusterización en finanzas***

Este tipo de estructuras surgió a la par con los modelos tradicionales mencionados anteriormente, pero no tuvieron la suficiente acogida entre los autores, pese a que ya venían dando una luz de las bondades que ofrecían.

Uno de los primeros autores en traer el concepto de clúster o agrupación en la composición del portafolio fue Farrell (1974), y aunque en el periodo de estudio se tenían limitaciones en sistemas computacionales para llevar el procesamiento de grandes volúmenes de data, por medio del estudio de 100 acciones del S&P, generó índices accionarios con compañías muy similares y las agrupaba, según su alto grado de correlación. En su estudio, estas agrupaciones se clasificaban según su crecimiento, estabilidad, características cíclicas y un último factor que resultó de forma particular en la muestra de estudio, el sector petrolero. Estas agrupaciones, según la clasificación anterior, representó en promedio el 14% de la variación de la rentabilidad. Con lo anterior, el autor buscaba explicar que existe un factor adicional, que incide en la varianza de los rendimientos de las acciones que conforman el portafolio. El método utilizado por Farrel para hacer las agrupaciones, es muy parecido al que utilizó De Prado en el 2016; Farrel los resume así:

- 1 busca en la matriz de correlación residual las dos variables con correlación positiva más alta,
- 2 combina estas variables para reducir la matriz en uno y 3 recalcula la matriz de correlación e incluye la correlación de la variable combinada y las variables restantes; y continúa de forma iterativa.

Motivado por las discusiones que surgieron acerca de la correlación o no, entre las acciones en el portafolio y cómo afectaban la rentabilidad de estas, el autor Mantegna (1999), inicia lo que él denominó disposición topológica, con el fin de caracterizar el mercado financiero para poder

lograr modelos propios en el mercado accionario y precisamente encontró en la estructura jerárquica un modo para realizarlo. El autor elige un portafolio conformado por acciones del S&P500 y del Dow Jones en un periodo de estudio de 1989 hasta 1995, en la que forma una matriz de coeficientes de correlación y una matriz de distancia denominada matriz D, y así desarrolla el árbol de expansión mínimo o MST, por sus siglas en inglés (Minimum Spanning Tree), que conecta las acciones del portafolio con base en su similitud y correlación, formando clústeres y la estructura jerárquica entre los activos del modelo. En sus resultados encontró grupos que se conformaron por su cercanía en el tipo de industria y que tenían una alta correlación: en un primer grupo, el modelo se enfocó en compañías del sector de petróleo como Chevron, Texaco y Exxon; en un segundo grupo compañías de materias primas como Alcoa e International Paper; y en un tercer grupo, compañías industriales de bienes de consumo no duraderos, como Procter & Gamble y Coca Cola. Lo anterior, explica que parte de los rendimientos de acciones de compañías del mismo sector tienen factores económicos comunes que conllevan a una relevancia estadística en el grupo de acciones que conforman el portafolio.

Papenbrock (2011), en su trabajo de grado, de forma empírica y con datos de activos del índice DAX de Alemania, realizó una aproximación de agrupación de activos en clústeres y redes para gestionar el riesgo del portafolio y asignar el capital, donde la principal bondad era la visualización de estas estructuras formadas a través de minería de datos y modelos estadísticos en sistemas de dendograma, más llamativo visualmente, pero con una gran aplicación en la gestión del riesgo y la optimización de portafolios de inversión.

Si bien el tema de gestión de portafolios, a través de clústeres con estructuras jerárquicas ha sido tratado por varios autores en el pasado; a pesar de la robustez que mencionan los textos, a nivel empírico, no tuvo la fuerza entre los académicos, solo fue hasta que De Prado en 2016 introdujo

la estrategia y sistemas de clústeres por medio del modelo de paridad de riesgo jerárquico, cuando la teoría tomó fuerza entre los académicos, por lo tanto, la literatura sobre HRP ha empezado a tomar un nuevo rumbo en la optimización de portafolios, y se ha conjugado junto a una visión de gestión de riesgo dentro de este.

Se hace necesario aprovechar la fuerza reciente del modelo para que esta teoría sea apropiada, adoptada e incluida por los académicos e inversionistas en sus modelos de optimización, con el fin de analizar su desempeño y ajuste en el mercado bajo las nuevas herramientas computacionales, y contar con modelos alternativos a los tradicionales que nos brinden una visión diferente y de gran aplicación en el mercado.

## **2.2. Paridad de Riesgo Jerárquico – HRP**

### **2.2.1. *Concepto de Clusterización***

El modelo HRP tiene, como eje central, el concepto de clusterización o agrupamiento de activos para asignar el portafolio, por lo tanto, es importante que como punto de partida revisemos el significado que enmarca este concepto, como lo define Jain, Murty & Flynn (1999) la clusterización es “la clasificación no supervisada de patrones (observaciones, elementos de datos o vectores de características) en grupos (conglomerados)” (p. 264).

Mcilhany y Wiggins, (2018) definen la agrupación de datos como “la asignación de datos a subconjuntos en función de la proximidad de los datos entre sí. En el sentido más amplio, un grupo es simplemente una etiqueta dada a los datos para identificar características comunes” (p. 94). Aunque su uso ha sido frecuente en las ciencias, bajo el concepto anterior nos queda claro que lo que persigue parte del modelo es buscar características comunes entre activos, agruparlos bajo una etiqueta correspondiente a su sector, geografía, tamaño y características; concepto que puede ser clave para asignar el capital y poder generar un portafolio diversificado entre activos

con varios clústeres. Esto ha permitido que sea adoptado en nuevos modelos financieros bajo algoritmos aplicados para agrupar, organizar, reducir, limpiar e identificar patrones de los datos, con el fin de extraer análisis y resultados que nos ayuden a optimizar modelos con base en esta información.

### **2.2.2. Modelo HRP:**

Dados los conceptos de clusterización, podemos aplicar estas definiciones, ya que en el modelo de HRP se ordenan los activos por clúster, y luego los mismos se subdividen en clústeres más pequeños, hasta que se llega a los activos individuales; este proceso se resume en un árbol jerárquico que se va dividiendo hasta llegar a ramas con sus activos divididos en clústeres, en cada una de las ramificaciones, los activos pertenecientes a determinado clúster guardan una alta correlación; precisamente para que los activos clasificados en determinado clúster compitan en asignación de capital con los de su clúster; uno de los elementos novedosos es que, a través del modelo, se usa la técnica de machine learning para la distribución de los activos, y adiciona un elemento a la teoría de portafolios, y es que en cada subclúster, los activos compiten por la asignación de capital del portafolio de inversión, contrario a los modelos tradicionales, donde todos los activos del portafolio son sustitutos entre sí, en el caso del HRP solo los activos que tienen una mayor correlación y que pertenecen al mismo clúster compiten entre sí.

Para la construcción del portafolio, en este modelo se tienen en cuenta un sistema jerárquico, por medio de aprendizaje automático; grafos y un esquema más visual. Se construye el portafolio diversificado, esta representación es muy diferente a los modelos tradicionales, ya que este no realiza la inversión de la matriz de covarianza; parte de la clusterización de los activos semejantes en el portafolio, teniendo en cuenta el coeficiente de correlación, es decir, que esta relación entre activos reemplaza el sistema tradicional de covarianzas por niveles jerárquicos, y como lo

menciona Burggraf (2021), con este modelo se logran 2 objetivos: utilizar al máximo la información contenida en la matriz de covarianza y recuperar la estabilidad de la ponderación o asignación.

Uno de los principales elementos del modelo clásico de Markowitz es la matriz de covarianza, el cual no tiene en cuenta el concepto de jerarquía. En este modelo de Media Varianza, todos los activos son sustitutos del otro, sin tener en cuenta los elementos particulares de cada uno.

Aragón Urrego, D. (2021) es el único autor que ha desarrollado el tema en Latinoamérica, destaca en sus conclusiones que el modelo HRP “se deben enriquecer con la incorporación de otros modelos, medidas de desempeño, un conjunto más amplio de activos, de tal manera que se cuente con más información frente a ventajas y desventajas del modelo HRP” (p. 123).

Por lo tanto, se pretende dar continuidad a sus afirmaciones, para seguir explorando un tema tan relevante como lo es la optimización de portafolios y seguir considerando el modelo HRP como uno de los modelos para llegar a mejores optimizaciones.

El proceso de HRP, se lleva a cabo en tres etapas:

1. Agrupación en árboles: el portafolio se compone en una jerarquía de arriba hacia abajo, y se agrupan inversiones similares según su correlación, para distribuir pesos entre los activos más parecidos, esto lo representa a través de un dendograma.

Esto quiere decir que, si en el portafolio hay activos con una alta correlación, deben primero competir entre sí en su clúster por la asignación de capital, y luego con el resto de los activos del portafolio, eso lo hace con el fin de que, dentro de activos similares o muy

correlacionados por su actividad, región o industrias, se les asigne capital dentro de su clúster y así no se afecte el portafolio global en el sentido de la diversificación.

2. Cuasi diagonalización: se realiza la cuasi diagonalización de la matriz de covarianza, para reorganizar la misma y con el fin de obtener una representación diagonal de la matriz de covarianza, en el que los activos con más correlación se agrupan uno cerca del otro, o estén juntos para distribuir los pesos de forma óptima mediante la asignación de varianza inversa.
3. Bisección recursiva: se distribuye utilizando la matriz de varianza inversa entre subgrupos,

La idea detrás de este modelo es que los activos dentro del portafolio se agrupan según su parecido o correlación, y entre los activos del subgrupo se dispute la colocación o asignación de capital, de acuerdo con el mejor desempeño que tengan, dentro de la jerarquía en la que están agrupadas. Es una estrategia de asignación de capital entre activos, que usa el riesgo para establecer la colocación entre los diferentes participantes de una cartera.

### ***2.2.3. Modelo HRP, un cambio de enfoque a los modelos tradicionales***

Si bien Markowitz fue quien sentó las bases para la optimización de portafolios, se ha encontrado a través de la literatura que, en la práctica, la estimación de matrices de covarianza grandes puede conducir a soluciones inestables y concentración de activos, De Prado (2016) explica “el origen de estos problemas es que los optimizadores cuadráticos requieren la inversión de una matriz de covarianza”, lo que denominan algunos autores como la maldición de Markowitz, porque entre más correlación tengan los activos, se necesitara una mayor diversificación, pero mayores serán los errores de estimación del portafolio, este inconveniente en el modelo de MV ya había sido mencionado por Michaud (1989), el cual concluyó que si no hay suficientes datos disponibles, se puede generar un mal condicionamiento, y una matriz de covarianza mal condicionada puede causar una gran inestabilidad en la optimización; adicionalmente, esto puede llevar a más errores de

estimación en el modelo, en la medida que, al aumentar el número de activos para generar un modelo más preciso y a su vez más diversificado, este conlleva a un error de estimación del rendimiento; dada la complejidad en pronosticar con suficiente precisión los rendimientos, se llega a modelos inestables y resultados susceptible de imprecisiones.

Esta divergencia que se presenta a la hora de llevar el modelo de Media Varianza de la teoría a la práctica, para estimar el rendimiento esperado y la covarianza para diferentes clases de activos, condujeron al desarrollo de otros modelos académicos para encontrar soluciones prácticas de portafolio óptimo, con una correcta asignación de activos.

Este cambio de enfoque y nuevos modelos se orientan más en el riesgo, lo que significa que intentan estimar los factores de riesgo, en lugar de los rendimientos esperados, ya que estos presentan dificultades a la hora de predecirlos con precisión a partir de sus precios históricos.

Una característica que separa al modelo HRP de las teorías clásicas, es precisamente este enfoque, más orientado hacia el riesgo, y no hacia la rentabilidad esperada, por lo tanto, los factores de riesgo son los que juegan un papel fundamental en la asignación de pesos en el portafolio.

Entre los principales modelos con enfoque hacia el riesgo, tenemos, por ejemplo: la estrategia de Volatilidad Inversa (IV), Portafolio de Contribución de Igual Riesgo (ERC), Varianza Mínima Global (GMV) y Portafolio de Paridad de Riesgo (RP), entre otros, pero nuestro trabajo solo se limita a estudiar el modelo de Paridad de Riesgo Jerárquico.

Una conclusión a la que han llegado algunos autores que han estudiado el tema, es que, en la selección de portafolios clásicos, el modelo de Media Varianza concentra las asignaciones y selección de activos en un gran porcentaje, en los activos con menor volatilidad, y al resto de activos les asigna un peso cercano a cero. La explicación para ello es que el objetivo de Media Varianza es minimizar la varianza del portafolio. Esto provoca que, en la asignación de los activos,

seleccione los de menor varianza o volatilidad, generando un portafolio más conservador y más concentrados en dichos activos, pero al hacer esto, ocasiona, que se desdibuje la teoría de tener un portafolio diversificado para reducir el riesgo sistémico o no diversificable. Por lo que HRP logra una mayor diversificación entre activos no correlacionados, y genera un ajuste de forma más robusta frente a los choques o perturbaciones del mercado.

#### **2.2.4. *Modelo HRP, una visión reciente en crecimiento***

Aunque el modelo tema de optimización de portafolios mediante HRP ha sido abordado por varios académicos a nivel internacional, podemos encontrar muy poca o escasa bibliografía en Latinoamérica, hasta el momento solo ha sido tratado en un artículo en Colombia por el autor Aragón Urrego, D. (2021), que aplica el modelo al mercado de Estados Unidos, en donde toma una muestra de siete activos del mercado estadounidense; el autor encuentra mejoras en cuanto al retorno esperado, y el coeficiente de Sharpe comparado con los obtenidos bajo el modelo de optimización del portafolio de media-varianza, este distribuye con mayor participación a activos con una menor volatilidad, lo que llevó a que el portafolio de estudio y modelo de MV se concentrara cerca del 78% del portafolio en solo tres activos (Johnson & Johnson, Microsoft y Walmart); mientras que en HRP se concentró en solo tres activos, con cerca del 58%. La situación anterior ya la habían tratado los autores Best y Grauer (1991), en su artículo advertían que la alta sensibilidad de los portafolios óptimos en el modelo de media varianza a los cambios en la media de los retornos de los activos, puede llevar a que el modelo genere portafolios con resultados concentrados en solo algunos activos y brinde soluciones inestables.

Burggraf, (2021), utilizó el modelo de HRP, pero conformó el portafolio con una gran variedad de criptomonedas para realizar la asignación de capital de este tipo de activo, y encontró que el modelo HRP tiene mejoras en cuanto a la volatilidad y el riesgo de cola frente a otros modelos, y tiene

mejoras en cuanto a la diversificación, con sus resultados concluye que, por ejemplo, el portafolio del modelo de volatilidad inversa, por sus siglas en inglés IV (The Inverse Volatility Portfolio), llega a ser muy estático; y con el modelo de Media Varianza MV, el autor llega a la conclusión de otros autores, y es que el modelo genera resultados muy concentrados. En cuanto a los resultados empíricos en el portafolio y las métricas de desempeño que usó, el autor encuentra que “HRP equilibra el riesgo y la rentabilidad más eficaz, proporciona la mejor compensación riesgo-rentabilidad, en términos de ratio de Sharpe 0,171, en comparación con 0.158, 0.085 y 0.082 de los portafolios IV, MV y MDP, respectivamente” (p. 5).

Con el presente estudio, se busca contribuir y enriquecer la reciente literatura que utiliza las técnicas de aprendizaje automático en la asignación de activos, aplicando la paridad de riesgo jerárquico en un portafolio multiactivo al mercado internacional.

Aunque la mayoría de los estudios realizados en Colombia y Latinoamérica en torno al tema de construcciones de portafolios se concentran en los modelos clásicos, se aplicará el modelo HRP, para analizar el ajuste que puede llegar a tener este en el mercado bursátil internacional, principalmente en el mercado bursátil de Estados Unidos para que sirva de precedente al estudiar el potencial del mismo a nivel de Latinoamérica, y con el fin de ser explotado o replicado a modelos con renta variable, renta fija, derivados y divisas.

### **3. Metodología**

#### **3.1. Datos de estudio**

Para desarrollar el presente trabajo se seleccionaron activos que conformarán dos portafolios: el primer portafolio está conformado por acciones del Standard & Poor's 500, y el segundo, por las acciones de la primera muestra, más ETF's de títulos de bonos soberanos, activos alternativos como

los ETF's inmobiliarios, con el fin de conformar un portafolio multiactivo, que tenga exposición a diferentes clases de activos y analizar cómo reacciona el portafolio ante estos cambios. Los activos se tomarán del mercado bursátil de Estados Unidos, por su importancia y nivel de desarrollo internacionalmente; la gran variedad de activos que proporciona para el estudio; acciones con muy buena data, de gran capitalización y bursatilidad; y por la cantidad de sectores que permiten obtener precisamente las clusterizaciones.

Los sectores juegan un papel crucial, porque es donde podemos encontrar los grupos conformados por cada activo, lo cual es importante dado que permite verificar si tienen baja o alta correlación y nos ayude a obtener una buena diversificación del portafolio y minimizar el riesgo, que es precisamente la base de las teorías de portafolios que hemos revisado en apartados anteriores. Se seleccionarán de forma representativa compañías de alta capitalización de mercado dentro de sectores de la economía, según la clasificación de S&P500, como:

energía, productos básicos de consumo o consumo defensivo, tecnologías de la información, consumo discrecional o consumo cíclico, servicios financieros, cuidado de la salud, industrial, materiales, servicios de comunicación y servicios públicos.

De la cantidad de activos que conformarán el portafolio, como lo habíamos mencionado en apartados anteriores, algunos expertos financieros considerarán que la diversificación se puede optimizar entre 20 y 40 acciones, está el caso de Statman (1987), quien encuentra que un portafolio bien diversificado de acciones debe tener al menos 30 – 40 acciones.

La rentabilidad de los activos se va a calcular con la siguiente formula:

**Ecuación 3.** *Rentabilidad de los activos*

$$R_{t,t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

Este análisis se llevará a cabo dentro de un horizonte o ventana de tiempo desde el 1 de enero de 2015 hasta el 31 de diciembre de 2022; la muestra tendrá una temporalidad diaria, es decir, que se tomarán precios de cierre para calcular la rentabilidad de los activos del portafolio, tanto de la muestra 1 (ver anexo 1), como de la muestra 2 (ver anexo 2).

Para el estudio, se tomaron los precios del S&P 500, porque es uno de los indicadores de acciones con mayor acogida por los inversionistas como benchmark y por las cifras que representan a nivel de mercado en inversiones, tiene las 500 compañías de Estados Unidos con la más alta capitalización y líderes por sector, según cifras en su página web, en su estudio anual de activos, S&P Dow Jones Índices LLC (2021):

estiman que US\$ 15.6 billones están invertidos en referencia al índice y los activos vinculados a él abarcan aproximadamente US\$ 7.1 billones de ese total (al 31 de diciembre de 2021)” y representan “aproximadamente 80% de la capitalización de la renta variable de EE. UU. y más de 50% del mercado mundial de valores.

El modelo se va a desarrollar con un enfoque práctico, bajo el lenguaje de código abierto Python, que nos permite llevar a cabo el modelo de optimización de portafolios con grandes volúmenes de data. La data se procesará con la herramienta Colaboratory, conocida como Colab, una máquina virtual de Google Research, que cuenta con un servicio en línea para que cualquier usuario de Google pueda ejecutar y escribir códigos de Python sin necesidad de instalar un software en su computadora y sin pago por su uso, pero que es una potente herramienta para realizar machine learnig y análisis de data.

Uno de los puntos importantes del trabajo es que se va a comparar el desempeño de la optimización de portafolios de HRP con el de Media-Varianza; esta comparación y análisis se llevara a cabo con

métricas de desempeño, un análisis de la rentabilidad esperada, desviación estándar como aproximación de la volatilidad del activo, ratio de Sharpe y máximo drawdown.

### 3.2. Modelo de Paridad de Riesgo Jerárquico

El modelo se desarrolla en tres pasos, los cuales son explicados a continuación:

#### Paso 1. Agrupación en árboles:

Teniendo en cuenta el modelo de De Prado (2016), en este primer paso se construye el portafolio con los diferentes activos y se le otorga una estructura jerárquica de clústeres a través del algoritmo, cuya jerarquía va de arriba hacia abajo, que se observa como un gráfico de árbol. Siguiendo con De Prado (2016),

primero se calcula la matriz de correlación, que se define por las entradas:

#### **Ecuación 4.** *Matriz de correlación*

$$\rho = \{\rho_{i,j}\} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Donde  $\rho_{i,j} = \rho[X_i, X_j]$ . calculada la matriz de correlación, definimos una nueva matriz de correlación-distancia ( $D$ ), de la siguiente manera:

#### **Ecuación 5.** *Matriz de correlación-distancia ( $D$ )*

$$D(X_i, X_j) = \sqrt{0.5(1 - \rho_{i,j})}$$

En el segundo paso, se calcula la distancia euclidiana, entre los vectores columna por pares, de la matriz  $D$ , generando una matriz de distancia aumentada  $\bar{D}$ :

#### **Ecuación 6.** *Matriz distancia aumentada $\bar{D}$ .*

$$\bar{D}(i, j) = \sqrt{\sum_{k=1}^N [D(k, i) - D(k, j)]^2}$$

En el tercer paso, calculada la matriz  $\bar{D}$ , con el primer par de activos que seleccionamos ( $i^*$ ,  $j^*$ ) formamos un clúster, si definimos el conjunto de clústeres como U, entonces tenemos que el primer clúster ( $i^*$ ,  $j^*$ ) se calcula como:

**Ecuación 7. Conjunto de clúster**

$$U[1] = \arg_{\{i,j\}} \text{mín } \bar{D}(i,j)$$

En el cuarto paso, se necesita una matriz de vinculo o enlace, que se denomina en el estudio de clústeres jerárquicos como “linkaje criterion” o criterio de vinculación, esto con el fin de actualizar la matriz de distancia  $\bar{D}$ , y el nuevo cluster U[1] y que se puedan definir las distancias con los otros activos individuales aun no clusterizados; hay que tener presente que se agrupan según la menor distancia entre ellos, por eso De Prado (2016) denomina esta etapa como el algoritmo del punto más cercano, la distancia del clúster recién formado y los otros activos no agrupados, se puede calcular de la siguiente manera:

**Ecuación 8. Algoritmo de punto más cercano**

$$\bar{D}(i, U[1]) = \text{mín}(\bar{D}(i, i^*), \bar{D}(i, j^*))$$

Para finalizar, el algoritmo va a combinar y agrupar recursivamente los activos que no estaban agrupados, y de esta forma clústeriza todos los activos del portafolio, y actualizando la matriz de distancia, haciendo este proceso de clústerizar todos los activos de forma iterativa hasta que quede un último clúster, y el algoritmo de agrupación se detiene.

Paso 2: Cuasi-Diagonalización,

Este paso, como lo especifica De Prado (2016), se trata de reorganizar las filas y columnas de la matriz de covarianza, de forma que los valores más altos se encuentren a lo largo de la diagonal,

y las covarianzas más bajas estén por fuera de la diagonal. La utilidad de este paso es que los activos parecidos se colocan juntos, y los que no tienen similitudes están separados.

### Paso 3. Bisección Recursiva:

En el último paso se determinan las ponderaciones óptimas de los activos del portafolio,

A continuación, los pasos de esta última etapa:

- a) Se otorgan las ponderaciones de los activos del portafolio:

#### **Ecuación 9. Ponderación de activos**

$$w_i = 1, \forall i = 1, \dots, N$$

- b) Comenzando desde el clúster final, de arriba hacia abajo para dividir las asignaciones entre subconjuntos, los clústeres se dividen en 2 subgrupos  $V_1$  y  $V_2$  cruzando el árbol jerárquico, en cada subclúster se calcula la varianza:

#### **Ecuación 10. Varianza de los subclúster**

$$V_i = w^T V w, \quad i = 1, 2$$

Donde:

$$w = \frac{\text{diag}(V^{-1})}{\text{trace}(\text{dia}(V^{-1}))}$$

En este último paso, Burggraf (2021) describe que es así como el modelo HRP aprovecha la cuasi-diagonalización de la matriz de covarianza, en la que las asignaciones de varianza inversa son las más óptimas.

- c) Se calcula un factor de ponderación para  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de la nueva matriz de covarianzas:

**Ecuación 11. Factor de ponderación**

$$\alpha_1 = 1 - \frac{V_1}{V_1 + V_2}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$$

- d) Con base en los 2 ponderadores de la ecuación anterior, las ponderaciones de los activos del portafolio se actualizan para cada subclúster, lo que permite que los activos que pertenecen a determinado clúster compitan por asignación de capital, solo en su clúster, y no en la canasta global del portafolio.

Las ponderaciones  $w_1$  y  $w_2$  se actualizan de la siguiente manera:

$$w_1 = \alpha_1 * w_1$$

$$w_2 = \alpha_2 * w_2$$

- e) Para terminar, se hace una iteración en cada subclúster, desde el punto b hasta el d, para garantizar que a cada activo se le asigne una ponderación en el portafolio.

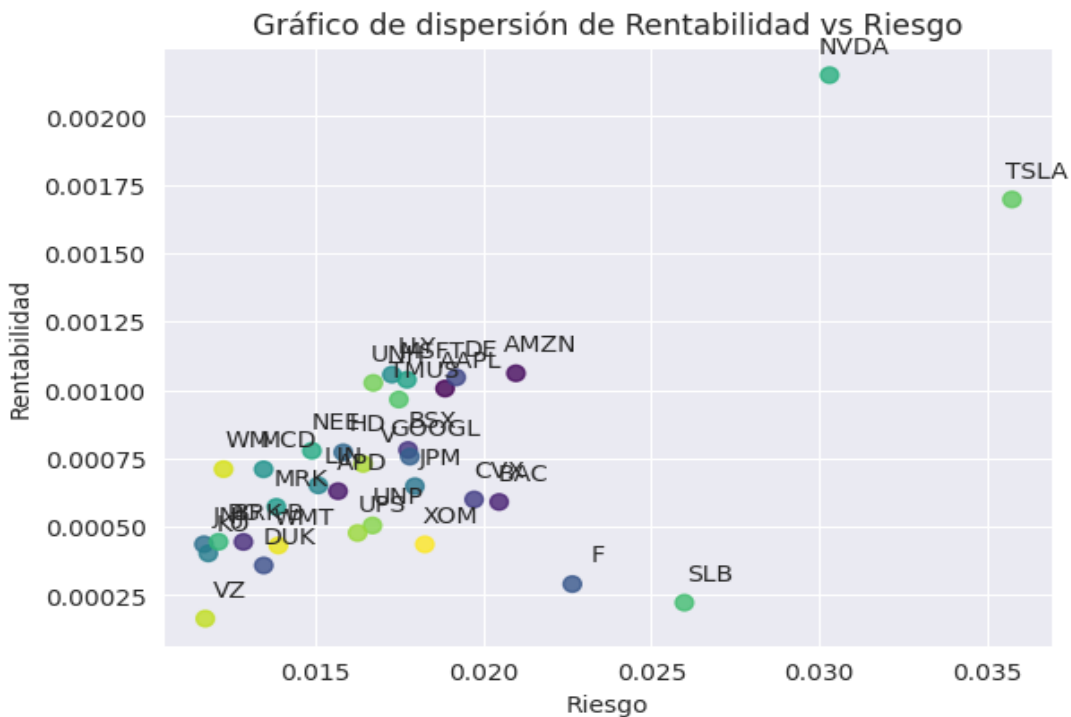
#### **4. Resultados**

En este apartado se muestran los resultados de la serie de datos de los retornos en dos muestras, una contiene los datos de 34 acciones del S&P500 y la segunda contiene los datos, no solo de las acciones del S&P500, sino que se le adicionan otra clases o tipos de activos y se confrontan los datos del modelo HRP contra MV, en total la segunda muestra tiene 43 activos. Se presentan los resultados de los dos modelos y los resultados que genera el tener un portafolio conformado solo por acciones, frente a uno con diferente clase de activos.

#### 4.1. Resultados modelo HRP frente MV, muestra 1

Es importante revisar dentro de la muestra cómo ha sido el comportamiento de los retornos, versus la desviación estándar o volatilidad, ya que nos dan una muestra a priori del comportamiento de la data. En la gráfica 1, tenemos la rentabilidad y riesgo por activo, y dos compañías que destacan por sus mayores retornos promedios, son las compañías Nvidia y Tesla, y por sus menores retornos promedios, Verizon, Schlumberger y Ford. Es claro que aquellas compañías con mayores retornos como Tesla y Nvidia presentan la más alta desviación, y la compañía Verizon presenta la menor desviación; estos hechos son un resultado conforme a las teorías financieras, donde aquellas compañías con mayor volatilidad deben compensar ese mayor riesgo, con mejores retornos. Destaca que las compañías con mayor retorno promedio son compañías del sector de tecnología, que, en los dos últimos años por la pandemia, tuvieron un crecimiento importante en sus precios.

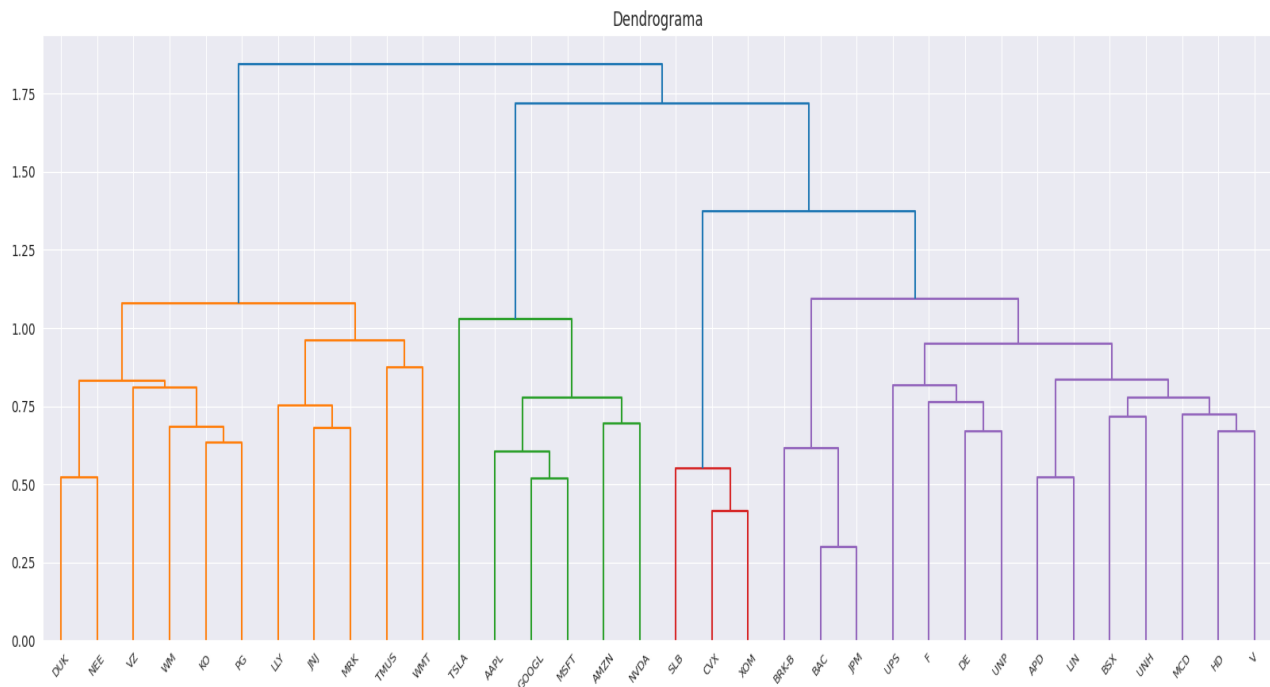
**Gráfica 1.** Gráfico de dispersión, rentabilidad versus riesgo muestra 1



Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

No obstante, hay dos compañías como Schlumberger y Ford que, aunque tienen rendimientos muy bajos, presentan altas desviaciones, es decir, que son compañías que no compensan en rentabilidad las altas desviaciones, representadas como una mayor volatilidad.

**Gráfica 2.** Dendrograma, activos clusterizados

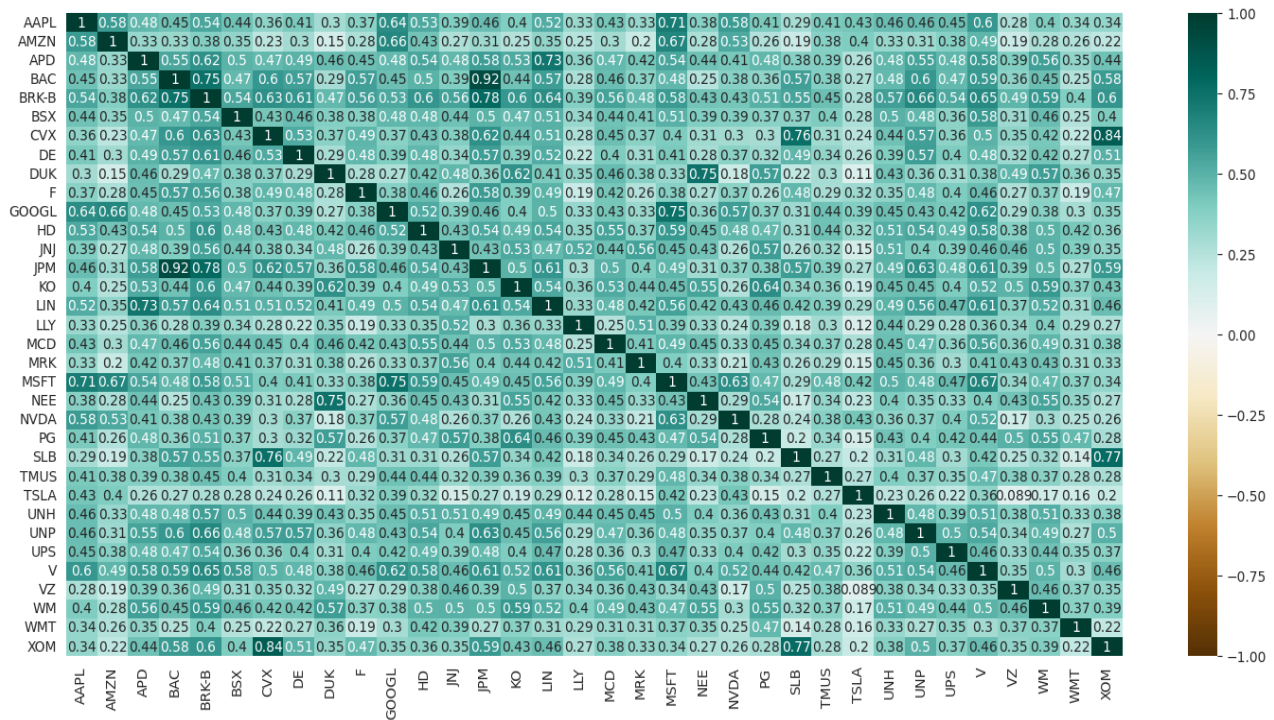


Fuente: elaboración propia, con datos de [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com) (2023).

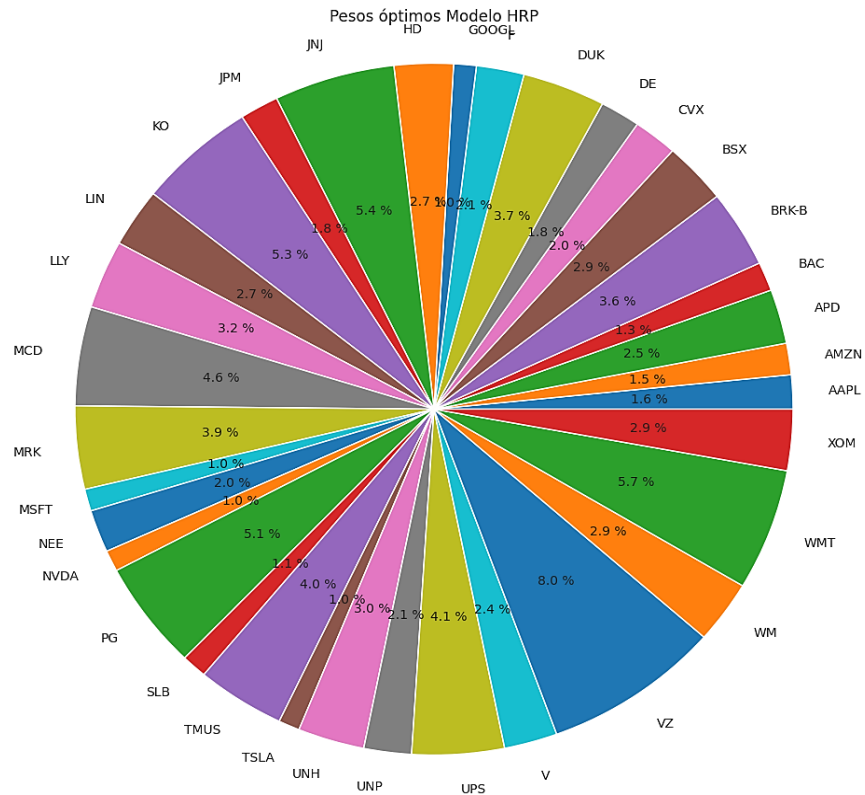
Después de ejecutar los códigos, se formaron clústeres por sectores muy cercanos; en el dendrograma, las líneas que conectan empresas con líneas naranjas se han subdivido en varios clústeres de sectores como salud, servicios públicos, industriales y productos básicos de consumo o consumo defensivo, estas participan en la disputa por asignación de capital, son compañías caracterizadas con flujos de capital muy estables por ser servicios y productos en algunos casos de primera necesidad para el hogar y las industrias. En el dendrograma, las líneas que conectan empresas con líneas verdes participan en la disputa por asignación de capital: Tesla, Apple, Google, Microsoft, Amazon y Nvidia. Empresas más que todo del sector de tecnología y comunicación. En

el dendograma, las líneas que conectan empresas con líneas rojas participan en la disputa por asignación de capital: Schlumberger, Exxon Mobil y Chevron, empresas del sector de energía. En el dendograma, las líneas que conectan empresas con líneas moradas se han subdivido en varios clústeres de sectores como servicios financieros en una subdivisión, en las otras subdivisiones resultó ser bastante variada la asignación, teniendo activos como consumo discrecional o consumo cíclico, industriales y materiales, este último conector es el que tuvo más sectores que participan en la disputa por asignación de capital. A continuación, la correlación presente entre los activos que conforman el portafolio de la muestra:

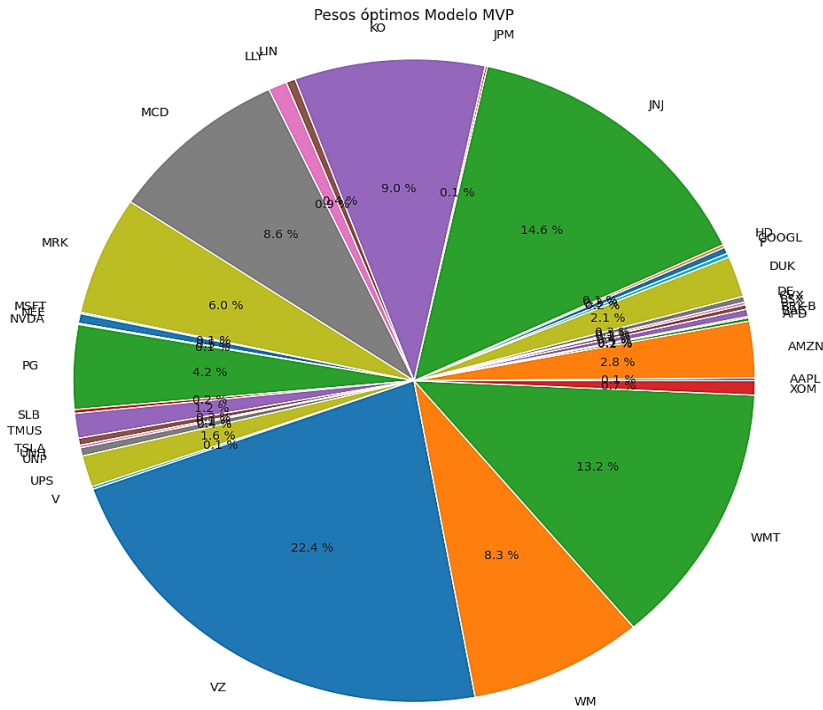
**Gráfica 3. Correlación entre activos del portafolio**  
Correlación entre los activos



**Gráfica 4. Pesos óptimos modelo HRP**



**Gráfica 5. Pesos óptimos modelo MVP**



En el siguiente cuadro (tabla 1), de los 34 activos, sumando los porcentajes de las 10 primeras acciones con más participación, se tiene que en el modelo HRP, las 10 primeras acciones concentran cerca del 49% del capital, pero en el modelo MV, el portafolio concentro el 91% del capital en las 10 primeras acciones.

**Tabla 1.** *Ponderación de activos, portafolios óptimos 1.*

#	Activo	HRP	Activo	MV
1	VZ	8,0905%	VZ	22,3890%
2	WMT	5,7439%	JNJ	14,6046%
3	PG	5,4484%	WMT	13,1649%
4	JNJ	5,3723%	KO	9,0191%
5	MCD	4,4191%	MCD	8,6226%
6	MRK	4,3448%	WM	8,2503%
7	UPS	4,1998%	MRK	5,9667%
8	DUK	4,0473%	PG	4,2321%
9	TMUS	4,0301%	AMZN	2,8282%
10	NEE	3,2061%	DUK	2,0502%
	<b>Total, sum%</b>	<b>48,9025%</b>	<b>Total, sum%</b>	<b>91,1276%</b>

Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

Dentro de los indicadores de desempeño de los dos modelos (tabla 2), el modelo HRP muestra mejor desempeño en indicadores como: retorno esperado, indicador de Sharpe, pero en los indicadores de volatilidad y máxima caída se comporta mejor el modelo de MV; pero este resultado obedece a que el modelo se concentra en los activos más estables y que presentan menor volatilidad, como Verizon, Walmart y Johnson & Johnson, estas dos últimas en sectores de productos de consumo básicos o consumo defensivo, caracterizados porque aunque no son acciones que generen un gran retorno, sí generan mucha estabilidad, ya que incluso en tiempos donde la economía no marcha bien, los productos de este sector son de primera necesidad y no presentan sustitutos, todo lo contrario, se prioriza en comprar; por lo tanto, son compañías que tienen flujos de ingresos muy estables.

**Tabla 2.** *Indicadores de desempeño muestra 1.*

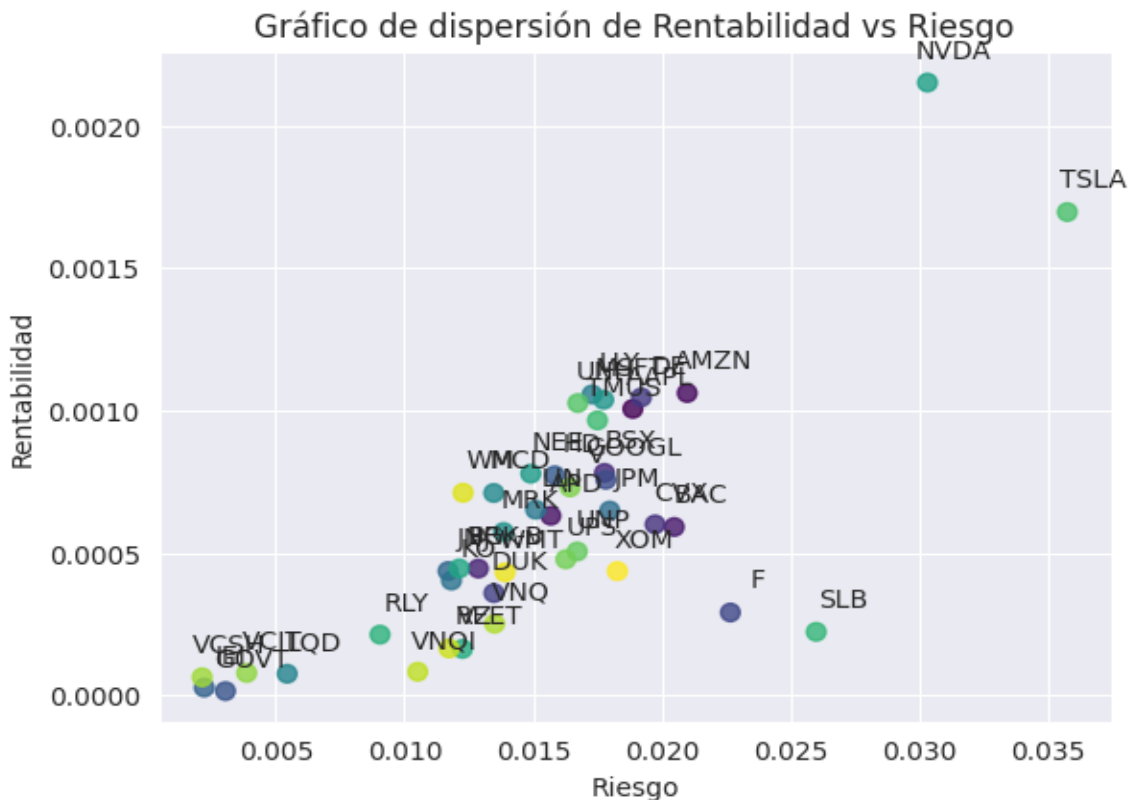
Modelo	Retorno Esperado	Indicador de volatilidad	Indicador de Sharpe	Max. drawdown
HRP	0,06225	0,01009	0,06168	-0,28484
MV	0,04702	0,00901	0,05218	-0,23350

Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

#### 4.2. Resultados modelo HRP frente MV, muestra 2

Para esta muestra se tomaron datos adicionales a las acciones, como ETF's que buscan exposición a bonos del tesoro en diferentes partes de la curva, bonos corporativos, fondo de capital y bienes raíces; estos son activos que presentan una menor volatilidad que el mercado accionario y con rendimientos más estables, pero también de menor rendimiento. Y en la siguiente gráfica están concentrados en la parte inferior de la zona izquierda

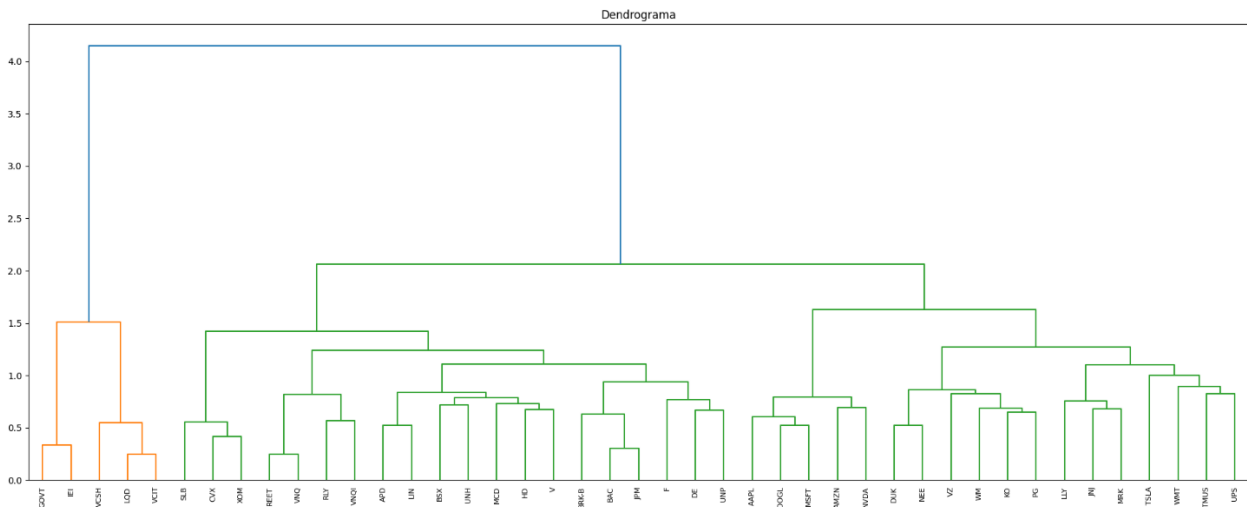
**Gráfica 6.** *Gráfico de dispersión, rentabilidad versus riesgo muestra 2*



Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

En la gráfica anterior, precisamente los activos con menor desviación, que pueden presentar menor volatilidad, son los ETF de bonos del tesoro y los bonos corporativos que invierten en compañías con grado de inversión. Las acciones como Nvidia y Tesla siguen teniendo la mayor desviación. Esto muestra que aquellas compañías con mayor retorno como Nvidia y Tesla son precisamente aquellas que también presentaron una mayor desviación de toda muestra de estudio, pero aquellas con menor retorno son los activos de renta fija, como los bonos del tesoro y los bonos corporativos. Estos resultados no son nada sorprendentes, porque precisamente eso es lo que se espera en la teoría financiera, que aquellos activos que tienen mayor riesgo sean capaces de compensar con una mayor rentabilidad, pues no tendría ningún sentido económico invertir en activos con alto riesgo sino ofrecen una compensación por ello.

**Gráfica 7. Dendrograma, activos clusterizados.**

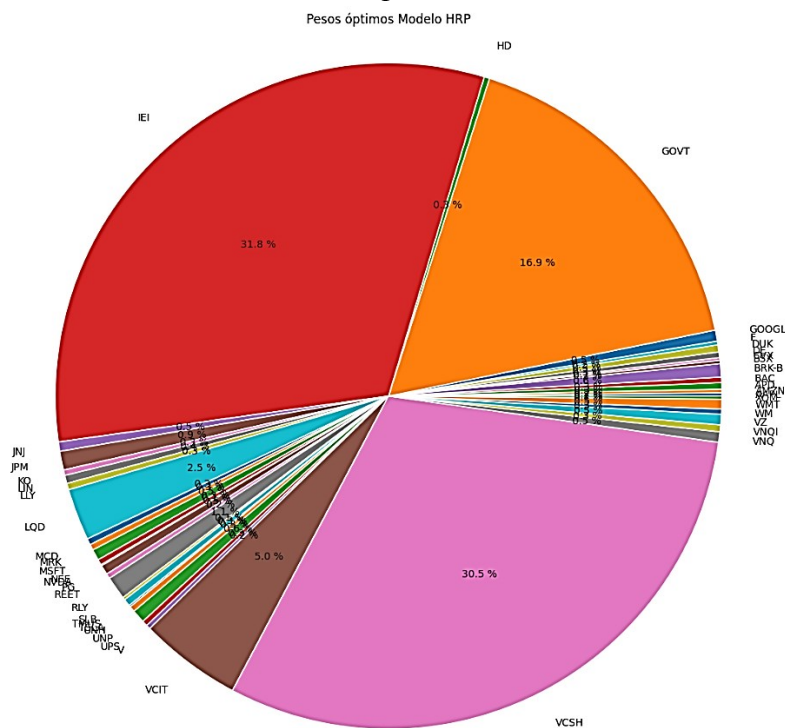


Fuente: elaboración propia, con datos de [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com) (2023).

En el dendrograma, los activos que contienen ETF's de renta fija con bonos del tesoro y bonos corporativos fueron separados en una única línea, y el resto de asignación de capital fue ponderado en otras subdivisiones donde una ramificación tiene los activos de capital junto con los activos de

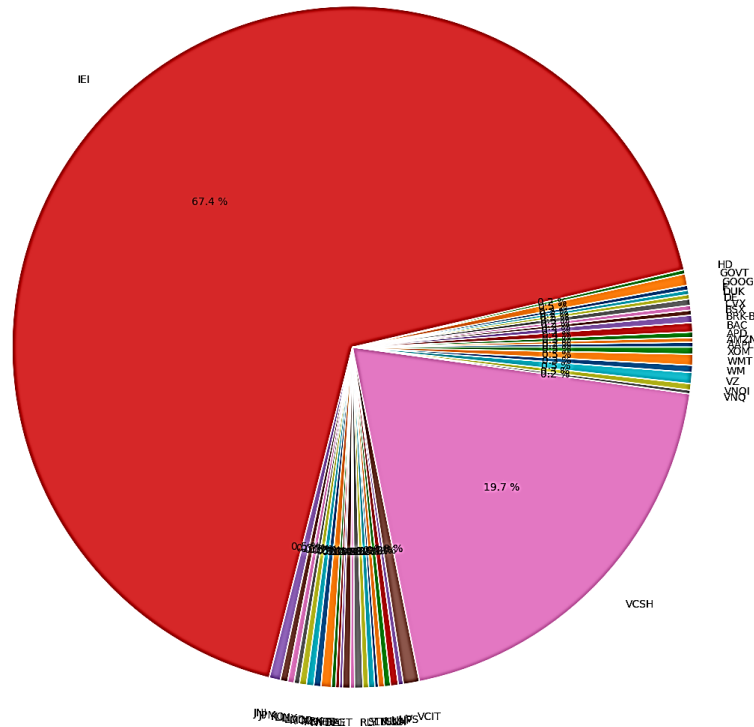
ETF's de bienes raíces; en cuanto a las acciones siguen conservando una estructura de asignación muy parecida a la muestra uno, donde encontramos clústeres de financieras, tecnológicas y con compañías de flujos más estables como servicios públicos y bienes básicos de consumo. A pesar de que la estructura nos genera un dendograma que clústeriza la mayor parte de los activos, no quiere decir que se otorgue una participación importante en la ponderación de capital, eso lo podemos visualizar en las gráficas siguientes, donde tenemos la gráfica de pastel y vemos que la asignación fue muy alta para aquellos activos que tienen exposición a renta fija, esto sucedió en los dos modelos, tanto en el HRP como en mayor grado en el MV.

**Gráfica 8. Pesos óptimos modelo HRP**



Fuente: elaboración propia, con datos de [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com) (2023).

**Gráfica 9. Pesos óptimos modelo MVP**  
Pesos óptimos Modelo MVP



Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

En esta muestra 2, Tenemos 43 activos, pero los 10 activos (tabla 3) por modelo concentran el 90% de la ponderación de activos del portafolio, y si los reducimos a 3, vemos que en modelo HRP, estos representan casi el 80% y en el modelo MV representan cerca del 88%. Los dos modelos tienen en común que se concentraron en activos de renta fija principalmente en dos, (IEI y VCSH), que son ETF's, el primero replica en su orden portafolios de bonos del tesoro de mediano plazo con una duración entre 3 y 7 años, y el segundo con exposición de bonos corporativos de 1 a 5 años, incluye títulos de grado de inversión, de tasa fija,

**Tabla 3.** *Ponderación de activos, portafolios óptimos 2*

<b>Activo</b>	<b>HRP</b>	<b>Activo</b>	<b>MVP</b>
<b>IEI</b>	<b>31,83%</b>	<b>IEI</b>	<b>67,42%</b>
<b>VCSH</b>	<b>30,54%</b>	<b>VCSH</b>	<b>19,66%</b>
<b>GOVT</b>	<b>16,93%</b>	<b>VCIT</b>	<b>0,76%</b>
<b>VCIT</b>	<b>4,96%</b>	<b>GOVT</b>	<b>0,55%</b>
<b>LQD</b>	<b>2,51%</b>	<b>JNJ</b>	<b>0,53%</b>
<b>RLY</b>	<b>1,12%</b>	<b>VZ</b>	<b>0,52%</b>
<b>JPM</b>	<b>0,91%</b>	<b>WMT</b>	<b>0,52%</b>
<b>BRK-B</b>	<b>0,65%</b>	<b>MRK</b>	<b>0,49%</b>
<b>UNP</b>	<b>0,64%</b>	<b>BAC</b>	<b>0,44%</b>
<b>MSFT</b>	<b>0,53%</b>	<b>RLY</b>	<b>0,39%</b>
<b>Total</b>	<b>90,63%</b>	<b>Total</b>	<b>91,27%</b>

Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

Para esta muestra 2, el modelo HRP tuvo una pequeña diferencia con un retorno esperado mayor, pero con niveles de volatilidad, índice de Sharpe y máxima caída con peor desempeño (tabla 4); es decir, que en esta muestra 2 pese a que se tiene un nivel de concentración más alto, los indicadores se vieron beneficiados en cuanto a tener una menor volatilidad, una máxima caída menor y un índice de Sharpe más alto; es decir, que por tener un portafolio concentrado en activos más conservadores, se vio favorecido. Pero a la luz de los resultados buscados en los dos modelos para diversificar, en la muestra 2, no son buenas medidas, por su alta concentración, salvo para quien busca un portafolio conservador.

**Tabla 4.** *Indicadores de desempeño muestra 2.*

	<b>Retorno esperado</b>	<b>Volatilidad</b>	<b>índice de Sharpe</b>	<b>Máxima caída</b>
<b>HRP</b>	0,0001120	0,0023580	0,0475390	-0,1239400
<b>MV</b>	0,0001000	0,0020530	0,0486600	-0,1177470

Fuente: elaboración propia, con datos de finance.yahoo.com (2023).

## 5. Conclusiones y Recomendaciones

En el presente trabajo se conformó un portafolio de inversión con activos de acciones del S&P500 y ETF's de renta fija e inmobiliarios, principalmente del mercado estadounidense; con una visión de crear un portafolio diversificado y muestras que permitan analizar y observar la ponderación por activo según cada modelo, para lo cual se utilizaron dos modelos y dos muestras o portafolios diferentes, con el fin de asignar ponderaciones al portafolio, y comparar los resultados con algunos indicadores de desempeño elegidos.

En cuanto a los modelos elegidos, se puede concluir lo siguiente:

- El modelo HRP ha logrado un excelente ajuste en la muestra uno, donde incorpora solo acciones, pues logra una gran diversificación, en cuanto a los activos seleccionados, pues de 34 acciones de la muestra, en las 10 acciones con mayor ponderación, solo concentra el 49% del capital y si lo reducimos a las 5 primeras acciones, no concentra más del 30%, en sectores de comunicaciones, consumo básico, salud, industrial, servicios públicos; y en ninguna de las principales acciones llega a concentrar más del 9% de ponderación.
- En el modelo de MV no llega a suceder lo mismo que en HRP, pues MV en la muestra 1 de un portafolio de acciones, en las 10 primeras acciones con mayor ponderación logra concentrar cerca del 91% del portafolio, e incluso en los 3 primeros con mayor ponderación llegan a sumar cerca del 50% del portafolio; siendo así un modelo que pierde estabilidad en el sentido de la diversificación, lo que precisamente busca para reducir el riesgo.
- Vale la pena destacar que en el modelo MV, en las 3 primeras acciones con mayor ponderación, donde suma el 50% de asignación del portafolio, son compañías como VZ, JNJ y WMT, que pertenecen a sectores de flujos contantes, y que, en momentos de estrés

financieros como las crisis, siguen con buena demanda, pues son productos básicos para el consumidor, tales como cuidado de la salud, productos de consumo básico y las comunicaciones. Adicional, son las compañías con menor desviación estándar y que presentan la menor dispersión de los retornos, o menor volatilidad. Se puede agregar que los dos modelos no ponderaron significativamente a compañías del sector financiero.

- En cuanto a los indicadores de desempeño en la muestra 1, el retorno esperado fue mejor en el modelo HRP con 0.062, versus un 0.047 de MV, eso sí, el modelo HRP tuvo mayor volatilidad, pero su indicador de Sharpe que mide el retorno ajustado al riesgo, es mayor en HRP con 0.010, para este medidor, es favorable la cifra más alta, pues precisamente nos brinda un mayor retorno por el riesgo asumido, por eso a pesar de que tenemos una volatilidad más alta, se recibe un retorno esperado mayor. Esta visión de una mayor volatilidad, donde las oscilaciones pueden ser mayores e incluso las caídas más altas, se ven reflejadas en el indicador de máximo drawdown, pues en este caso en el modelo HRP, llega a estar en -0,2848 y en MV -0,2335, lo cual deja ver que la caída en HRP es mayor; pero con los otros indicadores, vemos cómo esta volatilidad se compensa con un mayor retorno.
- Los resultados en la primera muestra llegan a ser muy favorables para el modelo HRP en cuanto al ajuste de portafolio, en el sentido de que logra una mayor diversificación de los activos en sus ponderaciones y no se concentra en algún activo en particular, siendo congruente con la teoría financiera de logra obtener un portafolio diversificado para disminuir el riesgo no sistemático o diversificable y obtener mejoras en su rendimiento, esto lo logra respaldar los indicadores de desempeño elegidos.
- En cuanto a la muestra 2, donde al portafolio de 34 acciones le adicionamos 9 ETF's con

exposición a renta fija con bonos del tesoro de Estados Unidos de mediano y largo plazo, con bonos corporativos con grado de inversión y de una alta calidad crediticia, junto con ETF's del mercado inmobiliario; la composición del portafolio que pondera los activos en los dos modelos no es muy buena, pues, los dos llegan a concentrar más del 87% del portafolio en 5 activos, principalmente en dos ETF como IEI y VCSH que tienen exposición en su orden en bonos del tesoro de Estados Unidos con una duración entre 3 y 7 años, y el segundo en bonos corporativos de 1 a 5 años; es decir, que se concentra en los activos de menor volatilidad y más seguros, lo cual no deja los indicadores de desempeño con un muy buen resultado, ya que los dos modelos priorizaron en concentrarse en renta fija y dejar los activos de renta variable con posiciones casi cercanas a cero.

Para próximos trabajos sería interesante que el modelo HRP pueda ajustarse a mercados en Latinoamérica, en países donde la bolsa de valores tenga un número significativo de emisores con sus acciones listadas en bolsa, y sectores representativos para obtener clusterizaciones y no muestras concentradas en pocos sectores de la economía, como ocurre en algunos países donde se tienen pocas compañías de acciones, y poco a poco han sido deslistadas de la bolsa de valores.

Sería recomendable que en el proceso de selección de activos, si son bolsas de valores que contengan un número importante de acciones, más de 100, se pueda generar un código en Python que depure o seleccione las de mayor desempeño y reduzca la muestra entre 30 - 50 activos, donde la diversificación pueda generar un beneficio y no se pierdan las bondades de esta, ni tampoco la clusterización en su forma visual.

## Referencias

- Aragón Urrego, D. (2021). Paridad de riesgo jerárquico: aproximación al método y aplicación para el mercado estadounidense. *ODEON-Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas*, (21).
- Best, M. J., & Grauer, R. R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management science*, 37(8), 980-989.
- Brinson, G. P., Hood, L. R., & Beebower, G. L. (1986). Determinants of portfolio performance. *Financial Analysts Journal*, 42(4), 39-44.
- Burggraf, T. (2021). Beyond risk parity—A machine learning-based hierarchical risk parity approach on cryptocurrencies. *Finance Research Letters*, 38, 101523.
- De Prado, M. L. (2016). Building diversified portfolios that outperform out of sample. *The Journal of Portfolio Management*, 42(4), 59-69.
- Farrell, J. L. (1974). Analyzing covariation of returns to determine homogeneous stock groupings. *The Journal of Business*, 47(2), 186-207.
- Finance, Y. (2023). Yahoo Finance. *Recuperado desde finance.yahoo.com*  
<https://finance.yahoo.com/recent-quotes>
- Jain, A. K., Murty, M. N., & Flynn, P. J. (1999). Data clustering: a review. ACM computing surveys (CSUR), *ACM Computing Surveys*, 31(3), 264-323.
- Mantegna, R. (1999): “Hierarchical structure in financial markets,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 11(1), 193–197

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

<https://doi.org/10.2307/2975974>

Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h>

Mcilhany, K. and Wiggins, S. (2018) High Dimensional Cluster Analysis Using Path Lengths. *Journal of Data Analysis and Information Processing*, 6, 93-125. doi: 10.4236/jdaip.2018.63007.

Michaud, R. O. (1989) The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2387669> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2387669>

Papenbrock, J. (2011). Asset clusters and asset networks in financial risk management and portfolio optimization (Doctoral dissertation, Dissertation, Karlsruhe, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2011).

Ríos, L. S. F. (2008). Evolución de la Teoría Financiera en el Siglo XX, *Ecos de economía*, 12(27), 145-168

S&P Dow Jones Indices LLC (2021). S&P Dow Jones Indices Annual Survey of Assets As of December 31, 2021. Extraído en: <https://www.spglobal.com/spdji/en/documents/index-news-and-announcements/spdji-indexed-asset-survey-2021.pdf>

S&P Dow Jones Indices LLC (2023). La brújula del mercado de alta capitalización de EE. UU.

Extraído en: <https://www.spglobal.com/spdji/es/documents/additional-material/sp-500-brochure-es.pdf>

Statman, M. (1987). How many stocks make a diversified portfolio? *Journal of financial and quantitative analysis*, 22(3), 353-363.

## Anexos

### Anexo 1. Descripción de activos elegidos para el modelo HRP y MV, muestra 1.

Símbolo	Sector	Descripción
<b>AAPL</b>	Tecnologías de la información	"Apple Inc. Diseña, fabrica y comercializa dispositivos de comunicación y medios de comunicación móviles, ordenadores personales y reproductores portátiles de música digital." ("Acciones Apple   Cotización NASDAQ:AAPL hoy - Investing.com")
<b>MSFT</b>	Tecnologías de la información	Microsoft Corporation. Empresa de tecnología. "La empresa desarrolla, otorga licencias y respalda una gama de productos de software, servicios y dispositivos." ("5 acciones tecnológicas que están alcanzando un máximo anual. - MSN")
<b>GOOGL</b>	Tecnologías de la información	Alphabet Inc. Empresa de tecnología que incluye segmentos de servicios de Google, Google Cloud y Otras.
<b>AMZN</b>	Consumo discrecional o consumo cíclico	Amazon.com, Inc. Ofrece productos y servicios a los clientes, a través de sus tiendas incluyen mercadería y contenido para reventa y productos ofrecidos por vendedores externos.
<b>NVDA</b>	Tecnologías de la información	"Nvidia Corporation se enfoca en gráficos de computadora personal (PC), unidad de procesamiento de gráficos (GPU) y también en inteligencia artificial (AI)." ("Acciones NVIDIA   Cotización NASDAQ:NVDA hoy - Investing.com")
<b>BRK.B</b>	Servicios financieros	Berkshire Hathaway Inc. Es una compañía de inversión y matriz que posee subsidiarias dedicadas a diversas actividades comerciales y de inversión.
<b>TSLA</b>	Consumo discrecional o consumo cíclico	Tesla, Inc. Diseña, desarrolla, fabrica y vende vehículos totalmente eléctricos y sistemas de almacenamiento de energía, además de instalar, operar y mantener productos de almacenamiento solar y de energía.
<b>V</b>	Tecnologías de la información	Visa Inc. Es una compañía global de tecnología de pagos. La Compañía conecta consumidores, comerciantes, instituciones financieras, empresas, socios estratégicos y entidades gubernamentales a través de tecnologías para pagos.
<b>UNH</b>	Cuidado de la salud	Unitedhealth Group Incorporated es una compañía diversificada de cuidado y beneficios para la salud.
<b>XOM</b>	Energía	Exxon Mobil Corp se dedica a negocios de energía: exploración, producción, transporte y venta de petróleo crudo y gas natural, y la fabricación, transporte y venta de productos derivados del petróleo. ("Las acciones de Wall Street se mezclan y los precios del oro ... - MSN").
<b>LLY</b>	Cuidado de la salud	Eli Lilly and Company se dedica al negocio de fabricación de medicamentos. La Compañía descubre, desarrolla, fabrica y comercializa productos en dos segmentos: Productos farmacéuticos para humanos y Productos de salud animal. ("Efecto inflacionario: cómo la inflación está afectando a las ... - MSN").
<b>JNJ</b>	Cuidado de la salud	Johnson & Johnson, es un holding que se dedica a la investigación, desarrollo, fabricación y venta de productos en el campo de la salud y el bienestar humanos. segmentos: consumidor, farmacéutico y dispositivos médicos.
<b>JPM</b>	Servicios financieros	Jpmorgan Chase & Co. Es un holding financiero. "La compañía se dedica a la banca de inversión y servicios financieros." ("El colapso de SVB: lo que significa para la economía y lo que ... - MSN").
<b>WMT</b>	Productos básicos de consumo	Walmart Inc. Participa en operaciones de ventas al por menor y al por mayor, opera almacenes de descuento y otras unidades en varios formatos en todo el mundo.

<b>PG</b>	Productos básicos de consumo	The Procter & Gamble Company se centra en el suministro de bienes de consumo envasados a consumidores: Belleza; Aseo Personal; Cuidado de la Salud; Telas y Cuidado del Hogar y Cuidado Femenino y Familiar y del Bebé. ("Navegando la inminente crisis del techo de la deuda de Estados ... - MSN").
<b>HD</b>	Consumo discrecional o consumo cíclico	The Home Depot, Inc. Es un minorista para el hogar, "Vende una variedad de materiales de construcción, productos de mejoras para el hogar y productos de césped y jardín, y ofrece diversos servicios." ("Hugh Hendry advierte sobre la creciente probabilidad de que los ... - MSN").
<b>CVX</b>	Energía	Chevron Corp, participa en operaciones integradas de energía y productos químicos. Principalmente en explorar, desarrollar, almacenar, transportar, comercializar y producir petróleo crudo y gas natural.
<b>MRK</b>	Cuidado de la salud	Merck & Co., Inc. es una compañía global de cuidado de la salud. La compañía ofrece soluciones de salud a través de sus medicamentos recetados, vacunas, terapias biológicas y productos de salud animal.
<b>KO</b>	Productos básicos de consumo	The Coca-Cola Company es una empresa de bebidas. Comercializa bebidas sin alcohol, principalmente bebidas gasificadas como aguas, aguas enriquecidas, jugos y bebidas con jugo, té y cafés, y bebidas energéticas, lácteas y deportivas.
<b>BAC</b>	Servicios financieros	Bank Of America Corporation es un holding bancario y una sociedad financiera de portafolios. Presta una amplia gama de servicios bancarios, inversiones, gestión de activos, servicios financieros y de gestión de riesgos.
<b>MCD</b>	Consumo discrecional o consumo cíclico	McDonald's Corporation opera y franquicia a los restaurantes McDonald's. Los restaurantes de la Compañía sirven un menú localmente relevante de alimentos.
<b>LIN</b>	Materiales	Linde Public Limited Company es una empresa de gases industriales y de ingeniería que opera a través de sus sucursales. La Empresa provee gases atmosféricos y gases de proceso.
<b>TMUS</b>	Servicios de comunicación	T-Mobile US, Inc. es un proveedor de servicios de comunicaciones móviles, incluidos voz, mensajería y datos. ("Las 5 acciones tecnológicas con mayor crecimiento de ingresos en ... - MSN").
<b>NEE</b>	Servicios públicos	Nextera Energy, Inc. La Empresa es una de las compañías eléctricas en América del Norte y, generador de energía renovable de viento y sol. Operadora de centros de generación, transmisión y distribución a clientes mayoristas y minoristas.
<b>UPS</b>	Industriales	United Parcel Service, Inc. Es una empresa de entrega de paquetes. La compañía es un proveedor de soluciones globales de gestión de la cadena de suministro.
<b>VZ</b>	Servicios de comunicación	Verizon Communications Inc. La Compañía, a través de sus subsidiarias, proporciona productos y servicios de comunicaciones, información y entretenimiento a consumidores, empresas y agencias gubernamentales.
<b>UNP</b>	Industriales	Union Pacific Corporation es una compañía operadora de ferrocarriles en los EE.UU. Conecta 23 estados en los dos tercios occidentales del país y mantiene horarios coordinados con otros transportistas ferroviarios para transportar carga.
<b>DE</b>	Industriales	"Deere & Company se dedica a la entrega de equipos agrícolas, de construcción y forestales." ("MSN").
<b>BSX</b>	Cuidado de la salud	"Boston Scientific Corporation es un desarrollador, fabricante y comercializador de dispositivos médicos que se utilizan en una variedad de especialidades médicas intervencionistas." ("Acciones Boston Scientific   Cotización NYSE:BSX hoy - Investing.com").
<b>DUK</b>	Servicios públicos	Duke Energy Corporation es una empresa de energía. La Empresa opera a través de tres segmentos: eléctricas e infraestructura, gas e infraestructura y renovables.
<b>WM</b>	Industriales	Waste Management, Inc. Es un proveedor de soluciones ambientales de gestión de residuos. Brinda servicios de recolección, reciclaje y eliminación de residuos.
<b>SLB</b>	Energía	Schlumberger N.V. es una compañía de servicios para yacimientos petrolíferos.

<b>APD</b>	Materiales	Air Products And Chemicals, Inc., es una empresa de gases industriales, proporciona gases atmosféricos y de procesos, metales, productos electrónicos, alimentos y bebidas. (“Operaciones Air Products And Chemicals - APD CFD - Capital.com”).
<b>F</b>	Consumo discrecional o consumo cíclico	Ford Motor Company es una compañía de automóviles. La Compañía diseña, fabrica, comercializa y presta servicios a una línea completa de vehículos comerciales y de pasajeros. (“Acciones Ford Motor   Cotización NYSE:F hoy - Investing.com”).

Fuente: elaboración propia, datos función cotizaciones Microsoft Corporation (2023).

### **Anexo 2.** Descripción de activos elegidos para el modelo HRP y MV, muestra 2.

<b>Símbolo</b>	<b>Tipo de activos donde invierte el ETF</b>	<b>Descripción</b>
<b>GOVT</b>	Bonos US	Es un índice con exposición a bonos del Tesoro de Estados Unidos con fechas de vencimiento de entre 1 y 30 años (“iShares U.S. Treasury Bond ETF   GOVT - BlackRock”).
<b>IEI</b>	Bonos US	Es un índice con exposición a Bonos del Tesoro de EE. UU. a mediano plazo. con un vencimiento entre tres y siete años.
<b>VCIT</b>	Bonos Corporativos	Es un índice con exposición de bonos corporativos de 5 a 10 años, incluye valores de grado de inversión, de tasa fija, emitidos por empresas industriales, de servicios públicos y financieras estadounidenses y no estadounidenses,
<b>LQD</b>	Bonos Corporativos	"Exposición a bonos corporativos denominados en dólares de EE.UU. con grado de inversión. (“iShares iBoxx \$ Investment Grade Corporate Bond ETF   LQD - BlackRock”).
<b>VCSH</b>	Bonos Corporativos	Es un índice con exposición de bonos corporativos de 1 a 5 años, incluye valores de grado de inversión, de tasa fija, emitidos por empresas industriales, de servicios públicos y financieras estadounidenses y no estadounidenses.
<b>RLY</b>	Fundo de capital	Brindan exposición valores internacionales: inmobiliarios, materias primas o recursos naturales que cotizan en bolsa y, empresas de infraestructura que cotizan en bolsa
<b>VNQI</b>	Bienes raíces	Índice con exposición en acciones inmobiliarias internacionales en mercados desarrollados y emergentes. El índice está compuesto por acciones de fondos de inversión en bienes raíces que cotizan en bolsa (conocidos como REIT) y ciertas compañías de desarrollo y administración de bienes raíces (REMD).
<b>REET</b>	Bienes raíces	Índice con exposición a fondos de inversión en bienes raíces ("REIT") que cotizan en bolsa en los mercados desarrollados y emergentes.
<b>VNQ</b>	Bienes raíces	Índice con exposición en acciones en bienes raíces (REIT), compañías que compran edificios de oficinas, hoteles y otros bienes inmuebles. Apropiado para contribuir a diversificar los riesgos de las acciones y los bonos de un portafolio.

Fuente: elaboración propia, datos función cotizaciones Microsoft Corporation (2023).

### **Anexo 3.** Enlace de programación de códigos de Python en Colab

<https://colab.research.google.com/drive/1F-mQkvSRJJa-aASiwJKIy0hhJIHEUXZj?usp=sharing>